LEÇONS

SUR

L'ÉLECTRICITÉ

ET LE

MAGNÉTISME.

TOME III.

INTRODUCTION MATHÉMATIQUE

A L'ÉLECTRODYNAMIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

DES INTÉGRALES CURVILIGNES (1).

§ 1. — Paramètres qui définissent la situation relative de deux éléments linéaires.

En étudiant l'Électrodynamique et l'Électromagnétisme, on fait constamment appel à un certain nombre de propositions de Géométrie analytique peu employées en dehors du domaine de ces sciences. Nous allons réunir ici les plus importantes parmi ces propositions.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires (2) d'un point M

(1) *Voir*, au sujet des intégrales curvilignes et des intégrales de surface, le Tome I du *Traité d'Analyse* de M. É. Picard. Dans ce bel Ouvrage, la théorie de ces intégrales est traitée avec de grands développements et par des méthodes souvent différentes de celles qui sont exposées ici.

(2) Dans tout ce qui va suivre, sauf indication contraire, il ne sera jamais fait usage de coordonnées non rectangulaires.

d'une courbe sur laquelle un sens de parcours a été choisi. Soit MM' un élément de cette courbe, issu du point M, et ayant pour longueur ds. Le point M' a pour coordonnées

$$x' = x + \frac{dx}{ds} ds,$$

$$y' = y + \frac{dy}{ds} ds,$$

$$z' = z + \frac{dz}{ds} ds.$$

Soit MT la tangente en M à la courbe considérée, dirigée dans le sens de parcours qui a été choisi sur la courbe. Cette demi-droite MT fait, avec les axes de coordonnées Ox, Oy, Oz, des angles α, β, γ et l'on sait que l'on a

$$(1) \qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

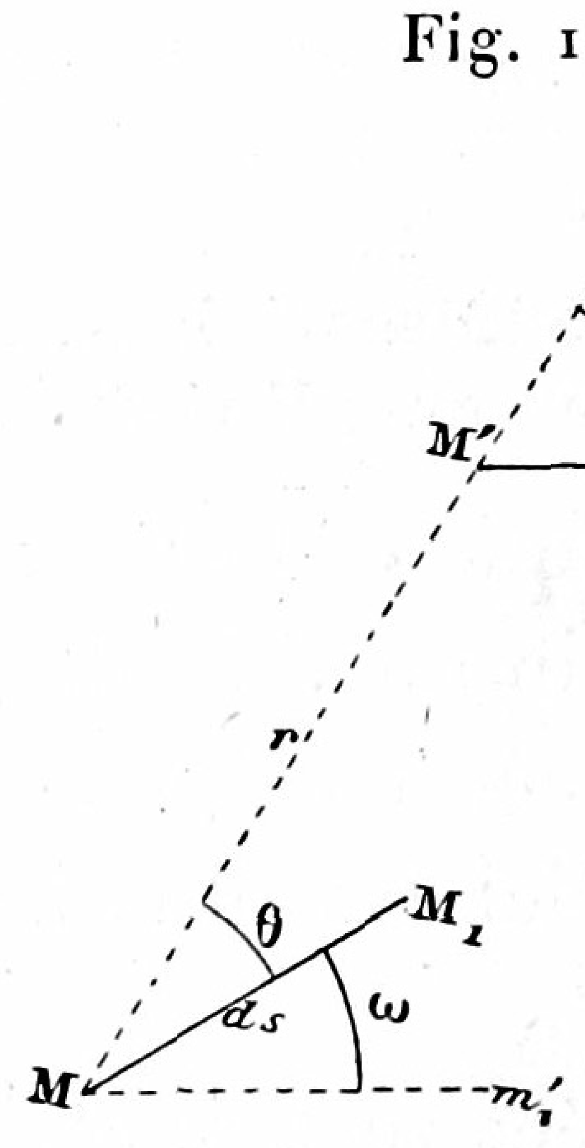
On a souvent à considérer le système formé dans l'espace par deux éléments linéaires

$$MM_1 = ds, \qquad M'M'_1 = ds'.$$

Un semblable système (*fig.* 1) est évidemment défini par les paramètres suivants :

1° Les longueurs ds, ds' des deux éléments ;

Fig. 1.



2° La distance r de l'origine M du premier à l'origine M' du second ;

3° Les trois angles θ, θ', ω, lesquels sont eux-mêmes définis de la manière suivante :

θ est le plus petit des angles que la direction MM_1 de l'élément

ds fait avec la direction MM' de la droite qui joint l'origine de l'élément ds à l'origine de l'élément ds';

θ' est le plus petit des angles que la direction $M'M'_1$ de l'élément ds' fait avec la même direction MM';

ω est le plus petit des deux angles que font entre elles les directions MM_1, $M'M'_1$.

La connaissance des paramètres r, ds, ds', θ, θ', ω ne définit pas *sans ambiguïté* le système des deux éléments MM_1, $M'M'_1$; l'élément MM_1 étant arbitrairement placé dans l'espace, la connaissance de ces paramètres définit, pour l'élément $M'M'_1$, deux positions possibles, symétriques par rapport au plan M_1MM'. Mais, dans un grand nombre de cas, la fonction du système des deux éléments que nous aurons à considérer aura la même valeur pour ces deux systèmes distincts. Dans ces cas, on pourra regarder le système de deux éléments comme complètement défini par la connaissance des paramètres

$$ds, \quad ds', \quad r, \quad \theta, \quad \theta', \quad \omega.$$

Les trois angles θ, θ', ω étant, par définition, compris entre o et π, sont définis par leurs cosinus. On peut donc dire, dans le cas dont nous venons de parler, qu'une fonction du système des deux éléments est définie lorsque l'on connaît les paramètres

$$ds, \quad ds', \quad r, \quad \cos\theta, \quad \cos\theta', \quad \cos\omega.$$

Ces paramètres, dont la considération revient à chaque instant dans les Chapitres suivants, sont susceptibles de plusieurs expressions qu'il est indispensable de connaître.

Soient x, y, z les coordonnées du point M, et x', y', z' les coordonnées du point M'. Nous aurons, en premier lieu,

$$r^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2. \tag{2}$$

Soient α, β, γ les angles de la direction MM_1 avec les axes Ox, Oy, Oz et α', β', γ' les angles de la direction $M'M'_1$ avec les mêmes axes. Nous aurons, d'après les égalités (1),

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$
$$\cos\alpha' = \frac{dx'}{ds'}, \qquad \cos\beta' = \frac{dy'}{ds'}, \qquad \cos\gamma' = \frac{dz'}{ds'}.$$

Or, on sait que

$$\cos\omega = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'.$$

On a donc

$$\cos\omega = \frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}. \tag{3}$$

La droite MM' fait avec Ox, Oy, Oz des angles λ, μ, ν, et l'on a

$$\cos\lambda = \frac{x'-x}{r}, \qquad \cos\mu = \frac{y'-y}{r}, \qquad \cos\nu = \frac{z'-z}{r}.$$

Or

$$\cos\theta = \cos\lambda\cos\alpha + \cos\mu\cos\beta + \cos\nu\cos\gamma,$$
$$\cos\theta' = \cos\lambda\cos\alpha' + \cos\mu\cos\beta' + \cos\nu\cos\gamma'.$$

On a donc

$$\left\{\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x'-x}{r}\frac{dx}{ds} + \frac{y'-y}{r}\frac{dy}{ds} + \frac{z'-z}{r}\frac{dz}{ds}, \\ \cos\theta' &= \frac{x'-x}{r}\frac{dx'}{ds'} + \frac{y'-y}{r}\frac{dy'}{ds'} + \frac{z'-z}{r}\frac{dz'}{ds'}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

L'égalité (2) donne

$$\frac{\partial r}{\partial x'} = -\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x'-x}{r},$$
$$\frac{\partial r}{\partial y'} = -\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y'-y}{r},$$
$$\frac{\partial r}{\partial z'} = -\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z'-z}{r},$$

relations moyennant lesquelles les égalités (4) deviennent

$$\cos\theta = -\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right),$$
$$\cos\theta' = \frac{\partial r}{\partial x'}\frac{dx'}{ds'} + \frac{\partial r}{\partial y'}\frac{dy'}{ds'} + \frac{\partial r}{\partial z'}\frac{dz'}{ds'}$$

ou bien

$$\cos\theta = -\frac{\partial r}{\partial s}, \qquad \cos\theta' = \frac{\partial r}{\partial s'}. \tag{5}$$

L'ensemble des égalités (4) et (5) donne

$$\frac{\partial r}{\partial s'} = \frac{x'-x}{r}\frac{dx'}{ds'} + \frac{y'-y}{r}\frac{dy'}{ds'} + \frac{z'-z}{r}\frac{dz'}{ds'}.$$

On déduit aisément de là

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} = &-\frac{1}{r}\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right)\\ &+\frac{1}{r}\left(\frac{x'-x}{r}\frac{dx}{ds} + \frac{y'-y}{r}\frac{dy}{ds} + \frac{z'-z}{r}\frac{dz}{ds}\right)\\ &\times\left(\frac{x'-x}{r}\frac{dx'}{ds'} + \frac{y'-y}{r}\frac{dy'}{ds'} + \frac{z'-z}{r}\frac{dz'}{ds'}\right).\end{aligned}$$

Si l'on tient compte des égalités (3) et (4), cette égalité devient

$$\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r} - \frac{\cos\omega}{r} = \frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} \tag{6}$$

ou bien, en tenant compte des égalités (5),

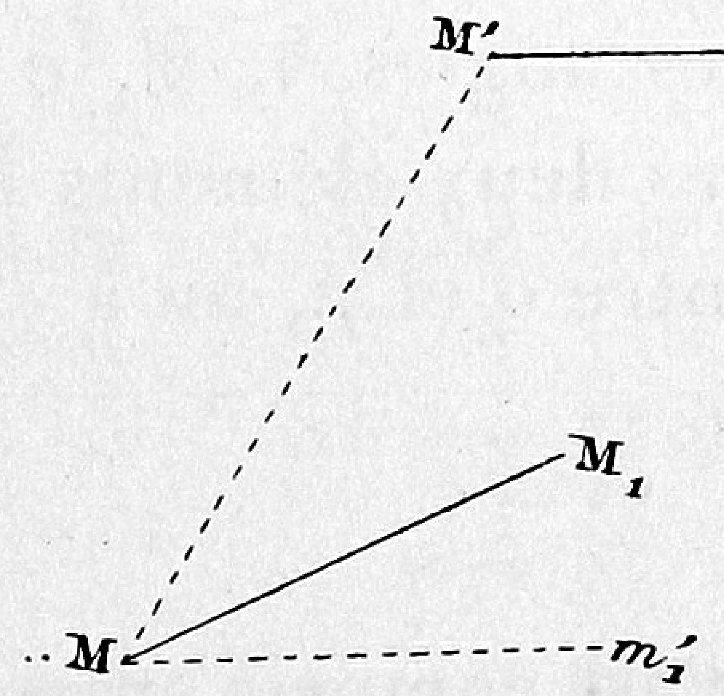
$$\cos\omega = -\left(\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right). \tag{7}$$

La droite indéfinie MM′ et la demi-droite MM_1 déterminent un premier demi-plan. La droite indéfinie MM′ et la demi-droite $M'M'_1$ déterminent un second demi-plan.

Soit ε le plus petit des dièdres formés par ces deux demi-plans. Cet angle étant, par définition, compris entre o et π, est déterminé par son cosinus.

Par M, menons une parallèle Mm'_1 à $M'M'_1$ (*fig.* 2). Dans le

Fig. 2.



trièdre $MM_1m'_1M'$, l'angle ε est le dièdre opposé à l'angle $M_1Mm'_1$ ou ω ; il est compris entre les faces $M'MM_1$, ou θ et $M'Mm'_1$, ou θ'. On a donc

$$\cos\omega = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon. \tag{8}$$

Cette égalité nous montre que, si une fonction dépendant de la position relative des deux éléments ds et ds' dépend, d'une manière uniforme, des paramètres

$$\theta, \quad \theta', \quad \omega,$$

elle dépend d'une manière uniforme des paramètres

$$\theta, \quad \theta', \quad \varepsilon$$

et réciproquement; d'ailleurs ces angles θ, θ', ω, ε sont tous compris entre o et π et, partant, définis d'une manière uniforme par leurs cosinus.

La comparaison des égalités (6) et (8) donne

$$(9) \qquad \sin\theta \sin\theta' \cos\varepsilon = -r\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}.$$

Les diverses égalités que nous venons d'écrire sont d'un continuel usage dans l'étude de l'Électrodynamique.

Nous avons vu que la connaissance des angles θ, θ', ω, ou bien, ce qui revient au même, des angles θ, θ', ε, ne définissait pas sans ambiguïté la direction relative des deux éléments MM_1, $M'M'_1$. Mais on peut trouver un système d'angles qui définisse sans ambiguïté la direction relative des deux éléments MM_1, $M'M'_1$.

Qu'on imagine un demi-plan, limité par la droite MM', et tournant de gauche à droite autour de cet axe. Que ce demi-plan coïncide d'abord avec le demi-plan $M'MM_1$. Pour venir coïncider avec le plan $MM'M'_1$, il devra tourner d'un angle e, compris entre o et 2π. La connaissance des angles θ, θ', e définit *sans ambiguïté* la direction relative des deux éléments MM_1, $M'M'_1$.

Si l'angle e est compris entre o et π, on a

$$\varepsilon = e.$$

Si, au contraire, l'angle e est compris entre π et 2π, on a

$$\varepsilon = 2\pi - e.$$

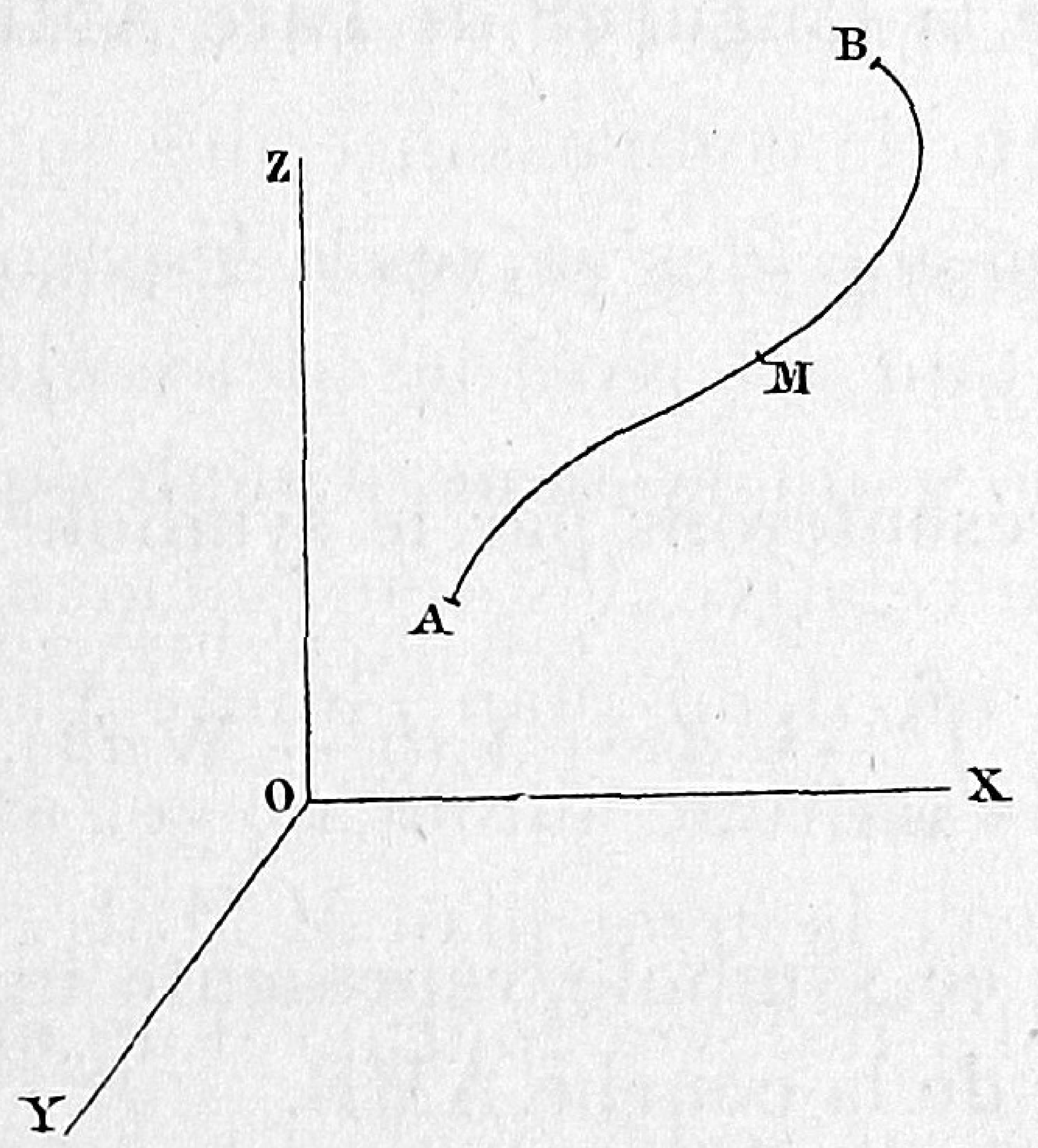
§ 2. — De l'intégrale curviligne. Définition. Théorème fondamental.

Soient U, V, W trois fonctions uniformes et continues des variables suivantes :

$$x, \quad y, \quad z,$$
$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds},$$
$$\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \ldots, \quad \ldots,$$
$$\ldots, \quad \ldots, \quad \frac{d^nz}{ds^n}.$$

Imaginons que x, y, z soient les coordonnées d'un point variable M d'une courbe AMB (*fig.* 3). Soit s l'arc AM. On pourra

Fig. 3.



toujours imaginer que la courbe soit représentée par les équations

$$x = f(s),$$
$$y = g(s),$$
$$z = h(s),$$

f, g, h étant des fonctions finies, uniformes et continues de s, dont les dérivées par rapport à s jusqu'à l'ordre n existent, sont uniformes, et sont des fonctions finies et continues de s, sauf en un nombre limité de points de la courbe.

Moyennant ces relations, les quantités

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{dx}{ds}, & \dfrac{dy}{ds}, & \dfrac{dz}{ds}, \\ \dfrac{d^2x}{ds^2}, & \ldots, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \dfrac{d^nz}{ds^n}. \end{array}$$

vont devenir des fonctions uniformes de s, ces fonctions pouvant être infinies ou discontinues en certains points ou en certaines régions de la courbe AMB. Il en sera de même des fonctions $u(s)$, $v(s)$, $w(s)$, obtenues en remplaçant les variables qui figurent dans les fonctions U, V, W par leurs expressions en fonction de s.

Soient

$$\frac{dx}{ds} = \varphi(s), \qquad \frac{dy}{ds} = \psi(s), \qquad \frac{dz}{ds} = \theta(s).$$

Soit, en outre, S la longueur de l'arc AMB. Si l'intégrale définie

$$\int_0^S [u(s)\,\varphi(s) + v(s)\,\psi(s) + w(s)\,\theta(s)]\,ds$$

existe, nous la représenterons par le symbole

$$\int_{\text{AMB}} (\text{U}\,dx + \text{V}\,dy + \text{W}\,dz),$$

et nous dirons que ce symbole représente une *intégrale curviligne* prise le long de la courbe AMB.

Il faut bien remarquer que ce symbole n'a aucun sens, en général, si l'on ne suppose pas l'arc AMB complètement connu; c'est seulement lorsqu'on suppose cet arc connu qu'il prend un sens, celui d'une intégrale définie, et à chaque arc différent joignant le point A au point B correspond un sens différent de ce symbole, ce sens étant traduit par une intégrale définie différente.

Pour définir cette intégrale, nous avons supposé les coordonnées d'un point de la courbe AMB exprimées au moyen de l'arc s de cette courbe; mais nous aurions pu tout aussi bien les supposer exprimées au moyen d'un paramètre t variable d'une manière continue le long de la courbe AMB.

Presque toutes les propriétés des intégrales curvilignes se déduisent d'une proposition fondamentale que nous allons démontrer.

Supposons que les trois fonctions U, V, W dépendent seulement de x, y, z et, de plus, que l'on ait

$$U = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x},$$
$$V = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y},$$
$$W = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z},$$

F étant, dans tout l'espace, une fonction uniforme, finie et continue de x, y, z.

Considérons une courbe AMB quelconque, donnée par les équations

$$x = f(s),$$
$$y = g(s),$$
$$z = h(s).$$

Si dans $F(x, y, z)$ on remplace x, y, z par ces fonctions uniformes, finies et continues de s, $F(x, y, z)$ va se transformer en une fonction uniforme, finie et continue de s

$$F[f(s), g(s), h(s)] = \Phi(s).$$

L'intégrale curviligne

$$\int_{AMB} (U\,dx + V\,dy + W\,dz)$$

sera égale, par définition, à

$$\int_0^S \left[\frac{\partial F}{\partial f(s)} \frac{d f(s)}{ds} + \frac{\partial F}{\partial g(s)} \frac{d g(s)}{ds} + \frac{\partial F}{\partial h(s)} \frac{d h(s)}{ds}\right] ds,$$

ou bien à

$$\int_0^S \frac{d\Phi(s)}{ds}\, ds.$$

$\Phi(s)$ étant une fonction uniforme, finie et continue de s, cette dernière quantité a pour valeur

$$\Phi(S) - \Phi(0).$$

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point A et x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point B. Nous aurons

$$\Phi(0) = F(x_0, y_0, z_0),$$
$$\Phi(S) = F(x_1, y_1, z_1)$$

et, par conséquent,

$$\int_{AMB} (U\,dx + V\,dy + W\,dz) = F(x_1, y_1, z_1) - F(x_0, y_0, z_0).$$

Ainsi l'intégrale curviligne considérée dépend exclusivement de l'origine et de l'extrémité de la courbe le long de laquelle elle est prise et point de la forme de cette courbe.

Dans ce cas particulier, on voit que l'on peut attribuer un sens au symbole

$$\int_{AMB} (U\,dx + V\,dy + W\,dz),$$

pourvu seulement que l'on connaisse les deux points A et B, sans qu'il soit nécessaire de connaître la courbe AMB. Ce sens est celui de la différence

$$F(x_1, y_1, z_1) - F(x_0, y_0, z_0).$$

Supposons que la courbe AMB soit une courbe fermée; le point B coïncidant avec le point A, les coordonnées x_1, y_1, z_1 sont respectivement identiques aux coordonnées x_0, y_0, z_0. Comme, d'ailleurs, la fonction $F(x, y, z)$ est une fonction uniforme, finie et continue de x, y, z, on aura assurément

$$F(x_1, y_1, z_1) - F(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Ainsi, lorsque U, V, W sont les trois dérivées partielles d'une même fonction uniforme, finie et continue de x, y, z, l'intégrale curviligne

$$\int (U\,dx + V\,dy + W\,dz),$$

étendue à une courbe fermée quelconque, est égale à 0.

Avant de démontrer la réciproque de cette proposition, une remarque est nécessaire.

Si, pour toute courbe ouverte AMB, dont l'origine A a pour coordonnées x_0, y_0, z_0 et dont l'extrémité B a pour coordonnées

x_1, y_1, z_1, une certaine intégrale curviligne vérifie la relation

$$\int_{\text{AMB}} (\text{U}\, dx + \text{V}\, dy + \text{W}\, dz) = \text{F}(x_1, y_1, z_1) - \text{F}(x_0, y_0, z_0);$$

$\text{F}(x, y, z)$ étant une fonction uniforme, finie et continue de x, y, z, on aura, pour toute courbe fermée,

$$\int (\text{U}\, dx + \text{V}\, dy + \text{W}\, dz) = 0.$$

Inversement, considérons une intégrale curviligne telle que, pour toute courbe fermée, on ait

$$\int (\text{U}\, dx + \text{V}\, dy + \text{W}\, dz) = 0,$$

et cherchons la valeur de l'intégrale

$$\int_{\text{AMB}} (\text{U}\, dx + \text{V}\, dy + \text{W}\, dz) = [\text{AMB}].$$

Pour obtenir cette valeur, nous remarquerons en premier lieu que l'intégrale AMB change de signe, sans changer de valeur, lorsqu'on conserve la courbe AMB en renversant son sens de parcours : relation qui peut s'écrire symboliquement

$$[\text{AMB}] + [\text{BMA}] = 0.$$

En effet, la somme que nous venons d'écrire n'est autre que la valeur de l'intégrale curviligne considérée le long de la courbe fermée particulière AMBMA, et nous savons que cette valeur est o.

En second lieu, nous remarquerons que la valeur de l'intégrale curviligne le long d'un arc de courbe quelconque AMB dépend uniquement de la position des points A et B et du sens de parcours de l'arc de courbe, mais nullement de la forme même de l'arc de courbe.

En effet, soient AMB, AM'B deux arcs de courbe différents unissant le point A au point B. La courbe AMBM'A étant une courbe fermée, on a

$$[\text{AMBM'A}] = 0,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$[\text{AMB}] + [\text{BM'A}] = 0.$$

Mais, d'après la remarque précédente,

$$[\mathrm{BM'A}] + [\mathrm{AM'B}] = 0.$$

On a donc, comme nous l'avions annoncé,

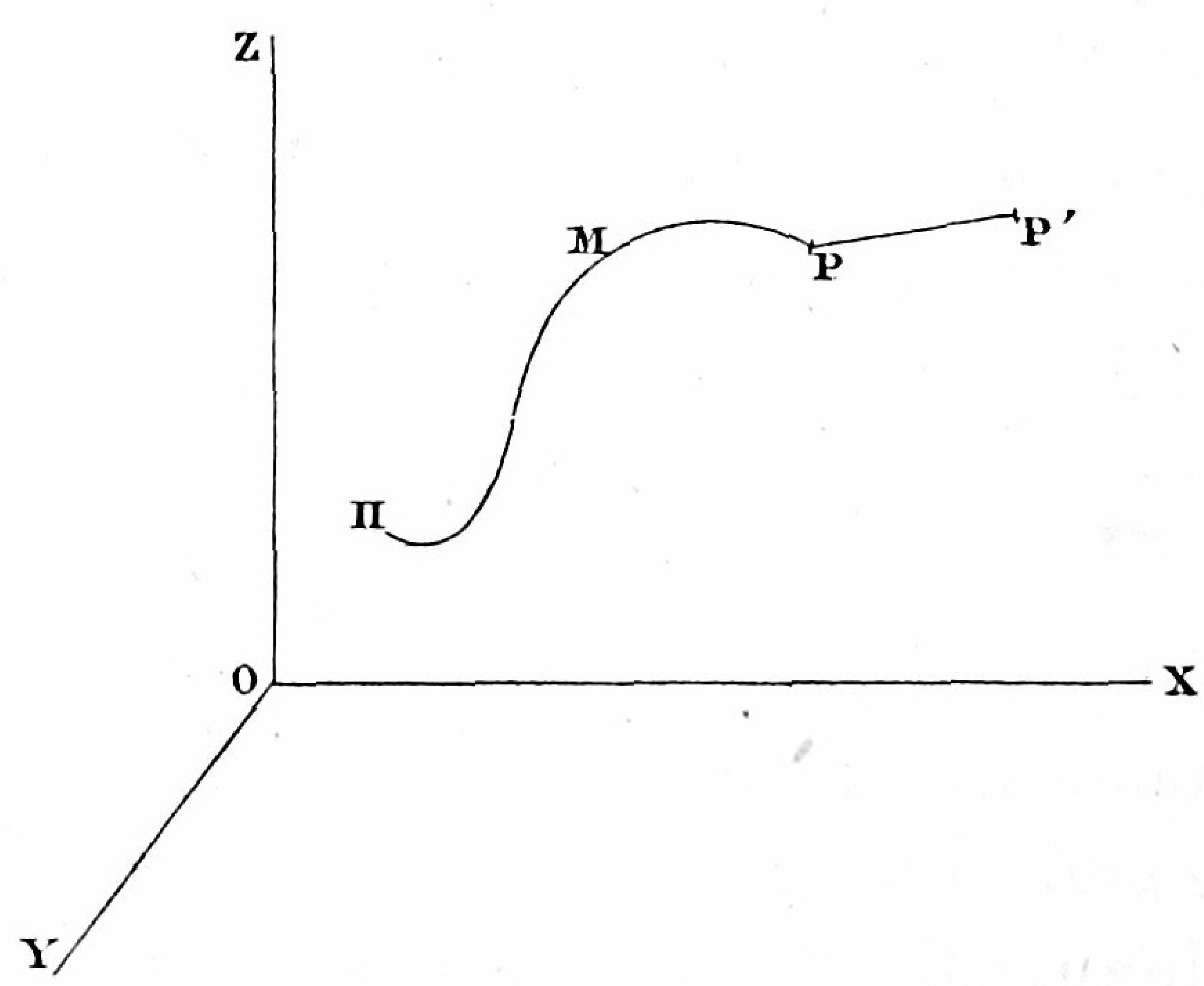
$$[\mathrm{AMB}] + [\mathrm{AM'B}].$$

Ces deux remarques faites, choisissons arbitrairement (*fig.* 4) un point Π, de coordonnées α, β, γ. Soit $\mathrm{P}(x, y, z)$ un autre point du plan. L'intégrale

$$\int_{\Pi\mathrm{MP}} (\mathrm{U}\,dx + \mathrm{V}\,dy + \mathrm{W}\,dz),$$

prise le long d'une courbe quelconque ΠMP joignant le point Π au point P, aura une valeur indépendante de la forme de cette courbe et dépendant seulement de la position des points Π et P.

Fig. 4.



D'ailleurs, la position du point Π étant supposée prise arbitrairement une fois pour toutes, on voit que la valeur en question définit une fonction uniforme des coordonnées x, y, z du point P. Désignons cette valeur par $\mathrm{F}(x, y, z)$.

Si les fonctions U, V, W sont des quantités finies, il est aisé de voir que cette quantité est finie. Il est aisé, de plus, de voir qu'elle est continue. Soit, en effet, $\mathrm{P}'(x', y', z')$ un point voisin du point P. La fonction $\mathrm{F}(x', y', z')$ est la valeur de l'intégrale curviligne prise le long d'une courbe quelconque joignant le point Π au point P'. Or, comme telle courbure, on peut prendre la courbe ΠMP suivie de la droite PP'. On voit alors aisément que

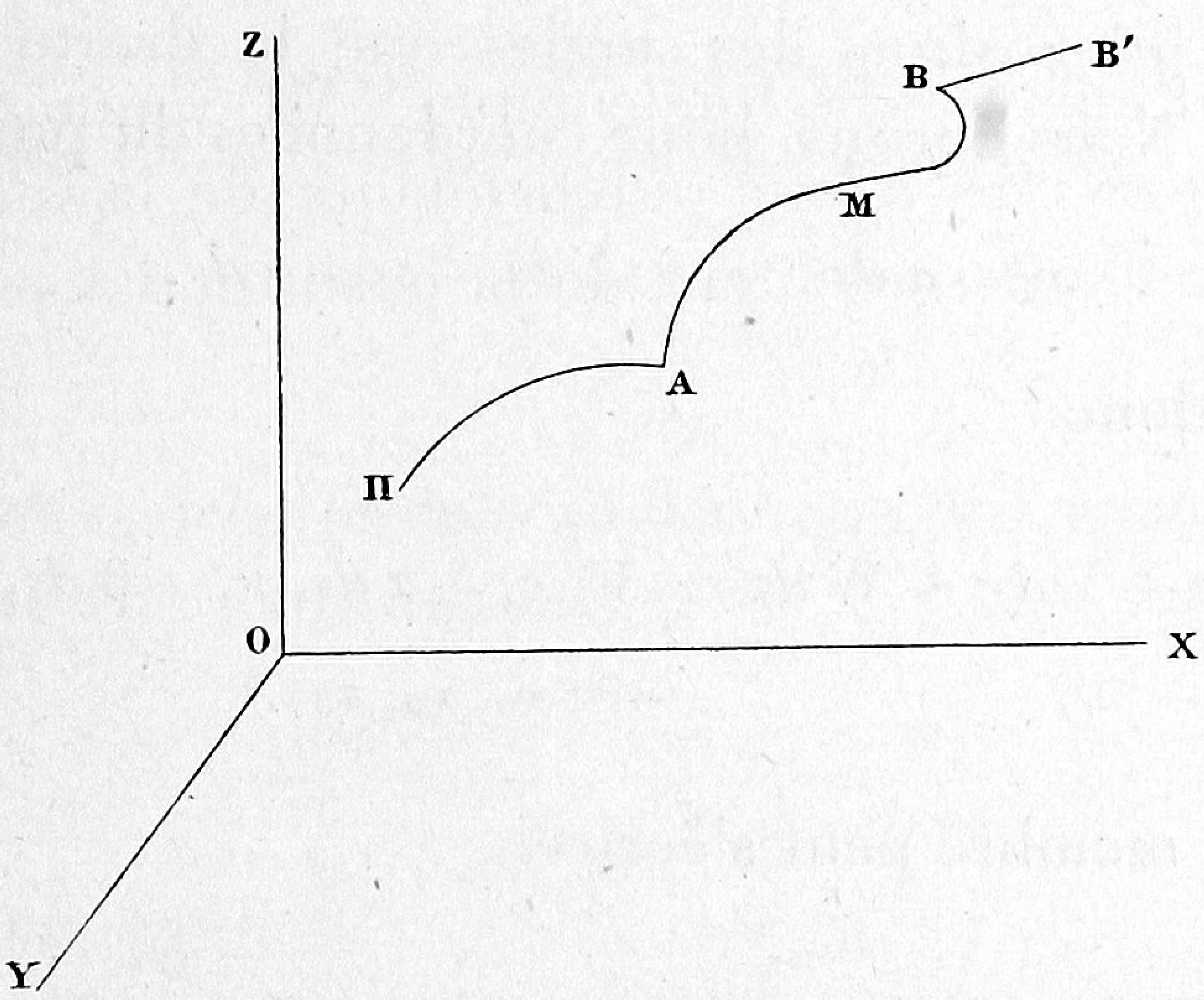
$$F(x', y', z') = F(x, y, z) + \int_{PP'} (U\,dx + V\,dy + W\,dz),$$

et l'intégrale qui figure au second membre est évidemment infiniment petite avec PP′, ce qui démontre le théorème énoncé.

Ayant ainsi défini la fonction uniforme, finie et continue de x, y, x que nous avons désignée par $F(x, y, z)$, arrivons à l'évaluation de [AMB].

Si nous remarquons que ΠAMB (*fig.* 5) est une ligne qui mène

Fig. 5.



du point Π au point B, nous trouverons

$$[\Pi AMB] = F(x_1, y_1, z_1).$$

D'ailleurs,

$$[\Pi AMB] = [\Pi A] + [AMB]$$

et

$$[\Pi A] = F(x_0, y_0, z_0).$$

Nous trouvons donc

$$[AMB] = \int_{AMB} (U\,dx + V\,dy + W\,dz) = F(x_1, y_1, z_1) - F(x_0, y_0, z_0).$$

Ainsi : *dire que l'intégrale curviligne*

$$\int (U\,dx + V\,dy + W\,dz)$$

étendue à un contour fermé quelconque est égale à o, *ou bien* *dire que la même intégrale étendue à une courbe quelconque est la différence des valeurs que prend, aux deux extrémités de la courbe, une fonction uniforme, finie et continue des coordonnées, c'est énoncer deux propositions équivalentes.*

Cherchons maintenant quelle forme doivent présenter les quantités U, V, W pour que l'on puisse énoncer ces deux propositions.

Nous avons

$$\int_{\text{AMB}} (\text{U}\,dx + \text{V}\,dy + \text{W}\,dz) = \text{F}(x_1, y_1, z_1) - \text{F}(x_0, y_0, z_0).$$

Soit B′ un point situé à une distance infiniment petite ds du point B. Soient α, β, γ les cosinus des angles que la droite BB′ fait avec Ox, Oy, Oz. Nous aurons, pour coordonnées du point B,

$$x_1 + \alpha\,ds, \quad y_1 + \beta\,ds, \quad z_1 + \gamma\,ds.$$

Nous aurons donc

$$\int_{\text{AMBB}'} (\text{U}\,dx + \text{V}\,dy + \text{W}\,dz) = \text{F}(x_1 + \alpha\,ds, y_1 + \beta\,ds, z_1 + \gamma\,ds) \\ - \text{F}(x_0, y_0, z_0).$$

Or le premier membre peut s'écrire

$$\int_{\text{AMB}} (\text{U}\,dx + \text{V}\,dy + \text{W}\,dz) + (\text{U}_1\alpha + \text{V}_1\beta + \text{W}_1\gamma)\,ds,$$

U_1, V_1, W_1 étant les valeurs de U, V, W en un certain point de la ligne BB′. On a donc

$$\text{U}_1\,dx + \text{V}_1\,dy + \text{W}_1\,dz = \text{F}(x_1 + dx, y_1 + dy, z_1 + dz) - \text{F}(x_1, y_1, z_1),$$

c'est-à-dire

$$\text{U} = \frac{\partial \text{F}}{\partial x}, \qquad \text{V} = \frac{\partial \text{F}}{\partial y}, \qquad \text{W} = \frac{\partial \text{F}}{\partial z}.$$

Si l'on rapproche ce résultat de celui que nous avons obtenu au commencement de ce paragraphe, on voit que :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale curviligne

$$\int (\text{U}\,dx + \text{V}\,dy + \text{W}\,dz),$$

étendue à une courbe fermée quelconque, soit égale à o, *est que les trois quantités* U, V, W *soient les dérivées partielles par rapport à* x, y, z *d'une même fonction uniforme, finie et continue de* x, y, z.

Tel est le théorème fondamental sur lequel repose la théorie des intégrales curvilignes.

Donnons immédiatement une application de ce théorème.

La quantité

$$\frac{\partial r}{\partial s'} = \frac{x'-x}{r}\frac{dx'}{ds'} + \frac{y'-y}{r}\frac{dy'}{ds'} + \frac{z'-z}{r}\frac{dz'}{ds'}$$

est une fonction uniforme, finie et continue des coordonnées x, y, z d'un point de la courbe s. Donc l'intégrale

$$\int \frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\,ds,$$

étendue à une courbe fermée quelconque, est égale à o.

Or l'égalité (6) nous donne

$$\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r} - \frac{\cos\omega}{r} = \frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}.$$

Nous aurons donc

$$\int \frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\,ds = \int \frac{\cos\omega}{r}\,ds,$$

les deux intégrales s'étendant à une même courbe fermée.

A fortiori, si s et s' sont deux courbes fermées quelconques, nous aurons

$$\iint \frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\,ds\,ds' = \iint \frac{\cos\omega}{r}\,ds\,ds'. \tag{10}$$

Cette égalité joue, en Électrodynamique, un rôle important; elle a été démontrée, en 1847, par M. F.-E. Neumann [1], dans le but de comparer les résultats de sa théorie de l'Induction avec la théorie donnée par W. Weber.

---

[1] F.-E. Neumann, *Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme.* Lu à l'Académie des Sciences de Berlin, le 9 août 1847.

§ 3. — Théorème de M. Bertrand.

Le théorème fondamental que nous venons de démontrer va nous fournir une proposition dont nous aurons souvent à faire usage. Cette proposition a été donnée par M. J. Bertrand ([1]) au cours de ses belles recherches sur la loi d'Ampère.

Cette proposition s'énonce ainsi :

Si l'intégrale curviligne

$$\int G\left(x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) ds,$$

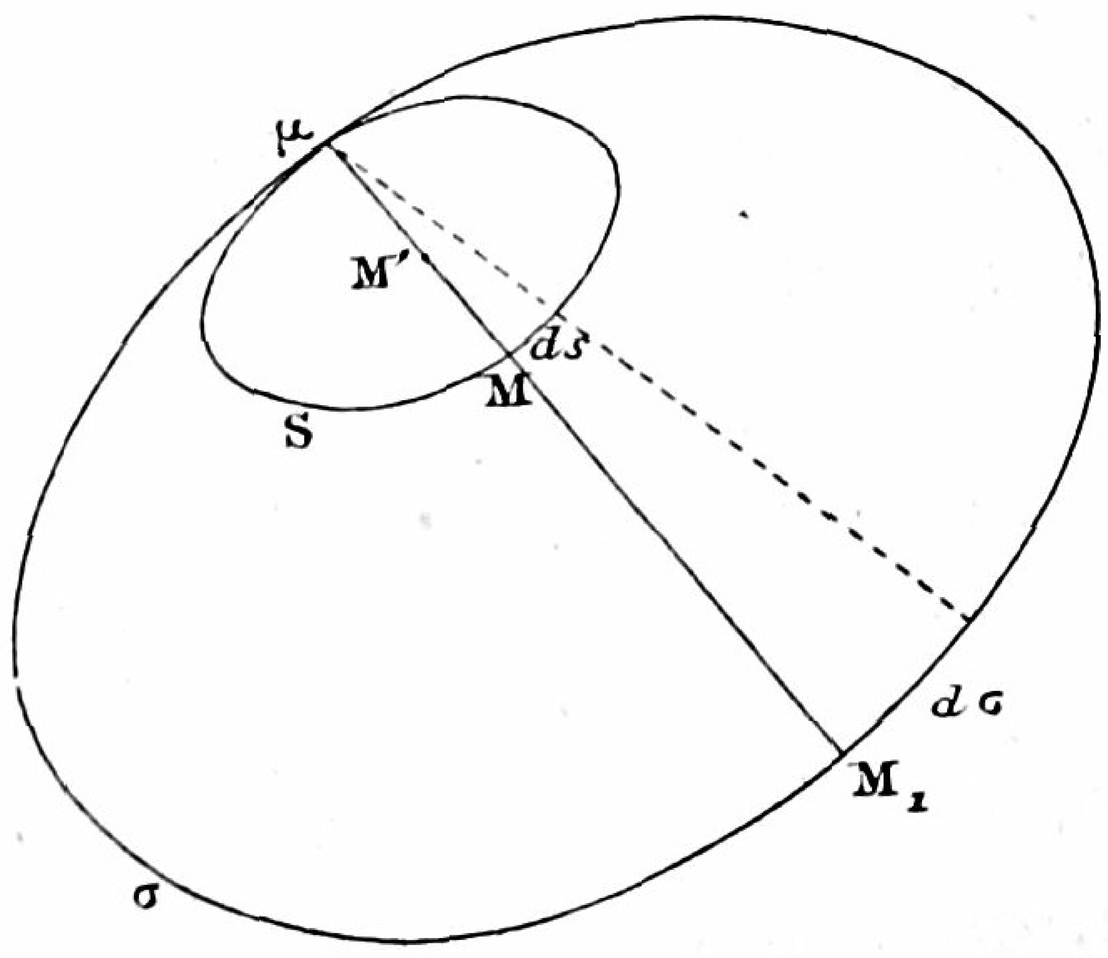
étendue à un contour fermé, est un infiniment petit du second ordre toutes les fois que

$$\int ds$$

est un infiniment petit du premier ordre, la fonction G *est linéaire et homogène en* $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$.

Considérons, en effet, un contour fermé infiniment petit (*fig.* 6). Soit μ (ξ, η, ζ) un point fixe, pris arbitrairement sur ce contour.

Fig. 6.



Soit $M(x, y, z)$ un point variable de ce contour. Soit $M'(x', y', z')$ un certain point convenablement choisi entre les deux précédents

([1]) J. Bertrand, *Sur la démonstration de la formule qui représente l'action élémentaire de deux courants* (*Comptes rendus*, t. LXXV, p. 733; 1872.)

sur la ligne qui les joint. Nous aurons

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{G}\left(x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) ds \\
= \ &\int \mathrm{G}\left(\xi, \eta, \zeta, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) ds \\
+ &\int \Big[(x'-\xi) \frac{\partial}{\partial x'} \mathrm{G}\left(x', y', z', \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) \\
&\quad + (y'-\eta) \frac{\partial}{\partial y'} \mathrm{G}\left(x', y', z', \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) \\
&\quad + (z'-\zeta) \frac{\partial}{\partial z'} \mathrm{G}\left(x', y', z', \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)\Big] ds.
\end{aligned}$$

L'intégrale qui figure au premier membre est, par hypothèse, infiniment petite, par rapport à $\int ds$. Les quantités $(x'-\xi)$, $(y'-\eta)$, $(z'-\zeta)$ étant infiniment petites, la dernière intégrale qui figure au second membre est aussi infiniment petite par rapport à $\int ds$. Par conséquent, la quantité

$$\int \mathrm{G}\left(\xi, \eta, \zeta, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) ds$$

doit être au moins un infiniment petit du second ordre lorsque

$$\int ds$$

est un infiniment petit du premier ordre.

Imaginons un contour fermé σ quelconque et, sur ce contour, un point fixe quelconque $\mathrm{M}(\xi, \eta, \zeta)$. Soit $\mathrm{M}_1(x_1, y_1, z_1)$ un point variable de ce contour. Je dis que l'intégrale

$$\int \mathrm{G}\left(\xi, \eta, \zeta, \frac{dx_1}{d\sigma}, \frac{dy_1}{d\sigma}, \frac{dz_1}{d\sigma}\right) d\sigma,$$

étendue à ce contour, est nécessairement égale à o.

Imaginons, en effet, que l'on forme un contour s homothétique du précédent, le centre d'homothétie étant en μ et le rapport d'homothétie ayant pour valeur $\frac{1}{\lambda}$, la quantité λ pouvant croître au delà de toute limite.

Le contour s est infiniment petit.

Si nous remarquons qu'aux points homologues de deux courbes homothétiques les tangentes à ces deux courbes sont parallèles; si nous désignons par $M(x, y, z)$ le point du contour s homologue du point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ du contour σ; si ds et $d\sigma$ sont les éléments homologues de ces deux contours, nous aurons

$$\frac{dx_1}{d\sigma} = \frac{dx}{ds},$$
$$\frac{dy_1}{d\sigma} = \frac{dy}{ds},$$
$$\frac{dz_1}{d\sigma} = \frac{dz}{ds},$$
$$d\sigma = \lambda\, ds.$$

Posons

$$\int G\left(\xi, \eta, \zeta, \frac{dx_1}{d\sigma}, \frac{dy_1}{d\sigma}, \frac{dz_1}{d\sigma}\right) d\sigma = A,$$

et nous aurons les deux égalités

$$\int G\left(\xi, \eta, \zeta, \frac{dx_1}{d\sigma}, \frac{dy_1}{d\sigma}, \frac{dz_1}{d\sigma}\right) d\sigma = \lambda \int G\left(\xi, \eta, \zeta, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) ds,$$
$$\int d\sigma = \lambda \int ds;$$

d'où l'on déduit, en remplaçant

$$\int G\left(\xi, \eta, \zeta, \frac{dx_1}{d\sigma}, \frac{dy_1}{d\sigma}, \frac{dz_1}{d\sigma}\right) d\sigma$$

par A,

$$\int G\left(\xi, \eta, \zeta, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) ds = \frac{A}{\int d\sigma} \int ds.$$

D'après cette égalité, l'intégrale qui figure au premier membre serait, contrairement à ce qui doit être, de l'ordre de $\int ds$.

Nous sommes donc obligé d'admettre que l'intégrale

$$\int G\left(\xi, \eta, \zeta, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) ds,$$

dans laquelle (ξ, η, ζ) est un point fixe du contour fermé *quelconque* auquel s'étend l'intégrale et (x, y, z) un point variable du même contour, est égale à o.

D'après la proposition fondamentale démontrée au paragraphe précédent, il faut et il suffit pour cela qu'il existe une fonction uniforme, finie et continue de x, y, z, telle que l'on ait

$$G\left(\xi, \eta, \zeta, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{ds}.$$

Le premier membre ne dépendant pas de x, y, z, il doit en être de même du second. Les quantités $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ doivent donc être de simples fonctions, quelconques d'ailleurs, de ξ, η, ζ. Nous devons donc avoir

$$\begin{aligned} G\left(\xi, \eta, \zeta, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) = \quad & P(\xi, \eta, \zeta)\frac{dx}{ds} \\ & + Q(\xi, \eta, \zeta)\frac{dy}{ds} \\ & + R(\xi, \eta, \zeta)\frac{dz}{ds}; \end{aligned}$$

et, par conséquent, ξ, η, ζ étant quelconques,

$$\begin{aligned} G\left(x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) = \quad & P(x, y, z)\frac{dx}{ds} \\ & + Q(x, y, z)\frac{dy}{ds} \\ & + R(x, y, z)\frac{dz}{ds}. \end{aligned}$$

La proposition de M. Bertrand est ainsi démontrée.

CHAPITRE II.

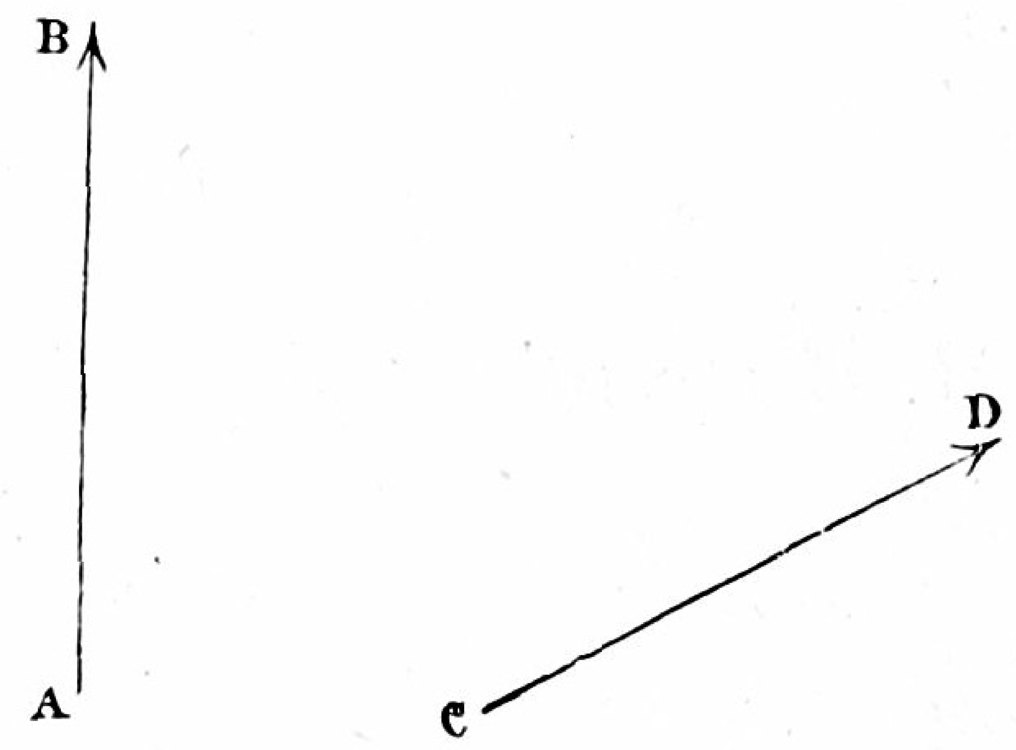
THÉORÈMES DE STOKES ET D'AMPÈRE [1].

§ 1. — Quelques définitions et quelques lemmes de Géométrie.

Nous allons examiner, dans le présent Chapitre, une nouvelle propriété générale des intégrales curvilignes; mais cette étude sera précédée de l'énoncé de quelques définitions et de l'exposé de quelques lemmes de Géométrie générale.

Soient AB, CD (*fig.* 7) deux demi-droites qui ne se rencontrent pas et sont rectangulaires entre elles.

Fig. 7.

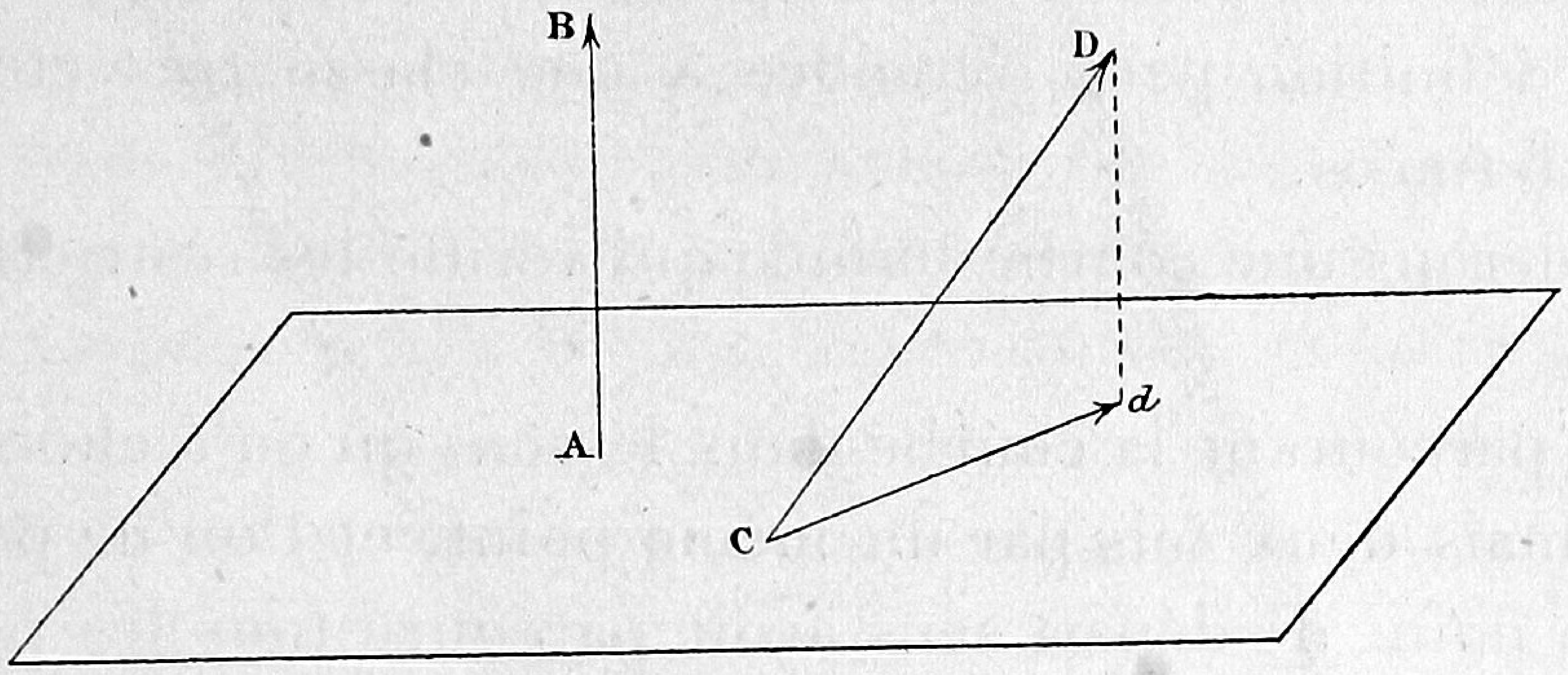


Supposons qu'un observateur, placé selon AB et regardant le point C, voie la demi-droite CD se diriger vers sa gauche; un observateur, placé selon CD et regardant le point A, verrait alors la demi-droite AB se diriger aussi vers sa gauche. Dans ces conditions, le système des deux directions AB, CD forme un système dont le *sens de rotation est positif.* Dans les conditions inverses, le sens de rotation est négatif.

(1) Plusieurs parties de ce Chapitre sont extraites, presque textuellement, du remarquable Ouvrage de M. Carl Neumann : *Die elektrischen Kräfte.* Leipzig, 1873.

Cette définition s'étend à deux demi-droites qui ne sont pas rectangulaires. Le sens de rotation du système des deux demi-droites AB, CD (*fig.* 8) sera, par définition, le sens de rotation

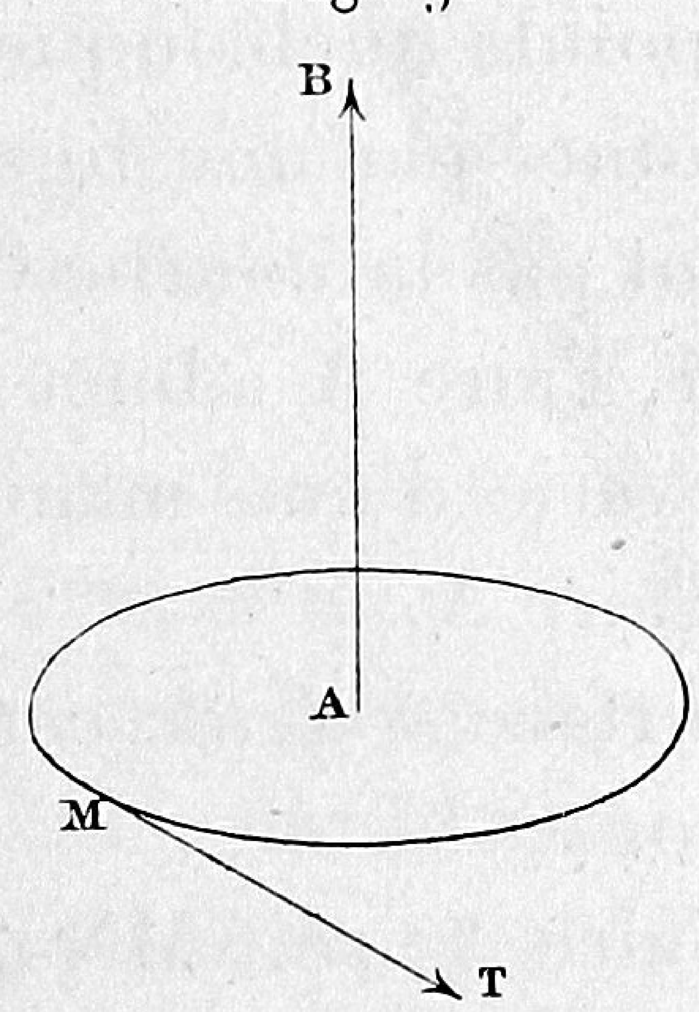
Fig. 8.



du système formé par la demi-droite AB, et par la demi-droite C*d*, projection de CD sur un plan perpendiculaire à AB.

Considérons un cercle (*fig.* 9) et une demi-droite AB, normale au plan de ce cercle et issue de son centre. Le côté du plan

Fig. 9.



de ce cercle où se trouve la demi-droite AB est ce que l'on nomme le *côté supérieur* de ce plan. La circonférence de ce cercle sera parcourue *dans un sens positif,* si la tangente MT, dirigée dans le sens du parcours, forme avec AB un système à rotation positive. On voit que, si un observateur, debout sur la face supérieure du plan, marchait sur la circonférence en la parcourant dans le sens positif, il aurait à sa gauche l'aire du cercle.

Un sens de parcours étant choisi sur une circonférence de cercle, on pourra toujours faire que ce sens de parcours devienne positif, en choisissant convenablement la face supérieure du plan.

Le côté du plan qu'il faut alors choisir pour face supérieure prend le nom de *face positive*. On voit qu'un observateur qui serait couché suivant la tangente MT à la circonférence de cercle, dans le sens de parcours choisi, et qui regarderait le centre du cercle, aurait à sa gauche la face positive.

Cette définition peut s'étendre à une classe très étendue de courbes fermées.

Considérons une courbe fermée qui vérifie les restrictions suivantes :

1° En parcourant la courbe dans le sens qu'on a choisi, on ne passe jamais deux fois par un même point, et l'on ne peut revenir à son point de départ sans avoir parcouru tous les points intermédiaires.

2° Par la courbe C, on peut faire passer une surface S telle que la courbe C forme, sur cette surface, le *contour d'une aire* A *fermée et linéairement connexe*.

Ces derniers mots nécessitent quelques explications.

L'aire fermée A, ayant pour contour C, est dite *linéairement connexe,* lorsque deux points quelconques, M, M', appartenant à l'aire A, peuvent être joints par une ligne située en entier dans l'aire A et ne rencontrant pas la courbe C.

3° En chaque point M, l'aire A admet un et un seul plan tangent dont l'orientation varie d'une manière continue lorsque le point M se déplace sur l'aire A.

4° L'aire A est une surface *à deux côtés*. Ce dernier mot nécessite quelques définitions.

Soit M un point de l'aire A; soit MN une demi-droite normale à ce plan, et invariablement liée à ce plan.

Déplaçons le point M à la surface de l'aire A. Il entraîne avec lui le plan tangent et la normale MN, qui se déplacent d'un mouvement continu.

Si, après un certain déplacement sur l'aire A, le point M revient à sa position primitive, le plan tangent reprendra, lui aussi, sa position primitive. Mais, pour la normale MN, deux cas peuvent se présenter :

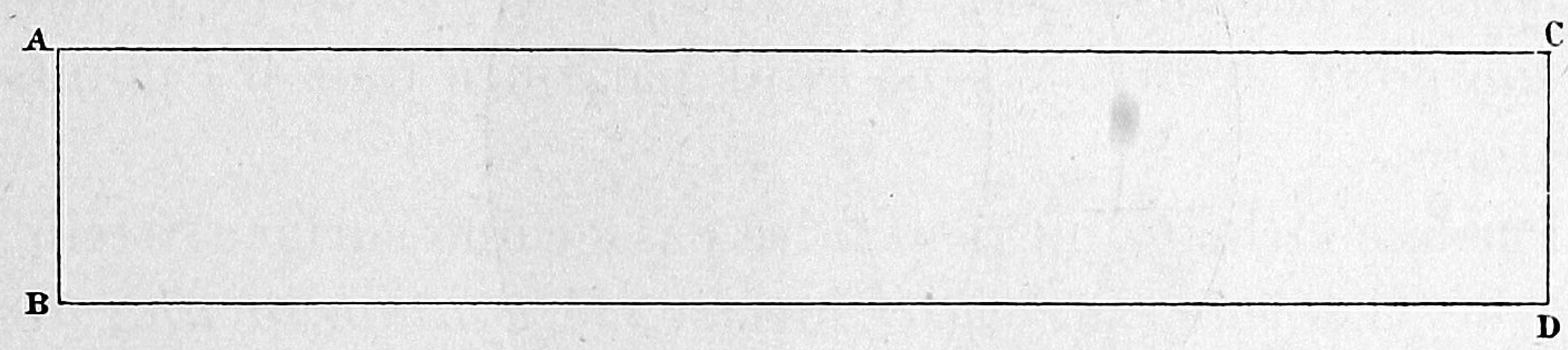
Ou bien la demi-droite MN reprend sa position primitive, quel qu'ait été le déplacement du point M. On dit alors que *l'aire* A *présente deux côtés*.

Ou bien, pour certains déplacements convenablement choisis du point M, la demi-droite MN viendra coïncider, non plus avec sa direction primitive, mais avec la direction inverse. On dit alors que *l'aire* A *présente un seul côté*.

On a longtemps admis, *a priori*, que toute aire close, linéairement connexe, présentait nécessairement deux côtés. Mœbius a, le premier, signalé l'existence paradoxale de surfaces *à un seul côté*.

On réalise aisément une semblable surface en prenant une bande rectangulaire ABCD (*fig.* 10) en papier, et en en recollant

Fig. 10.



les extrémités de manière que le point A vienne au point D, et le point B au point C. On obtient ainsi la surface figurée ci-contre (*fig.* 11).

Il est aisé de voir que, si l'on fait suivre au point M le chemin MPQRSM, la demi-droite MN viendra se replacer suivant MN'.

Certaines surfaces minima fournissent encore des exemples remarquables d'aires à un seul côté.

Nous supposerons donc que l'aire A soit une aire à deux côtés.

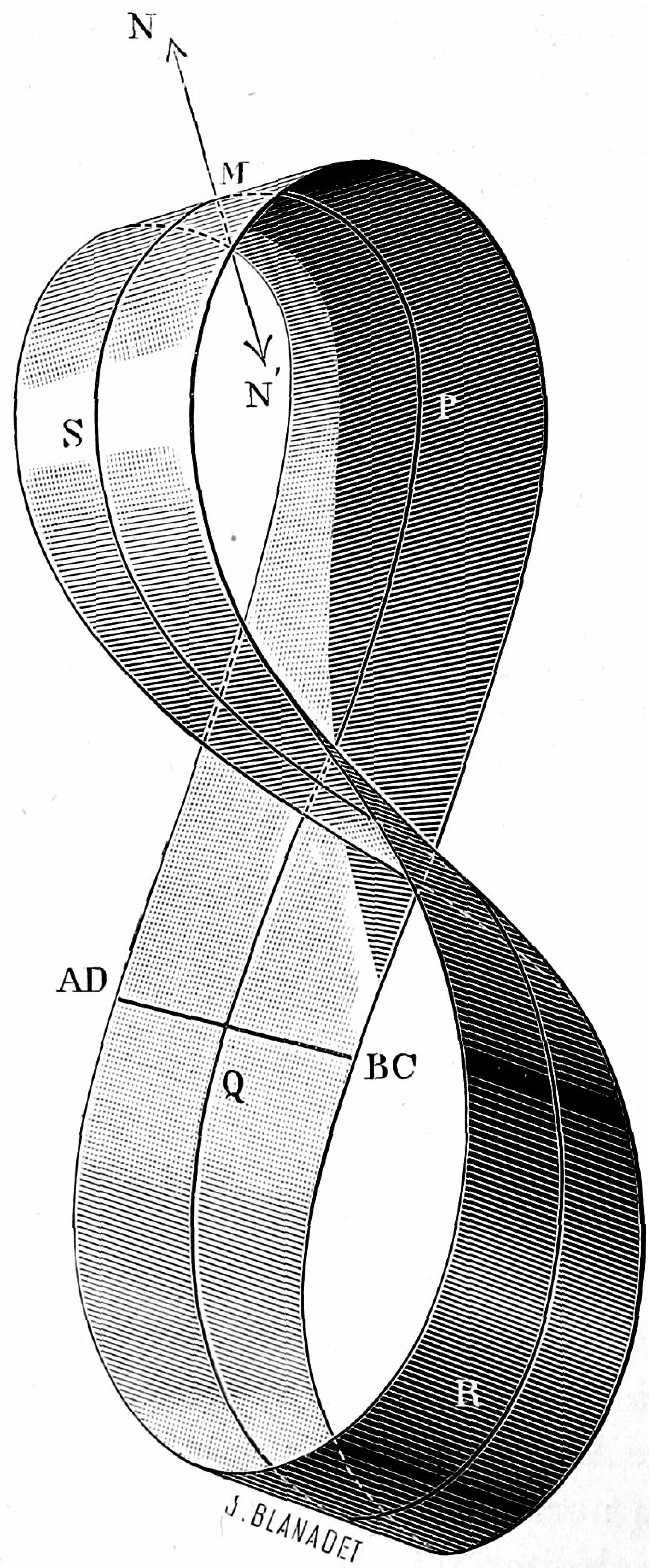
Sur la courbe C (*fig.* 12), choisissons un sens de parcours, et proposons-nous, par rapport à ce sens de parcours, de définir la *face positive* de l'aire A.

Prenons, sur la courbe C, un point M, et, en ce point, menons la tangente MT à cette courbe dans le sens du parcours choisi. Prenons sur l'aire A un point M', infiniment voisin du point M, et, en M', menons la normale M'N à l'aire A dans un sens tel que le système des deux droites MT, M'N forme un système dont le sens de rotation soit positif.

Cela fait, si nous déplaçons le point M' sur l'aire A, nous pourrons l'amener successivement à coïncider avec chacun des points μ de cette aire, puisque cette aire est linéairement connexe par hypothèse.

Si nous amenons le point M' au point μ par un chemin déterminé $M'P\mu$, la demi-droite $M'N$ variera d'une manière continue, de manière à venir occuper une position parfaitement déterminée $\mu\nu$.

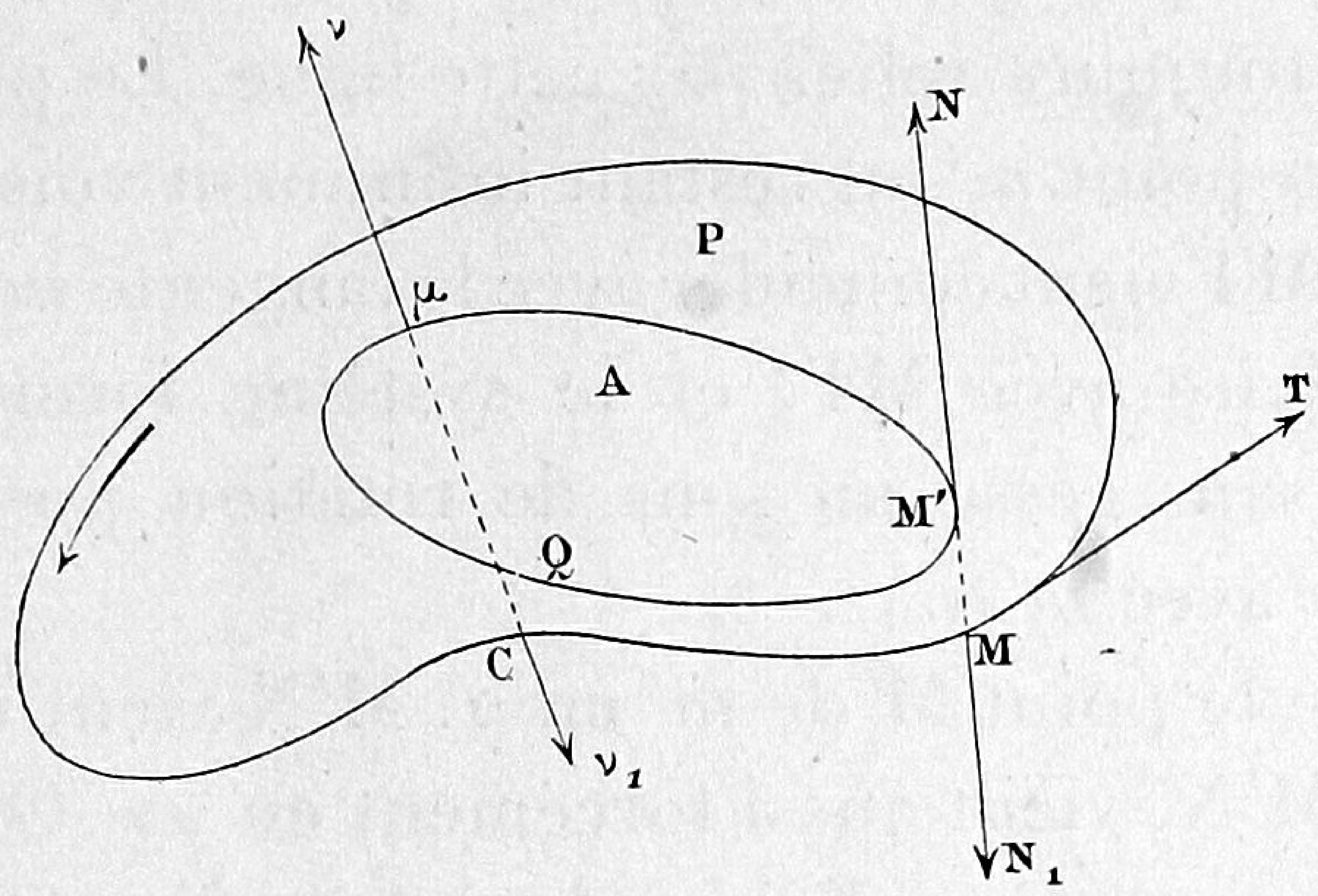
Fig. 11.



En premier lieu, on peut montrer que la droite $M'N$ vient encore se placer suivant $\mu\nu$, si le point M' vient au point M par un autre chemin $M'Q\mu$.

En effet, le plan tangent au point μ à l'aire A étant unique, la droite $M'N$ ne peut venir prendre que l'orientation $\mu\nu$ ou l'orientation directement opposée $\mu\nu_1$. Supposons que, lorsque le point M' vient en μ, suivant le chemin $M'Q\mu$, la droite $M'N$ vienne se placer suivant $\mu\nu_1$. Inversement, le point μ venant en M' suivant le chemin $\mu QM'$, la droite $\mu\nu_1$ viendrait se placer suivant $M'N$, et la droite $\mu\nu$ suivant la direction $M'N_1$ directement opposée à $M'N$.

Fig. 12.

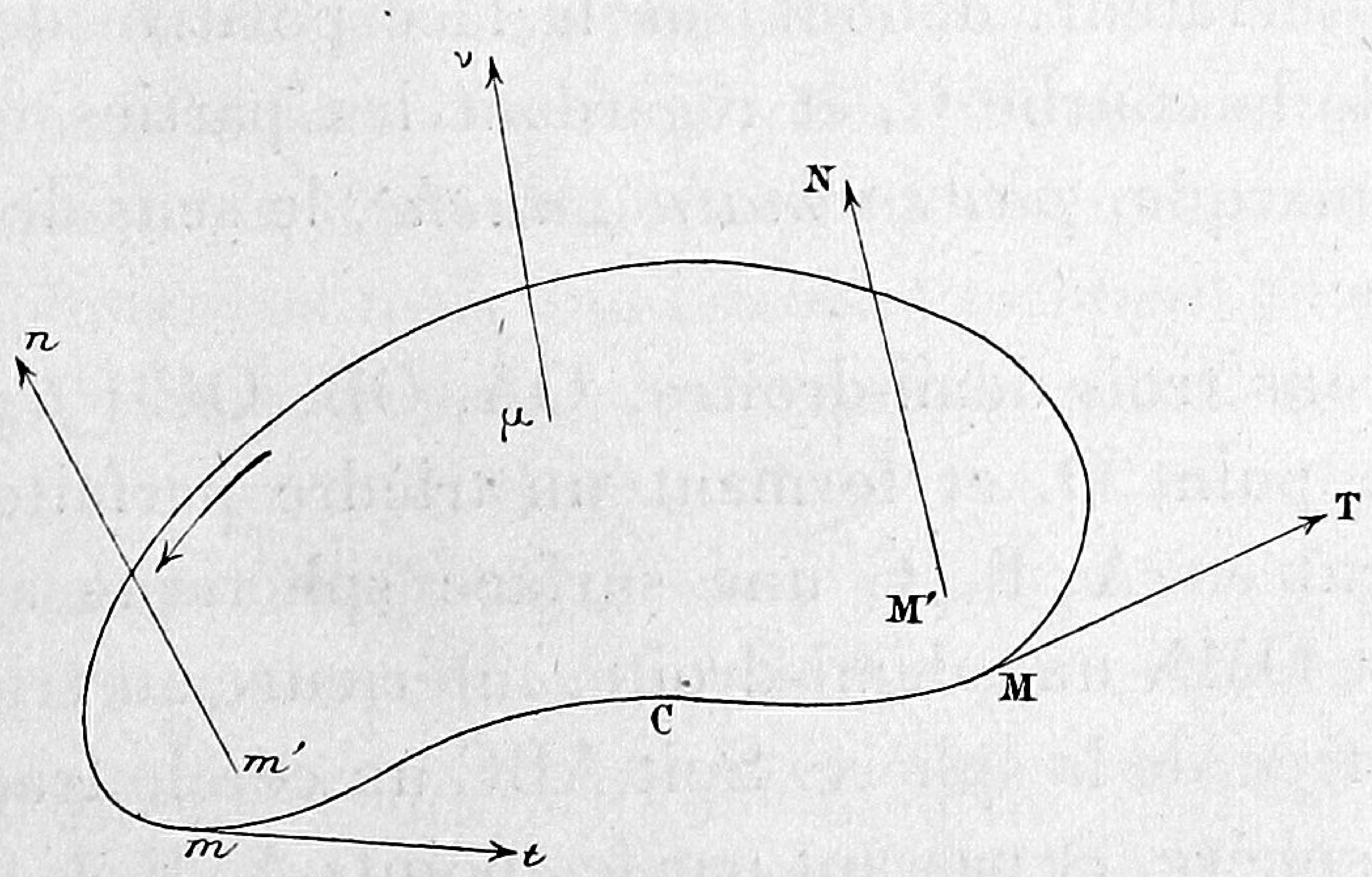


Cela posé, imaginons que l'on fasse suivre au point M' le chemin fermé $M'P\mu QM'$. On voit que la droite $M'N$ viendrait, après ce parcours, se placer suivant $M'N_1$, ce qui est impossible, puisque l'aire est, par hypothèse, une aire à deux côtés.

En second lieu, on peut prouver que la direction $\mu\nu$, ainsi déterminée sur la normale en μ, demeure la même, quelle que soit la position du point M sur la courbe C.

Supposons, en effet (*fig.* 13), qu'au lieu de choisir initiale-

Fig. 13.



ment le système à sens de rotation positif, formé par la tangente MT et la normale $M'N$, on ait choisi le système à sens de rotation positif formé par la tangente mt et la normale $m'n$.

De quelque manière que l'on amène le point M′ au point μ de l'aire A, la demi-droite M′N viendra prendre une direction déterminée $\mu\nu$.

Or on peut supposer que l'on amène le point M′ au point μ par l'itinéraire suivant :

1° Le point M va au point m en suivant la courbe C, ce qui est toujours possible, puisque deux points quelconques de la courbe C sont supposés toujours reliés par cette ligne. Le point M′ vient en même temps au point m' en restant infiniment voisin de M.

La tangente MT vient coïncider avec la tangente mt. La droite M′N reste rectangulaire avec MT, et le système formé par ces deux droites garde sans cesse un sens de rotation positif. Donc M′N vient coïncider avec $m'n$.

2° On amène le point M′ de m' en μ. M′N vient en $\mu\nu$; $m'n$, qui coïncide avec M′N, vient aussi forcément en $\mu\nu$. On obtient donc, pour la demi-normale au point μ, la même direction $\mu\nu$, que l'on ait pris pour point de départ le point m ou le point M.

Nous avons ainsi défini, sans aucune ambiguïté, un certain côté de l'aire A limitée par la courbe C. Ce côté se nomme la *face positive de l'aire* A.

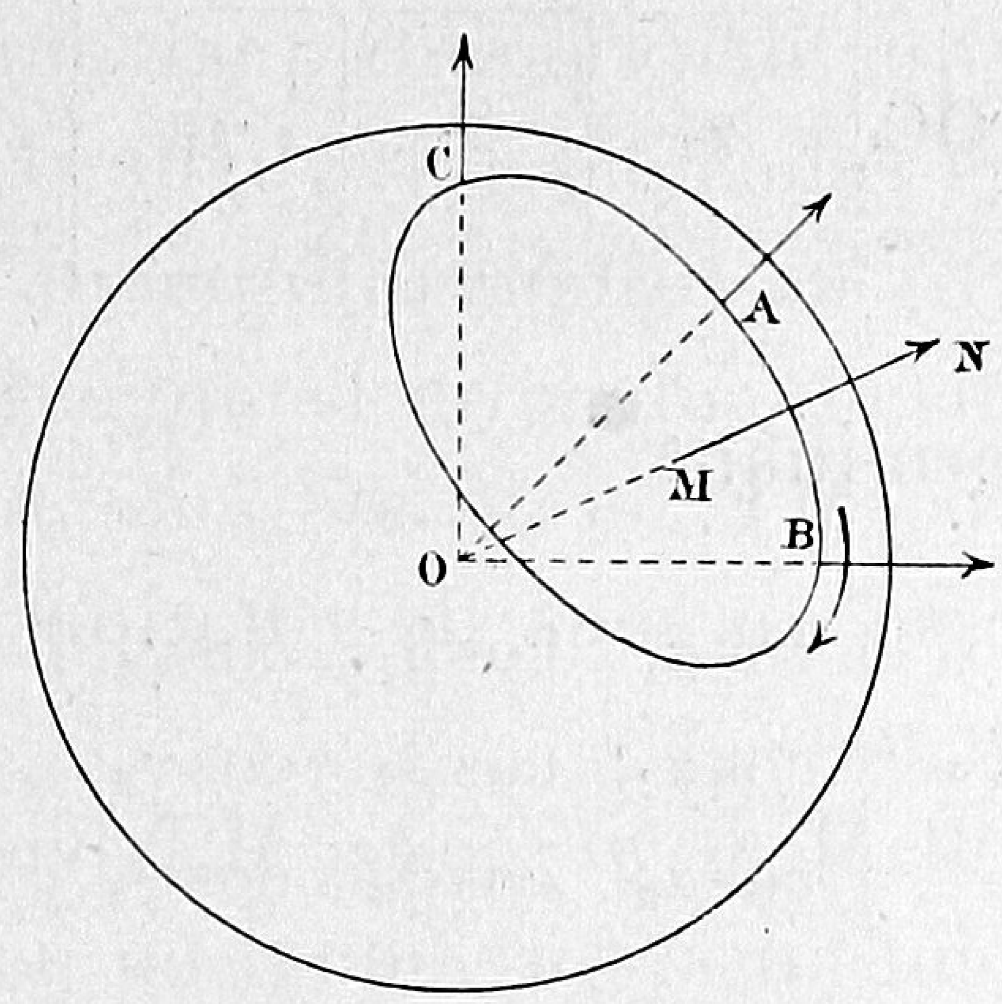
D'après ce que nous venons de dire, cette face positive est toujours reconnaissable aux caractères suivants :

1° Un observateur, couché suivant la tangente MT à la courbe C dans le sens de parcours de cette courbe et regardant la partie voisine de l'aire A, a *à sa gauche* la face positive de l'aire A ;

2° Un observateur, debout sur la face positive de l'aire A, au voisinage de la courbe C, et regardant les parties voisines de la courbe C, marque, *par sa main gauche,* le sens de parcours de cette courbe.

Considérons trois demi-droites, OA, OB, OC (*fig.* 14), issues d'un même point O, et formant un trièdre parfaitement défini. Elles percent en A, B, C une surface sphérique ayant O pour centre. Soit OMN une demi-droite, intérieure au trièdre, perçant en M la surface de la sphère. Soit ABC un cercle tracé sur la surface de la sphère, et passant par les points A, B, C, ce cercle divise la sphère en deux calottes, dont une, MABC, renferme le point M. Supposons ce cercle ABC parcouru dans le sens marqué par l'ordre des lettres. Si MN marque la face positive de la calotte MABC, on dit que *le trièdre* OABC *a un sens de rotation positif*. Si, au contraire, ainsi qu'il arrive dans la *fig*. 14, MN marque la face négative de la même calotte, on dit que le trièdre OABC a un sens de rotation négatif.

Fig. 14.



Lorsque le trièdre OABC a un sens de rotation positif, on voit aisément que, si un observateur est placé suivant OA et regarde OB, la demi-droite OC se trouve à sa gauche.

Nous supposerons, conformément à l'usage, que le trièdre Ox, Oy, Oz, formé par les directions positives des axes de coordonnées, *a un sens de rotation négatif*.

Nous allons chercher des caractères analytiques qui nous permettent de reconnaître le signe du sens de rotation d'un trièdre ou d'un couple de droites.

Considérons tout d'abord un trièdre.

Si nous supposons que l'on fasse varier d'une manière continue l'orientation des trois demi-droites qui forment un trièdre, sans qu'à aucun moment ces trois demi-droites viennent se placer dans un même plan, il est facile de voir que le signe du trièdre ne changera pas.

Par un déplacement de ce genre, nous pourrons amener le trièdre OABC à être trirectangle; puis les deux droites OA, OB à coïncider respectivement avec Ox, Oy. OC viendra alors se placer suivant Oz si le trièdre OABC est négatif, et suivant Oz' si ce trièdre est positif.

Cela posé, adoptons les notations suivantes pour les angles des demi-droites OA, OB, OC avec les axes :

	Ox	Oy	Oz
OA	α_1	β_1	γ_1
OB	α_2	β_2	γ_2
OC	α_3	β_3	γ_3

et considérons le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant varie d'une manière continue avec l'orientation des demi-droites OA, OB, OC; il ne devient égal à o que si les trois demi-droites se placent dans un même plan.

Supposons le trièdre OABC positif; nous pouvons, sans qu'à aucun moment les trois demi-droites qui le composent se trouvent dans un même plan, l'amener à coïncider avec le trièdre $Oxyz'$. Le déterminant Δ, sans jamais changer de signe, viendra alors coïncider avec le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

qui est négatif; il était donc primitivement négatif.

Supposons, au contraire, le trièdre OABC négatif; nous pourrons, sans qu'à aucun moment les trois demi-droites qui le composent se trouvent dans un même plan, l'amener à coïncider avec le trièdre $Oxyz$. Le déterminant Δ, sans jamais changer de signe, viendra alors coïncider avec le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

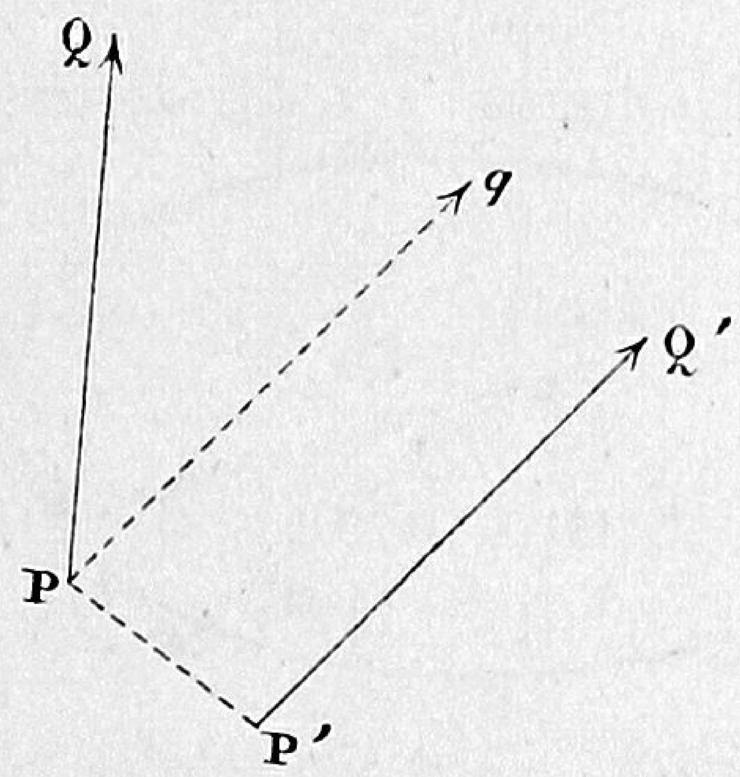
qui est positif; il était donc primitivemen.

Ainsi le trièdre OABC *a un sens de rotation dont le signe est contraire à celui du déterminant*

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Considérons maintenant un couple de deux droites PQ, P′Q′ (*fig.* 15). Il est facile de voir, d'après les définitions données, que

Fig. 15.



le sens de rotation de ce couple est identique au sens de rotation du trièdre PQP′q, Pq étant une parallèle menée par le point P à la direction P′Q′.

Soient

x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point P,
x'_0, y'_0, z'_0 les coordonnées du point P′,
α, β, γ les angles de la droite PQ avec les axes,
α', β', γ' les angles de la droite P′Q′ avec les axes;
r la distance PP′.

Le signe du trièdre PQP′q est, d'après ce qui précède, contraire à celui du déterminant

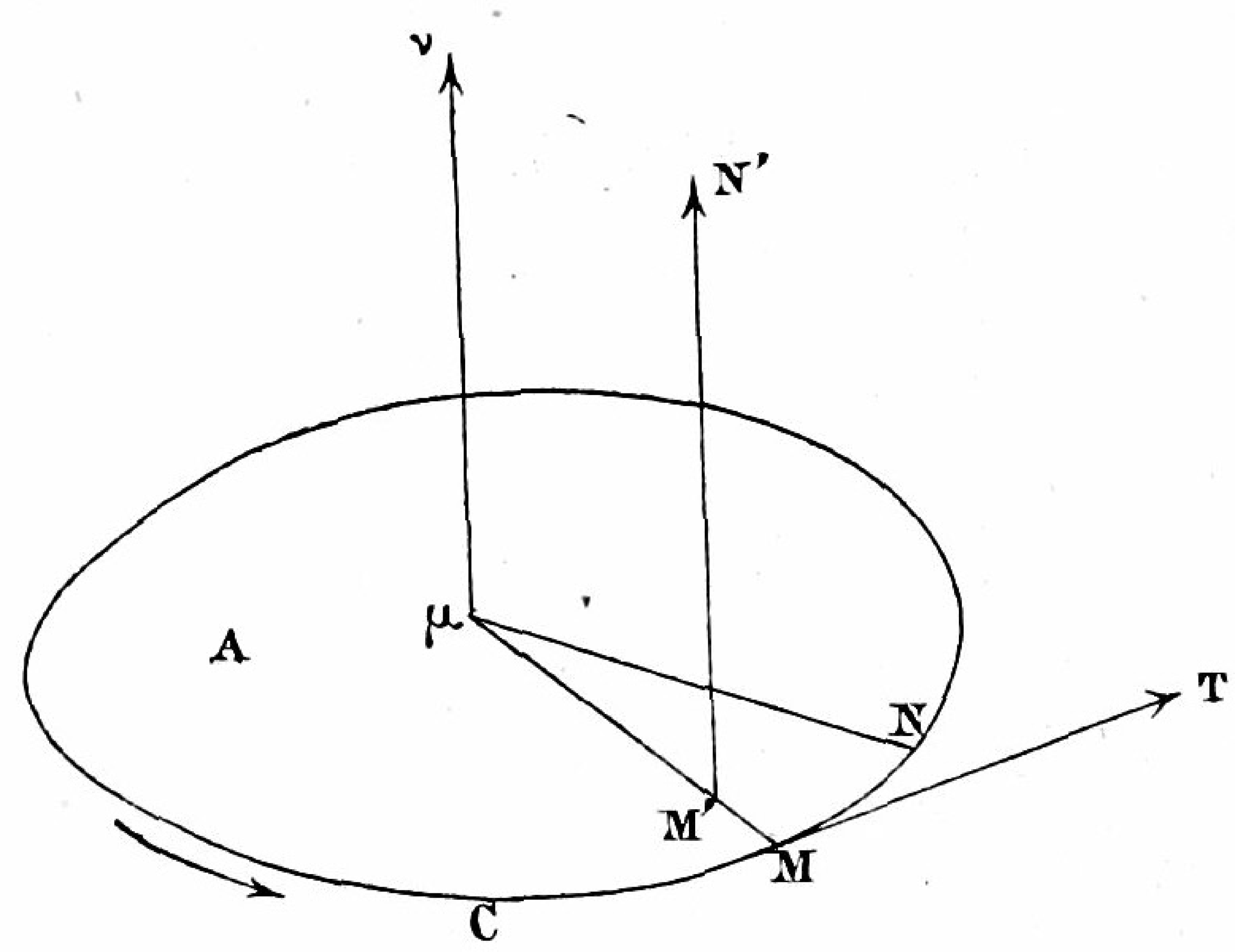
$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{x'_0 - x_0}{r} & \dfrac{y'_0 - y_0}{r} & \dfrac{z'_0 - z_0}{r} \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \end{vmatrix}.$$

On voit donc que *le signe du sens de rotation du système de* *deux droites* PQ, P'Q' *est identique au signe du déterminant*

$$\begin{vmatrix} x'_0 - x_0 & y'_0 - y_0 & z'_0 - z_0 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \end{vmatrix}.$$

Imaginons maintenant une aire plane A, linéairement connexe, limitée par une courbe convexe C (*fig.* 16). Soient $M(x, y, z)$ et $M(x + dx, y + dy, z + dz)$ deux points voisins de la courbe C,

Fig. 16.



se suivant dans le sens du parcours. Soit $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ un point intérieur à l'aire A.

En μ, élevons la normale $\mu\nu$ au côté positif de l'aire A. Il est aisé de voir que la normale $\mu\nu$ forme un système à sens de rotation positif avec la tangente MT en M à la courbe C.

En effet, joignons μM. Sur cette ligne prenons un point M', infiniment voisin du point M. Il se trouvera à l'intérieur de la courbe A, puisque l'aire est supposée convexe.

En M' menons une parallèle M'N' à $\mu\nu$. Cette droite M'N', étant normale à la face positive de A, formera avec MT un système dont le sens de rotation sera positif.

Il en est évidemment de même du système $\mu\nu$, MT, la droite $\mu\nu$ et la droite M'N étant parallèles, de même sens et situées du même côté de MT.

Soient a, b, c les cosinus directeurs de la normale $\mu\nu$. Nous aurons, d'après ce qui précède,

$$\begin{vmatrix} x - \xi & y - \eta & z - \zeta \\ a & b & c \\ \dfrac{dx}{ds} & \dfrac{dy}{ds} & \dfrac{dz}{ds} \end{vmatrix} > 0$$

ou, en développant le déterminant,

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} & a\left[(y-\eta)\frac{dz}{ds}-(z-\zeta)\frac{dy}{ds}\right] \\ & +b\left[(z-\zeta)\frac{dx}{ds}-(x-\xi)\frac{dz}{ds}\right] \\ & +c\left[(x-\xi)\frac{dy}{ds}-(y-\eta)\frac{dx}{ds}\right]<0. \end{aligned}\right.$$

Mais, d'autre part, on a

$$(\beta)\quad \left\{\begin{aligned} a &= k\left[(y-\eta)\frac{dz}{ds}-(z-\zeta)\frac{dy}{ds}\right], \\ b &= k\left[(z-\zeta)\frac{dx}{ds}-(x-\xi)\frac{dz}{ds}\right], \\ c &= k\left[(x-\xi)\frac{dy}{ds}-(y-\eta)\frac{dx}{ds}\right], \end{aligned}\right.$$

avec la condition

$$a^2+b^2+c^2=1.$$

D'après les égalités (β) elles-mêmes, celle-ci devient

$$k^2\left\{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right]\right.$$
$$\left.-\left[(x-\xi)\frac{dx}{ds}+(y-\eta)\frac{dy}{ds}+(z-\zeta)\frac{dz}{ds}\right]^2\right\}=1$$

ou bien, d'après une relation connue,

$$k^2\frac{4\delta^2}{ds^2}=1,$$

δ étant la surface du triangle $M\mu N$.

Si donc nous désignons par ε une quantité égale à $+1$ ou à -1, nous pourrons écrire les égalités (β),

$$a=\varepsilon\frac{(y-\eta)\,dz-(z-\zeta)\,dy}{2\delta},$$

$$b=\varepsilon\frac{(z-\zeta)\,dx-(x-\xi)\,dz}{2\delta},$$

$$c=\varepsilon\frac{(x-\xi)\,dy-(y-\eta)\,dx}{2\delta}.$$

En reportant ces valeurs dans l'inégalité (α), nous voyons que ε a nécessairement la valeur -1, et nous trouvons enfin les relations

$$(\gamma)\qquad \left\{\begin{aligned} 2a\delta &= -[(y-\eta)\,dz-(z-\zeta)\,dy],\\ 2b\delta &= -[(z-\zeta)\,dx-(x-\xi)\,dz],\\ 2c\delta &= -[(x-\xi)\,dy-(y-\eta)\,dx].\end{aligned}\right.$$

Formons, pour tous les éléments $MM'=ds$ de la courbe C, les égalités analogues à la première des égalités (γ), et ajoutons-les membre à membre. Nous aurons

$$2a\sum\delta=\int(z\,dy-y\,dz)+\eta\int dz-\zeta\int dy.$$

Or les quantités $\int dy$, $\int dz$, qui représentent les projections de la courbe fermée C sur Oy et sur Oz sont égales à 0, et l'on trouve ainsi l'égalité

$$2a\sum\delta=\int(z\,dy-y\,dz),$$

que l'on peut encore transformer en remarquant que

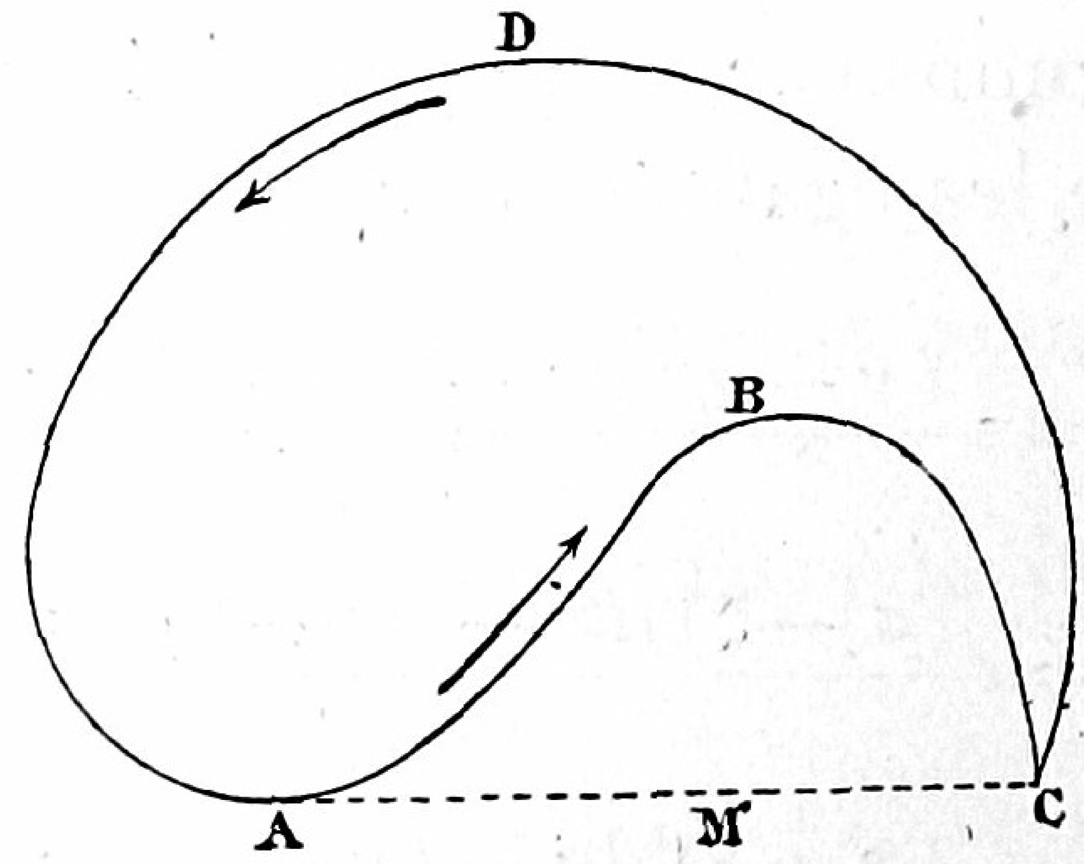
$$\sum\delta=\Omega$$

est l'aire enfermée par la courbe C.

Pour démontrer cette égalité, nous avons supposé la courbe C convexe. Mais il est facile d'étendre cette démonstration au cas où la courbe C n'est pas convexe.

Prenons, par exemple, l'aire plane non convexe A entourée par

Fig. 17.



la courbe ABCDA (*fig.* 17). Elle est l'excès de l'aire convexe A_1 entourée par la courbe AMCDA sur l'aire convexe A_2 entourée par la courbe ABCMA. Si Ω, Ω_1, Ω_2 sont les valeurs des aires A, A_1, A_2, on aura

$$\Omega = \Omega_1 - \Omega_2.$$

L'aire A_1 a même face positive que l'aire A; a a donc la même valeur pour ces deux aires, et l'on pourra écrire

$$2a\Omega_1 = \int_{\text{AMC}} (z\,dy - y\,dz) + \int_{\text{CDA}} (z\,dy - y\,dz).$$

La face positive de l'aire A_2 coïncide avec la face négative de l'aire A. La normale à la face positive de l'aire A_2 a donc pour cosinus directeurs $-a$, $-b$, $-c$, et l'on a

$$-2a\Omega_2 = \int_{\text{ABC}} (z\,dy - y\,dz) + \int_{\text{CMA}} (z\,dy - y\,dz).$$

Ajoutons, membre à membre, ces deux égalités, en remarquant que

$$\int_{\text{AMC}} (z\,dy - y\,dz) + \int_{\text{CMA}} (z\,dy - y\,dz) = 0,$$

et nous aurons

$$2a\Omega = \int_{\text{ABCDA}} (z\,dy - y\,dz),$$

ce qui est la formule déjà obtenue pour une courbe convexe.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point qui parcourt une courbe plane fermée C, *dans un sens donné; soit Ω l'aire enfermée par cette courbe; soient enfin* (N, x), (N, y), (N, z) *les angles que fait avec les axes la normale à la face positive de cette aire. On a*

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} 2\Omega\cos(\text{N}, x) &= \int_{\text{C}} (z\,dy - y\,dz), \\ 2\Omega\cos(\text{N}, y) &= \int_{\text{C}} (x\,dz - z\,dx), \\ 2\Omega\cos(\text{N}, z) &= \int_{\text{C}} (y\,dx - x\,dy). \end{aligned}\right.$$

Ces égalités vont nous servir dans la démonstration de l'important théorème qui fait l'objet du paragraphe suivant.

§ 2. — Théorème de Stokes.

Considérons une courbe C fermée, plane, infiniment petite, sur laquelle un sens de parcours est donné.

Soient $U(x, y, z)$, $V(x, y, z)$, $W(x, y, z)$ trois fonctions de x, y, z, qui sont uniformes, finies et continues, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, dans un domaine à l'intérieur duquel se trouve située la courbe C. Nous allons transformer l'intégrale

$$\int_C (U\,dx + V\,dy + W\,dz).$$

Soit $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ un point intérieur à l'aire limitée par la courbe C. Nous aurons

$$\begin{aligned} U(x, y, z) = U(\xi, \eta, \zeta) &+ (x - \xi)\frac{\partial}{\partial\xi} U(\xi, \eta, \zeta) \\ &+ (y - \eta)\frac{\partial}{\partial\eta} U(\xi, \eta, \zeta) \\ &+ (z - \xi)\frac{\partial}{\partial\zeta} U(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_C U(x, y, z)\,dx = U(\xi, \eta, \zeta)\int_C dx &+ \frac{\partial}{\partial\xi} U(\xi, \eta, \zeta)\int_C (x - \xi)\,dx \\ &+ \frac{\partial}{\partial\eta} U(\xi, \eta, \zeta)\int_C (y - \eta)\,dx \\ &+ \frac{\partial}{\partial\zeta} U(\xi, \eta, \zeta)\int_C (z - \zeta)\,dx. \end{aligned}$$

On a, d'après le théorème fondamental sur les intégrales curvilignes (Chap. I, § 2),

$$\int_C dx = 0,$$

$$\int_C x\,dx = \int_C d\left(\frac{x^2}{2}\right) = 0.$$

On voit alors que l'égalité précédente peut s'écrire

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned}\int_C U(x,y,z)\,dx = {} & \frac{\partial}{\partial\eta}U(\xi,\eta,\zeta)\int_C y\,dx \\ & + \frac{\partial}{\partial\zeta}U(\xi,\eta,\zeta)\int_C z\,dx.\end{aligned}\right.$$

Mais on a, d'après la propriété fondamentale des intégrales curvilignes,

$$\int_C (y\,dx + x\,dy) = \int_C d(xy) = 0$$

et, d'après la dernière égalité (1),

$$\int_C (y\,dx - x\,dy) = 2\Omega\cos(N, z).$$

On conclut aisément de là

$$\int_C y\,dx = \Omega\cos(N, z), \qquad \int_C x\,dy = -\Omega\cos(N, z),$$

et de même

$$\int_C z\,dx = -\Omega\cos(N, y), \qquad \int_C x\,dz = \Omega\cos(N, y).$$

L'égalité (α) devient donc

$$\int_C U(x,y,z)\,dx = \Omega\left[\cos(N,z)\frac{\partial}{\partial\eta}U(\xi,\eta,\zeta) - \cos(N,y)\frac{\partial}{\partial\zeta}U(\xi,\eta,\zeta)\right].$$

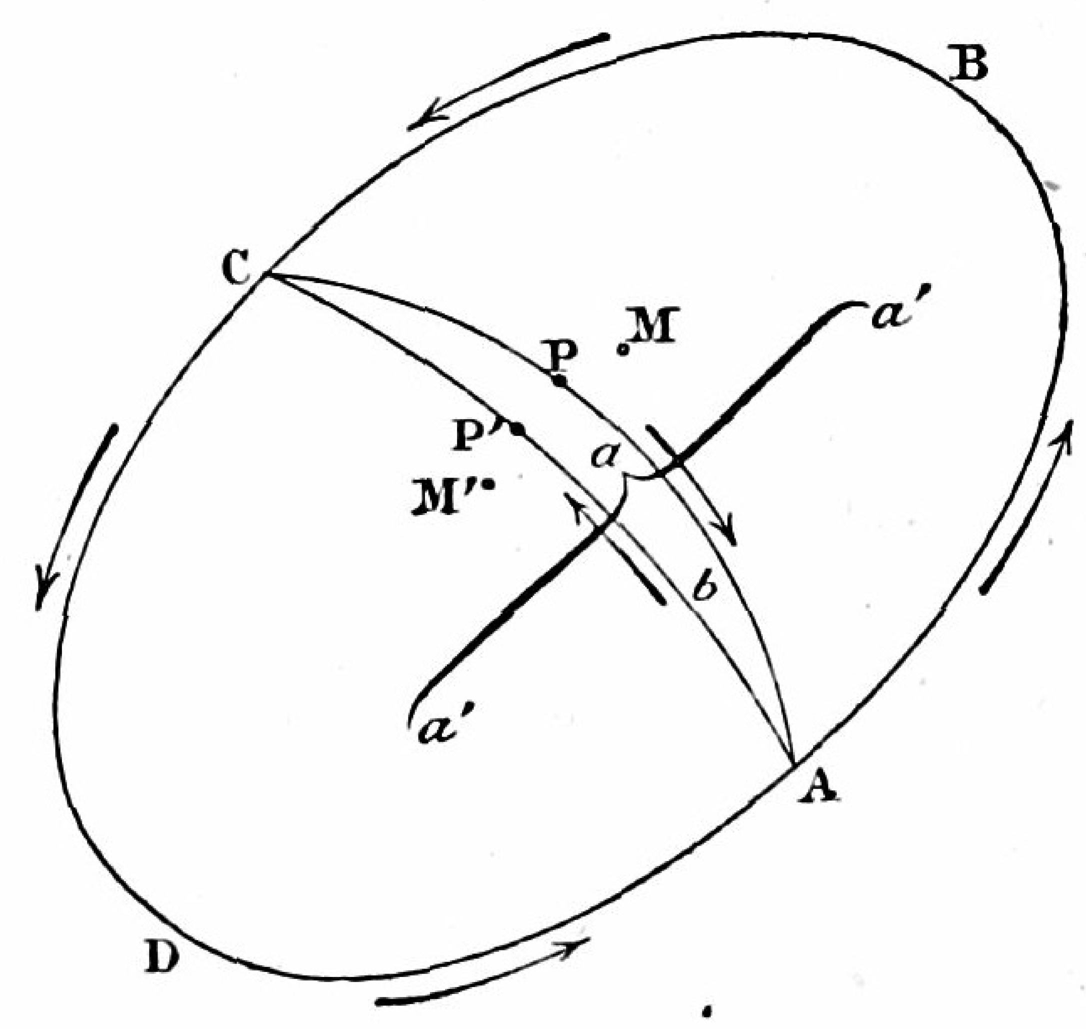
En ajoutant membre à membre cette égalité et deux autres analogues que l'on obtiendrait de la même manière, on arrive à l'identité

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_C [U(x,y,z)\,dx + V(x,y,z)\,dy + W(x,y,z)\,dz] \\ &= \Omega\Big\{\left[\cos(N,z)\frac{\partial}{\partial\eta}U(\xi,\eta,\zeta) - \cos(N,y)\frac{\partial}{\partial\zeta}U(\xi,\eta,\zeta)\right] \\ &\quad + \left[\cos(N,x)\frac{\partial}{\partial\zeta}V(\xi,\eta,\zeta) - \cos(N,z)\frac{\partial}{\partial\xi}V(\xi,\eta,\zeta)\right] \\ &\quad + \left[\cos N,y)\frac{\partial}{\partial\xi}W(\xi,\eta,\zeta) - \cos(N,x)\frac{\partial}{\partial\eta}W(\xi,\eta,\zeta)\right]\Big\}.\end{aligned}\right.$$

Cette identité peut s'étendre à une courbe quelconque, si l'on peut faire passer par cette courbe une aire vérifiant toutes les conditions nécessaires pour que l'on en puisse définir la face positive. Cette extension repose sur un lemme que nous allons établir.

Considérons une aire a à deux côtés (*fig.* 18). Soit ABCDA le contour qui la limite, avec son sens de parcours. Joignons le

Fig. 18.



point A au point C par deux chemins infiniment voisins APC, AP′C, qui n'ont aucun point commun en dehors des points A et C, et comprennent entre eux une aire infiniment étroite b contenue dans l'aire considérée a.

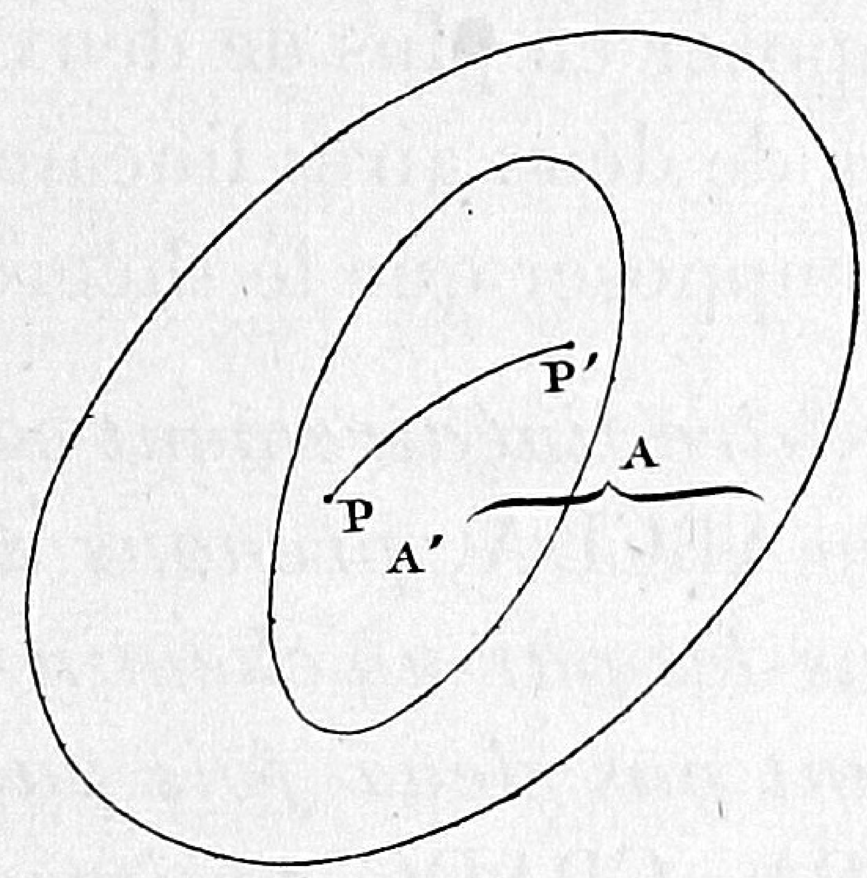
Si, de l'aire considérée a on retranche cette aire infiniment étroite b, il reste une aire a' dont le contour est ou bien ABCPAP′CDA, ou bien ABCP′APCDA, selon la manière dont ont été placées les lettres P et P′. Supposons ces lettres placées de manière que le contour en question soit parcouru dans le sens indiqué par la première série de lettres.

Je dis que le contour en question limite non pas une seule aire linéairement connexe, mais deux aires linéairement connexes distinctes, de telle façon qu'il soit impossible de faire passer un point de l'une en un point de l'autre par un chemin situé entièrement sur l'aire totale a' considérée et ne rencontrant pas le contour.

Pour le démontrer, je remarque en premier lieu que *toute aire tracée à l'intérieur d'une aire à deux côtés est une aire à deux côtés.*

Soient en effet (*fig.* 19) A une aire à deux côtés; A′ une aire tracée à l'intérieur de celle-ci; soient P et P′ deux points de l'aire A′; supposons que l'on parte du point P avec une orientation donnée de la normale à l'aire A′, et qu'on arrive au point P′ avec une orientation de normale à l'aire A′ qui dépende du chemin tracé sur l'aire A′ que l'on a suivi ; c'est admettre que, partant du point P de l'aire A avec une orientation donnée de normale à l'aire A, on arriverait au point P′ de l'aire A avec une orientation différente de normale à l'aire A, selon le chemin, tracé sur l'aire A, que l'on aurait suivi ; c'est admettre, en d'autres termes, que, contrairement à l'hypothèse, l'aire A ne serait pas une aire à deux côtés.

Fig. 19.



D'après la proposition que nous venons d'établir, l'aire a' (*fig.* 18), si elle forme une seule aire linéairement connexe, doit être, comme l'aire a, une aire à deux côtés ; si l'on observe de plus que ces deux aires ont en commun une partie de leur contour et le sens de parcours de cette partie du contour, on voit sans peine que leurs côtés positifs coïncident en tout point.

Or prenons deux points infiniment voisins P, P′, sur les chemins CPA, AP′C. Soit M un point de l'aire a', que l'on puisse amener au point P par un chemin infiniment petit situé sur l'aire a' ; soit M′ un point de l'aire a' que l'on puisse amener au point P′ par un chemin infiniment petit situé sur l'aire a'.

La normale à la face positive de l'aire a' en M forme un système à rotation positive avec la tangente en P au chemin CPA ; la normale à la face positive de l'aire a' en M′ forme un système à rotation positive avec la tangente en P′ au chemin AP′C. Or les tangentes en P et P′ aux chemins CPA, AP′C sont sensiblement de sens contraire. Donc les normales à la face positive de l'aire a' en M et en M′ sont sensiblement de sens contraire. D'ailleurs ces normales coïncident, d'après ce que nous avons vu, avec les normales aux points M et M′ à la face positive de a. Donc les normales en M et M′ à la face positive de a sont sensiblement de sens contraire.

D'autre part, du point M au point M′, on peut passer, d'après les hypothèses faites, par un chemin MPP′M′ infiniment petit tracé sur l'aire a'. Donc, d'après les hypothèses faites sur cette dernière, les normales à la face positive de A en M et en M′ sont sensiblement de même sens, résultat contradictoire avec le précédent.

On ne peut donc pas supposer que la ligne ABCPAP′CDA forme le contour d'une aire linéairement connexe a'. D'ailleurs, elle ne peut se décomposer en plus de deux courbes fermées et ne peut donc limiter plus de deux aires linéairement connexes.

On doit forcément supposer que le théorème suivant est exact :

Étant donnée une aire linéairement connexe à deux côtés a limitée par la courbe ABCDA, *prenons deux points* A, C, *sur cette courbe ; joignons-les par un chemin* APC, *tracé sur l'aire donnée, et ne passant pas deux fois par le même point; les deux contours* ABCPA, CPADC *limiteront chacun une aire linéairement connexe à deux côtés, dont la face positive coïncidera avec la face positive de l'aire a.*

Considérons l'intégrale

$$\int (\mathrm{U}\,dx + \mathrm{V}\,dy + \mathrm{W}\,dz),$$

étendue au contour ABCD. Désignons-la par

$$[\mathrm{ABCD}].$$

Nous aurons

$$[\mathrm{ABCD}] = [\mathrm{ABC}] + [\mathrm{CDA}].$$

Remarquons que l'on a évidemment

$$[\mathrm{CPA}] + [\mathrm{APC}] = 0,$$

et nous aurons

$$[\mathrm{ABCD}] = [\mathrm{ABC}] + [\mathrm{CPA}] + [\mathrm{APC}] + [\mathrm{CDA}].$$

Mais on a

$$[\mathrm{ABC}] + [\mathrm{CPA}] = [\mathrm{ABCPA}],$$
$$[\mathrm{APC}[+ [\mathrm{CDA}] = [\mathrm{APCDA}].$$

On a donc

$$[\mathrm{ABCDA}] = [\mathrm{ABCPA}] + [\mathrm{APCDA}].$$

On peut donc ajouter au théorème précédent la proposition suivante :

L'intégrale

$$\int (\mathrm{U}\,dx + \mathrm{V}\,dy + \mathrm{W}\,dz),$$

prise le long du contour ABCDA, *est égale à la somme des intégrales analogues prises le long des contours* ABCPA, ABCDA.

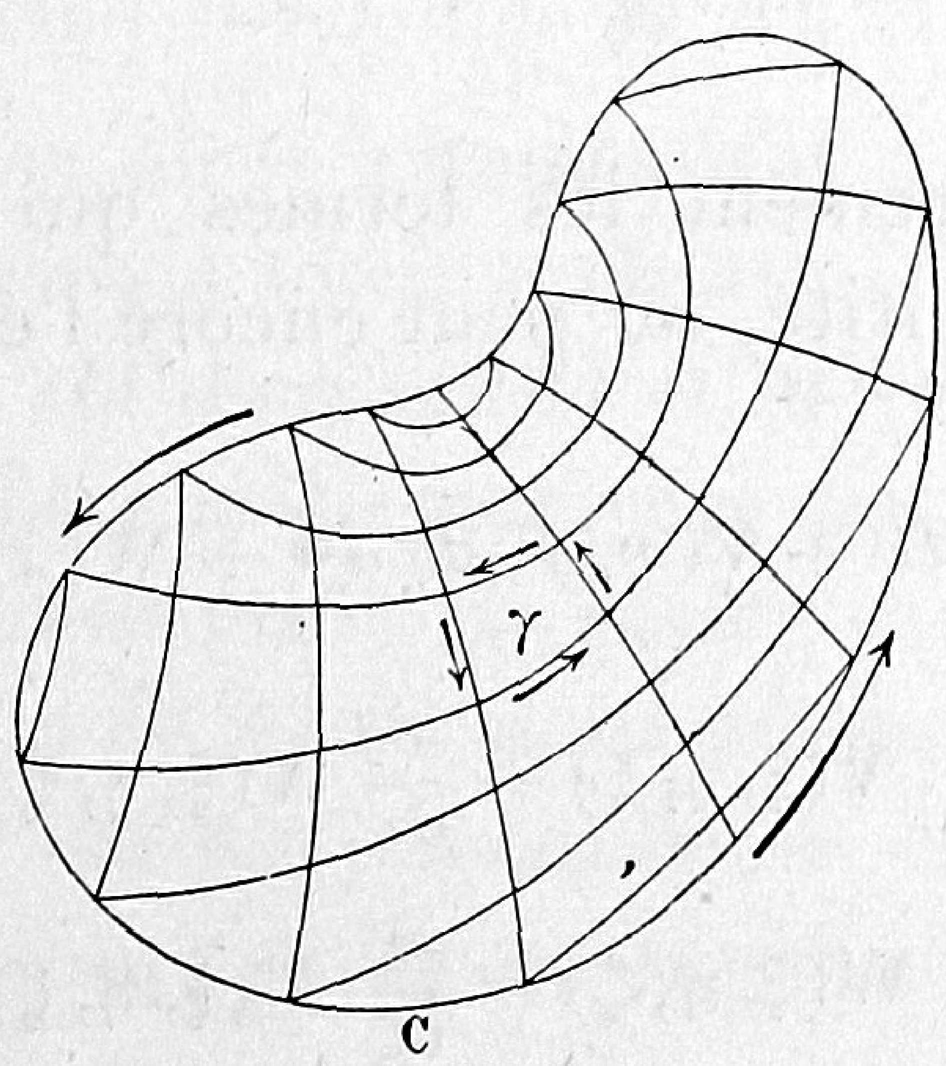
Il importait de démontrer l'exactitude de ces théorèmes pour les aires à deux côtés, car ils ne sont point exacts pour les aires à un seul côté; si l'on coupe suivant AB la surface représentée par la *fig.* 11, on ne la sépare pas en deux aires; on en forme une seule aire, applicable sur le rectangle ABCD (*fig.* 10) qui a servi à former la surface.

On peut, sur chacun des deux contours ABCPA, APCDA, reprendre des démonstrations analogues aux précédentes, puis raisonner encore de même sur les aires en lesquelles on aura partagé celles qu'enferment ces deux contours, et ainsi de suite indéfiniment.

On arrivera ainsi à justifier l'énoncé suivant :

Par deux systèmes de lignes convenablement tracées, divisons l'aire A (*fig.* 20) en éléments de surface. Supposons le contour γ

Fig. 20.



de chacun de ces éléments parcouru dans un sens tel que cet élément ait même face positive que l'aire A. Nous aurons

$$\int_{\mathrm{C}} (\mathrm{U}\,dx + \mathrm{V}\,dy + \mathrm{W}\,dz) = \sum \int_{\gamma} (\mathrm{U}\,dx + \mathrm{V}\,dy + \mathrm{W}\,dz).$$

Cela posé, remarquons que chacun des éléments superficiels que nous venons de considérer peut être regardé comme un élément plan situé dans le plan tangent à la surface A en un point de cet élément; appliquons-lui l'identité (2); ajoutons membre à membre toutes ces identités, et nous aurons démontré le théorème suivant :

Soient x, y, z les coordonnées d'un point qui décrit dans un sens déterminé une courbe fermée C, *et* $U(x, y, z)$, $V(x, y, z)$, $W(x, y, z)$ *trois fonctions de* x, y, z, *finies, continues et uniformes, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, dans l'espace où se trouve la courbe* C.

Par la courbe C, *passe une aire* A *à deux côtés; soient* $d\Omega$ *un élément de l'aire* A; ξ, η, ζ *les coordonnées d'un point de cet élément;* N *la direction de la normale à la face positive de l'aire* A *au point* (ξ, η, ζ).

On a l'identité

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_C [U(x,y,z)\,dx + V(x,y,z)\,dy + W(x,y,z)\,dz]\\ &\quad = \mathrm{S}_A \left\{ \left[\cos(N,z)\frac{\partial}{\partial\eta}U(\xi,\eta,\zeta) - \cos(N,y)\frac{\partial}{\partial\zeta}U(\xi,\eta,\zeta)\right]\right.\\ &\qquad + \left[\cos(N,x)\frac{\partial}{\partial\zeta}V(\xi,\eta,\zeta) - \cos(N,z)\frac{\partial}{\partial\xi}V(\xi,\eta,\zeta)\right]\\ &\qquad + \left.\left[\cos(N,y)\frac{\partial}{\partial\xi}W(\xi,\eta,\zeta) - \cos(N,x)\frac{\partial}{\partial\eta}W(\xi,\eta,\zeta)\right]\right\} d\Omega.\end{aligned}\right.$$

En groupant autrement les termes qui figurent au second membre de cette identité, on peut encore l'écrire

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_C [U(x,y,z)\,dx + V(x,y,z)\,dy + W(x,y,z)\,dz]\\ &\quad = \mathrm{S}_A \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial\zeta}V(\xi,\eta,\zeta) - \frac{\partial}{\partial\eta}W(\xi,\eta,\zeta)\right]\cos(N,x)\right.\\ &\qquad + \left[\frac{\partial}{\partial\xi}W(\xi,\eta,\zeta) - \frac{\partial}{\partial\zeta}U(\xi,\eta,\zeta)\right]\cos(N,y)\\ &\qquad + \left.\left[\frac{\partial}{\partial\eta}U(\xi,\eta,\zeta) - \frac{\partial}{\partial\xi}V(\xi,\eta,\zeta)\right]\cos(N,z)\right\} d\Omega.\end{aligned}\right.$$

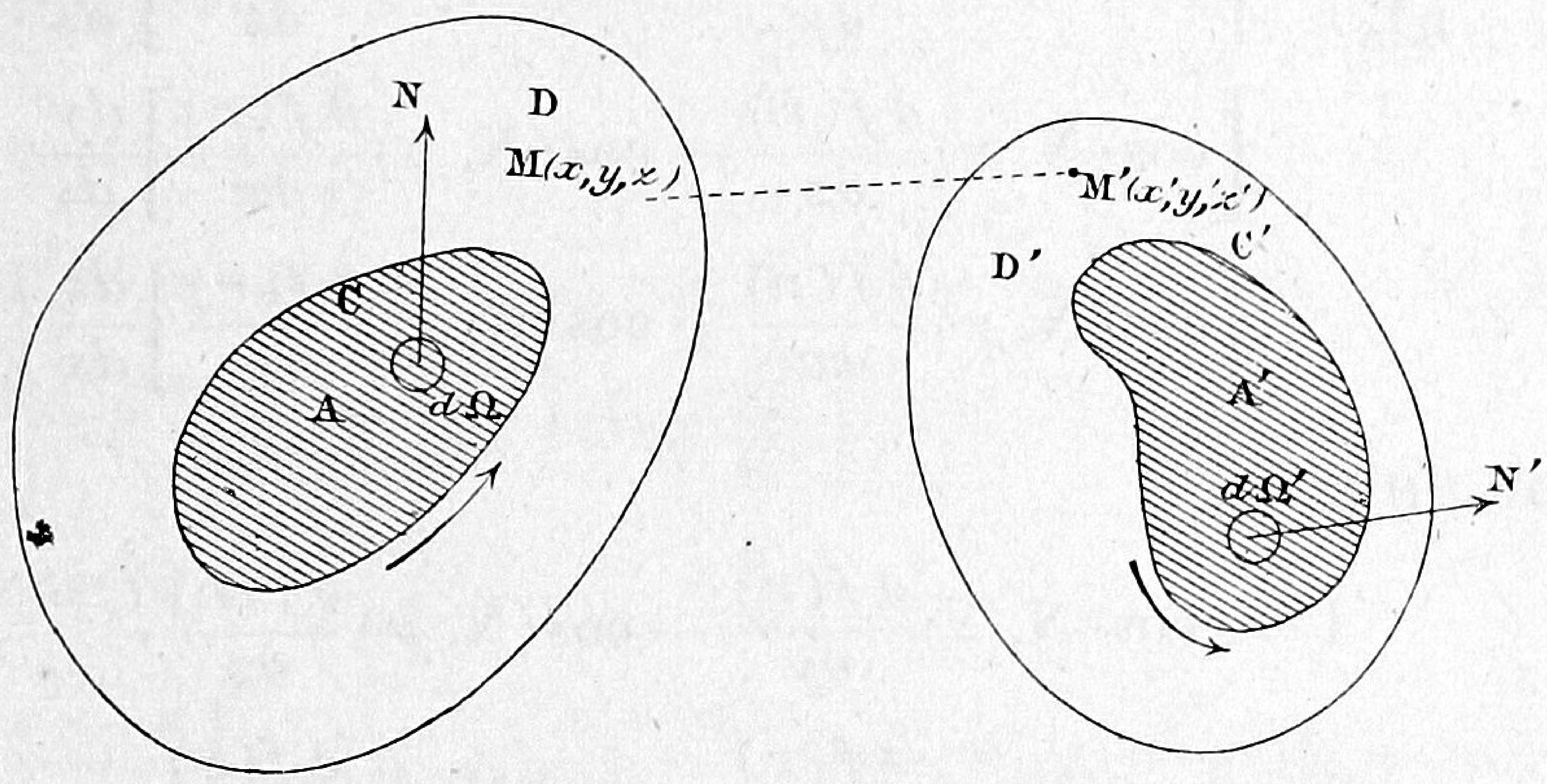
Cette identité est due à Stokes. Elle permet de transformer une intégrale curviligne simple, étendue à une courbe fermée, en une intégrale double, étendue à une aire close limitée à cette courbe fermée. Elle joue un rôle fort analogue à l'identité de Green qui permet de transformer une intégrale double, étendue à une surface fermée, en une intégrale triple, étendue à l'espace que renferme cette surface.

§ 3. — Théorème d'Ampère.

Longtemps avant que Stokes eût donné ce théorème sous sa forme générale, Ampère [1], dans ses recherches d'Électrodynamique, avait employé des propositions particulières qui s'y rattachent. Nous allons déduire ici du théorème de Stokes l'une des plus importantes propositions d'Ampère.

Soient C et C′ deux courbes fermées (*fig.* 21), par lesquelles on

Fig. 21.



peut faire passer deux aires à deux côtés A et A′. Soient D et D′ deux domaines renfermant à leur intérieur les aires A et A′. Soient $M(x, y, z)$ un point du domaine D et $M'(x', y', z')$ un point du domaine D′. Soit enfin r la distance des deux points M et M′.

La distance r est susceptible de varier entre certaines limites. Soit $f(r)$ une fonction de r qui, pour toutes les valeurs de r comprises entre ces deux limites, est uniforme, finie et continue, ainsi que sa dérivée du premier ordre, sa dérivée du second ordre étant finie.

---

[1] AMPÈRE, *Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques, uniquement déduite de l'expérience* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VI, p. 175; 1827). *Voir* aussi GAUSS, *Werke*, Bd. V, p. 606 et 625.

Proposons-nous de transformer l'intégrale curviligne double

$$\int_C \int_{C'} f(r)\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right) ds'\, ds,$$

étendue à tous les éléments ds, ds', des deux courbes C et C'. Soient

$d\Omega$ un élément de l'aire A;
N la normale à la face positive de l'élément $d\Omega$;
$d\Omega'$ un élément de l'aire A';
N' la normale à la force positive de l'élément $d\Omega'$.

D'après l'égalité (3), nous aurons

$$\begin{aligned}
&\int_C \left[f(r)\frac{dx'}{ds'}\frac{dx}{ds} + f(r)\frac{dy'}{ds'}\frac{dy}{ds} + f(r)\frac{dz'}{ds'}\frac{dz}{ds}\right] ds \\
&= \mathbf{S}_A \Big\{ \left[\cos(N, z)\frac{\partial f(r)}{\partial y} - \cos(N, y)\frac{\partial f(r)}{\partial z}\right]\frac{dx'}{ds'} \\
&\quad + \left[\cos(N, x)\frac{\partial f(r)}{\partial z} - \cos(N, z)\frac{\partial f(r)}{\partial x}\right]\frac{dy'}{ds'} \\
&\quad + \left[\cos(N, y)\frac{\partial f(r)}{\partial x} - \cos(N, x)\frac{\partial f(r)}{\partial y}\right]\frac{dz'}{ds'} \Big\}\, d\Omega.
\end{aligned}$$

Si donc on pose

$$\begin{aligned}
U' &= \cos(N, z)\frac{\partial f(r)}{\partial y} - \cos(N, y)\frac{\partial f(r)}{\partial z}, \\
V' &= \cos(N, x)\frac{\partial f(r)}{\partial z} - \cos(N, z)\frac{\partial f(r)}{\partial x}, \\
W' &= \cos(N, y)\frac{\partial f(r)}{\partial x} - \cos(N, x)\frac{\partial f(r)}{\partial y},
\end{aligned}$$

notre intégrale double pourra s'écrire

$$\mathbf{S}_A\, d\Omega \int_C (U'\, dx' + V'\, dy' + W'\, dz').$$

Une nouvelle application de l'égalité (3) lui donnera la forme

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_A \mathbf{S}_{A'} \Big\{ &\left[\cos(N', z)\frac{\partial U'}{\partial y'} - \cos(N', y)\frac{\partial U'}{\partial z'}\right] \\
&+ \left[\cos(N', x)\frac{\partial V'}{\partial z'} - \cos(N', z)\frac{\partial V'}{\partial x'}\right] \\
&+ \left[\cos(N', y)\frac{\partial W'}{\partial x'} - \cos(N', x)\frac{\partial W'}{\partial y'}\right] \Big\}\, d\Omega\, d\Omega'.
\end{aligned}$$

Or, si l'on se reporte à la signification des fonctions U′, V′, W′, on trouve

$$\cos(\mathrm{N}', y)\frac{\partial \mathrm{W}'}{\partial x'} - \cos(\mathrm{N}', z)\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial x'}$$

$$= [\cos(\mathrm{N}, x)\cos(\mathrm{N}', x) + \cos(\mathrm{N}, y)\cos(\mathrm{N}', y) + \cos(\mathrm{N}, z)\cos(\mathrm{N}', z)]\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial x'}$$

$$- \cos(\mathrm{N}, x)\left[\cos(\mathrm{N}', x)\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial x'} + \cos(\mathrm{N}', y)\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x'} + \cos(\mathrm{N}', z)\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial x'}\right].$$

D'autre part,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial x'} = -\frac{1}{r}\frac{df}{dr} + \left(\frac{x'-x}{r}\right)^2\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{d^2 f}{dr^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x'} = \frac{(x'-x)(y'-y)}{r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{d^2 f}{dr^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial x'} = \frac{(x'-x)(z'-z)}{r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{d^2 f}{dr^2}\right).$$

Nous avons donc

$$\cos(\mathrm{N}', y)\frac{\partial \mathrm{W}'}{\partial x'} - \cos(\mathrm{N}', z)\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial x'}$$

$$= [\cos(\mathrm{N}, x)\cos(\mathrm{N}', x) + \cos(\mathrm{N}, y)\cos(\mathrm{N}', y) + \cos(\mathrm{N}, z)\cos(\mathrm{N}', z)]$$

$$\times\left[\left(\frac{x'-x}{r}\right)^2\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{d^2 f}{dr^2}\right) - \frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right]$$

$$+ \cos(\mathrm{N}, x)\cos(\mathrm{N}', x)\frac{1}{r}\frac{df}{dr}$$

$$- \cos(\mathrm{N}, x)\frac{x'-x}{r}\left[\cos(\mathrm{N}', x)\frac{x'-x}{r} + \cos \mathrm{N}', y\,\frac{y'-y}{r} + \cos(\mathrm{N}', z)\frac{z'-z}{r}\right]$$

$$\times\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{d^2 f}{dr^2}\right)$$

et, par conséquent,

$$\cos(\mathrm{N}', y)\frac{\partial \mathrm{W}'}{\partial x'} - \cos(\mathrm{N}', z)\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial x'}$$

$$+ \cos(\mathrm{N}', z)\frac{\partial \mathrm{U}'}{\partial y'} - \cos(\mathrm{N}', x)\frac{\partial \mathrm{W}'}{\partial y'}$$

$$+ \cos(\mathrm{N}', x)\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial z'} - \cos(\mathrm{N}', y)\frac{\partial \mathrm{U}'}{\partial z'}$$

$$= -[\cos(\mathrm{N}, x)\cos(\mathrm{N}', x) + \cos(\mathrm{N}, y)\cos(\mathrm{N}', y) + \cos(\mathrm{N}, z)\cos(\mathrm{N}', z)]\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr} + \frac{d^2 f}{dr^2}\right)$$

$$- \left[\cos(\mathrm{N}, x)\frac{x'-x}{r} + \cos(\mathrm{N}, y)\frac{y'-y}{r} + \cos(\mathrm{N}, z)\frac{z'-z}{r}\right]$$

$$\times\left[\cos(\mathrm{N}', x)\frac{x'-x}{r} + \cos(\mathrm{N}', y)\frac{y'-y}{r} + \cos(\mathrm{N}', z)\frac{z'-z}{r}\right]\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{d^2 f}{dr^2}\right).$$

Si l'on désigne par r la direction qui mène du point (x, y, z) au point (x', y', z') et si l'on remarque que l'on a

$$\cos(N, N') = \cos(N, x)\cos(N', x) + \cos(N, y)\cos(N', y) + \cos(N, z)\cos(N', z),$$

$$\cos(N, r) = \cos(N, x)\frac{x'-x}{r} + \cos(N, y)\frac{y'-y}{r} + \cos(N', z)\frac{z'-z}{r},$$

$$\cos(N', r) = \cos(N', x)\frac{x'-x}{r} + \cos(N', y)\frac{y'-y}{r} + \cos(N', z)\frac{z'-z}{r},$$

$$\cos\omega = \frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'},$$

on aura

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_C\int_{C'} f(r)\cos\omega\, ds'\, ds \\ &= -\mathbf{S}_A\mathbf{S}_{A'}\left[\cos(N, N')\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr} + \frac{d^2f}{dr^2}\right)\right. \\ &\qquad \left. + \cos(N, r)\cos(N', r)\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{d^2f}{dr^2}\right)\right] d\Omega'\, d\Omega. \end{aligned}\right.$$

Appliquons cette importante identité au cas où

$$f(r) = \frac{1}{r}.$$

Cette fonction satisfera aux conditions imposées si les deux courbes C et C′ et les aires à deux côtés A et A′ passant par ces deux courbes peuvent être respectivement enfermées à l'intérieur de deux domaines D et D′ entièrement extérieurs l'un à l'autre; car alors la distance r d'un point du domaine D à un point du domaine D′ ne pourra devenir égale à 0. Cette condition peut s'énoncer simplement en disant que les deux aires A et A′ n'ont aucun point commun.

Nous aurons

$$\frac{df(r)}{dr} = -\frac{1}{r^2},$$

$$\frac{d^2f(r)}{dr^2} = \frac{2}{r^3}$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{r}\frac{df}{dr} + \frac{d^2f}{dr^2} = \frac{1}{r^3},$$

$$\frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{d^2f}{dr^2} = \frac{3}{r^3}.$$

Nous aurons donc

$$\int_C \int_{C'} \frac{\cos\omega}{r}\,ds'\,ds$$
$$= \mathbf{S}_A \mathbf{S}_{A'} \left[\cos(N, r)\cos(N', r)\frac{d^2\frac{1}{r}}{dr^2} - \frac{\cos(N, r)\cos(N', r) - \cos(N, N')}{r}\frac{d\frac{1}{r}}{dr} \right] d\Omega'\,d\Omega.$$

Or les égalités (5) et (6) du Chap. I donnent

$$\cos(N, r) = -\frac{\partial r}{\partial N}, \qquad \cos(N', r) = \frac{\partial r}{\partial N'},$$
$$\frac{\cos(N, r)\cos(N', r) - \cos(N, N')}{r} = \frac{\partial^2 r}{\partial N\,\partial N'}.$$

D'ailleurs

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{dr^2}\frac{\partial r}{\partial N}\frac{\partial r}{\partial N'} + \frac{d\frac{1}{r}}{dr}\frac{\partial^2 r}{\partial N\,\partial N'} = \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial N\,\partial N'}.$$

Nous arrivons donc à l'identité suivante :

Si ds et ds' sont les éléments de deux courbes fermées C *et* C'; *si $d\Omega$ et $d\Omega'$ sont les éléments d'aires* A, A', *passant par ces deux courbes; si ω est l'angle des deux éléments ds et ds'; si enfin* N *et* N' *sont les normales aux faces positives des deux éléments $d\Omega$ et $d\Omega'$, on a*

$$(6) \qquad \int_C \int_{C'} \frac{\cos\omega}{r}\,ds'\,ds = -\mathbf{S}_A \mathbf{S}_{A'} \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial N\,\partial N'}\,d\Omega\,d\Omega'.$$

Cette importante identité est due à Ampère.

Rappelons-nous qu'elle suppose que les deux aires A, A' n'ont aucun point commun.

La transformation, rendue possible par le théorème de Stokes, d'une intégrale curviligne étendue à une courbe en une intégrale double étendue à l'aire que limite cette courbe, constitue en Physique une méthode entièrement analogue à cette méthode si féconde, rendue générale par l'identité de Green, qui consiste à transformer une intégrale étendue à une surface fermée en une intégrale étendue au volume qu'enferme cette surface. De même, la transformation effectuée par Ampère, d'une intégrale curviligne double en une intégrale quadruple étendue à deux aires, constitue un procédé analogue à la transformation d'une intégrale sextuple étendue à deux volumes en une intégrale quadruple étendue aux surfaces qui limitent ces volumes. On sait quel rôle cette transformation joue dans la théorie de la capillarité de Gauss.

APPENDICE AU LIVRE XIV.

SUR LA LOI D'AMPÈRE.

L'ordre que nous avons suivi pour exposer les lois de l'Induction et de l'Électrodynamique diffère extrêmement de l'ordre habituellement reçu dans les Ouvrages qui traitent de ces sciences. Nous avons donné, au Chapitre V du Livre XIV, les raisons qui imposaient à notre choix le plan que nous avons adopté. Néanmoins, nous pensons que nos Leçons présenteraient une grave lacune si elles ne faisaient connaître, au moins dans leurs grandes lignes, les théories classiques par lesquelles on parvient directement aux lois des actions électrodynamiques entre courants fermés et uniformes. C'est à l'exposé très bref de ces théories qu'est consacré le présent Appendice.

§ 1. — **Loi d'Ampère; démonstration d'Ampère.**

Les divers travaux par lesquels Ampère est arrivé à formuler la loi de l'action qu'un courant fermé et uniforme exerce sur un élément de courant uniforme sont résumés dans le grand Mémoire qu'il a publié en 1826 (¹). La démonstration d'Ampère repose sur six hypothèses et sur trois lois expérimentales.

Première hypothèse. — *Soit un courant uniforme* C *qui agit sur un élément de courant uniforme* ds'. *Décomposons par la pensée le courant* C *en éléments* $ds_1, ds_2, \ldots$ *L'action du courant* C *sur l'élément* ds' *est la résultante d'actions élémentaires exercées par les éléments* $ds_1, ds_2, \ldots$ *sur l'élément* ds'.

Deuxième hypothèse. — *L'action que l'élément* ds *exerce sur l'élément* ds' *est une force, appliquée en un point de l'élément* ds' *et dirigée suivant la ligne qui joint un point de l'élément* ds *à un point de*

(¹) Ampère, *Théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques, uniquement déduite de l'expérience* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1826).

l'élément ds'. L'action de l'élément ds' sur l'élément ds est egale et directement opposée à la précédente.

TROISIÈME HYPOTHÈSE. — *L'action de l'élément ds sur l'élément ds' dépend uniquement des intensités J et J' des courants qui traversent les éléments ds et ds', de la longueur et de la situation relative de ces deux éléments.*

De cette hypothèse, on déduit aisément que la force exercée par l'élément ds sur l'élément ds' est proportionnelle au produit JJ'.

Considérons en effet un premier élément ds_1, traversé par un courant d'intensité J_1. Il exerce sur l'élément ds' une force répulsive que nous représenterons par $f(J_1, J')$.

A l'élément ds_1 accolons un élément ds_2 de même longueur, traversé par un courant d'intensité J_2. Il exercera sur l'élément ds' une action répulsive dont l'expression ne différera de la précédente que par l'échange des quantités J_1, J_2. Cette action aura pour valeur $f(J_2, J')$.

L'ensemble des deux éléments ds_1, ds_2 exerce donc sur l'élément ds' une force répulsive dont la valeur est

$$f(J_1, J') + f(J_2, J').$$

Mais cet ensemble peut être regardé comme un élément unique, de même longueur que chacun des deux précédents, placé comme chacun des deux précédents et parcouru par un courant d'intensité $(J_1 + J_2)$. L'action de cet élément sur l'élément ds' doit donc avoir pour valeur

$$f(J_1 + J_2, J').$$

On a, par conséquent, l'identité

$$f(J_1, J') + f(J_2, J') = f(J_1 + J_2, J'),$$

identité qui démontre que l'action de l'élément ds sur l'élément ds' est proportionnelle à J. On démontrerait de même qu'elle est proportionnelle à J' et, par conséquent, au produit JJ'.

L'hypothèse précédente prouve également que l'action exercée par l'élément ds sur l'élément ds' est proportionnelle au produit $ds\, ds'$.

Imaginons, en effet, qu'un premier élément ds_1, traversé par un courant d'intensité J, exerce sur l'élément ds', traversé par un courant d'intensité J', une répulsion que nous représenterons par $f(ds_1, ds')$.

Prolongeons l'élément ds_1 d'une longueur infiniment petite ds_2. Supposons l'élément ds_2 traversé, lui aussi, par un courant d'intensité J. Il exercera sur l'élément ds' une action répulsive dont la direction sera sensiblement la même que la précédente et dont la valeur sera sensiblement $f(ds_2, ds')$.

L'ensemble des deux éléments ds_1, ds_2 exerce donc sur l'élément ds' une force répulsive dont la valeur est

$$f(ds_1, ds') + f(ds_2, ds')$$

Mais, d'autre part, l'ensemble de ces deux éléments peut être considéré comme un élément unique, de longueur $(ds_1 + ds_2)$, de même intensité, de même position que chacun des éléments ds_1, ds_2. Son action répulsive sur l'élément ds' peut donc s'écrire

$$f(ds_1 + ds_2, ds').$$

On a, par conséquent, l'identité

$$f(ds_1, ds') + f(ds_2, ds') = f(ds_1 + ds_2, ds'),$$

identité qui démontre que l'action de l'élément ds sur l'élément ds' est proportionnelle à ds; on démontrerait de même que cette action est proportionnelle à ds', et, par conséquent, au produit $ds\,ds'$.

Les propositions que nous venons de démontrer conduisent à la conclusion suivante : *L'action que l'élément ds, parcouru par un courant uniforme d'intensité* J, *exerce sur un élément ds', parcouru par un courant uniforme d'intensité* J', *action comptée positivement lorsqu'elle est répulsive, a pour valeur*

$$F = JJ'\Phi\, ds\, ds', \tag{1}$$

Φ dépendant seulement de la situation relative des deux éléments ds, ds', et point de leur longueur.

Quatrième hypothèse [1]. — *Les deux éléments $MM_1 = ds_1$, $MM_2 = ds_2$, issus d'un même point* M, *ayant même longueur, parcourus par des courants de même intensité, exercent même action sur l'élément $M'M'_1 = ds'$, s'ils sont symétriques l'un de l'autre par rapport au plan $MM'M'_1$.*

Si l'on se reporte alors aux considérations exposées plus haut (Introduction, Chap. I, § I), on voit que cette hypothèse entraîne la conséquence suivante :

La fonction Φ est une fonction uniforme des quatre variables

$$r, \quad \cos\theta, \quad \cos\theta', \quad \cos\omega,$$

$$\Phi = \varphi(r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega). \tag{2}$$

Première loi expérimentale (principe des courants sinueux). — *Lorsqu'un courant fermé et uniforme parcourt le contour d'une aire à deux côtés, dont toutes les dimensions sont infiniment petites, l'action*

---

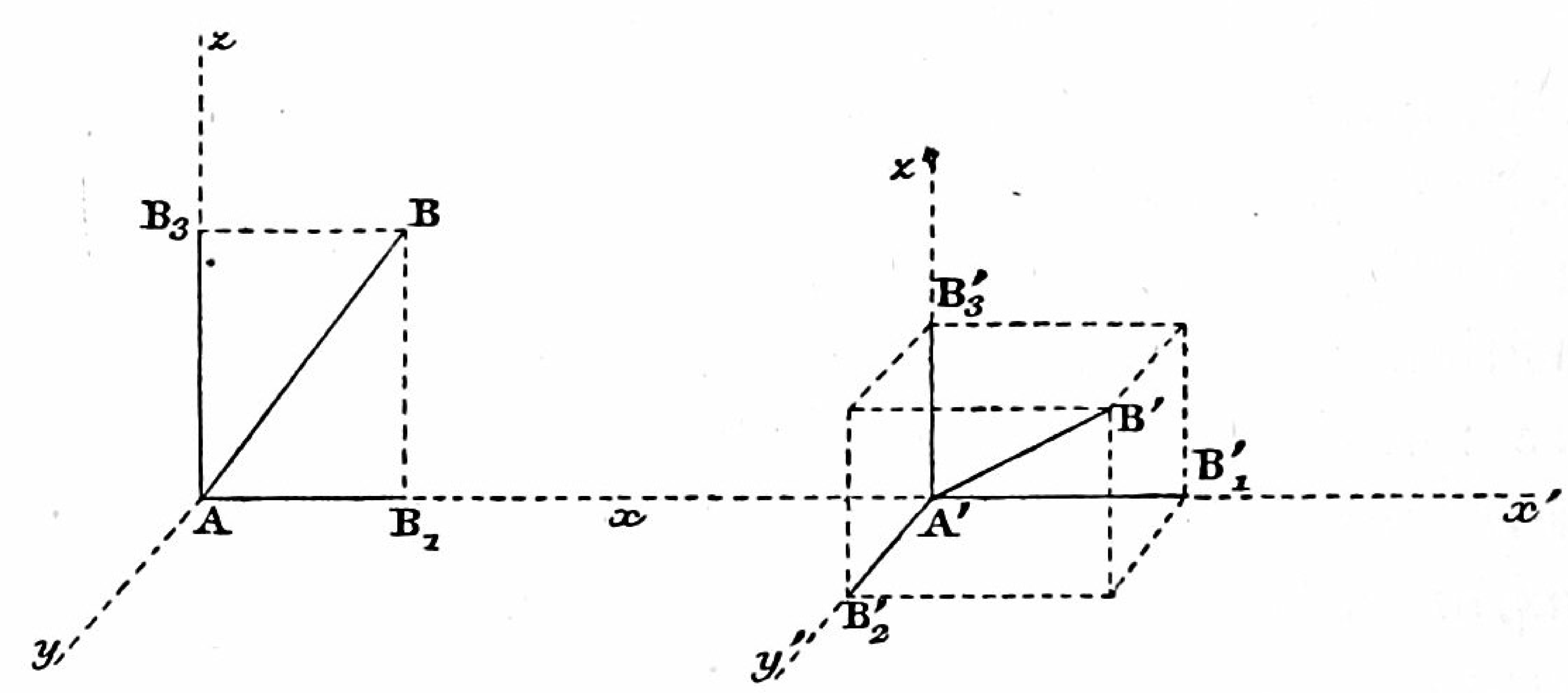
[1] Cette hypothèse, ou du moins un cas particulier de cette hypothèse, suffisant pour la démonstration, est indiquée par Ampère (*Théorie mathématique...*, réimpression A. Hermann, p. 20) comme un *théorème;* mais la démonstration de ce théorème implique une autre hypothèse sur l'action mutuelle de deux courants rectangulaires. Le caractère hypothétique de cette proposition saute aux yeux si l'on observe qu'on obtiendrait une erreur en énonçant la même proposition après avoir remplacé l'élément de *courant* $M'M'_1$ par un *élément magnétique* $M'M'_1$.

de ce courant sur un élément de courant quelconque est infiniment petite comme le produit de la longueur de l'élément qui subit l'action par l'aire qu'embrasse le circuit agissant.

Il est inutile de rappeler ici l'expérience classique par laquelle Ampère a démontré cette proposition.

Cette proposition admise, considérons deux éléments $AB = ds$ et $A'B' = ds'$ (*fig.* 57).

Fig. 57.



Pour direction des axes Ax, Ax', prenons la droite AA'. Dans le demi-plan BAA', menons la normale à la droite AA' et prenons-la pour direction des axes Az, $A'z'$. Menons une normale au plan BAA', du côté de ce plan où se trouve l'élément A'B'. Prenons-la pour direction des axes Ay, $A'y'$.

Soient AB_1, AB_3 les projections de AB sur Ax et sur Az.

L'aire AB_1B étant infiniment petite par rapport à ds, l'action d'un courant uniforme d'intensité J, parcourant le circuit AB_1BA, sur l'élément ds', parcouru par un courant d'intensité J', est infiniment petite par rapport à $JJ'\,ds\,ds'$. L'action des deux éléments AB_1 et B_1B, réduite aux quantités de l'ordre de $JJ'\,ds\,ds'$, équivaut à l'action de l'élément AB sur l'élément ds'. L'élément B_1B peut, lui-même, être remplacé par l'élément AB_3.

On prouverait, par un raisonnement analogue, qu'au lieu de déterminer l'action d'un élément quelconque sur l'élément A'B', on peut déterminer les actions du même élément sur les éléments $A'B'_1$, $A'B'_2$, $A'B'_3$ et composer entre elles ces dernières actions.

Nous sommes donc ramené à évaluer l'action de chacun des deux éléments

$$AB_1 = ds\cos\theta,$$
$$AB_3 = ds\sin\theta,$$

sur chacun des trois éléments

$$A'B'_1 = ds'\cos\theta',$$
$$A'B'_2 = ds'\sin\theta'\sin\varepsilon,$$
$$A'B'_3 = ds'\sin\theta'\cos\varepsilon.$$

En raisonnant comme au Livre XIII, Chapitre II, nous prouverons que l'on peut négliger

L'action de AB_1 sur $A'B'_2$,
L'action de AB_1 sur $A'B'_3$,
L'action de AB_3 sur $A'B'_1$,
L'action de AB_3 sur $A'B'_2$.

Si nous désignons alors l'action répulsive de AB_1 sur $A'B'_1$ par

$$JJ' f(r) \overline{AB_1} . \overline{A'B'_1},$$

et l'action rép ulsive de AB_3 sur $A'B'_3$ par

$$JJ' g(r) \overline{AB_3} . \overline{A'B'_3},$$

nous aurons

$$F = JJ'\, ds\, ds' [f(r) \cos\theta \cos\theta' + g(r) \sin\theta \sin\theta' \cos\varepsilon], \tag{3}$$

ou bien encore, en remarquant que l'on a [Introduction, Chap. I, égalité (8)]

$$\sin\theta \sin\theta' \cos\varepsilon = \cos\omega - \cos\theta \cos\theta',$$

et en posant

$$h(r) = f(r) - g(r),$$

$$F = JJ'\, ds\, ds' [h(r) \cos\theta \cos\theta' + g(r) \cos\omega]. \tag{3 bis}$$

Deuxième loi expérimentale. — *L'action qu'un courant fermé et uniforme quelconque exerce sur un élément de courant est normale à cet élément.*

Soit ds un élément du circuit agissant. Soit ds' l'élément sur lequel s'exerce l'action.

L'élément ds exerce sur l'élément ds' une action dont la composante suivant ds' a pour valeur

$$F \cos\theta'.$$

Le circuit agissant tout entier exercera donc sur l'élément ds' une action dont la composante suivant l'élément ds' aura pour valeur

$$\sum F \cos\theta',$$

ou bien, d'après l'égalité (3),

$$JJ'\, ds' \int [f(r) \cos\theta \cos\theta' + g(r) \sin\theta \sin\theta' \cos\varepsilon] \cos\theta'\, ds.$$

Pour que la proposition précédente soit exacte, il faut et il suffit que cette quantité soit égale à o.

Or on a [Introduction, Chap. I, égalités (5) et (9)]

$$\cos\theta = -\frac{\partial r}{\partial s}, \qquad \cos\theta' = \frac{\partial r}{\partial s'},$$

$$\sin\theta \sin\theta' \cos\varepsilon = -r \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}.$$

Par conséquent, pour que la proposition précédente soit exacte, il faut et il suffit que l'intégrale

$$\int \left[f(r) \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} + r\, g(r) \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} \right] \frac{\partial r}{\partial s'}\, ds,$$

étendue à une courbe fermée quelconque, soit égale à o.

Cette égalité peut encore s'écrire de la manière suivante

$$\int_s \left[f(r) \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 dr + \frac{1}{2} r\, g(r)\, d\left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 \right] = 0.$$

Si l'on observe que, lorsque l'on parcourt le circuit s, les deux quantités r et $\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2$ varient d'une manière continue, on arrive à la conclusion suivante :

Pour que l'égalité précédente ait lieu, il faut et il suffit que la quantité

$$f(r) \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 dr + \frac{1}{2} r\, g(r)\, d\left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2$$

soit la différentielle totale d'une fonction uniforme et continue de r et de $\frac{\partial r}{\partial s'}$.

Cette condition est traduite par l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2} \left[f(r) \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{2} r\, g(r) \right]$$

ou

$$(4) \qquad 2 f(r) = \frac{d}{dr} [r\, g(r)].$$

En vertu de cette égalité (4), l'égalité (3) devient

$$(5) \quad F = JJ'\, ds\, ds' \left\{ g(r) \sin\theta \sin\theta' \cos\varepsilon + \frac{1}{2} \frac{d}{dr} [r\, g(r)] \cos\theta \cos\theta' \right\}.$$

Cinquième hypothèse. — *La fonction $g(r)$ est de la forme*

$$g(r) = \frac{A}{r^n},$$

A étant une constante et n un nombre entier et positif.

L'égalité (5) prend alors la forme

$$(6) \qquad F = \frac{AJJ'\, ds\, ds'}{r^n} \left(\sin\theta \sin\theta' \cos\varepsilon - \frac{n-1}{2} \cos\theta \cos\theta' \right).$$

Troisième loi expérimentale. — *Dans deux systèmes électrodynamiques semblables, les actions qui s'exercent sur deux éléments ho-*

mologues sont les mêmes, si les intensités des courants qui traversent les divers conducteurs sont les mêmes.

Soient deux systèmes électrodynamiques semblables S et S_1, le rapport de similitude du second au premier étant k.

Dans le premier S, l'élément ds' supporte, de la part de l'élément ds, une action répulsive donnée par la formule (6).

Dans le second, S_1, considérons les deux éléments ds_1, ds'_1, homologues de ds, ds'; l'élément ds'_1 subit, de la part de l'élément ds_1, une force répulsive F_1 donnée par la formule

$$(7)\qquad F_1 = \frac{AJJ'\,ds_1\,ds'_1}{r_1^n}\left(\sin\theta_1\sin\theta'_1\cos\varepsilon_1 - \frac{n-1}{2}\cos\theta_1\cos\theta'_1\right).$$

Mais on a

$$\theta_1 = \theta,\qquad \theta'_1 = \theta',\qquad \varepsilon_1 = \varepsilon,$$
$$ds_1 = k\,ds,\qquad ds'_1 = k\,ds',\qquad r_1 = kr.$$

La formule (7), comparée à la formule (6), donne donc

$$F_1 = k^{2-n}F.$$

Les actions élémentaires subies par un élément ds'_1 du système S_1 forment donc un système semblable à celui des actions élémentaires qui agissent sur l'élément homologue ds' du système S, le rapport de similitude étant k^{2-n}.

Or ces deux systèmes doivent avoir des résultantes égales l'une à l'autre. Il faut donc que l'on ait

$$k^{2-n} = 1$$

ou

$$n = 2.$$

Cette relation, portée dans la formule (6), donne

$$(8)\qquad F = \frac{AJJ'\,ds\,ds'}{r^2}\left(\sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon - \frac{1}{2}\cos\theta\cos\theta'\right).$$

SIXIÈME HYPOTHÈSE. — *Deux éléments de courant parallèles, de même sens, perpendiculaires à la droite qui les joint, s'attirent.*

Dans ce cas, on a

$$\cos\theta = 0,\qquad \cos\theta' = 0,$$
$$\sin\theta = 1,\qquad \sin\theta' = 1,\qquad \cos\varepsilon = 1.$$

La formule (8) doit donner pour F une valeur négative. La constante A doit donc avoir une valeur négative.

Si nous posons

$$-A = \mathfrak{A}^2,$$

la formule (8) devient

$$(9) \qquad F = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{JJ'\,ds\,ds'}{r^2}(\cos\theta\cos\theta' - 2\sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon).$$

C'est, comme nous l'avons vu [Livre XIV, Chap. X, égalité (7)], une des formes de la loi d'Ampère.

§ 2. — Loi d'Ampère; démonstration de M. J. Bertrand.

La démonstration d'Ampère repose sur l'emploi de trois lois expérimentales. M. J. Bertrand (¹) a montré que la seconde loi expérimentale invoquée par Ampère impliquait la première, le *principe des courants sinueux,* en sorte que cette première loi expérimentale ne devait plus être conservée à titre de principe.

La démonstration donnée par M. J. Bertrand est la suivante :

Les quatre premières hypothèses d'Ampère entraînent les égalités (1) et (2), c'est-à-dire la proposition suivante :

L'action répulsive de l'élément ds sur l'élément ds' est donnée par la formule

$$(10) \qquad F = JJ'\,ds\,ds'\,\varphi(r, \cos\theta, \cos\theta', \cos\omega).$$

Les égalités [Introduction, Chap. I, égalités (5) et (7)]

$$\cos\theta = -\frac{\partial r}{\partial s},$$

$$\cos\theta' = \frac{\partial r}{\partial s'},$$

$$\cos\omega = -\left(\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right)$$

permettent de mettre cette égalité sous la forme

$$(11) \qquad F = JJ'\,ds\,ds'\,\psi\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right).$$

Invoquons maintenant la seconde des lois expérimentales prises, par Ampère, comme principes. Nous avons vu que cette loi s'exprimait par la condition suivante : La somme $\sum F\cos\theta'$, étendue à tous les éléments ds d'un courant fermé et uniforme, est égale à o.

En vertu de l'égalité (9), cette condition peut encore s'énoncer ainsi :

(¹) J. Bertrand, *Sur la démonstration de la formule qui représente l'action élémentaire de deux courants* (*Comptes rendus,* t. LXXV, p. 733; 1872). — *Démonstration des théorèmes relatifs aux actions électrodynamiques* (*Journal de Physique,* 1^{re} série, t. III, p. 297; 1874). — *Leçons sur la théorie mathématique de l'Électricité,* professées au Collège de France, p. 166. Paris, 1890.

L'intégrale

$$\int \psi\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}\right) \frac{\partial r}{\partial s'} ds,$$

étendue à une courbe fermée quelconque, est égale à o.

Les quantités r et $\frac{\partial r}{\partial s'}$ varient assurément d'une manière continue lorsque l'on parcourt une courbe s, tandis que les quantités $\frac{\partial r}{\partial s'}$ et $\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}$ peuvent varier d'une manière discontinue quelconque dans le cas où cette courbe présente des points anguleux. Pour que l'énoncé précédent ne soit pas une erreur, il faut et il suffit que l'on ait

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} &\psi\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}\right) \frac{\partial r}{\partial s'} ds \\ &\quad = \frac{\partial \Psi\left(r, \frac{\partial r}{\partial s'}\right)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial s} ds + \frac{\partial \Psi\left(r, \frac{\partial r}{\partial s'}\right)}{\partial\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)} \frac{\partial^2 r}{\partial s'\, \partial s} ds, \end{aligned}\right.$$

$\Psi\left(r, \frac{\partial r}{\partial s'}\right)$ étant une fonction uniforme et continue des variables r, $\frac{\partial r}{\partial s'}$ et ne dépendant pas des variables $\frac{\partial r}{\partial s}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}$.

Le second membre de l'identité (12) est linéaire et homogène en $\frac{\partial r}{\partial s}$ et $\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}$. Il en doit être assurément de même du premier. Donc la fonction

$$\psi\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}\right)$$

est linéaire et homogène en $\frac{\partial r}{\partial s}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}$.

La loi de l'égalité de l'action et de la réaction, qui constitue la deuxième hypothèse d'Ampère, entraîne immédiatement cette conséquence : la fonction ψ ne doit pas changer lorsqu'on permute les lettres s et s'. La fonction ψ est donc aussi linéaire et homogène en $\frac{\partial r}{\partial s'}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}$.

Ainsi on doit avoir

$$\psi = \mathrm{A} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} + \mathrm{B} \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'},$$

les deux quantités A et B étant indépendantes des variables

$$\frac{\partial r}{\partial s}, \quad \frac{\partial r}{\partial s'}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}$$

et, par conséquent, ne dépendant que de la quatrième variable dont peut dépendre ψ, la variable r. On a donc

$$\psi = \mathrm{A}(r)\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + \mathrm{B}(r)\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}$$

ou bien, d'après l'égalité (11),

$$\mathrm{F} = \mathrm{JJ}'\,ds\,ds'\left[\mathrm{A}(r)\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + \mathrm{B}(r)\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right]. \tag{13}$$

Comme nous avons

$$\frac{\partial r}{\partial s} = -\cos\theta, \qquad \frac{\partial r}{\partial s'} = \cos\theta', \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} = -\frac{\sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon}{r},$$

si nous posons

$$\mathrm{A}(r) = -f(r),$$
$$\mathrm{B}(r) = -\frac{1}{r}g(r),$$

l'égalité (12) reproduira l'égalité

$$\mathrm{F} = \mathrm{JJ}'\,ds\,ds'[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon]. \tag{3}$$

Or il est aisé de voir que cette égalité (3) est exactement équivalente au principe des courants sinueux.

Nous avons déjà vu, en effet, que, le principe des courants sinueux, joint aux trois premières hypothèses d'Ampère, entraînait l'égalité (3). Prouvons maintenant que, de l'égalité (3), on peut déduire le principe des courants sinueux.

Faisons choix d'un système de coordonnées rectangulaires quelconques. Soient (x, y, z) un point de l'élément ds et (x', y', z') un point de l'élément ds'. Un circuit fermé s exercera sur l'élément ds' une force dont les trois composantes seront

$$\mathrm{X}\,ds' = \mathrm{JJ}'\,ds'\int[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon]\frac{x'-x}{r}\,ds,$$
$$\mathrm{Y}\,ds' = \mathrm{JJ}'\,ds'\int[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon]\frac{y'-y}{r}\,ds,$$
$$\mathrm{Z}\,ds' = \mathrm{JJ}'\,ds'\int[f(r)\cos\theta\cos\theta' + g(r)\sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon]\frac{z'-z}{r}\,ds,$$

égalités qui peuvent encore s'écrire

$$\left\{\begin{aligned}
\mathrm{X}\,ds' &= \mathrm{JJ}'\,ds'\int\left[\mathrm{A}(r)\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + \mathrm{B}(r)\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right]\frac{x'-x}{r}\,ds,\\
\mathrm{Y}\,ds' &= \mathrm{JJ}'\,ds'\int\left[\mathrm{A}(r)\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + \mathrm{B}(r)\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right]\frac{y'-y}{r}\,ds,\\
\mathrm{Z}\,ds' &= \mathrm{JJ}'\,ds'\int\left[\mathrm{A}(r)\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + \mathrm{B}(r)\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right]\frac{z'-z}{r}\,ds.
\end{aligned}\right. \tag{14}$$

Soit (ξ, η, ζ) un point fixe pris sur le circuit s; soit ρ la distance de ce point au point (x', y', z').

Supposons que le circuit s soit le contour d'une aire convexe dont toutes les dimensions sont infiniment petites du premier ordre. On voit sans peine que nous pourrons, en altérant seulement X, Y, Z de quantités infiniment petites du second ordre, remplacer les égalités (14) par les suivantes :

$$\mathrm{X}\,ds' = \mathrm{JJ}'\,ds'\left[\mathrm{A}(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial s'}\,\frac{x'-\xi}{\rho}\int\frac{\partial r}{\partial s}\,ds + \mathrm{B}(\rho)\frac{x'-\xi}{\rho}\int\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\,ds\right],$$

$$\mathrm{Y}\,ds' = \mathrm{JJ}'\,ds'\left[\mathrm{A}(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial s'}\,\frac{y'-\eta}{\rho}\int\frac{\partial r}{\partial s}\,ds + \mathrm{B}(\rho)\frac{y'-\eta}{\rho}\int\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\,ds\right],$$

$$\mathrm{Z}\,ds' = \mathrm{JJ}'\,ds'\left[\mathrm{A}(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial s'}\,\frac{z'-\zeta}{\rho}\int\frac{\partial r}{\partial s}\,ds + \mathrm{B}(\rho)\frac{z'-\zeta}{\rho}\int\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\,ds\right].$$

Les deux quantités r et $\frac{\partial r}{\partial s'}$ variant d'une manière continue le long de la courbe s, on a pour toute courbe fermée

$$\int\frac{\partial r}{\partial s}\,ds = 0, \qquad \int\frac{\partial}{\partial s}\,\frac{\partial r}{\partial s'}\,ds = 0,$$

et les égalités précédentes deviennent

$$\mathrm{X} = 0, \qquad \mathrm{Y} = 0, \qquad \mathrm{Z} = 0.$$

Il suffit d'altérer les trois quantités X, Y, Z de quantités infiniment petites du même ordre que l'aire embrassée par le circuit fermé pour les rendre égales à o. Ces quantités X, Y, Z sont donc des infiniment petits du même ordre que cette aire, ce qui est le principe des courants sinueux.

Ainsi les quatre premières hypothèses et la deuxième loi expérimentale invoquée par Ampère entraînent le principe des courants sinueux. Il en résulte que l'on peut se passer de ce dernier pour établir la loi d'Ampère.

En effet, dans la démonstration de la loi d'Ampère, le principe des courants sinueux sert seulement à établir l'égalité (3) et nous venons de voir que cette égalité (3) pouvait être établie sans invoquer le principe des courants sinueux.

§ 3. — Du sens véritable qu'il convient d'attribuer au principe des courants sinueux.

Aux démonstrations des propositions que nous venons d'établir, M. J. Bertrand [1] joint les considérations suivantes :

« On me permettra d'ajouter une remarque relative à la probabilité de

[1] J. Bertrand, *Démonstration des théorèmes relatifs aux actions électrodynamiques* (*Journal de Physique*, 1re série, t. III, p. 300; 1874).

l'hypothèse fondamentale, si naturelle en elle-même, acceptée par Ampère : l'action de deux éléments est dirigée suivant la droite qui les joint.

» Supposons qu'Ampère, qui a découvert expérimentalement la première et la deuxième loi, ait vérifié et énoncé d'abord la deuxième loi, et que, par le raisonnement seul, ainsi que nous l'avons fait, il en ait déduit la première loi; il aurait pu dire : si l'action de deux éléments est, comme cela me paraît vraisemblable, dirigée suivant la droite qui les joint, il faut nécessairement qu'un conducteur sinueux exerce la même action qu'un conducteur rectiligne suivant la même direction. L'expérience, venant ensuite confirmer cette prévision, n'aurait-elle pas été regardée avec raison comme une très forte preuve en faveur de l'hypothèse qui y conduit? L'ordre dans lequel les vérités ont été découvertes et l'époque à laquelle a été signalée leur dépendance mutuelle changent-ils quelque chose à leur probabilité? »

En réalité, à regarder les choses de près, la classique expérience d'Ampère, sur l'action des courants sinueux, ne saurait avoir la portée que M. J. Bertrand lui attribue dans le passage que nous venons de citer.

Conservons la première hypothèse d'Ampère; laissons de côté la deuxième, et modifions la troisième de la manière suivante :

La grandeur et la direction de l'action exercée par l'élément ds sur l'élément ds' dépendent uniquement des intensités des courants qui traversent ces deux éléments, de leurs longueurs et de leur situation relative.

Nous allons voir que ces deux hypothèses, les moins contestables de tous les principes sur lesquels repose la théorie d'Ampère, entraînent la loi relative aux courants sinueux; en sorte que la vérification expérimentale de cette loi vérifie seulement les deux hypothèses dont il s'agit.

Considérons un élément ds', de position donnée par rapport aux axes OX, OY, OZ. Les composantes de l'action de l'élément ds sur l'élément ds' peuvent être mises, en vertu des deux hypothèses précédentes, sous la forme suivante :

$$X\,ds = JJ'\,\Phi\,ds\,ds',$$
$$Y\,ds = JJ'\,\Psi\,ds\,ds',$$
$$Z\,ds = JJ'\,X\,ds\,ds',$$

les trois quantités Φ, Ψ, X étant, pour une direction donnée de l'élément ds', des fonctions des éléments qui fixent la situation relative des deux éléments ds, ds'.

De ces égalités, on déduit immédiatement le résultat suivant :

Les trois fonctions Φ, Ψ, X *changent de signe, sans changer de valeur absolue, lorsqu'on renverse le sens de parcours de l'élément ds sans changer le sens de parcours de l'élément ds'.*

A ce théorème, joignons ces deux propositions évidentes :

1° *L'action d'un courant fermé et uniforme quelconque sur un élé-*

ment ds' quelconque est le produit de ds' par une quantité finie, en sorte qu'il en doit être de même des trois quantités

$$\int \Phi\, ds, \quad \int \Psi\, ds, \quad \int X\, ds,$$

où les intégrations s'étendent au courant fermé.

2° *Les intégrales*

$$\int \Phi\, ds, \quad \int \Psi\, ds, \quad \int X\, ds,$$

étendues à un contour fermé infiniment petit, varient d'une manière continue, lorsque ce contour se déforme et se déplace d'une manière continue.

Par un raisonnement semblable à celui qui a été exposé aux pages 98-99, nous arriverons à la conclusion suivante :

Les trois intégrales

$$\int \Phi\, ds, \quad \int \Psi\, ds, \quad \int X\, ds$$

sont infiniment petites du second ordre, lorsque l'intégrale

$$\int ds$$

est infiniment petite du premier ordre.

Cette proposition, on le voit aisément, n'est autre chose que le principe des courants sinueux.

§ 4. — Du potentiel électrodynamique.

Supposons que deux conducteurs fermés soient en présence.

L'action répulsive mutuelle d'un élément ds du premier conducteur et d'un élément ds' du second, est, en désignant par J, J′ les intensités des courants qui les traversent,

$$F = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{JJ'\, ds\, ds'}{r^2} (\cos\theta \cos\theta' - 2 \sin\theta \sin\theta' \cos\varepsilon). \tag{9}$$

Mais on a

$$\sin\theta \sin\theta' \cos\varepsilon = \cos\omega - \cos\theta \cos\theta'.$$

On peut donc écrire

$$F = \mathfrak{A}^2 \frac{JJ'\, ds\, ds'}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos\theta \cos\theta' - \cos\omega\right).$$

Si, dans une modification, la distance r augmente de δr, cette action mutuelle effectue un travail

$$F\, \delta r,$$

et les actions mutuelles des deux conducteurs effectuent un travail

$$(15) \qquad d\mathfrak{T} = \mathfrak{A}^2 JJ' \int\int \frac{1}{r^2}\left(\frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta' - \cos\omega\right)\delta r\, ds\, ds'.$$

Nous avons démontré d'une manière entièrement générale [Appendice au Livre XIII, égalité (27)] que cette égalité peut s'écrire

$$(16) \qquad d\mathfrak{T} = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} JJ'\,\delta\int\int \frac{1}{r}\cos\theta\cos\theta'\, ds\, ds',$$

ce qui peut encore s'écrire [Introduction, Chap. I, égalité (10)]

$$(16\ bis) \qquad d\mathfrak{T} = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} JJ'\,\delta\int\int \frac{1}{r}\cos\omega\, ds\, ds'.$$

D'après les égalités (16) et (16 *bis*), *les actions mutuelles de deux courants fermés et uniformes d'intensités invariables admettent un potentiel, que l'on peut représenter à volonté par l'une des deux expressions*

$$(17) \qquad \Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} JJ' \int\int \frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\, ds\, ds',$$

$$(17\ bis) \qquad \Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} JJ' \int\int \frac{\cos\omega}{r}\, ds\, ds'.$$

Ce théorème fondamental a été, pour la première fois, démontré par F.-E. Neumann (1).

Ce théorème, nous l'avons vu, renferme la solution de tous les problèmes que peut poser l'étude expérimentale des courants uniformes. On peut donc se demander s'il n'est pas possible de l'obtenir directement sans passer par l'intermédiaire de la loi d'Ampère. On peut, en effet, en donner la démonstration suivante, qui repose sur cinq hypothèses et sur une loi expérimentale.

Première hypothèse. — *Les actions mutuelles de deux courants fermés et uniformes dont les intensités sont maintenues constantes admettent un potentiel.*

Deuxième hypothèse. — *Ce potentiel est de la forme*

$$\Pi = \sum \Psi_{12},$$

la quantité Ψ_{12} *dépendant des intensités* J_1, J_2 *des courants qui traversent les éléments* ds_1, ds_2, *des longueurs de ces éléments, et des pa-*

(1) F.-E. Neumann, *Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme*, lu à l'Académie de Berlin, le 9 août 1847.

ramètres qui fixent leur situation relative; le signe $\sum$ *est supposé s'étendre à toutes les combinaisons obtenues en prenant un élément du premier circuit et un élément du second.*

TROISIÈME HYPOTHÈSE. — *La quantité* Ψ_{12} *ne change pas si l'on remplace l'élément* ds_2 *par l'élément* ds'_2, *symétrique de* ds_2 *par rapport à un plan renfermant l'élément* ds_1 *et un point de l'élément* ds_2.

Des raisonnements, analogues à ceux que nous avons exposés au début du § 1, nous prouveront que Ψ_{12} est de la forme

$$\Psi_{12} = \Phi_{12} J_1 J_2 \, ds_1 \, ds_2,$$

Φ_{12} dépendant seulement de la position mutuelle des deux éléments ds_1, ds_2.

Des considérations semblables à celles du paragraphe précédent nous montreront que la quantité $\int \Phi_{12} \, ds_1$ est infiniment petite du second ordre, lorsque $\int ds_1$ est infiniment petit du premier ordre, et que la quantité $\int \Phi_{12} \, ds_2$ est infiniment petite du second ordre, lorsque $\int ds_2$ est infiniment petit du premier ordre.

En raisonnant alors comme nous l'avons fait aux pages 102 à 105, nous verrons que

$$\Psi_{12} = J_1 J_2 \, ds_1 \, ds_2 [F(r) \cos\theta_1 \cos\theta_2 + G(r) \cos\omega]. \tag{18}$$

QUATRIÈME HYPOTHÈSE. — *Les deux fonctions* $F(r)$ *et* $G(r)$ *sont de la forme*

$$F(r) = \frac{A}{r^n}, \qquad G(r) = \frac{B}{r^n},$$

n étant un nombre entier et positif, et A *et* B, *deux constantes.*

Ces égalités donnent à l'égalité (18) la forme

$$\Psi_{12} = \frac{J_1 J_2 \, ds_1 \, ds_2}{r^n} (A \cos\theta_1 \cos\theta_2 + B \cos\omega). \tag{19}$$

LOI EXPÉRIMENTALE : *La troisième loi expérimentale invoquée par Ampère.* — Considérons deux conducteurs fermés C_1, C_2, traversés par des courants uniformes d'intensités J_1, J_2. Donnons aux divers points (x, y, z), ... du conducteur C_2 un système de déplacements virtuels δx, δy, δz, ...

Les actions du conducteur C_1 sur le conducteur C_2 effectuent un travail virtuel

$$d\mathfrak{T} = - J_1 J_2 \, \delta \int\int \frac{A \cos\theta_1 \cos\theta_2 + B \cos\omega}{r^n} \, ds_1 \, ds_2. \tag{20}$$

Considérons ensuite deux conducteurs C'_1, C'_2, semblables aux conducteurs C_1, C_2 et semblablement placés. Soit K le rapport de similitude du second système au premier. Donnons au point (x', y', z'), homologue, sur le conducteur C'_2, du point (x, y, z) du conducteur C_2, un déplacement virtuel

$$\delta x' = K\,\delta x, \qquad \delta y' = K\,\delta y, \qquad \delta z' = K\,\delta z.$$

Le travail virtuel, effectué par les actions du conducteur C'_1 sur le conducteur C'_2, aura pour valeur

$$(21) \qquad d\mathfrak{T}' = -J_1 J_2\, \delta \int\int \frac{A \cos\theta'_1 \cos\theta'_2 + B \cos\omega'}{r'^n}\, ds'_1\, ds'_2.$$

Il est facile de voir que l'on a

$$\begin{array}{lll} \cos\theta'_1 = \cos\theta_1, & \cos\theta'_2 = \cos\theta_2, & \cos\omega' = \cos\omega, \\ r' = K r, & ds'_1 = K\, ds_1, & ds'_2 = K\, ds_2, \\ \delta\cos\theta'_1 = \delta\cos\theta_1, & \delta\cos\theta'_2 = \delta\cos\theta_2, & \delta\cos\omega' = \delta\cos\omega, \\ \delta r' = K\,\delta r, & \delta\, ds'_1 = K\,\delta\, ds_1, & \delta\, ds'_2 = K\,\delta\, ds_2, \end{array}$$

en sorte que l'égalité (21), comparée à l'égalité (20), donne

$$d\mathfrak{T}' = K^{(2-n)}\, d\mathfrak{T}.$$

Mais, l'action subie par un élément des conducteurs C'_1, C'_2 étant supposée égale à l'action subie par l'élément homologue des conducteurs C_1, C_2, on doit évidemment avoir

$$d\mathfrak{T}' = K\, d\mathfrak{T}.$$

On a donc

$$n = 1,$$

et la formule (19) devient

$$\Psi_{12} = \frac{J_1 J_2\, ds_1\, ds_2}{r} (A \cos\theta_1 \cos\theta_2 + B \cos\omega).$$

Le potentiel électrodynamique mutuel de deux courants fermés et uniformes a, par conséquent, pour valeur

$$\Pi = JJ' \int\int \frac{A \cos\theta \cos\theta' + B \cos\omega}{r}\, ds\, ds'.$$

Si l'on observe que l'on a [Introduction, Chap. I, égalité (10)]

$$\int\int \frac{\cos\theta \cos\theta'}{r}\, ds\, ds' = \int\int \frac{\cos\omega}{r}\, ds\, ds',$$

on voit que l'on pourra écrire à volonté

$$(22) \qquad \Pi = (A + B) JJ' \int\int \frac{\cos\theta \cos\theta'}{r}\, ds\, ds',$$

ou

$$(22\ bis) \qquad \Pi = (A + B) JJ' \int\int \frac{\cos\omega}{r}\, ds\, ds'.$$

CINQUIÈME HYPOTHÈSE. — *La constante* (A + B) *est négative.*

Si l'on pose alors

$$A + B = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2},$$

les égalités (22) et (22 *bis*) redonnent les égalités (17) et (17 *bis*).

§ 5. — Sur la détermination de la fonction de la distance qui figure dans la formule d'Ampère.

La formule des actions électrodynamiques étant mise sous la forme

$$(5) \quad F = JJ' \, ds \, ds' \left\{ g(r) \sin\theta \sin\theta' \cos\varepsilon + \frac{1}{2} \frac{d}{dr}[rg(r)] \cos\theta \cos\theta' \right\},$$

Ampère fait l'hypothèse que la fonction $g(r)$ est de la forme

$$g(r) = \frac{A}{r^n},$$

A étant une constante, et n, un nombre entier positif. Cette hypothèse semble fort arbitraire. On peut la remplacer par une loi expérimentale facile à vérifier, comme l'a montré M. J. Bertrand [1].

Les égalités, souvent invoquées,

$$\cos\theta = -\frac{\partial r}{\partial s}, \qquad \cos\theta' = \frac{\partial r}{\partial s'}, \qquad \sin\theta \sin\theta' \cos\varepsilon = -r \frac{\partial^2 r}{\partial s \, \partial s'},$$

transforment la formule (5) en

$$(23) \qquad F = -JJ' \, ds \, ds' \left\{ rg(r) \frac{\partial^2 r}{\partial s \, \partial s'} + \frac{1}{2} \frac{d}{dr}[rg(r)] \frac{\partial r \, \partial r}{\partial s \, \partial s'} \right\}.$$

Considérons une fonction $\psi(r)$ définie par l'égalité

$$(24) \qquad \frac{d\psi(r)}{dr} = [rg(r)]^{\frac{1}{2}}.$$

Nous aurons alors

$$rg(r) = \left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2,$$

$$\frac{d}{dr}[rg(r)] = 2 \frac{d\psi}{dr} \frac{d^2\psi}{dr^2},$$

et l'égalité (23) deviendra

$$F = -JJ' \, ds \, ds' \frac{d\psi}{dr} \left(\frac{d\psi}{dr} \frac{\partial^2 r}{\partial s \, \partial s'} + \frac{d^2\psi}{dr^2} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} \right)$$

---

[1] J. BERTRAND, *Démonstration des théorèmes relatifs aux actions électrodynamiques* (*Journal de Physique*, 1re série, t. III, p. 335; 1874).

ou bien

$$F = - JJ' \, ds \, ds' \frac{d\psi}{dr} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s \, \partial s'}. \tag{25}$$

Le travail, effectué par les actions mutuelles de deux courants fermés et uniformes dans un déplacement quelconque de ces courants, aura pour valeur

$$d\mathfrak{T} = - JJ' \int\int \frac{d\psi}{dr} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s \, \partial s'} \delta r \, ds \, ds'.$$

En raisonnant sur cette intégrale double exactement comme à la page 191, nous avons raisonné sur l'intégrale

$$\int\int \frac{dr^{\frac{1}{2}}}{dr} \frac{\partial^2 r^{\frac{1}{2}}}{\partial s \, \partial s'} \delta r \, ds \, ds',$$

qui en est une forme particulière obtenue en posant $\psi(r) = r^{\frac{1}{2}}$, nous arriverons à ce résultat:

Le travail élémentaire entre deux courants fermés et uniformes a pour valeur

$$d\mathfrak{T} = - \frac{1}{2} JJ' \delta \int\int \left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2 \cos\theta \cos\theta' \, ds \, ds'$$

ou bien, en vertu de l'égalité (24),

$$d\mathfrak{T} = - \frac{1}{2} JJ' \delta \int\int r g(r) \cos\theta \cos\theta' \, ds \, ds'.$$

En d'autres termes, deux courants fermés, uniformes et constants exercent l'un sur l'autre des actions qui admettent pour potentiel la quantité

$$\Pi = \frac{1}{2} JJ' \int\int r g(r) \cos\theta \cos\theta' \, ds \, ds'. \tag{26}$$

Nous sommes ainsi amenés à la question générale suivante :

Sachant que les actions mutuelles de deux courants fermés, uniformes et constants, admettent un potentiel de la forme

$$\Pi = JJ' \int\int [F(r) \cos\theta \cos\theta' + G(r) \cos\omega] \, ds \, ds', \tag{27}$$

déterminer la forme des fonctions F(r) *et* G(r).

La loi expérimentale que M. J. Bertrand propose de prendre comme principe propre à résoudre cette question est la suivante :

L'action d'un solénoïde fermé sur un élément de courant quelconque est égale à o.

Cette proposition peut, comme on on le voit aisément, être remplacée par la suivante :

Le potentiel électrodynamique mutuel d'un solénoïde fermé et d'un courant fermé, infiniment petit, n'entourant pas l'axe du solénoïde, est égal à o.

Adoptons cette proposition et voyons quelles conditions elle impose aux fonctions $F(r)$ et $G(r)$.

Considérons deux fonctions, $\varphi(r)$ et $\psi(r)$, définies par les égalités

$$\frac{1}{r}\varphi(r) - \frac{d\varphi(r)}{dr} + F(r) = 0, \tag{28}$$

$$G(r) - \frac{1}{r}\varphi(r) = \psi(r). \tag{29}$$

L'égalité (27) pourra s'écrire

$$\Pi = JJ'\int\int\left\{\psi(r)\cos\omega + \frac{\varphi(r)}{r}\cos\omega + \left[\frac{d\varphi(r)}{dr} - \frac{\varphi(r)}{r}\right]\cos\theta\cos\theta'\right\}ds\,ds'.$$

Mais on a

$$\cos\omega - \cos\theta\cos\theta' = \sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon = -r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'},$$

$$\cos\theta = -\frac{\partial r}{\partial s}, \qquad \cos\theta' = \frac{\partial r}{\partial s'},$$

en sorte que l'égalité précédente peut s'écrire

$$\Pi = JJ'\int\int\left[\psi(r)\cos\omega - \varphi(r)\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} - \frac{d\varphi(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right]ds\,ds'.$$

Si nous posons

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = -\varphi(r),$$

cette égalité deviendra

$$\Pi = JJ'\int\int\left[\psi(r)\cos\omega + \frac{\partial^2\Phi(r)}{\partial s\,\partial s'}\right]ds\,ds',$$

ou simplement

$$\Pi = JJ'\int\int\psi(r)\cos\omega\,ds\,ds'. \tag{30}$$

Supposons que s et s' soient deux courants fermés infiniment petits; que Ω, Ω' soient les aires de deux surfaces menées par ces courants; que N, N' soient les normales aux faces positives de ces aires.

Nous aurons [Introduction, Chap. II, égalité (5)]

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} \int\int \psi(r)\cos\omega\, ds\, ds' = &-\left(\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}+\frac{d^2\psi}{dr^2}\right)\cos(\mathrm{N},\mathrm{N}')\Omega\Omega' \\ &-\left(\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}-\frac{d^2\psi}{dr^2}\right)\cos(\mathrm{N},r)\cos(\mathrm{N}',r)\Omega\Omega'. \end{aligned}\right.$$

Supposons que l'aire Ω soit celle d'un courant infiniment petit appartenant à un solénoïde; soit D la distance de deux anneaux du solénoïde; soit $\Phi = \frac{\Omega \mathrm{J}}{\mathrm{D}}$ la puissance du solénoïde; soit l la directrice du solénoïde. Le potentiel électrodynamique de ce solénoïde sur le petit courant fermé s' aura pour valeur, d'après les égalités (30) et (31),

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} \Pi = -\Phi \mathrm{J}'\Omega'\int\Bigg[&\left(\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}+\frac{d^2\psi}{dr^2}\right)\cos(l,\mathrm{N}') \\ &+\left(\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}-\frac{d^2\psi}{dr^2}\right)\cos(l,r)\cos(\mathrm{N}',r)\Bigg]dl. \end{aligned}\right.$$

On a, d'ailleurs,

$$\cos(l,r) = -\frac{\partial r}{\partial l}, \qquad \cos(\mathrm{N}',r) = \frac{\partial r}{\partial \mathrm{N}'},$$

$$\cos(l,\mathrm{N}') = -\frac{\partial r}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial \mathrm{N}'} - r\frac{\partial^2 r}{\partial l\,\partial \mathrm{N}'}.$$

L'égalité précédente devient donc

$$(33)\qquad \Pi = \Phi \mathrm{J}'\Omega'\int\left[\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\psi}{dr}\right)\frac{\partial^2 r}{\partial l\,\partial \mathrm{N}'}+\frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr}\frac{\partial r}{\partial l}\frac{\partial r}{\partial \mathrm{N}'}\right]dl.$$

En vertu de la loi expérimentale admise, il est nécessaire et suffisant que la courbe l soit fermée pour que cette quantité soit égale à 0; en d'autres termes, la quantité sous le signe $\int$ doit être de la forme

$$\frac{\partial}{\partial l}\Psi\left(r,\frac{\partial r}{\partial \mathrm{N}'}\right)dl,$$

Ψ étant une fonction uniforme et continue de r et de $\frac{\partial r}{\partial \mathrm{N}'}$.

Cette condition équivaut à celle-ci

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\psi}{dr}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial\frac{\partial r}{\partial \mathrm{N}'}}\left(\frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr}\frac{\partial r}{\partial \mathrm{N}'}\right).$$

Posons

$$(34)\qquad \Theta = r\frac{d\psi}{dr},$$

et cette égalité deviendra la nouvelle égalité

$$r^2\frac{d^2\Theta}{dr^2} = \frac{2\Theta}{r^2}.$$

En ajoutant aux deux membres la quantité $2r\frac{d\Theta}{dr}$, on peut écrire cette dernière égalité

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Theta}{dr}\right) = 2\frac{d}{dr}(r\Theta).$$

Sous cette forme, elle s'intègre une première fois, et donne l'égalité

$$r^2\frac{d\Theta}{dr} - 2r\Theta + C = 0,$$

C étant une constante.

Cette égalité, à son tour, peut s'écrire

$$\frac{1}{r^2}\frac{d\Theta}{dr} - \frac{2}{r^3}\Theta + \frac{C}{r^4} = 0$$

ou

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\Theta}{r^2}\right) + \frac{C}{r^4} = 0.$$

On déduit de là

$$\Theta = \frac{C}{4r} + C'r^2,$$

C′ étant une nouvelle constante.

Si, dans l'égalité (34), on reporte cette valeur de Θ, on trouve

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{C}{4r^2} + C'r.$$

Cette égalité nous montre que ψ doit être de la forme

$$\psi = \frac{A}{r} + Br^2 + C, \tag{35}$$

A, B, C étant trois constantes.

Ainsi, si le potentiel électrodynamique de deux courants fermés doit être de la forme (27), la loi expérimentale que nous venons d'invoquer exigera, en vertu des égalités (28), (29) et (35), que l'on ait

$$G(r) = \frac{A}{r} + Br^2 + C + \frac{1}{r}\varphi(r), \tag{36}$$

$$F(r) = \frac{1}{r}\varphi(r) + \frac{d\varphi(r)}{dr}, \tag{37}$$

$\varphi(r)$ étant une fonction arbitraire de r.

En d'autres termes, la forme la plus générale du potentiel électrodynamique de deux courants fermés et uniformes, qui soit compatible avec la loi expérimentale que nous avons invoquée, est la suivante :

$$(38)\quad \begin{cases} \Pi = JJ' \left\{ \displaystyle\int\!\!\int \left(\frac{A}{r} + Br^2 + C \right) \cos\omega \, ds\, ds' \right. \\ \left. \quad + \displaystyle\int\!\!\int \left[\frac{\varphi(r)}{r} (\cos\omega - \cos\theta\cos\theta') + \frac{d\varphi(r)}{dr} \cos\theta\cos\theta' \right] ds\, ds' \right\}. \end{cases}$$

Revenons à la question qui a servi de point de départ à ces considérations.

Nous supposons que l'on ait démontré que la forme du potentiel électrodynamique mutuel de deux courants fermés et uniformes est

$$(26)\qquad \Pi = \frac{1}{2} JJ' \int\!\!\int r\, g(r) \cos\theta \cos\theta' \, ds\, ds'.$$

Quelle forme faut-il attribuer à la fonction $g(r)$ pour que l'action d'un solénoïde fermé quelconque sur un élément de courant quelconque soit égale à o?

La formule (26) se déduit de la formule (27) en faisant

$$G(r) = 0,$$

$$F(r) = \frac{1}{2} r\, g(r).$$

Dès lors, les égalités (36) et (37) deviennent

$$\varphi(r) = -(A + Cr + Br^3),$$

$$\frac{1}{2} r\, g(r) = \frac{A}{r} - 2Br^2.$$

Si donc à la cinquième hypothèse et à la troisième loi expérimentale invoquées par Ampère, on substitue cette loi expérimentale qu'un solénoïde fermé est sans action sur un élément de courant quelconque, on arrive à cette conclusion; *la fonction $g(r)$ est de la forme*

$$\frac{1}{2} g(r) = \frac{A}{r^2} - 2Br.$$

Si l'on invoque alors l'HYPOTHÈSE suivante :

L'action mutuelle de deux éléments de courants quelconques tend vers o lorsque leur distance croît au delà de toute limite,

on sera contraint de prendre pour $g(r)$ la forme

$$g(r) = \frac{2A}{r^2},$$

et l'on retrouvera la loi d'Ampère.

La formule (38) nous permet de faire subir à la démonstration des lois de l'Électrodynamique exposée au paragraphe précédent une modification analogue à celle que M. J. Bertrand a fait subir à la démonstration d'Ampère.

N'invoquons plus, comme au paragraphe précédent, l'hypothèse que les deux fonctions $F(r)$ et $G(r)$ sont de la forme $\frac{A}{r^n}$, $\frac{B}{r^n}$; n'invoquons pas, non plus, la loi expérimentale des actions qui s'exercent entre conducteurs semblables. Au lieu de cette loi, invoquons celle-ci : *L'action d'un solénoïde fermé sur un élément de courant quelconque est égale à* o.

Il en résultera, pour le potentiel électrodynamique de deux courants fermés et uniformes quelconques, la forme (38).

Or on a

$$\frac{\varphi(r)}{r}(\cos\omega - \cos\theta\cos\theta') + \frac{d\varphi(r)}{dr}\cos\theta\cos\theta'$$
$$= -\left[\varphi(r)\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} + \frac{d\varphi(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right] = -\frac{\partial}{\partial s'}\left[\varphi(r)\frac{\partial r}{\partial s}\right],$$

en sorte que la quantité

$$\int\!\!\int\left[\frac{\varphi(r)}{r}(\cos\omega - \cos\theta\cos\theta') + \frac{d\varphi(r)}{dr}\cos\theta\cos\theta'\right]ds\,ds'$$

est égale à o, quelle que soit la fonction $\varphi(r)$.

Le choix de la fonction $\varphi(r)$ qui figure dans l'égalité (38) étant indifférent, on peut prendre

$$\varphi(r) = -(A + Br^3 + C),$$

et l'égalité (38) donne alors

$$\Pi = JJ'\int\!\!\int\left(\frac{A}{r} - 2Br^2\right)\cos\theta\cos\theta'\,ds\,ds'. \tag{39}$$

Cette formule, comparée à la formule (26), nous démontre que *les actions mutuelles de deux courants fermés et uniformes sont les mêmes que si deux éléments de courants uniformes quelconques se repoussaient avec une force dirigée suivant la droite qui les joint, et représentée par l'égalité*

$$F = JJ'\,ds\,ds'\left\{g(r)\sin\theta\sin\theta'\cos\varepsilon + \frac{1}{2}\frac{d}{dr}[r\,g(r)]\cos\theta\cos\theta'\right\}, \tag{5}$$

où la fonction $g(r)$ *est de la forme*

$$g(r) = \frac{2A}{r^2} - 4Br.$$

Si, comme M. J. Bertrand, on fait l'hypothèse que cette force doit tendre vers o lorsque les deux éléments s'éloignent au delà de toute limite, cette force devient identique à la force élémentaire admise par Ampère.

On voit donc que l'on peut laisser de côté l'hypothèse que les actions de deux courants fermés et uniformes se décomposent en actions élémentaires soumises à la règle de l'égalité de l'action et de la réaction; ne point invoquer non plus la loi, difficile à vérifier, qu'un courant fermé et uniforme exerce sur tout élément de courant une action normale à cet élément, et remplacer ces hypothèses d'Ampère par l'hypothèse bien moins contestable que les actions mutuelles de deux courants fermés, uniformes et constants admettent un potentiel. Pour déterminer la forme de ce potentiel, on pourra suivre les méthodes indiquées soit par Ampère, soit par M. J. Bertrand, pour déterminer la forme de l'action élémentaire.