Raúl M. Falcón Ganfornina*
Juan Núñez Valdés**

Fundamentos Matemáticos de la Isoteoría de Lie-Santilli

12 de marzo de 2014

Springer

*Departamento de Matemática Aplicada I
E.T.S. de Ingeniería de Edificación. Universidad de Sevilla
Avda. Reina Mercedes 4 A, 41012 Sevilla, España
email: rafalgan@us.es
**Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla
Apartado 1160, 41080 Sevilla, España
email: jnvaldes@us.es

Índice general

INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de este texto es dar a conocer los aspectos más fundamentales y básicos de la *teoría isotópica de Lie-Santilli*, más comúnmente conocida como *isoteoría de Lie-Santilli* o simplemente *isoteoría*, para abreviar. En lo que sigue, nosotros nos referiremos a ella indistintamente, de una cualquiera de estas tres formas. Asimismo, utilizaremos el término *convencional* para referirnos a los conceptos matemáticos y físicos usados habitualmente.

Para conseguir este objetivo se pretende, de forma general, construir los *levantamientos isotópicos* de las estructuras matemáticas básicas, para llegar posteriormente, a la generalización isotópica de las álgebras de Lie.

Los orígenes de esta isoteoría se remontan a 1978, a raíz de un ensayo realizado por el físico-matemático de origen italiano Ruggero María Santilli (véase **[98]**).

Santilli estudia en ese trabajo y en multitud de otros posteriores (véase la Bibliografía que se presenta al final de este texto) la manera de generalizar las teorías matemáticas clásicas y sobre todo, sus aplicaciones a otras Ciencias, en particular la Física y la Ingeniería. Esto lo consigue mediante un *levantamiento* matemático del elemento unidad en el que esté basada la teoría matemática en cuestión. Mediante tal levantamiento se obtiene una nueva teoría, que se caracteriza por poseer las mismas propiedades que la de partida, si bien la nueva unidad en la que ésta se fundamenta cumple ahora unas condiciones más generales que las de la primera.

Para realizar este proceso, Santilli utiliza un levantamiento particular: las *isotopías*. Por medio de ellas, comienza generalizando en primer lugar las estructuras matemáticas más elementales, a saber, los grupos, anillos y cuerpos, construyendo de esta forma las primeras *isoestructuras* matemáticas. Posteriormente y mediante otro tipo de generalizaciones, aunque siempre usando las isotopías, Santilli construye las *isoestructuras isoduales* y las *seudoisoestructuras*.

A mediados de los años noventa del siglo pasado, Santilli sienta las bases de una generalización isotópica que va a suponer un avance definitivo en su trabajo: el *isocálculo diferencial*. Con esta nueva herramienta, Santilli pudo asimismo hacer frente a nuevas generalizaciones, ahora en el campo del Análisis Matemático: las *isofunciones*, las *isoderivadas*, etc.

Ello le permitió a su vez avanzar enormenente en el desarrollo de algunas aplicaciones físicas. En concreto, uno de los propósitos de Santilli era el de aplicar la teoría convencional de Lie a resultados prácticos en Mecánica Cuántica, Dinámica y otros muchos campos de la Física, pasando de estudiar sistemas canónicos, locales e integro-diferenciales a otros, los más generales posibles, que fuesen no canónicos, no locales y no íntegro-diferenciales.

Nuestra aportación personal a este texto, en la que se muestran las diferentes isoestructuras matemáticas, así como la manera de construirlas mediante levantamientos por isotopías, ha consistido en incorporar una gran cantidad de ejemplos; sistematizar y ordenar la totalidad de conocimientos relativos a una misma isoestructura, generalmente bastante dispersos en la literatura (la mayoría de ellos debidos al propio Santilli, si bien hay otros de distintos autores); unificar las diferentes notaciones con las que aparecen estos resultados en la bibliografía existente hasta el momento; dar nuevas demostraciones de algunos de ellos (en algunos casos, éstas ni siquiera existían y los hechos se daban por supuestos) y finalmente, aportar algunos resultados originales, que permiten dotar a esta isoteoría de una fundamentación matemática adecuada, todo lo cual, en nuestra opinión, contribuye a mejorar, sobre todo desde el punto de vista matemático actual, el conocimiento existente sobre la misma.

Para ello, se pone especial énfasis en la importancia no sólo del levantamiento isotópico del elemento unidad en el que se basa cualquier estructura matemática, sino también en el levantamiento isotópico de todas las operaciones definidas en ellas. De esta forma, se incorporan una serie de resultados que generalizan parte de los ya existentes en la literatura, pues no sólo se trabaja con los cuerpos habituales en Física (real, complejo, de cuaterniones y de octoniones), sino que se consideran conjuntos de elementos y operaciones que los asocien, que sean los más generales posibles.

El contenido del presente texto se ha estructurado en 5 Capítulos. En el Capítulo 1 se indican las definiciones y propiedades más importantes de las estructuras algebraicas más conocidas, cuyo levantamiento posterior dará lugar a la aparición de las *isoestructuras.* A pesar de que estas definiciones y propiedades son ya conocidas, creemos que su exposición es indispensable para facilitar una adecuada comprensión de los fundamentos de la isoteoría. Se pone especial énfasis en los fundamentos de las estructuras de *álgebra*, en general, y de *álgebra de Lie* en particular, dado que el levantamiento de esta última dará lugar a la isoestructura denominada *isoálgebra isotópica de Lie.*

En el Capítulo 2 de este texto se dan algunas notas biográficas sobre la obra científica de los dos matemáticos, que con sus aportaciones han contribuido, el primero indirectamente, y el segundo directamente, al nacimiento de la isoteoría: Sophus Marius Lie y el ya tantas veces citado Ruggero María Santilli.

Los Capítulos 3, 4 y 5 se dedican fundamentalmente al estudio de la isoteoría de Lie-Santilli. Comienza el Capítulo 3 con la definición del concepto de *isotopía.* No obstante, como este nuevo concepto tiene un sentido demasiado general para lo que se pretende, nos restringiremos al caso de la *isotopía de Santilli*, que será una herramienta básica para el desarrollo de la *isoteoría de Lie-Santilli.* Se introducen también las definiciones básicas de los elementos y de las herramientas que van a ser utilizadas en el resto del trabajo: isounidad, elemento isotópico, etc.

A continuación se va realizando una generalización, paso a paso, de las estructuras matemáticas básicas. Para ello, en primer lugar, se muestra cómo se generalizan isotópicamente los elementos de una estructura matemática cualquiera, tomando como ejemplo los elementos de un cuerpo cualquiera K, para después ir estudiando las isoestructuras, que van tomando cada vez un mayor grado de complejidad en su construcción. En este Capítulo se estudian en particular los *isogrupos*, los *isoanillos* y los *isocuerpos.*

En el Capítulo 4 se continúa el estudio de la Isoteoría de Lie-Santilli, realizándose el levantamiento isotópico de estructuras algebraicas más complejas que las vistas anteriormente. Así, se estudian en primer lugar los *isoespacios vectoriales* y los *isoespacios vectoriales métricos*, para tratar a continuación los *isomódulos.* Además, por considerarlo de gran interés, por las consecuencias importantes que de ellas se derivan, hemos considerado también oportuno incluir una sección dedicada al estudio de las *isotransformaciones* entre *isoespacios vectoriales.*

Finalmente, en el Capítulo 5 se considera el levantamiento isotópico de una nueva estructura: las álgebras. En una primera sección se estudian las *isoálgebras* y sus subestructuras asociadas: (las *isosubálgebras*). En una segunda sección se trata el caso particular de las *álgebras de Lie-Santilli*, para terminar con el estudio de algunos tipos de isoálgebras isotópicas de Lie, entre ellas las *isosimples*, *isosemisimples*, *isorresolubles*, *isonilpotentes* e *isofiliformes.*

Se incluyen también en todos estos Capítulos una gran cantidad de ejemplos, casi todos originales, que entendemos son fundamentales para una adecuada comprensión de la isoteoría, ya que a partir de ellos se ha ido modelando la misma.

Como parte final del texto se indica una extensa Bibliografía en la que, aparte los textos directamente referenciados en la misma, correspondientes casi todos ellos a los apartados de mayor contenido matemático de la isoteoría, también se incluyen otros (sugeridos a instancias del propio Institute for Basic Research) relativos a las distintas aplicaciones de tipo físico que se derivan de la misma, lo que en nuestra opinión permite facilitar al lector interesado una mejor comprensión global de los contenidos e importancia de esta isoteoría en el desarrollo actual de las Ciencias en general y de las matemáticas y de la física en particular.

Deseamos finalmente hacer constar el agradecimiento a nuestras respectivas familias por el apoyo que en todo momento nos han prestado, así como a los profesores R. M. Santilli y G. F. Weiss, del Institute for Basic Research (IBR) en Florida (EEUU), por la ayuda que desde el principio nos han brindado para la redacción de este trabajo.

Capítulo 1
Preliminares

Con el fin de facilitar una adecuada comprensión de este texto, se presentan en este Capítulo las definiciones y propiedades más importantes de todas aquellas *estructuras algebraicas* que al ser *levantadas* van a dar lugar a las correspondientes *isoestructuras* de la *Isoteoría de Lie-Santilli.*

En una primera sección y en diferentes subsecciones, se recuerdan, dentro de las estructuras algebraicas que pudiéramos llamar elementales, los conceptos de grupo, anillo y cuerpo, así como sus propiedades más importantes.

En la segunda sección se recuerdan, como estructuras algebraicas más generales, los espacios vectoriales y los módulos, indicándose también de ambos sus propiedades más importantes.

En la tercera sección se hará especial énfasis en la definición y propiedades más importantes de las *álgebras*, en particular de las *álgebras de Lie.*

1.1. Estructuras algebraicas elementales

1.1.1. Grupos

Recordamos que un *grupo* es una estructura algebraica constituida por un par $(G, \circ)$, donde G es un conjunto de elementos $\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ y $\circ$ es una ley de composición interna (operación) sobre G, verificando las siguientes propiedades, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in G$:

1. *Asociativa*: $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$.
2. *Existencia de Elemento Unidad*: $\exists I \in G$ tal que $\alpha \circ I = I \circ \alpha = \alpha$.
3. *Existencia de Elemento inverso*: Dado $\alpha \in G$, $\exists \alpha^{-I} \in G$ tal que $\alpha \circ \alpha^{-I} = \alpha^{-I} \circ \alpha = I$.

Si además $\circ$ es conmutativa, es decir, verifica que $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ para todos $\alpha, \beta \in G$, entonces G se dice que es un *grupo abeliano* o *grupo conmutativo*.

Sea $(G, \circ)$ un grupo. Se dice que un conjunto H es un *subgrupo* de G si se verifican las siguientes condiciones:

1. $H \subseteq G$.
2. La ley de composición $\circ$ es cerrada sobre H, es decir, $\alpha \circ \beta \in H$, para todos $\alpha, \beta \in H$.
3. $(H, \circ)$ tiene estructura de grupo.

Sean $(G, \circ)$ y $(G', \bullet)$ dos grupos cualesquiera. Una aplicación $f : G \to G'$ se dice *homomorfismo de grupos* si $f(\alpha \circ \beta) = f(\alpha) \bullet f(\beta)$, $\forall \alpha, \beta \in G$.

Si además f es biyectiva, se dice *isomorfismo* de grupos. Si $G = G'$, f se dice *endomorfismo* y si además es isomorfismo, se llama *automorfismo*.

1.1.2. Anillos

Se denomina *anillo* a una terna $(A, \circ, \bullet)$, donde A es un conjunto de elementos $\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$, dotado de dos leyes de composición internas, $\circ$ y $\bullet$, verificándose $\forall \alpha, \beta, \gamma \in A$ las siguientes propiedades:

1. $(A, \circ)$ es grupo abeliano.
2. Asociatividad de $\bullet$: $(\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma = \alpha \bullet (\beta \bullet \gamma)$.
3. Existencia de Elemento unidad de $\bullet$: $\exists e \in A$ tal que $\alpha \bullet e = e \bullet \alpha = \alpha$.
4. Distributividad a izquierda y a derecha:
   $\alpha \bullet (\beta \circ \gamma) = (\alpha \bullet \beta) \circ (\alpha \bullet \gamma)$
   $(\alpha \circ \beta) \bullet \gamma = (\alpha \bullet \gamma) \circ (\beta \bullet \gamma)$.

Si además se verifica la propiedad *conmutativa* de $\bullet$, es decir, si $\alpha \bullet \beta = \beta \bullet \alpha$, $\forall \alpha, \beta \in A$, se dice entoces que A es un anillo *abeliano o conmutativo.*

Sea $(A, \circ, \bullet)$ un anillo cualquiera. Un conjunto B se dice *subanillo* de A si se verifican:

1. B es cerrado para las leyes $\circ$ y $\bullet$, verificándose además las condiciones de asociatividad de $\bullet$ y distributividad entre ambas operaciones.
2. $(B, \circ)$ es un subgrupo de $(A, \circ)$.
3. $e \in B$.

Sean $(A, \circ, \bullet)$ y $(A', +, \times)$ dos anillos, de unidades respectivas e y e', respecto de las operaciones $\bullet$ y $\times$, respectivamente. Una aplicación $f : A \to A'$ se dice *homomorfismo* de anillos , si $\forall \alpha, \beta \in A$, se verifican:

1. $f(\alpha \circ \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$.
2. $f(\alpha \bullet \beta) = f(\alpha) \times f(\beta)$.
3. $f(e) = e'$.

En el caso particular de ser f biyectiva, se dice *isomorfismo.* Si $A = A'$, f se llama *endomorfismo* y en este caso, si además f es biyectiva, se dice entonces *automorfismo.*

Entre los subanillos hay unos que poseen propiedades especiales: los *ideales.*

Sea $(A, \circ, \bullet)$ un anillo. Un conjunto $\Im$ se dice *ideal* de A, si se verifican:

1. $(\Im, \circ)$ es un subgrupo de $(A, \circ)$.
2. $\Im \bullet A \subseteq \Im$ y $A \bullet \Im \subseteq \Im$, es decir, $x \bullet \alpha \in \Im$ y $\alpha \bullet x \in \Im$, $\forall x \in \Im$ y $\forall \alpha \in A$.

Sea $(A, \circ, \bullet)$ un anillo cualquiera e $\Im$ un ideal de A. Se dice que $J \subseteq \Im$ es un *subideal* de $\Im$ si $(J, \circ, \bullet)$ tiene estructura de ideal de A.

El concepto de ideal de un anillo permite establecer a su vez el concepto de anillo cociente, en la siguiente forma: Sean $(A, \circ, \bullet)$ un anillo e $\Im$ un ideal del mismo. Se denomina *anillo cociente* asociado a A y a $\Im$ al conjunto cociente $A/\Im$, dotado de las operaciones $+$ y $\times$, verificándose que

1. $(\alpha + \Im) + (\beta + \Im) = (\alpha \circ \beta) + \Im$, $\forall \alpha, \beta \in A$.
2. $(\alpha + \Im) \times (\beta + \Im) = (\alpha \bullet \beta) + \Im$, $\forall \alpha, \beta \in A$.

1.1.3. Cuerpos

Se denomina *cuerpo con producto asociativo* a la estructura algebraica constituida por una terna $(K, +, \times)$ (que en adelante y por razones del levantamiento posterior al que va a ser sometida denotaremos por $K(a, +, \times)$), donde K es un conjunto de elementos $\{a, b, c, \ldots\}$ (a los que se les denomina usualmente *números*), dotado de dos leyes de composición internas, $+$ y $\times$, verificándose las siguientes propiedades:

1. Propiedades de adición:

   a) $(K, +)$ es cerrado: $a + b \in K$, $\forall a, b \in K$.
   b) $+$ es conmutativa: $a + b = b + a$, $\forall a, b \in K$.
   c) $+$ es asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b, c \in K$.
   d) Elemento neutro para $+$: $\exists S \in K$ tal que $a + S = S + a = a$, $\forall a \in K$.
   e) Elemento opuesto para $+$: Dado $a \in K$, $\exists a^{-S} \in K$, tal que $a + a^{-S} = a^{-S} + a = S$.

2. Propiedades de la multiplicación:

   a) $(K, \times)$ es cerrado: $a \times b \in K$, $\forall a, b \in K$.
   b) $\times$ es conmutativa: $a \times b = b \times a$ $\forall a, b \in K$.
   c) $\times$ es asociativa: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$, $\forall a, b, c \in K$.
   d) Elemento unidad para $\times$: $\exists e \in K$ tal que $a \times e = e \times a = a$, $\forall a \in K$.
   e) Elemento inverso para $\times$: Dado $a \in K$, $\exists a^{-e} \in K$, tal que $a \times a^{-e} = a^{-e} \times a = e$.

3. Propiedades de adición y de multiplicación:

   a) $(K, +, \times)$ es cerrado: $a \times (b + c)$, $(a + b) \times c \in K$, $\forall a, b, c \in K$.
   b) Distributividad de ambas operaciones: $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$, $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$, $\forall a, b, c \in K$.

En el caso particular de que la propiedad asociativa de la multiplicación estuviese sustituida por las dos siguientes (denominadas propiedades de *alternancia*): $a \times (b \times b) = (a \times b) \times b$ y $(a \times a) \times b = a \times (a \times b)$, $\forall a, b, c \in K$, el cuerpo se diría *con producto alternado*, en lugar de con producto asociativo.

1.2. Estructuras algebraicas más generales

1.2.1. Espacios vectoriales

Se denomina *espacio vectorial* sobre un cuerpo $K(a, +, \times)$ a una terna $(U, \circ, \bullet)$, donde U es un conjunto de elementos $\{X, Y, Z, \ldots\}$ (a los que se les llama usualmente *vectores*, dotado de dos leyes de composición internas, $\circ$ y $\bullet$, verificándose $\forall a, b \in K, \forall X, Y, Z \in U$, las siguientes propiedades:

1. $(U, \circ, \bullet)$ es cerrado, siendo $(U, \circ)$ un grupo.
2. Los 4 axiomas de la ley externa:

a) $a \bullet (b \bullet X) = (a \times b) \bullet X$.
b) $a \bullet (X \circ Y) = (a \bullet X) \circ (a \bullet Y)$.
c) $(a + b) \bullet X = (a \bullet X) \circ (b \bullet X)$.
d) $e \bullet X = X$, siendo e el elemento unidad asociado a K.

Sea $(U, \circ, \bullet)$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $K(a, +, \times)$ y consideremos n vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n \in U$. Se dice que el conjunto $\beta = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es una *base* de U (y así, que U es *n-dimensional*) si:

1. β es un sistema de generadores, es decir, $\forall X \in U$, $\exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ tales que $X = (\lambda_1 \bullet e_1) \circ (\lambda_2 \bullet e_2) \circ \ldots \circ (\lambda_n \bullet e_n)$.
2. β es un sistema linealmente independiente, es decir, dados $\lambda_1, \ldots,$ $\lambda_n \in K$ tales que $(\lambda_1 \bullet e_1) \circ (\lambda_2 \bullet e_2) \circ \ldots \circ (\lambda_n \bullet e_n) = S$ (S es el elemento unidad asociado a U respecto a $\circ$), entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ (donde 0 es el elemento unidad asociado a K respecto a $+$).

Sea $(U, \circ, \bullet)$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $K(a, +, \times)$. Un conjunto W se dice *subespacio vectorial* de U si $W \subseteq U$ y $(W, \circ, \bullet)$ tiene estructura de espacio vectorial sobre $K(a, +, \times)$.

Con respecto a las aplicaciones entre espacios vectoriales, recordamos que si $(U, \circ, \bullet)$ y $(U', \triangle, \bigtriangledown)$ son dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $K(a, +, \times)$, una aplicación $f : U \to U'$ se dice *homomorfismo de espacios vectoriales* si, $\forall a \in K$ y $\forall X, Y \in U$, se verifican:

1. $f(X \circ Y) = f(X) \triangle f(Y)$.
2. $f(a \bullet X) = a \bigtriangledown f(X)$.

Si f es además biyectiva, se dice *isomorfismo*. Si $U = U'$, se dice entonces *endomorfismo* u *operador lineal*. En este último caso, si f es además biyectiva, se llama *automorfismo*.

1.2.2. Módulos

Sea $(A, \circ, \bullet)$ un anillo. Se denomina *A-módulo* a un par $(M, +)$, donde M es un conjunto de elementos $\{m, n, \ldots\}$, dotado de una ley interna

$+$, al que se le dota a su vez de un producto externo $\times$ sobre A, dado por $\times : A \times M \to M$, verificando que:

1. $(M, +)$ es un grupo, siendo además $a \times m \in M$, para todos $a \in A$ y $m \in M$.
2. $a \times (b \times m) = (a \bullet b) \times m$, para todos $a, b \in A$ y $\forall m \in M$.
3. $a \times (m + n) = (a \times m) + (a \times n)$, para todos $a \in A$ y $m, n \in M$.
4. $(a \circ b) \times m = (a \times m) + (b \times m)$, para todos $a, b \in A$ y $m \in M$.
5. $e \times m = m$, $\forall m \in M$, siendo e el elemento unidad asociado a A respecto a la operación $\bullet$.

La noción de *submódulo* es análoga en su definición a la de las otras subestructuras anteriores: Sea $(A, \circ, \bullet)$ un anillo y sea $(M, +)$ un A-módulo, con producto externo $\times$ sobre K. Se dice que un conjunto N es un *submódulo* de M si $N \subseteq M$ y $(N, +)$ tiene estructura de A-módulo, con producto externo $\times$ sobre K.

Se recuerdan a continuación las definiciones de algunas aplicaciones entre estas estructuras, así como una definición de *distancia* entre espacios vectoriales.

Sea $(A, \circ, \bullet)$ un anillo y sean $(M, +)$ y $(M', \triangle)$ dos A-módulos, con productos externos respectivos $\times$ y $\bigtriangledown$ sobre K. Una aplicación $f : M \to M'$ se dice *homomorfismo* de A-módulos si para todo $a \in A$ y para todos $m, n \in M$, se verifican:

1. $f(m + n) = f(m) \triangle f(n)$.
2. $f(a \times m) = a \bigtriangledown f(m)$.

Si f es además biyectiva, se dice *isomorfismo*. Si $M = M'$, se dice entonces *endomorfismo* y en este último caso, si f es además biyectiva, se llama *automorfismo*.

Sea $(U, \circ, \bullet)$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $K(a, +, \times)$. Una aplicación $f : U \times U \to K$ se denomina *forma bilineal* si $\forall a, b \in K$ y $\forall X, Y, Z \in U$, se verifican:

1. $f((a \bullet X) \circ (b \bullet Y), Z) = (a \times f(X, Z)) + (b \times f(Y, Z))$.
2. $f(X, (a \bullet Y) \circ (b \bullet Z)) = (a \times f(X, Y)) + (b \times f(X, Z))$.

Sea $K(a,+,\times)$ un cuerpo dotado de un orden $\leq$ y sea $0 \in K$ el elemento unidad de K respecto de la operación $+$. Sea $(U,\circ,\bullet)$ un espacio vectorial sobre K. Se dice que U es un *espacio vectorial de Hilbert* si está dotado de un *producto escalar* $< .,. >$: $U \times U \to K$, verificando $\forall a,b \in K$ y $\forall X,Y,Z \in U$ las siguientes condiciones:

1. $0 \leq < X,X >$; $< X,X >= 0 \Leftrightarrow X = 0$.
2. $< X,Y >= \overline{< Y,X >}$, siendo $\overline{a}$ el conjugado de a en K, $\forall a \in K$.
3. $< X,(a \bullet Y) \circ (b \bullet Z) >= (a \times < X,Y >) + (b \times < X,Z >)$.

Sea $(U,\circ,\bullet)$ un espacio vectorial (de elementos $X,Y,Z,\ldots$) sobre un cuerpo $K(a,+,\times)$, dotado de un orden $\leq$ y siendo $0 \in K$ el elemento unidad asociado a K respecto a $+$. Se dice que U es un *espacio vectorial métrico* si está dotado de una *distancia métrica* d, verificándose $\forall X,Y,Z \in U$ que :

1. $0 \leq d(X,X)$ y $d(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$.
2. $d(X,Y) = d(Y,X)$.
3. *Desigualdad triangular*: $d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Z,Y)$.

Si en lugar de la primera condición se tiene la siguiente:

$$0 \leq d(X,Y) \quad y \quad d(X,X) = 0,$$

entonces se dice que d es una *distancia pseudométrica* y que U es un *espacio vectorial pseudométrico.*

Si $\beta = \{e_1,\ldots,e_n\}$ es una base de U y consideramos los n^2 números $d_{ij} = d(e_i,e_j)$, $\forall i,j \in \{1,\ldots,n\}$, se dice que la matriz $g \equiv (g_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} \equiv (d_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$ constituye una *métrica* del espacio vectorial métrico U, si d es una distancia métrica, o bien que constituye una *pseudométrica* de U si d es una distancia pseudométrica. A dicho espacio vectorial métrico se le denota usualmente por $U(X,g,K)$.

1.3. Álgebras

1.3.1. Álgebras en general

Sea $K(a, +, \times)$ un cuerpo. Se denomina *álgebra* sobre K a una cuaterna $(U, \circ, \bullet, \cdot)$, donde U es un conjunto de elementos $\{X, Y, Z, \ldots\}$ dotado de dos leyes de composición internas, $\circ$ y $\cdot$ y de un producto externo $\bullet$ sobre K, verificándose $\forall a, b \in K$ y $\forall X, Y, Z \in U$, las siguientes condiciones:

1. $(U, \circ, \bullet)$ tiene estructura de espacio vectorial sobre $K(a, +, \times)$.
2. $(a \bullet X) \cdot Y = X \cdot (a \bullet Y) = a \bullet (X \cdot Y)$.
3. *a)* $X \cdot (Y \circ Z) = (X \cdot Y) \circ (X \cdot Z)$
   b) $(X \circ Y) \cdot Z = (X \cdot Z) \circ (Y \cdot Z)$

Si la operación $\cdot$ es conmutativa, es decir, si $\forall X, Y \in U$, se verifica $X \cdot Y = Y \cdot X$, entonces U se dice *álgebra conmutativa.* Si la operación $\cdot$ es asociativa, es decir, si $\forall X, Y, Z \in U$, se verifica $X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$, entonces U se dice *álgebra asociativa.* Si $\forall X, Y \in U$, se verifica $X \cdot (Y \cdot Y) = (X \cdot Y) \cdot Y$ y $(X \cdot X) \cdot Y = X \cdot (X \cdot Y)$, se dice que U es una *álgebra alternada.* Finalmente, si $S \in U$ es el elemento unidad de U respecto a la ley $\circ$, diremos que U es un *álgebra de división* si $\forall A, B \in U$, con $A \neq S$, la ecuación $A \cdot X = B$ tiene siempre solución.

El concepto de *subálgebra* se define de forma análoga al de otras subestructuras ya vistas, así, si $(U, \circ, \bullet, \cdot)$ es un álgebra sobre $K(a, +, \times)$, un conjunto W se dice *subálgebra* de U si $W \subseteq U$ y $(W, \circ, \bullet, \cdot)$ tiene estructura de álgebra sobre $K(a, +, \times)$.

Sean finalmente $(U, \circ, \bullet, \cdot)$ y $(U', \triangle, \bigtriangledown, \triangleright)$ dos álgebras definidas sobre un cuerpo $K(a, +, \times)$. Una aplicación $f : U \to U'$ se dice *homomorfismo de álgebras* si, $\forall X, Y \in U$ se verifican:

1. f es un homomorfismo de espacios vectoriales restringido a las operaciones $\circ$ y $\bullet$.
2. $f(X \cdot Y) = f(X) \triangleright f(Y)$.

De forma análoga, asimismo, a los anteriores homomorfismos, se definen los conceptos de isomorfismo, endomorfismo y automorfismo de álgebras.

1.3.2. Álgebras de Lie

Sea $(U, \circ, \bullet, \cdot)$ un álgebra sobre un cuerpo $K(a, +, \times)$. U se dice *álgebra de Lie* si $\forall a, b \in K$ y $\forall X, Y, Z \in U$ se verifican:

1. $\cdot$ es una operación bilineal, es decir, se verifican:
   a) $((a \bullet X) \circ (b \bullet Y)) \cdot Z = (a \bullet (X \cdot Z)) \circ (b \bullet (Y \cdot Z))$.
   b) $X \cdot ((a \bullet Y) \circ (b \bullet Z)) = (a \bullet (X \cdot Y)) \circ (b \bullet (X \cdot Z))$.
2. $\cdot$ es anticonmutativo, es decir $X \cdot Y = -(Y \cdot X)$.
3. *Identidad de Jacobi*: $((X \cdot Y) \cdot Z) \circ ((Y \cdot Z) \cdot X) \circ ((Z \cdot X) \cdot Y) = S$, donde S es el elemento unidad de U respecto a $\circ$.

Sea $(U, \circ, \bullet, \cdot)$ un álgebra sobre un cuerpo $K(a, +, \times)$. U se dice *álgebra admisible de Lie* si con el producto conmutador $[.,.]$ asociado a $\cdot$ es un álgebra de Lie, estando definido dicho producto según: $[X, Y] = (X \cdot Y) - (Y \cdot X)$, para todos $X, Y \in U$.

Para facilitar la lectura del resto de esta sección, en lo que sigue, convendremos en que $\mathcal{L} \equiv (U, \circ, \bullet, \cdot)$ representará un álgebra sobre un cuerpo $K(a, +, \times)$.

El álgebra de Lie $\mathcal{L}$ se dirá *real* o *compleja*, según sea el cuerpo K asociado a ella. Asimismo, los conceptos de *dimensión* y *base* de $\mathcal{L}$ se definen como los correspondientes del espacio vectorial subyacente a $\mathcal{L}$.

Si $\{e_1, \dots e_n\}$ es una base de $\mathcal{L}$, entonces se tiene $e_i \cdot e_j = \sum c_{i,j}^h \cdot e_h$, para todo $1 \leq i, j \leq n$. Por definición, a los coeficientes $c_{i,j}^h$ se les denomina *constantes de estructura* o *constantes de Maurer-Cartan* del álgebra. Estas constantes de estructura definen el álgebra y verifican las dos siguientes propiedades:

1. $c_{i,j}^h = -c_{j,i}^h$

2. $\sum(c_{i,j}^{r}c_{r,h}^{s}\circ c_{j,h}^{r}c_{r,i}^{s}\circ c_{h,i}^{r}c_{r,j}^{s})=0$.

De ambas se deduce que la operación $\cdot$ es distributiva y no asociativa.

Se prueban fácilmente los siguientes resultados:

1. Si K es un cuerpo de característica nula, entonces $X\cdot X=\overrightarrow{0}$, para todo $X\in\mathcal{L}$, donde $\overrightarrow{0}$ es el elemento unidad de $\mathcal{L}$ respecto a $\circ$.
2. $X\cdot\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}\cdot X=\overrightarrow{0}$, para todo $X\in\mathcal{L}$.
3. Si los tres vectores que forman una identidad de Jacobi son iguales o proporcionales, cada sumando de esa identidad es nulo.

Sean $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ dos álgebras de Lie sobre el mismo cuerpo K. Se dice que $\Phi:\mathcal{L}\to\mathcal{L}'$ es un *homomorfismo* de álgebras de Lie si Φ es una aplicación lineal tal que $\Phi(X\cdot Y)=\Phi(X)\cdot\Phi(Y)$, para todos $X,Y\in\mathcal{L}$. Se denomina *núcleo* del homomorfismo Φ al conjunto de los elementos X del álgebra, tales que $\Phi(X)=\overrightarrow{0}$.

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Lie. Se denomina *subálgebra* de Lie de $\mathcal{L}$ a todo subespacio vectorial $W\subset\mathcal{L}$ tal que $X\cdot Y\in W$, para todos $X,Y\in W$ y se dice que $\Im$ es un *ideal* de $\mathcal{L}$ si $\Im$ es una subálgebra de $\mathcal{L}$ tal que $X\cdot Y\in\Im$, para todo $X\in\Im$ y para todo $Y\in\mathcal{L}$ (es decir, si $\Im\cdot\mathcal{L}\subset\Im$). Se prueba que dada un álgebra de Lie $\mathcal{L}$, tanto el conjunto constituido por su elemento unidad como la propia álgebra, son ideales de ella misma. Asimismo, son también ideales del álgebra tanto su *centro* (es decir, el conjunto de elementos $X\in\mathcal{L}$ tales que $X\cdot Y=\overrightarrow{0}$, para todo $Y\in\mathcal{L}$) como el núcleo de cualquier homomorfismo del álgebra.

Dadas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}'$ dos álgebras de Lie, se denomina *suma* de ambas al conjunto $\{S=X\circ X'\mid X\in\mathcal{L}\ y\ X'\in\mathcal{L}'\}$ y se dice que la suma es *directa* si se verifican $\mathcal{L}\cap\mathcal{L}'=\{\overrightarrow{0}\}=\mathcal{L}\cdot\mathcal{L}'$. Al conjunto suma directa de álgebras se le notará por $\mathcal{L}\oplus\mathcal{L}'$ y se prueba que en una suma directa $\mathcal{L}''=\mathcal{L}\oplus\mathcal{L}'$ de álgebras de Lie, todo elemento $X\in\mathcal{L}''$ puede escribirse, de manera única, como $X=X_1\circ X_2$, con $X_1\in\mathcal{L}$ y $X_2\in\mathcal{L}'$. Es fácil ver que tanto la suma, como la intersección y el producto (corchete) de ideales de un álgebra de Lie son también ideales del álgebra.

Si $\mathcal{L}$ es un álgebra de Lie, se denomina *álgebra derivada* de $\mathcal{L}$ y se representa por $\mathcal{L}\cdot\mathcal{L}$ al conjunto de elementos de la forma $X\cdot Y$, con $X,Y\in\mathcal{L}$.

Un ideal $\Im$ de un álgebra de Lie $\mathcal{L}$ se dice *conmutativo* si $X \cdot Y = \overrightarrow{0}$, para todo $X \in \Im$ y para todo $Y \in \mathcal{L}$. A su vez, un álgebra de Lie se dice *conmutativa* si considerada como ideal es conmutativa. De las dos definiciones anteriores sigue de forma inmediata que un álgebra de Lie es conmutativa si y sólo si su álgebra derivada es nula.

Existen varios tipos de álgebras de Lie. Un álgebra de Lie se dice *simple* si no es conmutativa y los únicos ideales que contiene son los triviales, mientras que se dirá *semisimple* si no contiene ideales conmutativos no triviales. Obviamente, toda álgebra de Lie simple es semisimple.

Es fácil probar que toda álgebra de Lie semisimple es suma directa de álgebras de Lie simples y que toda álgebra de Lie semisimple $\mathcal{L}$ verifica que $\mathcal{L} \cdot \mathcal{L} = \mathcal{L}$.

La *clasificación* de las álgebras de Lie simples complejas data de finales del siglo XIX (Killing, Cartan, etc) y es la siguiente:

1. Álgebras de Lie del conjunto *especial lineal.*
2. Álgebras de Lie *ortogonales impares.*
3. Álgebras de Lie *simplécticas.*
4. Álgebras de Lie *ortogonales pares.*
5. Además, existen cinco álgebras simples no contenidas en ninguno de estos grupos y que se denominan *exóticas.*

Otros tipos de álgebras de Lie son las *resolubles* y las *nilpotentes.* Las primeras se definen de la siguiente forma: sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Lie. $\mathcal{L}$ se dice *resoluble* si se verifica que en la sucesión

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}, \quad \mathcal{L}_2 = \mathcal{L} \cdot \mathcal{L}, \quad \mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_2 \cdot \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_i = \mathcal{L}_{i-1} \cdot \mathcal{L}_{i-1}, \ldots$$

(llamada *sucesión de resolubilidad*), existe un número natural n tal que $\mathcal{L}_n = \{\overrightarrow{0}\}$. El menor de estos números verificando esta condición se denomina *índice de resolubilidad* del álgebra.

Análogamente, un ideal del álgebra se dice *resoluble* si, al formarse la sucesión de resolubilidad correspondiente, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $\Im_n = \{\overrightarrow{0}\}$. Al respecto, se prueban los siguientes resultados:

1. Si $\mathcal{L}$ es un álgebra de Lie, entonces $\mathcal{L}_i$ es ideal de $\mathcal{L}$ y de $\mathcal{L}_{i-1}$, para todo $i \in \mathbf{N}$.
2. Toda subálgebra de un álgebra de Lie resoluble es resoluble.
3. La intersección, la suma y el producto de ideales resolubles de $\mathcal{L}$ son también ideales resolubles de $\mathcal{L}$.

Consecuencia de este último resultado es que la suma de todos los ideales resolubles de un álgebra de Lie es también un ideal resoluble del álgebra, que se denomina *radical* de $\mathcal{L}$ y que se denota por $rad(\mathcal{L})$. En el caso particular de ser $\mathcal{L}$ semisimple, entonces $rad(\mathcal{L}) = \{\overrightarrow{0}\}$.

Con respecto al segundo tipo de álgebras de Lie antes mencionadas, un álgebra de Lie $\mathcal{L}$ se dice *nilpotente* si en la sucesión

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}, \quad \mathcal{L}^2 = \mathcal{L} \cdot \mathcal{L}, \quad \mathcal{L}^3 = \mathcal{L}^2 \cdot \mathcal{L}, \ldots, \mathcal{L}^i = \mathcal{L}^{i-1} \cdot \mathcal{L}, \ldots$$

(llamada *sucesión de nilpotencia*), existe un número natural n tal que $\mathcal{L}^n = \{\overrightarrow{0}\}$. El menor de estos números naturales verificando esta condición se denomina *índice de nilpotencia.*

Análogamente a lo que ocurría con las álgebras de Lie resolubles, un ideal $\Im$ de $\mathcal{L}$ se dice *nilpotente* si al formarse la sucesión de nilpotencia de $\Im$, existe $n \in \mathbf{N}$, tal que $\Im^n = \{\overrightarrow{0}\}$ y también se verifican que la suma de dos ideales nilpotentes de un álgebra de Lie es otro ideal nilpotente y que toda subálgebra de un álgebra de Lie nilpotente es nilpotente. Más aún, se tiene que toda álgebra de Lie nilpotente no nula tiene un centro no nulo.

A la suma de todos los ideales nilpotentes de un álgebra de Lie $\mathcal{L}$ se la denomina *nihil-radical* de $\mathcal{L}$ y se denota por $nil-rad(\mathcal{L})$. Al respecto, se prueban que el nihil-radical de un álgebra de Lie (no necesariamente nilpotente) es también un ideal nilpotente del álgebra y que el nihil-radical está contenido en el radical del álgebra.

Un resultado que viene a relacionar algunos de los conceptos definidos anteriormente es el siguiente: un álgebra de Lie compleja es resoluble si y sólo si su álgebra derivada es nilpotente. Haremos uso de él cuando veamos el levantamiento isotópico de las álgebras de Lie.

Finalmente, recordamos la definición y algunas propiedades de un subconjunto particularmente importante de las álgebras de Lie nilpotentes, que también será tratado en el levantamiento posterior que se realice. Se trata de las álgebras de Lie *filiformes* (obtenidas por Vegné en 1966). Su definición es la siguiente: sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Lie nilpotente. Se dice que $\mathcal{L}$ es *filiforme* si verifica que

$$dim\,\mathcal{L}^2 = n-2\,,\;\ldots\;,\; dim\,\mathcal{L}^i = n-i,\;\ldots\;,\; dim\,\mathcal{L}^n = 0$$

siendo $dim\,\mathcal{L} = n$.

En toda álgebra de Lie filiforme se prueba la existencia de una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, denominada *base adaptada*, que verifica

$$e_1{\cdot}e_2 = 0, \quad e_1{\cdot}e_h = e_{h-1} \quad (h = 3, \ldots, n), \quad e_3{\cdot}e_h = 0 \quad (h = 2, \ldots, n).$$

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Lie filiforme. Se definen los *invariantes* i y j del álgebra (invariantes en el sentido de no depender de la base adaptada elegida en el álgebra), según:

$$i = inf\{k \in \mathbf{Z}^+ \mid e_k \cdot e_n \neq \overrightarrow{0} \quad k > 1\}.$$

$$j = inf\{\, k \in \mathbf{Z}^+ \mid e_k \cdot e_{k+1} \neq \overrightarrow{0}\}.$$

quedando relacionados ambos invariantes por las siguientes desigualdades:

$$4 \leq i \leq j < n \leq 2\,j - 2.$$

y probándose asimismo además que toda álgebra de Lie filiforme compleja queda definida respecto de una base adaptada, si se conocen bien los productos $e_h \cdot e_n$ para $i \leq h \leq n-1$ o bien los productos $e_k \cdot e_{k+1}$, para $j \leq k < n$.

Capítulo 2
EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE LAS TEORÍAS DE LIE Y DE LIE-SANTILLI

En este Capítulo se indican algunas notas biográficas sobre la vida y obra científica de dos insignes matemáticos, que con sus aportaciones han contribuido a un gran desarrollo no sólo de las Matemáticas, sino también de otras ciencias relacionadas, fundamentalmente la Física y la Ingeniería.

El primero de ellos, quizás no tan suficientemente conocido como debiera y al que por regla general, no se le ha dado la importancia que realmente merece, es **Sophus Marius Lie** (Norfjordeid (Noruega) 1842 - Cristiania (actual Oslo) 1899), sin ninguna duda uno de los más grandes matemáticos del siglo XIX. Notable no sólo por sus descubrimientos matemáticos, que dieron lugar a la hoy conocida como *Teoría de Lie*, sino por las innumerables aplicaciones de los mismos a la Física y a la Ingeniería sobre todo, que han supuesto extraordinarios avances en el desarrollo posterior de estas disciplinas. Se dice que de él llegó a afirmar el genial Albert Einstein que *"sin los descubrimientos de Lie, probablemente no habría nacido la Teoría de la Relatividad"*.

El segundo de estos autores, contemporáneo nuestro, es **Ruggero María Santilli**, matemático americano de origen italiano, que está dedicando su vida al estudio de una generalización de la Teoría de Lie, generalización que actualmente se conoce con el nombre de *Teoría de Lie-Santilli*, que intenta dar respuesta satisfactoria a determinadas cuestiones de variados tipos, físico, químico, biológico, astronómico, etc, que hoy en día no encuentran una explicación adecuada ni en la propia Teoría de Lie ni en los conocimientos actuales de la Ciencia.

2.1. La teoría de Lie

En esta sección comentaremos algunos aspectos de la Teoría de Lie: sus orígenes, su desarrollo posterior y algunos intentos de generalización de la misma, en particular las generalizaciones de los Grupos y las de las Álgebras de Lie.

2.1.1. Origen de la teoría de Lie

La teoría de *grupos de permutaciones* de un conjunto finito se desarrolla y comienza a ser utilizada (por Serret, Kronecker y Jordan, entre otros) hacia 1860. Por otro lado, la teoría de *invariantes*, entonces en pleno desarrollo, familiarizó a los matemáticos con ciertos conjuntos infinitos de transformaciones geométricas establecidos por composición (transformaciones lineales o proyectivas). Sin embargo, no fue hasta 1868 cuando ambas teorías se unifican, merced a un trabajo de Jordan sobre *grupos de movimiento* (subgrupos cerrados del grupo de desplazamientos del espacio euclídeo en tres dimensiones) (véase **[45]**).

En 1869, Felix Klein y Sophus Lie son admitidos en la Universidad de Berlín. Allí Lie concibe la noción de *invariante* en Análisis y Geometría diferencial, a partir de la conservación de las ecuaciones diferenciales por medio de una familia *continua* de transformaciones. Un año más tarde, ambos viajan a París, donde desarrollan en común un trabajo (véase **[55]**) en el que estudian los subgrupos conexos conmutativos del grupo proyectivo del plano, junto a las propiedades geométricas de sus órbitas. Klein comenzaría a interesarse en 1871 por las geometrías no euclideas y por una primera clasificación de todas las geometrías conocidas, mientras que Lie (que utilizaba ya el término de *grupos de transformaciones*) exponía explícitamente el problema de la determinación de todos los subgrupos, continuos o discontinuos, de $Gl(n, \mathbf{C})$ (véase **[62]**).

A partir de 1872, Lie parece abandonar la teoría de grupos de transformaciones para estudiar las transformaciones de contacto, la integración de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden y las relaciones entre estas dos teorías. En el curso de sus investigaciones, Lie se familiarizó con los llamados *paréntesis de Poisson* (expresiones de tipo $(f,g) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial p_i} \right)$, donde f y g son dos transformaciones y x_i y p_i son las coordenadas canónicas en el espacio cotangente $T(\mathbf{C}^n)$) y también empieza a trabajar con los *corchetes de operadores diferenciales* (corchetes del tipo $[X,Y] = XY - YX$), que ya habían aparecido en la teoría de Jacobi-Clebsch sobre sistemas completos de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden (noción equivalente a la de sistemas completamente integrables de Frobenius). Lie aplica entonces la teoría de Jacobi en los paréntesis de Poisson, considerando que éstos están asociados a los corchetes de operadores diferenciales de Jacobi. Así Lie estudia el conjunto de funciones $(u_j)_{1 \leq j \leq n}$, dependiendo de las variables x_i y p_i, tales que los paréntesis (u_j, u_k) sean funciones de u_h, llamando *grupos* a estos conjuntos (que fueron considerados ya por Jacobi, implícitamente).

En el otoño de 1873, Lie reemprende los estudios de grupos de transformaciones. Partiendo de un *grupo continuo* de transformaciones sobre n variables, muestra que estas transformaciones forman un conjunto estable por composición (véase **[63]**). Por otro lado, enlaza la teoría de grupos continuos con sus investigaciones anteriores sobre transformaciones de contacto y sobre ecuaciones diferenciales. Con todo ello empieza a consolidar la nueva teoría de grupos de transformaciones.

En los años siguientes, Lie prosigue este estudio, obteniendo un cierto número de resultados más particulares, entre otros: determinación de grupos de transformaciones de la recta del plano, de subgrupos de codimensión pequeña de grupos proyectivos, de grupos con al menos 6 parámetros, etc. Sin embargo, no abandona la teoría de ecuaciones diferenciales. Antes al contrario, él piensa que la teoría de grupos de transformaciones debería ser un instrumento para integrar las ecuaciones diferenciales, donde el grupo de transformaciones jugaría un papel análogo al del grupo de Galois con una ecuación algebraica. Estas investigaciones le llevan a introducir ciertos conjuntos de transformaciones con un número infinito de parámetros, a los que llama *grupos infinitos y continuos* (hoy llamados *pseudo-grupos de Lie*, para diferenciarlos así de los grupos de Lie-Banach).

Con todos los resultados anteriores, Lie introduce ya lo que más tarde se llamarán *grupos y álgebras de Lie*. Sin embargo, dado que sus primeros trabajos estaban escritos en noruego y publicados en las Reseñas de la Academia de Christiania, que tenían muy poca difusión externa, sus ideas no fueron muy conocidas en esta primera época.

Sin embargo, desde 1886 hasta 1898, Lie llega a ocupar la plaza que deja vacante Klein en Leipzig, lo cual va a favorecer el comienzo de una gran difusión de sus trabajos. A ello también contribuyó el tener a Engel como ayudante colaborador, quien trabajó junto a Lie en las ideas de este último. Todo ello permite la aparición del tratado *Teorie der transformationsgruppen* (**[67]**), escrito por ambos entre los años 1888 y 1893. En él se tratan los grupos de transformaciones, siendo de vital importancia el *espacio de las variables*, x_i, y el *espacio de los parámetros*, a_j. Estas variables y parámetros eran considerados al principio como pertenecientes al cuerpo de los complejos, con lo que la composición de las transformaciones presentaba a veces serias dificultades, por lo que había que establecer el punto de vista local cada vez que era necesario. Ambos autores trataron también en este texto los *grupos mixtos* (grupos con un número finito de componentes conexas).

En resumen, la teoría general desarrollada en este tratado, constituía un verdadero diccionario relativo a las propiedades de los grupos finitos y continuos, junto a sus transformaciones infinitesimales. También aparecían además los tres teoremas fundamentales de Lie, sobre los que se basa la teoría de los grupos de Lie. Estos resultados se completaban con el estudio sobre isomorfismos entre grupos. Así, dos grupos de transformaciones se decían *semejantes* si se podía pasar de uno a otro mediante una transformación invertible de coordenadas sobre variables y una transformación invertible de coordenadas sobre parámetros. Lie prueba que dos grupos son semejantes si mediante una transformación sobre las variables se puede llegar a las transformaciones infinitesimales de un grupo a otro. Una condición necesaria para que esto fuera así era que las álgebras de Lie de estos dos grupos fueran isomorfos. Sin embargo esta condición no era suficiente, por lo que Lie tuvo que dedicar todo un capítulo de su tratado a obtener condiciones suplementarias para asegurar que los grupos eran semejantes.

Por analogía a la teoría de grupos de permutaciones, Lie también introdujo en este tratado las nociones de *subgrupos* y *subgrupos distinguidos*, probando que se correspondían a las subálgebras y a los ideales de un álgebra de Lie, respectivamente. Para estos resultados, igual que para los tres teoremas fundamentales, Lie utilizó fundamentalmente el *Teorema de Jacobi-Clebsch*, que da la integrabilidad de un sistema diferencial.

Las nociones de *transitividad* y de *primitividad*, tan importantes para los grupos de permutaciones, se presentan también de forma natural para los grupos finitos y continuos de transformaciones, siendo también estudiados de forma detallada en este tratado, al igual que las relaciones entre los *subgrupos estabilizadores* de un punto y la noción de *espacio homogéneo*. Finalmente, el tratado se completaba con la introducción de las nociones de *grupo derivado* y *grupo resoluble* (llamado *grupo integrable* por Lie). Esta terminología, sugerida por la teoría de ecuaciones diferenciales, se mantendría en uso hasta un trabajo posterior de Hermann Weyl, en 1934, quien introdujo por primera vez el término *álgebra de Lie* como sustituto de *álgebra infinitesimal*, que había sido usado hasta entonces y que también había sido introducido por él mismo, en 1925.

2.1.2. Desarrollo posterior de la teoría de Lie

El periodo comprendido entre los años 1888 y 1894 está marcado por los trabajos de Engel y de su alumno Umlauf y, sobre todo, de Killing y de E. Cartan. Entre todos ellos lograron una serie de resultados espectaculares acerca de las álgebras de Lie complejas.

Un ejemplo de este avance lo protagoniza Killing en **[54]**. Había sido el propio Lie el que introdujo (véase t. I, p. 270 de **[67]**) la noción de álgebra de Lie *resoluble* y el que demostró el teorema de reducción de álgebras de Lie lineales resolubles a la forma triangular (en el caso complejo). Killing observó que en toda álgebra de Lie existe un ideal resoluble (hoy llamado *radical*) y que el cociente de un álgebra de Lie por su radical tiene radical nulo. Killing llamó entonces *semi-simples* a las álgebras de Lie de radical nulo y probó que son productos de álgebras simples (esto ya había sido estudiado por Lie (véase t. 3, p. 682 de **[67]**), que había probado la simplicidad de las álgebras de Lie *clásicas*).

Además, aunque Lie había estudiado ya algo sobre el tema (al tratar las subálgebras de Lie de dimensión dos, que contienen un elemento dado de un álgebra de Lie), Killing también introdujo la ecuación característica $\det(ad(x) - \omega \cdot 1) = 0$ en las álgebras de Lie e hizo uso de las raíces de esta ecuación para un álgebra semi-simple para obtener la clasificación de las álgebras de Lie simples complejas (posteriormente, Umlauf en 1891 clasificaría las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión ≤ 6).

Killing también probó que el álgebra derivada de un álgebra resoluble es de *rango cero*, esto es, que $ad(x)$ es nilpotente para todo elemento x del álgebra. Poco después, Engel probaría que estas álgebras de rango cero son *resolubles* y Cartan, por su parte, introdujo en su tesis lo que ahora llamamos la *forma de Killing*, estableciendo los dos criterios fundamentales que caracterizan, por medio de esta forma, a las álgebras de Lie resolubles y a las álgebras de Lie semi-simples.

Killing también había afirmado que el álgebra derivada de un álgebra de Lie es suma de un álgebra semi-simple y de su radical (que es nilpotente), pero su demostración era incompleta. Posteriormente, Cartan dio en (t. 1, p. 104 de **[20]**) una demostración que probaba más generalmente que toda álgebra de Lie es suma de su radical y de una subálgebra semi-simple. Sin embargo, fue Engel el que de manera indiscutible llegó a afirmar la existencia en toda álgebra de Lie no resoluble de una subálgebra de Lie simple de dimensión 3. Sería E. E. Levi quien, en 1905 (véase **[61]**), diera la primera demostración de este resultado, si bien para el caso complejo. Otra demostración del mismo, ya válida para el caso real, fue dada por Whitehead en 1936 (véase **[185]**). Este resultado sería completado más tarde, en 1942, por A. Malcev mediante el teorema de unicidad de las *secciones de Levi.*

2.1.3. Primeras generalizaciones de las álgebras de Lie

La aplicación exponencial fue el punto de partida para conseguir las primeras generalizaciones de las álgebras de Lie. Así, los primeros estudios se deben a E. Study y a Engel. Éste último, considerando esta aplicación, dio ejemplos de dos grupos localmente isomorfos, pero que desde el punto de vista global eran muy diferentes (véase **[26]**).

En 1899 (véase t. 3, pp. 169-212 de **[90]**), Poincaré abordó el estudio de la aplicación exponencial, aportando resultados importantes sobre el grupo adjunto, llegando a que un elemento semi-simple de un grupo G, puede ser la exponencial de una infinidad de elementos del álgebra de Lie $\mathbf{g} \equiv L(G)$, mientras que un elemento no semi-simple puede no ser una exponencial. En el curso de sus investigaciones, Poincaré considera el álgebra asociativa de los operadores diferenciales de todos los órdenes generados por los operadores de un álgebra de Lie. Prueba que si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ es una base del álgebra de Lie, esta álgebra asociada (generada por los x_i) tiene por base ciertas funciones simétricas a los x_i (sumas de *monomios* no conmutativos, deducidos de un monomio dado por todas las permutaciones de los factores). Lo esencial de su demostración es su naturaleza algebráica y que permite obtener la estructura de *álgebra envolvente*. Otras demostraciones análogas serían dadas también por Birkhoff y Witt, en 1937.

Otros investigadores que también usaron la aplicación exponencial en sus investigaciones sobre la teoría de Lie fueron Campbell, en el bienio 1897-1898, Pascal, Baker, en 1905 (véase **[11]**), Haussdorff, en 1906 (véase **[31]**) y por último Dynkin, en 1947 (véase **[24]**), quien retomó la cuestión generalizando todos los resultados anteriores para álgebras de Lie de dimensión finita o no, sobre **R**, **C** o sobre un cuerpo ultramétrico.

Aparte lo anterior, Hilbert planteó un nuevo avance teórico en el año 1900. Previamente, F. Schur (véase **[166]**) había llegado a mejorar uno de los resultados de Lie, utilizando funciones de carácter analítico en las transformaciones que manejaba. Schur demostró entonces que si las funciones usadas eran de clase $\mathbf{C}^2$, los grupos que se obtenían eran holoédricamente isomorfos a un grupo analítico. El propio Lie había anunciado ya en **[65]**, basándose para ello en la geometría, que las hipótesis de analiticidad no eran de carácter natural. Estos resultados llevaron a Hilbert a preguntarse si la misma conclusión era posible bajo las hipótesis de que las funciones fuesen continuas (éste sería el quinto problema planteado por Hilbert en el Congreso Matemático de 1900). Este problema suscitó numerosas investigaciones, siendo el resultado más completo el teorema demostrado por A. Gleason, D. Montgomery y L. Zippin, en 1955 (véase **[79]**): *Todo grupo topológico localmente compacto posee un subgrupo abierto que es límite proyectivo de grupos de Lie*, resultado que entraña que todo grupo localmente euclídeo es un grupo de Lie.

Por otro lado, Lie había planteado en su teoría el problema de determinar las representaciones lineales de dimensión minimal de las álgebras de Lie simples, resolviéndolo para las álgebras clásicas. En su Tesis Doctoral, Cartan resolvió este problema también para las álgebras simples excepcionales. El punto de vista de Cartan era estudiar las extensiones no triviales de las álgebras de Lie (de un álgebra de Lie simple y un radical (conmutativo) de dimensión minimal). Estos métodos serían generalizados por él mismo más tarde, para obtener todas las representaciones irreducibles de las álgebras de Lie simples, reales o complejas.

Además, y como consecuencia de sus investigaciones acerca de la integración de sistemas diferenciales, Cartan introdujo en 1904 (véase t. II, p. 371 de **[20]**) las formas de Pfaff: $\omega_k = \sum_{i=1}^{n} \Psi_{ki}\, da_i$, llamadas posteriormente *formas de Maurer-Cartan*. Con ellas, Cartan mostraba que se podía desarrollar la teoría de grupos finitos y continuos a partir de los ω_k, y establecer la equivalencia de este punto de vista con el de Lie. Sin embargo, para Cartan, el interés de este método se debía sobre todo a que se adaptaba a los grupos infinitos y continuos, generalizando así la teoría de Lie.

Otros dos problemas ya planteados por el propio Lie fueron el problema del isomorfismo de toda álgebra de Lie con un álgebra de Lie lineal y el problema de reducibilidad completa de una representación lineal de un álgebra de Lie. Sobre el primero de ellos, Lie creía en su respuesta afirmativa (véase **[64]**), considerando la representación adjunta. Ado fue en 1935 (véase **[1]**) el primero que lo demostró correctamente.

Sobre el segundo problema, ya había trabajado en primer lugar Study, bajo una forma geométrica, en un manuscrito no publicado, aunque citado por Lie (véase t. 3, pp. 785-788 de **[67]**), demostrando la verificación de esta propiedad para las representaciones lineales de las álgebras de Lie de $\mathbf{Sl}(2, \mathbf{C}), \mathbf{Sl}(3, \mathbf{C})$ y $\mathbf{Sl}(4, \mathbf{C})$. Al respecto, el propio Lie y Engel habían conjeturado un teorema de reducibilidad completa válido en $\mathbf{Sl}(n, \mathbf{C})$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Ya en 1925 (véase **[183]**) H. Weyl estableció la reducibilidad completa de las representaciones lineales de las álgebras de Lie semi-simples, mediante un argumento de carácter global (que ya había sido utilizado por Cartan en representaciones irreducibles, según el propio Weyl). Pero no sería hasta 1935 cuando Casimir y Van der Waerden (**[21]**) obtuvieron una demostración algebraica del resultado. Otras demostraciones algebraicas serían dadas por R. Brauer, en 1936 (véase **[15]**) y J. H. C. Whitehead, en 1937 (véase **[185]**).

La mayoría de los trabajos anteriormente citados se limitaban a las álgebras de Lie reales o complejas, que sólo se correspondían con los grupos de Lie en el sentido usual. El estudio de las álgebras de Lie sobre un cuerpo distinto de **R** ó **C** fue abordado por Nathan Jacobson, en 1935 (véase **[36]**), mostrando que la mayor parte de los resultados clásicos seguía siendo válidos para cualquier cuerpo de característica cero.

Una nueva rama en la teoría de álgebras de Lie fue abierta en 1948 por Chevalley y Eilenberg, quienes introdujeron la *cohomología* de las álgebras de Lie en términos de formas invariantes diferenciales. En 1951, Hochschild discutía la relación entre la cohomología de los grupos de Lie y la de las álgebras de Lie. Más tarde lo haría Van Est (1953-1955).

También en 1948, A. A. Albert desarrolla el concepto de álgebra de Lie *admisible*, caracterizada por un producto $X \cdot Y$, tal que el producto conmutador asociado $[X, Y] = X \cdot Y - Y \cdot X$ es de Lie. Albert demuestra que el álgebra asociada a un álgebra de Lie, mediante el producto conmutador es un álgebra admisible de Lie. De hecho prueba, usando el producto conmutador, que toda álgebra asociativa es un álgebra de Lie admisible (véase **[2]**).

2.1.4. Primeras generalizaciones sobre grupos de Lie

Una de las vías de investigación surgidas a partir de la teoría de grupos de Lie es la del estudio de los grupos de Lie *globales*. Fue debida a Hermann Weyl, quien se inspiró a su vez en dos teorías desarrolladas independientemente: la teoría de las *representaciones lineales de álgebras de Lie semi-simples complejas*, debida a Cartan, y la teoría de las *representaciones lineales de grupos finitos*, debida a Frobenius y generalizada a grupos ortogonales por I. Schur en 1924, utilizando la idea de Hurwitz (1897) de sustituir el operador definido sobre un grupo finito, por una integración relativa a una medida invariante (véase **[34]**). Schur utilizó este procedimiento (véase **[167]**) para mostrar la reducibilidad completa de las representaciones del grupo ortogonal $\mathbf{O}(n)$ y del grupo unitario $\mathbf{U}(n)$, mediante la construcción de una forma hermítica positiva no degenerada, invariante. Dedujo además la reducibilidad completa de las representaciones holomorfas de $\mathbf{O}(n, \mathbf{C})$ y de $\mathbf{Sl}(n, \mathbf{C})$, estableciendo relaciones de ortogonalidad para los caracteres de $\mathbf{O}(n)$ y de $\mathbf{Sl}(n, \mathbf{C})$, y determinando los caracteres de $\mathbf{O}(n)$. H. Weyl extendió este método a las álgebras de Lie semi-simples complejas, en 1925 (véase **[183]**). Demostró que dada una tal álgebra, ésta posee una *forma real compacta*, es decir, proviene, por extension de escalares de $\mathbf{R}$ a $\mathbf{C}$, de un álgebra sobre $\mathbf{R}$ cuyo grupo adjunto es compacto. Mostró también que el grupo fundamental del grupo adjunto es finito, dado que su revestimento universal es compacto. Dedujo la reducibilidad completa de las representaciones de las álgebras de Lie semi-simples complejas y determinó globalmente los caracteres de estas representaciones.

Después de los trabajos de Weyl, Cartan adoptó un punto de vista global en sus investigaciones sobre *espacios simétricos* y grupos de Lie, lo que fundamentaría su exposición de 1930 (véase t. I, pp. 1165-1225 de **[20]**) de la teoría de *grupos finitos y continuos*, donde se encontraba en particular la primera demostración de la variante global del tercer teorema fundamental de Lie (a saber, existencia de un grupo de Lie en toda álgebra de Lie dada). Cartan mostró además que todo subgrupo cerrado de un grupo de Lie real es un grupo de Lie, lo que generaliza un resultado de Von Neumann, de 1927, sobre los subgrupos cerrados de un grupo lineal (véase **[82]**). Neumann también mostró que toda representación continua de un grupo semisimple complejo es analítico real.

Posteriormente, Pontrjagin, en 1939, en su trabajo sobre *grupos topológicos* (véase **[91]**), diferenció el carácter local del global en teoría de grupos de Lie. En 1946, Chevalley desarrolló una discusión sistemática de las *variedades analíticas* y del *cálculo diferencial exterior* (véase **[23]**). Las *transformaciones infinitesimales* de Lie aparecían como un campo de vectores y el álgebra de Lie de un grupo de Lie se identificaba como el *espacio de campos de vectores invariantes a izquierda* sobre dicho grupo.

Otra generalización de los grupos de Lie partía en el año 1907 de los trabajos de Hensel (véase **[32]**), quien desarrollaba las funciones *p-ádicas* (definidas por los desarrollos en series enteras) y los *grupos de Lie p-ádicos*. Hensel encuentra un isomorfismo local entre el grupo aditivo y el grupo multiplicativo de $\mathbf{Q}_p$ (o más generalmente, de todo cuerpo ultramétrico completo de característica cero). Sobre este tema profundizarían más tarde A. Weil, en 1936 (véase **[180]**) y E. Lutz, al año siguiente (véase **[71]**), a partir de las *curvas elípticas p-ádicas*. Como aplicación aritmética se encontraba la construcción de un isomorfismo local de un grupo conmutativo con un grupo aditivo, basado en la integración de una forma diferencial invariante. Este método se aplica igualmente a las variedades abelianas, como lo remarcaría poco después Chabauty en 1941 (véase **[22]**), para demostrar un caso particular de la conjetura de Mordell. Sería R. Hooke, alumno de Chevalley, quien estableciera en 1942, en su Tesis Doctoral, los teoremas fundamentales sobre grupos y álgebras de Lie p-ádicos (véase **[33]**. Más tarde, en 1965, este trabajo sería desarrollado de forma más precisa por M. Lazard, en **[60]**.

Un último ejemplo de generalización de los grupos de Lie lo constituyen los *grupos de Lie-Banach*. Se trata de grupos de Lie *de dimensión infinita*, en los que, desde el punto de vista local, se reemplaza un entorno del cero dentro de un espacio euclídeo, por un entorno del cero dentro de un espacio de Banach. Esto fue tratado por Birkhoff en 1936 (véase **[13]**), llegando así a la noción de álgebra de Lie *normada completa*. Hacia 1950, Dynkin completaría los resultados de Birkhoff, aunque sus resultados seguirían siendo locales.

Además de los trabajos anteriores, un nuevo estudio relaciona las álgebras de Lie con los grupos de Lie. El origen de este nuevo trabajo está en 1932, año en el que P. Hall presenta un estudio acerca de una clase de p-grupos, a los que llama *regulares*, sobre los que desarrolla el tema de *conmutadores* y construye la *serie central descendente* de un grupo (véase **[30]**). Más tarde, entre los años 1935 y 1937, aparecen los trabajos de Magnus **[72]** y Witt (véase **[186]**), en los que, juntos al de Hall, se definen las álgebras de Lie *libres*, asociada a grupos libres. Witt mostrará que el álgebra envolvente de un álgebra de Lie libre, L, es una álgebra asociativa libre, deduciendo luego el rango de las componentes homogéneas de L (*fórmulas de Witt*). Por último, en 1950, M. Hall determina la base de un álgebra de Lie libre, conocida como *base de Hall*, que ya aparecía implícitamente en los trabajos de P. Hall y de Magnus.

2.2. La isoteoría de Lie-Santilli

En esta sección se comentan en primer lugar aquellos problemas que dieron lugar a la aparición de esta Isoteoría, para pasar posteriormente a tratar la evolución histórica de la misma. Entre los primeros se tratan los surgidos por aplicación de la Teoría de Lie en Física y los conceptos de álgebra admisible y álgebra envolvente universal de Lie.

2.2.1. La teoría de Lie en Física

La teoría de Lie, aparte de su aplicación en diversas ramas de las Matemáticas, también tiene numerosas aplicaciones en el ámbito de la Física. Los grupos de Lie se introdujeron en Física incluso antes del desarrollo de la Teoría de *cuantos*, a través de las representaciones mediante matrices de dimensiones finitas o infinitas. Fueron útiles para la descripción de los espacios pseudo-Riemannianos, (localmente) simétricos y homogéneos, siendo usados en particular en teorías geométricas sobre gravitación. No obstante, fue el desarrollo de la moderna Teoría de cuantos, en los años 1925 y 1926, lo que facilitó la introducción explícita de los grupos de Lie en la Física. En esta teoría, las observaciones físicas aparecían representadas por matrices hermíticas, mientras que las transformaciones se describían mediante sus representaciones por matrices unitarias o antiunitarias. Los operadores usados (con respecto a una ley parecida a la del conmutador: $X \cdot Y - Y \cdot X$) pertenecían a un álgebra de Lie de dimensión finita, mientras que las transformaciones descritas por un número finito de parámetros continuos pertenecían a un grupo de Lie.

Otros motivos que propiciaron la entrada de la teoría de Lie en Física fueron la presencia de simetrías cinemáticas exactas o el uso de modelos dinámicos idealizados con una simetría superior a la presente en el mundo real. Estas simetrías cinemáticas exactas aparecen por el uso de un formalismo canónico en Mecánica clásica y en Teoría de cuantos. Así, la teoría de Lie encuentra aplicaciones no sólo en la Física elemental de partículas o en la Física nuclear, sino también en campos tan diversos como son: Mecánica contínua, Física de estado sólido, Cosmología, Teoría de Control, Física estadística, Astrofísica, Superconductividad, Modelado de ordenadores y Biofísica teórica, entre otros.

Sin embargo, como se verá en posteriores páginas de este texto, la Teoría de Lie se muestra incapaz de explicar satisfactoriamente otros muchos problemas de la Física, lo que va a originar a la postre la aparición de muchas generalizaciones de la misma que intenten resolver estos problemas, siendo una de estas últimas, sin duda de las más importantes, la Isoteoría de Lie-Santilli.

2.2.2. Origen de las isotopías

En 1958, R.H.Bruck (**[16]**) señaló que la noción de *isotopía* ya se daba en las primeras etapas de la teoría de conjuntos, donde dos cuadrados latinos se decían *isotópicamente relacionados* cuando coincidían a través de permutaciones. La palabra *isotópico* proviene de las palabras griegas $I\sigma o\sigma$ $T o\pi o\sigma$", que significan *el mismo lugar*. Con este término se quería señalar que las dos figuras tenían la misma configuración, la misma topología. Ahora bien, dado que un cuadrado latino podía ser considerado como una tabla de multiplicación de un quasi-grupo, las isotopías se propagaron a estos últimos. Más tarde lo harían a las álgebras y más recientemente a la mayoría de las ramas de las Matemáticas. Como ejemplo, K. Mc. Crimmon estudiaría en 1965 (véase **[73]**) las isotopías de las álgebras de Jordan, mientras que ya en 1967, el propio R.M.Santilli desarrollaría en **[94]** las isotopías del álgebra asociativa envolvente universal U de un álgebra de Lie fijada L, llamándolas *álgebras envolventes isoasociativas* ($\widehat{U}$). Otros trabajos más recientes sobre isotopías pueden verse en Tomber (**[12]**), en 1984, o en el monográfico de Lõhmus, Paal y Sorgsepp, en 1994 (véase **[68]**).

También en otras ciencias aparece el término de isotopía. Así por ejemplo, en Química se denomina *isotopía* a la condición de dos o más cuerpos simples que representan a la misma estructura atómica y tienen idénticas propiedades, aunque discrepan en el peso atómico. A tales elementos se les denomina *isótopos.*

2.2.3. Álgebras admisibles de Lie

En el mismo trabajo anteriormente citado de 1967 (véase **[94]**), Santilli introdujo y desarrolló una nueva noción de álgebra de Lie admisible, fruto de los estudios de su Tesis en Física Teórica en la Universidad de Turín. La primera noción de *admisibilidad de Lie* se debía al matemático americano A. A. Albert, quien desarrolló este concepto en 1948 (véase **[2]**), refiriéndose a un álgebra no asociativa U, con elementos $\{a, b, c, \ldots\}$, y un producto (abstracto) $a \cdot b$, tal que su álgebra conmutadora asociada U^- (que es el mismo espacio vectorial U, aunque dotado con el producto conmutador $[a, b]_U = a \cdot b - b \cdot a$) es un álgebra de Lie. Como tal, el álgebra U no contenía necesariamente un álgebra de Lie en su clasificación, resultando así inaplicable para la construcción de los resultados matemáticos y físicos de la teoría de Lie. De hecho, Albert empezó imponiendo que U debería contener álgebras de Jordan como casos particulares, llevando sus estudios al álgebra quasi-asociativa de producto $(a, b) = \lambda \bullet a \cdot b - (1 - \lambda) \bullet b \cdot a$, donde λ es un escalar no nulo y distinto de 1, teniéndose que para $\lambda = \frac{1}{2}$ y siendo el producto $a \cdot b$ asociativo, se obtiene un álgebra de Jordan conmutativa, pero que no admite un álgebra de Lie bajo ningún valor finito de λ.

Santilli propone entonces que el álgebra U pueda admitir álgebras de Lie en su clasificación, esto es, que el producto $a{\cdot}b$ admita como caso particular el producto corchete de Lie: $[a,b]=ab-ba$. Esta nueva definición se presentaba como generalización de las álgebras de Lie admisibles *flexibles*, de producto $(a,b)=\lambda\bullet a{\cdot}b-\mu\bullet b{\cdot}a$, con λ, μ, $\lambda+\mu$, escalares no nulos bajo las condiciones de que $[a,b]_U=(a,b)-(b,a)=(\lambda+\mu)\bullet(a{\cdot}b-b{\cdot}a)$ sea el producto corchete de Lie, junto a que el producto (a,b) admita al producto de Lie como caso particular. Las últimas condiciones equivalían a que $\lambda=\mu$ y a que el producto $a\cdot b$ fuese asociativo. Santilli iniciaba también así el estudio de las llamadas *q-deformaciones* (estudiadas posteriormente en los años ochenta por un gran número de autores), que consistían en considerar el producto $(a,b)=a\cdot b-q\bullet b\cdot a$, siendo así , bajo las notaciones anteriores, $\lambda=1$ y $\mu=q$.

En 1969, Santilli identificaría la primera estructura admisible de Lie en Dinámica clásica sobre sistemas disipativos, lo que ilustraba la necesidad física de su nuevo concepto (véase **[95]**).

Posteriormente, en 1978, Santilli introdujo en **[97]** y **[98]** la generalización de las álgebras de Lie admisibles, mediante el producto $(a,b)=a\times R\times b-b\times S\times a$, donde $a\times R, R\times b$, etc., son asociativos, siendo $R,S,R+S$ operadores arbitrarios no singulares, pudiendo admitir a los escalares λ y μ como casos particulares. Descubría entonces que el álgebra conmutadora asociada U^- no era un álgebra convencional de Lie con el producto conmutador $a\times b-b\times a$, sino que estaba caracterizada por el producto $[a,b]_U=(a,b)-(b,a)=a\times T\times b-b\times T\times a$, donde $T=R+S$. Este producto fue denominado por él mismo *isotópico de Lie*. Todo ello llevó a la tercera definición de admisibilidad de Lie, hoy denominada *admisibilidad de Lie de Albert-Santilli*, que se refiere a las álgebras no asociativas U que admiten isoálgebras de Lie-Santilli tanto en el álgebra conmutadora asociada U^-, como en las álgebras que se encuentran en su clasificación. En estos mismos trabajos, Santilli identificaba una representación clásica y un operador de las álgebras de Lie admisibles generales, estableciendo los fundamentos de una generalización de tipo admisible de Lie en Mecánica analítica y Mecánica cuántica, al igual que en sus aplicaciones correspondientes. Merecería especial atención el caso isotópico particular que aparece cuando se considera $R = S = T = T^\dagger \neq 0$.

Esta noción de admisibilidad de Lie de Albert-Santilli puede ser considerada como el nacimiento de la isoteoría de Lie-Santilli, pudiéndose encontrar en la Sección 3 (particularmente en la Subsección 3.7) de **[98]** y en la Sección 4 (particularmente en la Sección 4.14) de **[97]**. De hecho, Santilli reconoció que los paréntesis $(a,b)_U$ asociados al álgebra no asociativa U de producto $(a,b) = a \times R \times b - b \times S \times a$, pueden ser idénticamente reescritos como el producto conmutador asociado al álgebra asociativa $\widehat{A}$, de producto $a \times R \times b$, $[a,b]_U = [a,b]_{\widehat{A}}$. Esta última identidad señalaba la transición de los estudios dentro del contexto de las álgebras no asociativas, dado por Santilli hasta 1978, al estudio genuino para la generalización de la teoría de Lie, dada por Santilli a partir de 1978, que estaba basada en el levantamiento de las álgebras envolventes asociativas, levantando el producto convencional $a \times b$ al producto isotópico $a \widehat{\times} b = a \times T \times b$.

2.2.4. Álgebra envolvente universal de Lie

Fijada un álgebra de Lie L, convencionalmente se definía su álgebra asociativa envolvente universal como un par (U,T), donde U es un álgebra asociativa y T es un homomorfismo de L en el álgebra conmutadora U^- asociado a U, satisfaciendo que si U' es otra álgebra asociativa y T' es un homomorfismo de L en U'^-, existe entonces un único homomorfismo γ de U^- en U'^- tal que $T' \equiv \gamma \circ T$, siendo conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{c} L \xrightarrow{T} U^- \\ \searrow^{T'} \; \# \downarrow^{\gamma} \\ U'^- \end{array}$$

En Física, el concepto de álgebra envolvente universal había alcanzado un papel muy importante. Se usaba por ejemplo para el cálculo de la magnitud del momento angular o como estructura algebraica para representar el tiempo de evolución.

Santilli probó en 1978 (véase **[99]**) que el álgebra envolvente del tiempo de evolución de la Mecánica Hamiltoniana es no asociativa, por lo que no resultaba entonces directamente compatible con la Teoría de Lie. De hecho, Santilli indica que los paréntesis de Poisson sobre un álgebra de operadores diferenciables, L , $(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial X}{\partial r_i}\cdot\frac{\partial Y}{\partial p_i}-\frac{\partial Y}{\partial r_i}\cdot\frac{\partial X}{\partial p_i}\right)$, coinciden con el producto conmutador asociado al álgebra envolvente de producto $X\cdot Y=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X}{\partial r_i}\cdot\frac{\partial Y}{\partial p_i}$, que es no asociativa. Esto es, el espacio vectorial de elementos X_i (y polinomios asociados) sobre el cuerpo $\mathbf{R}$ de los números reales, dotado con el producto anterior, es un álgebra, ya que verifica las leyes distributivas a izquierda y a derecha, y la ley escalar. Además es no asociativa ya que en general $(X\cdot Y)\cdot Z\neq X\cdot(Y\cdot Z)$. Entonces, puesto que las álgebras asociativas y no asociativas son diferentes, sin una aplicación que las conecte conocida, Santilli argumenta que el carácter no asociativo de la envolvente no permite la formulación de la Mecánica Hamiltoniana de acuerdo al producto dado por los paréntesis de Poisson. Así busca una generalización dual de la teoría de Lie de acuerdo a la generalización isotópica (basada en envolventes todavía asociativas y formulada por medio del producto asociativo más general posible) y a la generalización (genotópica) por medio de la teoría de las álgebras admisibles de Lie (basada en envolventes de Lie admisibles que se desarrollan por medio del producto no asociativo más general posible $X\cdot Y$, cuyo producto conmutador asociado, $X\cdot Y-Y\cdot X$, sea de Lie).

2.2.5. Otros problemas no resueltos por la teoría de Lie

Las generalizaciones que acabamos de ver eran exigidas también por otros desarrollos teóricos. Por ejemplo, cuando en *geometría simpléctica y de contacto* se realiza una transformación de la estructura, la base de la teoría se sigue pudiendo utilizar, aunque existe una pérdida en la formulación de la teoría de Lie. Así, nociones, propiedades y teoremas desarrollados para la estructura convencional no son necesariamente aplicables para la estructura más general establecida. Es entonces cuando cobra su importancia la primera de las generalizaciones que acabamos de señalar. Ésta busca recuperar la compatibilidad de la formulación con las geometrías simplécticas y de contacto, es decir, busca alcanzar nociones algebraicas, propiedades y teoremas que sean directamente aplicables a las representaciones más generales posibles. Esta generalización tiene además un carácter asociativo pues pasa del producto usual $X \cdot Y$ al producto asociativo más general posible $X * Y$. Así, en el momento en que podamos pasar de una determinada estructura no asociativa a una que tenga un carácter asociativo general, podremos aplicar la teoría que iba buscando Santilli.

Otro nuevo problema que lleva a Santilli a la búsqueda de una generalización de la teoría de Lie aparece cuando pasa a estudiar directamente la teoría sobre Álgebras y Grupos de Lie, con vista a sus aplicaciones inmediatas en Física. Esta teoría, en su formulación usual, se establece desde un punto de vista *lineal, local-diferencial y canónico (potencial-Hamiltoniano)*. Es aquí donde Santilli encuentra verdaderamente el problema para poder aplicar dicha teoría en diversos aspectos físicos. Un ejemplo de esto se tiene cuando se intenta pasar de *cuestiones de Dinámica exterior en el vacío a cuestiones de Dinámica interior en un medio físico*. En las primeras, las partículas se mueven en el espacio vacío (que es homogéneo e isótropo), con interacciones a distancia, pudiendo ser consideradas como puntos (tal como una nave espacial en una órbita estacionaria alrededor de la Tierra), con sus consecuentes ecuaciones de movimiento locales-diferenciales y potenciales-canónicas. En las segundas, las partículas tienen extensión y son deformables, moviéndose en un medio físico anisótropo y no homogéneo, con interacciones a distancia y de contacto (como una nave espacial entrando en la atmósfera de la Tierra). Sus consecuentes ecuaciones de movimiento incluyen entonces términos diferenciales ordinarios para la trayectoria del centro de masa, más términos integrales de superficie o de volumen, que representan la corrección de la caracterización anterior debida a la forma y al tamaño de los cuerpos. Así, tales ecuaciones de movimiento son de tipo no lineal, no local-integral y no potencial-canónico.

La no equivalencia entre estos dos tipos de problemas radica fundamentalmente por tanto en: a) materia topológica, dado que las topologías convencionales no son aplicables a condiciones no locales, b) materia analítica, dada la pérdida del Langragiano de primer orden, al pasar de un sistema variacionalmente autoadjunto a otro no autoadjunto y c) materia geométrica, dada la incapacidad de las geometrías convencionales de caracterizar por ejemplo los cambios locales de la velocidad de la luz. Estas diferencias ya fueron notadas por K.Schwarzschild en 1916, en sus dos trabajos **[168]** y **[169]**.

Desde un punto de vista geométrico, el colapso gravitacional y otros problemas gravitacionales interiores no pueden considerarse como si estuviesen originados por cuerpos puntuales ideales, sino que es necesaria la presencia de un gran número de partículas hiperdensas (tales como protones, neutrones y otras partículas) en condiciones de mezcla total mutua, al igual que la compresión de una gran cantidad de ellas en una pequeña región del espacio. Esto implica la necesidad de una nueva estructura que sea arbitrariamente no lineal (en coordenadas y velocidades), no local-integral (en varias cantidades) y no hamiltoniana (variacionalmente no autoadjunta). Por tanto, la teoría de Lie no es aplicable ni válida en general para los problemas dinámicos interiores. Y aunque a veces suelen simplificarse dichos problemas para estudiarlos como problemas dinámicos exteriores, hay que hacer notar que esto es matemáticamente imposible, ya que mientras que los primeros son locales-diferenciales y variacionalmente autoadjuntos, los segundos son no locales-diferenciales y variacionalmente no autoadjuntos.

Esta posible nueva estructura generalizada serviría además para solucionar otros problemas de gran importancia en tan diversos campos como la Astrofísica, la Superconductividad, la Biología teórica, etc. Se buscaría así una generalización de la teoría convencional de Lie, que fuese además directamente aplicable a ecuaciones no lineales, íntegrodiferenciales y variacionalmente no autoadjuntos que caractericen a la materia; es decir, no basada en aproximaciones o transformaciones de la teoría primitiva. Además una posterior ampliación de dicha generalización mediante una caracterización consistente antiautomorfa sobre el nivel clásico-astrofísico y sobre el nivel de los constituyentes elementales de la materia, permitirían abordar la formulación de la teoría de Lie, al igual que las geometrías y las mecánicas subyacentes, para la caracterización de la antimateria.

Un último aspecto a tener en cuenta es que la teoría de Lie depende principalmente de la unidad básica n-dimensional $I = diag(1, 1, ..., 1)$, en todos sus aspectos, tales como álgebras envolventes, álgebras de Lie, grupos de Lie, teoría de representación, etc. Por tanto, la generalización buscada debería partir de una generalización de la unidad básica anteriormente citada.

2.2.6. Origen de la teoría de Lie-Santilli

Para intentar resolver los problemas que se acaban de indicar, Santilli presentó en 1978, en la Universidad de Harvard, una memoria (véase **[98]**), en la que propuso por primera vez una generalización paso a paso de la formulación convencional de la teoría de Lie, concebida específicamente para sistemas no lineales, íntegro-diferenciales y no canónicos, dando lugar a la denominada *isoteoría de Lie-Santilli.* La característica principal de esta teoría, que la distingue de otras generalizaciones de la teoría de Lie, era su carácter isotópico, en el sentido de que preservaba en todo momento los axiomas originales de la teoría de Lie, por medio de una serie de levantamientos isotópicos, conocidos hoy día como *isotopías de Santilli.* Más específicamente, las isotopías de Santilli están hoy asociadas a aplicaciones que lleven cualquier estructura de tipo lineal, local y canónico, en sus formas no lineales, no locales y no canónicas más generales posibles, que sean capaces de reconstruír linealidad, locacidad y canonicidad en ciertos espacios generalizados, dentro de las coordenadas fijadas por un observador inercial.

De hecho, esta teoría no era más que un caso particular de la teoría más general, hoy conocida como *teoría admisible de Lie-Santilli o teoría genotópica de Lie-Santilli*, donde el término *genotópico* (de origen griego, que significa *que induce una configuración*) se introdujo para denotar la caracterización de los axiomas de recubrimiento en la teoría admisible de Lie. En la teoría genotópica, Santilli estudiaba álgebras no asociativas que contuviesen álgebras de Jordan o álgebras de Lie, continuando así los estudios que había comenzado en 1967 acerca de la nueva noción de álgebra admisible de Lie, ya mencionada con anterioridad.

Fue el hecho de pasar de estudiar álgebras no asociativas a álgebras asociativas la base en la que se fundamentó Santilli para crear su generalización de la teoría de Lie, basada en el levantamiento de las álgebras envolventes asociativas y generalizando el producto $X \times Y$, al producto isotópico $X \widehat{\times} Y = X \times T \times Y$, donde T tendría elemento inverso $\widehat{I} = T^{-I}$ (siendo I la unidad de la teoría convencional), al que llamaría *isounidad*. Precisamente en esto es donde las isotopías de Santilli se diferenciaban de otras existentes en la literatura científica, esto es, en el hecho de estar basadas en la generalización (conservando axiomas) de la unidad convencional I.

De esta forma, la isoteoría de Lie-Santilli era inicialmente concebida como la imagen de la teoría convencional bajo el levantamiento isotópico de la unidad usual trivial I, a una nueva unidad arbitraria $\widehat{I}$, bajo la condición de que dicha isounidad conservase las propiedades topológicas originales de I, para lograr así la conservación de los axiomas de la teoría primitiva. Se tendría así la base para una posterior generalización de los conceptos usuales de la teoría convencional de Lie, tales como las álgebras envolventes universales, los tres teoremas fundamentales de Lie, la noción usual de grupo de Lie, etc., en formas compatibles con una unidad generalizada $\widehat{I}$, que pasaría a dejar de ser local, lineal y canónica (como lo es la unidad usual en la teoría primitiva de Lie), para pasar a ser no local, no lineal y no canónica.

De hecho, esta generalización de la unidad de partida también se daba en la teoría genotópica ya citada. La construcción de las *genotopías* de Santilli (que eran una generalización de las isotopías de Santilli) se basaban en que la nueva unidad $\widehat{I}$ no tenía porqué ser simétrica ($\widehat{I} \neq \widehat{I}^t$), propiedad topológica que posee trivialmente la unidad usual I, con lo que resultaban así dos cantidades diferentes dependiendo de si se consideraba la unidad generalizada a izquierda ($^< \widehat{I}$) o si se consideraba la unidad a derecha ($\widehat{I}^>$), de la siguiente manera:

$$^< \widehat{I} = \widehat{I}, \quad \widehat{I}^> = \widehat{I}^t, \quad ^<\widehat{I} = (\widehat{I}^>)^t.$$

Finalmente, el citado texto **[98]** también incluía la propiedad fundamental de las isoálgebras de Lie-Santilli (levantamiento isotópico de las álgebras de Lie) de unificar las álgebras simples de Lie compactas y no compactas de la misma dimensión, mediante una conservación de la base de todas ellas, variando únicamente unas de otras en el elemento T que caracteriza a cada levantamiento isotópico.

2.2.7. Desarrollo posterior de la isoteoría de Lie-Santilli

Desde su nacimiento en 1978, la isoteoría de Lie-Santilli ha evolucionado en una gran cantidad de aspectos, tanto en sus fundamentos como en sus posteriores aplicaciones. Veremos a continuación cuáles han sido los avances fundamentales de la misma que han aparecido desde ese año hasta ahora.

Una vez fijada la idea fundamental de su nueva generalización de la teoría de Lie, Santilli debía empezar a fundamentar tal generalización en todos los aspectos de la teoría convencional de Lie. De hecho, debía comenzar con el estudio de los elementos básicos sobre los cuáles se sustentaba su teoría. Así, durante una conferencia que impartió en el Congreso *Differential Geometric Methods in Mathematical Physics*, que tuvo lugar en 1980, en Clausthal (Alemania), Santilli presentó por primera vez los nuevos números que aparecen al desarrollar la generalización isotópica del producto $a \times b$ al producto isotópico $a \widehat{\times} b$. Se trataba de los *números isotópicos*, también llamados por él *isonúmeros*, cuya construcción se basaba en el levantamiento $a \to \widehat{a} = a * \widehat{I}$, donde $\widehat{I}$ era la nueva isounidad que se establecía en la isotopía en cuestión. Santilli también presentó en dicha conferencia el levantamiento isotópico de los cuerpos usuales $K(a, +, \times)$ a los llamados *isocuerpos*.

En ese mismo año 1980, Santilli estudia en colaboración con C. N. Ktorides y H. C. Myung (véase **[62]**), la generalización admisible de Lie, no asociativa, de las álgebras envolventes universales, que él mismo había comenzado a estudiar ya en 1978 (véase **[98]**). Ésta generalización sería ya aplicada en geometría simpléctica por el propio Santilli en 1982 (véase **[109]**).

En 1981, Santilli estudiaría en **[106]** el levantamiento isotópico de un álgebra asociativa a partir de la *isotopía de Santilli*, caracterizada por el producto $X \cdot Y = W * X * W * Y * W$, donde $W^2 = W \neq 0$, siendo W fijo.

En estos primeros años de la década de los ochenta, Santilli también reconocía que las formulaciones convencionales, isotópicas y admisibles de Lie, podían ser aplicables a la materia pero no a la antimateria, debido al carácter antiautomorfo de esta última, ya mencionado anteriormente. Santilli entonces reinspeccionó sus isotopías y en los trabajos **[114]** y **[115]** (escritos en 1983, pero no publicados hasta 1985, debido a problemas editoriales), descubrió que, una vez que se abandona el elemento unidad I, aceptando como nueva unidad al elemento $\widehat{I}$, esta última unidad admite una manera natural de adquirir valores negativos. Esto lo conseguía mediante la aplicación $\widehat{I} > 0 \to \widehat{I}^d = -\widehat{I} < 0$, que era un antiautomorfismo definido por él en **[111]**, al que llamó *aplicación isodual*, en el sentido de ser una forma de dualidad que necesariamente requiere la generalización isotópica de la unidad I. Esta aplicación dotaba de una imagen antiautomorfa a toda aplicación basada en $\widehat{I}$, verificando que: $\left(\widehat{I}^d\right)^d = -\left(\widehat{I}^d\right) = -\left(-\widehat{I}\right) = \widehat{I}$. Daba así comienzo la *isoteoría de Lie-Santilli isodual*, con la que parecían abrirse nuevos caminos para solucionar problemas relacionados con la antimateria. Aparecerían así posteriormente nuevas nociones de espacio-tiempo y de simetrías internas para la materia y su isodual, la antimateria. Entre ellas, por ejemplo, las simetrías isorrotacionales (que surgían como los primeros ejemplos que ilustraban la isoteoría de Lie-Santilli y que serían estudiadas ya con detalle en 1993 **[127]** y 1994 **[134]**, respectivamente). Estas isosimetrías han alcanzado implicaciones muy importantes, tales como las primeras representaciones numéricas del momento magnético del deuterón o de la síntesis del neutrón dentro de nuevas estrellas a partir de protones y electrones sólamente; la predicción de una nueva energía subnuclear limpia, llamada *energía hadrónica*; la definición de los elipsoides isoduales con semiejes negativos; etc.

Sin embargo, Santilli se abstuvo de indicar en los trabajos de 1983 la aplicabilidad de la teoría isodual en la caracterización de la antimateria, dadas sus profundas implicaciones en diversos campos tales como la posibilidad de retroceder en el tiempo o la predicción de la antigravitatividad de las antipartículas. No obstante, la aparición de la isoteoría isodual conllevaba un estudio paralelo al de la isoteoría aparecida en 1978, que por otra parte seguía reforzándose. De hecho, en **[111]**, donde aparecía la aplicación isodual, Santilli también introducía el levantamiento isotópico de los espacios vectoriales y métricos, dando lugar a los denominados *isoespacios vectoriales e isoespacios métricos.*

En cuanto a la isoteoría isodual, Santilli empezó definiendo el *producto isotópico isodual* o *isoproducto isodual*, al igual que ya hizo para la isoteoría con el isoproducto $\widehat{\times}$. Así definió el levantamiento $a \times b \to a\widehat{\times}^d b = a \times T^d \times b = a \times (-T) \times b = -(a \times T \times b) = -(a\widehat{\times}b)$, donde el elemento T era el que determinaba una isotopía prefijada, de isounidad $\widehat{I} = T^{-I}$, donde I sería la unidad convencional de partida.

También definió el concepto de *número isodual*, mediante el levantamiento $a \to a^d = -a$, junto al concepto de *isonúmero isodual*, mediante el uso del isoproducto isodual, $\widehat{\times}^d$, a partir del levantamiento $a \to \widehat{a}^d = \overline{a} * \widehat{I}^d = \overline{a} * (-\widehat{I}) = -(\overline{a} * \widehat{I}) = -\widehat{\overline{a}}$, donde $\overline{a}$ denota el conjugado del elemento a en el cuerpo K al que pertenezca. Con todo ello, Santilli obtenía en particular que si se tomaba en los números reales (de unidad convencional $I = 1$) una isotopía a partir de la isounidad $\widehat{I} = I = 1$, entonces el levantamiento isotópico isodual correspondiente se conseguía tomando $\widehat{I}^d = -I = -1$. De esta forma, los números reales isoduales correspondientes a la isounidad $\widehat{I}^d$ se obtenían por el levantamiento $a \to a^d = -a$ (coincidiendo con los isonúmeros isorreales isoduales, correspondientes a la misma isounidad, ya que $\overline{a} = a$, $\forall a \in \mathbf{R}$). Se obtenían así los *números negativos isoduales* referidos a la unidad negativa -1, lo que les hacía diferir de los números negativos referidos a la unidad positiva $+1$, en el sentido de que dado un número real negativo $-a$, tendremos que, referido a la isounidad isodual $\widehat{I}^d = -1$ es totalmente análogo a su correspondiente número real positivo opuesto, a, referido a la unidad positiva convencional $I = +1$. De esta forma, el cambio de signo bajo isodualidad ocurría sólamente en la proyección de los números isoduales sobre el cuerpo original usual. Con todo ello, los números isoduales alcanzarían posteriormente una importante aplicación en el estudio de las antipartículas en Física, a partir de la investigación en las ecuaciones de Dirac, que daban como soluciones energías negativas.

El siguiente paso sería el estudio de los levantamientos isotópicos isoduales de los cuerpos $K(a, +, \times)$, dando lugar a los isocuerpos isoduales con isounidad $\widehat{I}^d = -\widehat{I}$. Más tarde aparecerían los levantamientos isotópicos isoduales del resto de las estructuras matemáticas, al mismo tiempo que iban apareciendo los correspondientes levantamientos isotópicos de éstas. Estos últimos daban lugar a la formación de las denominadas *isoestructuras matemáticas*, mientras que los primeros daban lugar a las llamadas *isoestructuras matemáticas isoduales*, para la construcción de las cuales se buscaba en todo momento alcanzar el carácter antiautomorfo respecto a las isoestructuras matemáticas correspondientes.

En 1988, en **[116]** y **[117]**, Santilli presenta una solución a la cuestión de la relación entre los problemas dinámicos interiores y los problemas dinámicos exteriores, por medio de *isogeometrías* construidas a partir de los diferentes grados de libertad otorgados a la unidad convencional con la que se esté trabajando, a partir de una isotopía del producto usual. El problema con el que se habían encontrado las diferentes geometrías construidas hasta entonces para resolver estas cuestiones era que no se planteaban desde un punto de vista general, no lineal y no local-diferencial, sobre sistemas anisótropos y no homogéneos. Santilli plantea su teoría abarcando el anterior punto de vista general. Más tarde lo seguiría desarrollando en **[127]** y **[134]**, hasta que en 1996 aplicara el concepto de cálculo isodiferencial a la construcción de las isogeometrías, lo que permitía una mayor transparencia de la unidad abstracta de estos últimos, permitiendo a su vez un tratamiento unificado de los problemas dinámicos exteriores e interiores.

También en 1988, Santilli establece en **[118]** la irreducibilidad de los problemas dinámicos interiores a los problemas dinámicos exteriores, mediante los llamados *teoremas de no-reducción*, que prohibían la reducción de un sistema macroscópico interior, con un momento angular monótonamente decreciente, a una colección finita de partículas elementales, cada una con un momento angular constante. Posteriormente, en 1994, Santilli volvería a tratar estos problemas en el monográfico **[134]**. Como consecuencia de estos resultados y en vista a los avances alcanzados, Santilli recibió en 1989 algunos premios. Entre ellos destaca la Nominación por la Academia de Estonia de las Ciencias, por ser uno de los mejores matemáticos aplicados de todos los tiempos, uniéndose así a prestigiosos matemáticos como Gauss, Hamilton, Cayley, Lie, Frobenius, Poincaré, Cartan y Riemann, entre otros. Santilli fue además el único miembro de origen italiano en esta lista.

Dos años más tarde, Santilli lograba en 1991 resolver los problemas que ya se había planteado en 1983, sobre la aplicación de su isoteoría isodual para la caracterización de la antimateria. Lo haría en los monográficos **[122]** y **[123]**. La equivalencia entre isodualidad y conjugación de carga, sería probada en 1994 (véase **[135]**), mientras que importantes implicaciones debidas a la isodualidad también serían desarrolladas ese mismo año (véanse **[132]** y **[136]**), en el que también publicó su primer monográfico sobre isodualidad (véase **[134]**).

En 1992, J. V. Kadeisvili clasifica en **[46]** los levantamientos isotópicos en cinco clases, dependiendo del tipo de isounidad utilizado. También estudia por primera vez la noción de *isocontinuidad*, comprobando que este concepto puede reducirse al de continuidad convencional, dado que el isomódulo $\widehat{|}\widehat{f}(\widehat{X})\widehat{|}$ de una función $\widehat{f}$ sobre un isoespacio fijado, vendría dado por el módulo usual multiplicado por la isounidad $\widehat{I}$, que tiene un buen comportamiento: $\widehat{|\widehat{f}(\widehat{X})|} = |\widehat{f}(\widehat{X})| \times \widehat{I}$. Kadeisvili sigue a continuación con un desarrollo isotópico del análisis funcional, bajo el nombre de *isoanálisis funcional*.

En 1993, Santilli desarrolla con detalle en **[129]** un estudio sobre las isotopías y sus isodualidades de la simetría de Poincaré (que ya había sido estudiada en 1983 (véase **[110]**)). También trata el *recubrimiento isoespinorial*.

Por otro lado, desarrolla un estudio acerca del levantamiento isotópico de la teoría de números (véase **[128]**). En él recuerda la construcción de los isonúmeros y de sus isoduales. También trata la construcción de las *seudoisoestructuras* por medio de seudoisotopías (las cuales se basan en el levantamiento de la operación $+$ a $\widehat{+}$, que ya fue tratada por Santilli en 1989 (véase **[120]**). Estas seudoisotopías son levantamientos que conservan todos los axiomas de la estructura de partida salvo los referentes a la distributividad, por lo que no pueden considerarse como auténticas isotopías (y de ahí el nombre adoptado por Santilli). Desarrolla este estudio para los números reales y complejos, y para los *cuaterniones* y los *octoniones*. Para el levantamiento isotópico de estos últimos (isocuaterniones e isooctoniones, respectivamente), Santilli realiza por primera vez su representación en términos de las isotopías e isodualidades de las matrices de Pauli. También estudia la aparición de nuevos números de dimensiones 3, 5, 6 y 7, al desarrollar la clasificación de las isoálgebras isonormadas y señala la generalización de la teoría de números mediante el *levantamiento genotópico*.

Finalmente, Santilli desarrolla en ese año 1993 un monográfico **[127]** sobre los levantamientos isotópicos de los espacios vectoriales y métricos. Trata sobre los *espacios isoeuclídeos*, la *métrica isoeuclídea* y las *geometrías isoeuclídea e isominskowskiana*. Demuestra además que la primera de estas isogeometrías depende de la clase a la que pertenece la isotopía bajo la cual se esté levantando la geometría de partida. La geometría isoeuclídea de clase I permite un tratamiento de todas las geometrías convencionales de la misma dimensión y signatura, más todas sus posibles isotopías. Las de clase III permiten el tratamiento unificado de todas las geometrías anteriores, independientemenete de su signatura.

También define Santilli el concepto de *propulsión geométrica*, por la cual una partícula puntual de masa se mueve de un punto a otro sin aplicación alguna de fuerza, sino por medio de la alteración de la geometría subyacente. Esto último lo consigue alterando las unidades del espacio con el que se trabaja, al demostrar que cualquier isotopía de dicho espacio deja invariante el producto (longitud)$\times$(unidad). De esta forma, mediante una isotopía adecuada (es decir, mediante un cambio de unidad adecuado), se pueden transformar matemáticamente distancias muy grandes en distancias muy pequeñas y al revés.

Otro tema objeto de su estudio en ese año consiste en desarrollar, al igual que ya había hecho Kadeisvili, las nociones de isotopías de continuidad, límites, series, etc. Santilli probaría que series que son convencionalmente divergentes pueden transformarse mediante una isotopía en series convergentes. Esta propiedad ha tenido importantes aplicaciones en la reconstrucción de series perturbadas convergentes para interacciones fuertes, que son convencionalmente divergentes.

En ese mismo año 1993, los matemáticos griegos D. Sourlas y G. Tsagas, escriben el primer libro matemático sobre isoteoría (véase **[175]**). En él, estos autores tratan acerca de las diferentes isoestructuras matemáticas existentes y de sus inmediatas aplicaciones en Física . También definen y desarrollan además la isoestructura de las *isovariedades*, generalización isotópica de las variedades diferenciables de la Geometría diferencial, que serían identificadas por primera vez en 1995, en **[176]**. Finalmente, introducen por primera vez, el concepto de *isoespacio topológico* a partir de una *isotopología.* Por su parte, G. Tsagas realizaría un estudio en 1994 (véase **[173]**) de las *conexiones isoafines* y de las *métricas isorriemannianas* sobre una isovariedad.

En 1994, Santilli desarrolla una nueva representación de la *antimateria* (véase **[134]**), empezando en el nivel clásico y llegando al nivel operador, basándose en la aplicación isodualidad. Obtiene que esta representación es equivalente al conjugado de las cargas. En particular, todas las características que son convencionalmente positivas para la materia llegan a ser definidas negativas para la antimateria, incluyendo la energía, el tiempo, la curvatura, etc. Sin embargo, tal y como había demostrado en **[128]**, había que tener en cuenta que las características positivas referidas a una unidad positiva son equivalentes a las características negativas referidas a una unidad negativa. Esta propiedad elemental tendría importantes implicaciones, tales como la predicción de la antigravedad para antipartículas elementales.

También en **[134]**, Santilli desarrolla el estudio de la *teoría de isorrepresentación*, que mantiene las representaciones no lineales, no locales y no canónicas de los grupos de Lie. Trata además en forma detallada la inequivalencia existente entre los problemas dinámicos interiores y los problemas dinámicos exteriores.

En ese mismo año 1994, Santilli realiza un estudio (véase **[133]**) sobre las verificaciones experimentales de las isotopías en Física nuclear, al mismo tiempo que un desarrollo de las isotopías de las *ecuaciones de Dirac*, previamente introducidas por M. Nishioka en **[83]**. Estudia también Santilli en ese año (véase **[154]**) los *Q-operadores deformadores de la simetría isospinorial* $\widehat{SU_Q}(2)$, levantamiento isotópico de la simetría spinorial $SU(2)$, probando el isomorfismo $\widehat{SU_Q}(2) \approx SU(2)$ y construyendo y clasificando las isorrepresentaciones de $\widehat{SU_Q}(2)$. Este trabajo no sería sin embargo publicado hasta 1998, aunque las q-deformaciones ya habían sido estudiadas anteriormente, en 1993 (véase **[70]**). Básicamente, las q-deformaciones convencionales de las álgebras asociativas, $AB \to qAB$, pasaban a reformularse en términos isotópicos como $qAB = A\widehat{\times}B$, considerando como isounidad a $\widehat{I} = q^{-1}$, lo que permitía su generalización y axiomatización en el operador T íntegro-diferencial más general posible (que por esta razón algunas veces se denota por Q).

En 1995, Santilli desarrolla junto a A. O. E. Animalu un estudio de la verificación experimental de las isotopías en Superconductividad, en base a modelos debidos a interacciones no-lineales, no-locales y no-Hamiltonianos, mostrando la capacidad de representar y de predecir tales modelos (véase **[4]**).

En 1996, Tsagas realiza un estudio acerca de la clasificación de las álgebras de Lie-Santilli (véase **[174]**). En este trabajo repasa los conceptos fundamentales de las álgebras de Lie y estudia la relación existente entre un álgebra de Lie y un tipo de isoálgebra llamado *isoálgebra de Lie-Santilli*, que consiste en la generalización isotópica de un álgebra de Lie.

En ese mismo año, Santilli introduce por primera vez el concepto de *hiperestructura* a partir de una unidad de valores múltiples (véase **[143]**). El concepto de hiperestructura en forma general había sido ya introducido por T. Vougiouklis en 1994 (véase **[179]**). En ese año de 1996, Santilli estudia en colaboración con el propio Vougiouklis, las *hiperestructuras con unidades de valores singulares*. Este nuevo concepto de hiperestructura con unidad de valores múltiples llegaba a ser una generalización del de estructura genotópica (proveniente de una genotopía), que pasaba a ser un caso particular.

En las hiperestructuras, las nuevas unidades a izquierda y a derecha vienen dadas por un conjunto finito y ordenado, como sigue: $\{^{<}\widehat{I}\} = \{^{<}\widehat{I}_1, {}^{<}\widehat{I}_2, {}^{<}\widehat{I}_3, ...\}$, $\{\widehat{I}^{>}\} = \{\widehat{I}_1{}^{>}, \widehat{I}_2{}^{>}, \widehat{I}_3{}^{>}, ...\}$, $\{^{<}\widehat{I}\} = \{\widehat{I}^{>}\}^t$; donde la última operación se refiere a cada elemento de los conjuntos ordenados.

En **[145]**, Santilli estudia la generalización isotópica, conservando axiomas, del cálculo diferencial ordinario, llamada *cálculo isodiferencial*, que ya había planteado previamente, de forma implícita en sus trabajos **[127]** y **[134]**, de 1993 y 1994, respectivamente. De hecho, la presentación oficial la dio en Diciembre de 1994, en el Congreso Internacional *Workshop on Differential Geometry and Lie algebras*, celebrado en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Aristóteles en Tesalónica (Grecia).

Este cálculo isodiferencial está basado en la generalización de la unidad básica con generalizaciones compatibles a su vez de cuerpos, espacios vectoriales y variedades diferenciales. Con este nuevo tipo de cálculo, aplicado al levantamiento isotópico de las ecuaciones de Newton, Santilli abre nuevas posibilidades tales como la representación de partículas no esféricas y deformables, la admisión de fuerzas no locales-integrales y la capacidad de transformar sistemas Newtonianos no Hamiltonianos en el espacio dado, en sistemas que sí sean Hamiltonianos en los isoespacios correspondientes.

También con el cálculo isodiferencial, Santilli prueba que se pueden levantar isotópicamente la mecánica analítica y cuántica, y construye nuevas isotopías de las geometrías simplécticas y Riemannianas, resultando no lineales (en coordenadas y velocidades), integro-diferenciales y no de primer orden de Lagrange. De esta forma, estas nuevas geometrías resultan útiles para problemas dinámicos interiores, tales como la geometrización de velocidades de la luz variando localmente. Santilli también presenta la existencia de las correspondientes generalizaciones por métodos genotópicos e hiperestructurales, al igual que sus análogos isoduales.

En **[145]**, Santilli también desarrolla por primera vez las isotopías de las ecuaciones de Newton (llamándolas *isoecuaciones de Newton*) y del resto de las ecuaciones fundamentales de la Mecánica clásica. De hecho estudia las isotopías y las imágenes antiautomorfas bajo isodualidad de todas las ecuaciones básicas de las mecánicas Newtonianas, analíticas y cuánticas. Estas nuevas ecuaciones permiten la representación de la antimateria en el nivel Newtoniano por primera vez en un sentido antiautomorfo. Con todo esto elabora las Mecánicas *isohamiltonianas* e *isolangragianas*. De hecho, también las desarrolla desde métodos genotópicos y hiperestructurales.

Por último trata el concepto de *isogeometrías* a partir del cálculo isodiferencial. Reformula así la geometría isosimpléctica (logrando la universalidad directa para los sistemas interiores, es decir, la representación de todos los sistemas interiores, directamente en el marco inercial fijado por el observador). Esta geometría isosimpléctica emerge como la isogeometría subyacente en la Mecánica isohamiltoniana y en la isoteoría de Lie-Santilli. Desarrolla también la geometría *isorriemanniana*, logrando aplicaciones en el estudio de la variación local de la velocidad de la luz, en teoría gravitacional, en teoría geodésica, etc. Resulta además que la geometría isorriemanniana es un caso particular de la geometría riemanniana con curvatura nula. Hace mención finalmente de las *isogeometrías isoduales*, de las *genogeometrías* (levantamiento genotópico de las geometrías) y de las *hipergeometrías* (levantamiento hiperestructural de las geometrías).

En 1997, aparece un trabajo de Santilli **[152]** en el que se muestra que todas las deformaciones no-unitarias (incluídas las q-, k-, cuánticas, Lie isotópicas, Lie-admisibles y otras deformaciones), aunque matemáticamente correctas, tienen una serie de aspectos problemáticos de carácter físico cuando se formulan sobre espacios convencionales dados sobre cuerpos convencionales. Entre estos problemas se encuentran una pérdida de la invariancia de las unidades básicas de espacio-tiempo, una pérdida de las predicciones numéricas invariantes, una pérdida de la Hermiticidad observada en el tiempo, etc. De esta forma muestra también que la formulación contemporánea de la gravedad está sometida a problemas similares, puesto que los espacios Riemannianos son de hecho deformaciones no-canónicas de los espacios Minkowskianos, teniendo así unidades de espacio-tiempo no invariantes. Santilli construye entonces con base en las isotopías, genotopías, hiperestructuras y sus isoduales, una teoría no unitaria, conocida como *Mecánica relativista hadrónica*, que salva las inconcistencias axiomáticas de la Mecánica cuántica relativista, conserva los axiomas abstractos de la relatividad especial y resulta un complemento de la Mecánica convencional acerca del argumento de Einstein-Podolski-Rosen. Esta teoría viene dada fundamentalmente por las transformaciones no unitarias siguientes:

$$I \to \widehat{I} \quad = UIU^\dagger \qquad\qquad A \to A' = UAU^\dagger$$

$$B \to B' = UBU^\dagger \qquad\qquad AB \to UABU^\dagger = A'\widehat{T}B'$$

donde:

$$UU^\dagger = \widehat{I} \neq I \qquad \widehat{T} = (UU^\dagger)^{-I}$$

$$\widehat{I} = \widehat{T}^{-I} \qquad \widehat{I} = \widehat{I}^\dagger$$

$$\widehat{T} = \widehat{T}^\dagger \qquad U(AB - BA)U^\dagger = A'\widehat{T}B' - B'\widehat{T}A'$$

Con esta nueva teoría, Santilli abre nuevas posibilidades de estudio, debiéndose aún hoy día desarrollar una gran cantidad de aspectos relacionados, en el sentido de que deben generalizarse a la forma no unitaria todos los conceptos relativos a las isotopías, genotopías e hiperestructuras. El propio Santilli ha seguido investigando en este tema, desarrollando estas inconsistencias físicas en diversas deformaciones cuánticas (véanse **[156]** y **[150]**), al igual que en otras teorías generalizadoras (como en **[160]**). Por otro lado, dichas inconsistencias han llegado a ser de tal importancia para la isoteoría que el propio Santilli las ha denotado como *inconsistencias catastróficas* de la isoteoría de Lie-Santilli.

Señalemos para terminar esta introducción histórica de la Teoría de Lie-Santilli, que en los últimos años, Santilli ha encaminado su investigación a desarrollar aún más las diversas implicaciones que tiene esta isoteoría en campos tan variados como son: la utilización de la geometría isominkowskiana para el tratamiento gravitacional de la materia y de la antimateria (véanse **[149]**, **[151]**, **[153]** y **[154]**)), junto a una verificación experimental en Física de partículas (véase **[5]**), una aplicación de la Mecánica hadrónica en la predicción y verificaciones experimentales de las nuevas especies químicas, denominadas *magnéculas* (distinguiéndolas así de las convencionales moléculas), que ha permitido la aplicación industrial de su teoría a los nuevos reactores hadrónicos, que reciclan líquidos residuales produciendo un gas combustible, limpio y barato (véase **[157]**), una aplicación de la teoría isodual de la antimateria en la predicción de la antigravedad (véase **[159]**), y otras muchas aplicaciones a otros campos que prueban la solidez de esta teoría y su definitiva implantación en la Ciencia actual.

Capítulo 3
ISOTEORÍA DE LIE-SANTILLI: ESTRUCTURAS ISOTÓPICAS (I)

En este Capítulo y en los siguientes, realizaremos el estudio de la *Isoteoría de Lie-Santilli.* Es conveniente indicar que la mayor parte de los conceptos y propiedades que aparecen en ellos han sido introducidos por el propio Santilli y por algunos otros autores, que estudiaron su obra. Nuestra aportación personal en este texto se centra en incorporar una gran cantidad de ejemplos, sistematizar la totalidad de conocimientos relativos a una misma isoestructura (con la necesidad de unificar la notación, al haber sido obtenidos éstos por varios autores en algunas ocasiones) y aportar nuevas demostraciones de algunos de ellos, que en nuestra opinión contribuyen a acortar y a mejorar, sobre todo desde el punto de vista matemático actual, las existentes anteriormente. Incluso en algunos casos, estas demostraciones ni siquiera existían y los hechos se daban por supuestos.

Comenzamos entonces este estudio con la definición del concepto de *isotopía.* No obstante, como este nuevo concepto tiene un sentido demasiado general para lo que se pretende, nos restringiremos al caso de la *isotopía de Santilli*, que será una herramienta básica para el desarrollo de esta generalización de la teoría de Lie, conocida como *isoteoría* o *teoría de Lie-Santilli.* Posteriormente, tras introducir unas nociones previas, se realizará un levantamiento isotópico de las estructuras matemáticas básicas, configurando así las nuevas *estructuras isotópicas* o *isoestructuras*.

3.1. Isotopías

Definición 3.1.1 *Dada una estructura matemática cualquiera, se define una* isotopía *o* levantamiento isotópico *de la misma como cualquier levantamiento suyo, que dé como resultado una nueva estructura matemática, tal que verifique los mismos axiomas básicos que caracterizan a la estructura primitiva. A esta nueva estructura se le dará el nombre de* estructura isotópica *o* isoestructura*.*

Nótese que esta noción de isotopía engloba una amplia gama de posibles levantamientos. Así por ejemplo, tendríamos en primer lugar la isotopía básica de la identidad, que da como estructura resultante la propia estructura de partida. Así, si tenemos por ejemplo un cuerpo $K(a,+,\times)$, de elementos $\{a,b,c,\ldots\}$ y operaciones internas la suma y el producto usuales, $+$ y $\times$, el mismo cuerpo $K(a,+,\times)$ sería una isotopía suya, pues trivialmente se obtiene una estructura matemática que verifica los axiomas que caracterizan a la primera estructura. De esta forma, la teoría isotópica llega a ser un recubrimiento de la teoría usual, en el sentido de ser formulada sobre fundamentos estructuralmente más generales, que admiten la formulación convencional como un caso particular trivial.

El caso anterior es el más sencillo posible. Nos interesa estudiar otros casos y ver cómo podemos obtenerlos. Lo haremos en primer lugar desde un punto de vista teórico y más tarde veremos ejemplos de ello.

Observamos primero que en toda estructura matemática (ya sea un grupo, un cuerpo, un espacio vectorial, etc.) aparecen dos objetos matemáticos que la constituyen: los *elementos* que la forman y las *operaciones o leyes* que relacionan dichos elementos. Por tanto, dado que toda isotopía es un levantamiento de una estructura matemática, podremos realizar una clasificación de éstas, atendiendo al objeto en cuestión que se levanta. Así, tendremos tres tipos de isotopías no triviales:

1. Isotopías de TIPO I. En ellas sólo se levantan los elementos de la estructura matemática.
2. Isotopías de TIPO II. En ellas sólo se levantan las operaciones asociadas a la estructura matemática, dejando invariante el conjunto de elementos de la misma (aunque cada elemento en sí pueda transformarse en otro de dicho conjunto).
3. Isotopías de TIPO III. En ellas se levantan tanto los elementos como las leyes asociadas a la estructura matemática.

De todas formas, en los tres casos hay que tener en cuenta que para que se tenga realmente una isotopía es necesario que se conserven los axiomas que determinan la estructura primitiva. Con ello se consigue que el tipo de estructura sea el mismo, es decir, el levantamiento isotópico de un cuerpo es un cuerpo, el de un anillo es un anillo, el de un grupo es un grupo, etc. Ahora bien, en estas condiciones, aparecen de manera natural algunas cuestiones tales como: ¿en qué avanza la aplicación de una isotopía? o ¿Qué ventajas tiene llegar a una nueva estructura matemática del mismo tipo que la que ya teníamos, por medio de una isotopía? Para contestar a éstas y a otras preguntas parecidas hay que observar que, aunque una isotopía conserve el tipo de estructura matemática, en general no tiene porqué conservar las nociones, propiedades y teoremas desarrollados por la estructura convencional. De esta forma, una isotopía se convierte en una generalización de los conceptos de homomorfismos y homeomorfismos, en el sentido de que ya no tenemos porqué restringirnos a las condiciones que debían verificar éstos, sino que podemos utilizar los levantamientos más generales posibles.

Aún nos queda por resolver la cuestión de cómo obtener isotopías. Según lo visto, cada isotopía dependerá del tipo de estructura inicial que tengamos. Así, en principio no podemos dar un modelo de isotopía no básica que sirva para cualquier estructura dada. Por tanto, cada isotopía debe "construirse" para cada caso en concreto. Esto se debe además a la propia definición de isotopía, ya que al tener que conservar axiomas, no nos sirve cualquier levantamiento ya conocido de la estructura dada. Es aquí donde radica el problema de la construcción de isotopías, pues, si tenemos fijada la estructura inicial y conocemos un levantamiento suyo, deberemos comprobar si verifica *todos* los axiomas de la estructura base. En caso negativo, deberemos modificar el levantamiento para lograr la conservación axiomática. Esto último puede llegar a ser un procedimiento muy costoso, pues hay que realizarlo atendiendo a cada uno de los axiomas, teniendo cuidado por tanto de no alterar ninguno de ellos. Con todo esto, una vez que hayamos levantado los elementos y las leyes que los asocian, de tal forma que se verifiquen los axiomas característicos de dicha estructura, habremos logrado construir una isotopía. De lo anterior se deduce además que una isotopía de una estructura matemática no es algo único, ya que cada "construcción" está sujeta a posibles modificaciones que permitan la obtención de nuevos levantamientos útiles.

Sin embargo, las ideas anteriores siguen siendo muy generales. Es a medida que vamos imponiendo condiciones a las isotopías cuando aparece la verdadera utilidad de éstas. Una de las posibles restricciones que se pueden hacer, la obtuvo Santilli en 1978 (véase **[98]**), cuando atendiendo a problemas de índole físico y buscando una generalización de la teoría de Lie, empezó a utilizar un tipo de isotopías, más tarde llamadas *isotopías de Santilli*, que verificaban la siguiente:

Definición 3.1.2 *Se denominan* isotopías de Santilli *a aquellas isotopías de una estructura lineal, local y canónica, que den como resultado una isoestructura en las formas no lineales, no locales y no canónicas más generales posibles y que sean capaces de reconstruir linealidad, locacidad y canonicidad en ciertos espacios generalizados, dentro de las coordenadas fijadas por un observador inercial.*

En ese mismo trabajo de 1978, Santilli da un posible modelo para este tipo de isotopías. Se trata además de un modelo que, con las modificaciones oportunas, será válido para los diferentes tipos de estructuras matemáticas. Fundamentalmente, estas isotopías se basaban en una generalización de la unidad convencional y de las propiedades usuales de ésta. Esta generalización de la unidad, a la que Santilli dará el nombre de *isounidad*, será clave tanto en el levantamiento de los elementos de la estructura convencional, como en el levantamiento de las leyes asociadas. La obtención de dicha isounidad viene dada en la siguiente:

Definición 3.1.3 *Sea E una estructura matemática cualquiera, de carácter lineal, local y canónico, definida sobre un conjunto de elementos C. Sea $V \supseteq C$ un conjunto dotado de una ley de composición interna $*$, con elemento unidad I. A dicho conjunto V se le llamará* conjunto general de la isotopía*. Sea $\widehat{I} \in V$ tal que existe su inversa $T = \widehat{I}^{-I}$ respecto a la operación $*$ (donde el superíndice indica la unidad bajo la cual se calcula la inversa, es decir, tal que $\widehat{I} * T = T * \widehat{I} = I$). $\widehat{I}$ será entonces llamado* unidad isotópica *o* isounidad*, y será la unidad básica del levantamiento a seguir de la estructura E. Al elemento T se le llama* elemento isotópico*. Finalmente, el par de elementos $\widehat{I}$ y $*$ constituirán los* elementos de la isotopía*.*

En la práctica, dado que el elemento fundamental de una isotopía de Santilli es la isounidad $\widehat{I}$, no se suele indicar cuál es el conjunto V de la definición, sino que, para establecer la isotopía, basta señalar la operación $*$ y la isounidad $\widehat{I}$ (o bien el elemento isotópico, T). Observemos además que la ley $*$ no tiene porqué aparecer en la estructura E.

En el caso más general posible, $\widehat{I}$ puede poseer una dependencia no lineal y no local del tiempo t, de las coordenadas x y de sus derivadas de orden arbitrario $\dot{x}, \ddot{x}, \ldots$, es decir, $\widehat{I} = \widehat{I}(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots)$. También pudiera ocurrir que $\widehat{I}$ dependiese de otras variables locales como la temperatura, la densidad del medio, etc. En cualquier caso, dado que la característica fundamental de toda isotopía es la de conservar axiomas y dado que queremos establecer una isotopía a través de la isounidad $\widehat{I}$, deberemos imponer que $\widehat{I}$ verifique las propiedades topológicas de la unidad usual I. Así, suponiendo que I sea $n-$ dimensional, $\widehat{I}$, aparte de tener la misma dimensión n, deberá ser al igual que I, no singular en todo punto, invertible (en la región donde se consideren los valores locales) y hermítica (esto es, simétrica y de valores reales).

Señalar por último que en la definición se puede establecer que $\widehat{I}$ sea isounidad tanto a derecha como a izquierda, dependiendo de cómo multipliquemos. Se podrían establecer así dos teorías análogas. Sin embargo, dado que nos interesa que $\widehat{I}$ verifique las propiedades topológicas de la unidad usual, admitiremos que $\widehat{I}$ es isounidad a izquierda y a derecha.

Antes de ver cómo se obtienen las isoestructuras a partir de la isounidad $\widehat{I}$, observemos que en el caso de las isotopías de Santilli no nos interesan las isotopías de tipo I vistas anteriormente, debido a que el carácter no lineal, no local y no canónico buscado se encuentra dado en las operaciones. Así, si éstas no varían no alcanzaremos dicho carácter. Sin embargo, dado que las isotopías de Santilli se basan en la isounidad $\widehat{I}$, J. V. Kadeisvili, en 1992 (véase **[46]**), ya realizó la siguiente clasificación de estas isotopías de Santilli:

1. ISOTOPÍAS DE SANTILLI de CLASE I. En ellas las isounidades son suficientemente diferenciables, acotadas, no degeneradas en todo punto, hermíticas y definidas positivas. Son las isotopías de Santilli propiamente dichas.
2. ISOTOPÍAS DE SANTILLI de CLASE II. Son isotopías análogas a las de clase I, salvo en que $\widehat{I}$ será definida negativa.
3. ISOTOPÍAS DE SANTILLI de CLASE III. Son las isotopías unión de las dos clases anteriores.
4. ISOTOPÍAS DE SANTILLI de CLASE IV. Son aquellas isotopías unión de las de clase III con las que tienen isounidades singulares.
5. ISOTOPÍAS DE SANTILLI de CLASE V. Son aquellas isotopías unión de las de clase IV con las que tienen isounidades sin ninguna restricción, pudiendo depender de funciones discontinuas, distribuciones, etc.

Es importante observar que esta clasificación no sólo sirve para las isotopías, sino para todas las estructuras generadas por ellas, es decir, para las isoestructuras. En nuestro estudio se desarrollarán las de clase I y II, unificándose a veces en las de clase III.

Seguidamente queda ver cómo construír la isotopía de Santilli a partir de la isounidad $\widehat{I}$. Para ello debemos ver para cada estructura en particular cómo se realiza el levantamiento, tanto del conjunto de elementos de la estructura como de las leyes asociadas. Esta particularización se verá reflejada también en las condiciones iniciales que deban cumplir la isounidad $\widehat{I}$ y la operación $*$, condiciones que variarán según la estructura que estemos estudiando.

En general, si C es el conjunto de elementos de una estructura fijada, E, cualquiera, el levantamiento que se lleva a cabo es el que a cada elemento $X \in C$ le asocia $\widehat{X} = X * \widehat{I}$, donde la operación $*$ correspondería al conjunto V visto anteriormente. Volvemos a indicar que esta operación no tiene porqué encontrarse como ley de la estructura E. Sin embargo, por razones de simplificación y cuando no haya lugar a confusión, suprimiremos su escritura, resultando la notación $\widehat{X} = X\widehat{I}$. Al conjunto obtenido entonces, $\widehat{C}_{\widehat{I}} = \{\widehat{X} = X\widehat{I} : X \in C\}$, se le llamará *conjunto isotópico* asociado a C mediante la isounidad $\widehat{I}$. También, cuando no haya problemas de interpretación, se notará simplemente por $\widehat{C}$.

Destaquemos también que por convenio, los elementos de escritura a los que se les superponga el gorro$\widehat{\ }$, indicarán que lo que representen se corresponde al plano del levantamiento isotópico realizado. Así veremos por ejemplo que la mayoría de las operaciones usuales pueden ser levantadas isotópicamente de una manera u otra y que para evitar complicaciones de escritura, la forma de diferenciar las operaciones de la estructura de partida, de las de la isoestructura será mediante el signo $\widehat{\ }$.

No obstante, es importante notar que esta forma de conseguir el levantamiento isotópico del conjunto C, aunque correcta, no es la más adecuada, pues da lugar a una serie de inconsistencias matemáticas, identificadas por el propio Santilli al comienzo de sus estudios (véase **[99]**) y estudiadas por él mismo recientemente (véanse **[145]** y **[161]**). Sin embargo, para empezar a estudiar la isoteoría de Santilli conviene comenzar manejando este levantamiento señalado.

Finalmente, faltaría aún por estudiar cómo realizar el levantamiento de las operaciones asociadas a la estructura E, pero este aspecto conviene verlo para cada estructura en particular. Por ello, vamos a ir viendo en las siguientes secciones de este Capítulo y en las de los siguientes, separadamente, el conjunto de levantamientos isotópicos de las estructuras matemáticas más importantes, que darán lugar, respectivamente a las siguientes isoestructuras: isogrupos, isoanillos, isocuerpos, isoespacios vectoriales, isomódulos, isoespacios vectoriales métricos e isoálgebras. Como cabe observar, los nombres de todas las isoestructuras señaladas se forman añadiendo el prefijo *iso-* a los nombres de las estructuras usuales. Con este procedimiento (habitual en otros campos de la isoteoría) se viene a señalar lo ya visto de que las nuevas estructuras son del mismo tipo que las anteriores, ya que conservan los axiomas que las definen.

Señalar por último que las definiciones de las isoestructuras sirven para cualquier isotopía en general, aunque nosotros las aplicaremos directamente a las isotopías de Santilli. Por ello, dado que ya no hay lugar a confusiones, notaremos simplemente por isotopías a éstas últimas, siempre recordando que son una restricción del conjunto de isotopías generales.

3.2. Isonúmeros

Antes de empezar a estudiar la primera de las isoestructuras, vamos a dedicar un apartado a la formación del conjunto isotópico $\widehat{C}$, señalado anteriormente, para el caso de la estructura de cuerpos. Esto nos servirá para comenzar a familiarizarnos con los nuevos conceptos, pues se trata del caso más simple posible.
Supongamos entonces que tenemos un cuerpo cualquiera, $K = K(a,+,\times)$, de elementos $\{a,b,c,\ldots\}$, con las operaciones asociativas $+$ y $\times$ usuales, con unidad aditiva 0 y unidad multiplicativa 1. Dado que convencionalmente a los elementos de un cuerpo se les llama

números, a los elementos de la isoestructura que queremos construir les llamaremos *isonúmeros*. Con las notaciones de la sección anterior, tendríamos que en este caso: $E = K,\ C = \{a, b, c, ...\}$ y las operaciones asociadas serían $+$ y $\times$. Un desarrollo más completo, así como la génesis histórica de los isonúmeros puede verse en **[128]**.

Fijadas ahora una isounidad $\widehat{I}$, que puede pertenecer a K o no (recordemos que $\widehat{I} \in V$, donde $V \supseteq K$, aunque dijimos que en la práctica no había porqué señalar dicho conjunto) y una ley $*$, sabemos, por el modelo visto anteriormente, que el conjunto isotópico asociado a C mediante la isounidad $\widehat{I}$, queda: $\widehat{C} = \{\widehat{a} = a * \widehat{I} = a\widehat{I} \mid a \in C\}$. Dicho conjunto isotópico es el conjunto de los isonúmeros que corresponderá al levantamiento isotópico por $\widehat{I}$ y $*$ del cuerpo K.

Veamos a continuación dos ejemplos de isonúmeros originados ambos a partir de los números reales, es decir, trabajaremos con la estructura $\mathbf{R}(+, \times)$, con la suma y el producto usuales. En el primero de ellos, tomaremos $\widehat{I} \in \mathbf{R}$, mientras que en el segundo, $\widehat{I} \notin \mathbf{R}$.

Ejemplo 3.2.1 *Con las notaciones anteriores, supongamos que*

$$V = C = \mathbf{R}, \qquad * \equiv \times, \qquad \widehat{I} = 2$$

Tendremos en este caso que el conjunto isotópico asociado a $\mathbf{R}$ *mediante* $\widehat{I}$ *y* $*$ *será el conjunto* $\widehat{\mathbf{R}}_2 = \{\widehat{a} = a \times 2 = 2a : a \in \mathbf{R}\}$. *Así pues, resulta que* $\widehat{\mathbf{R}}_2 = \mathbf{R}$, *con lo que el levantamiento isotópico del conjunto de elementos iniciales nos da el mismo conjunto.* $\lhd$

Ejemplo 3.2.2 *Supongamos ahora que*

$$V = \mathbf{C}, \qquad * \equiv \bullet \text{ (\textit{el producto en} } \mathbf{C}), \qquad \widehat{I} = i$$

Obtendremos entonces como conjunto isotópico a $\widehat{\mathbf{R}}_i = \{\widehat{a} = a \bullet i = ai : a \in \mathbf{R}\}$. *Llegamos así a que* $\widehat{\mathbf{R}}_i = Im(\mathbf{C}.)$ $\lhd$

Observamos que en el segundo ejemplo bastaba con señalar la isounidad $\widehat{I} = i$ e indicar cual es la operación $*$ para obtener el conjunto isotópico, puesto que no ha sido necesario en ningún momento saber cuál era el conjunto V.

En general, como la ley $*$ es interna, cuando queramos que la isotopía buscada no varíe el conjunto de elementos de la estructura de partida, supondremos que $V = C$. En caso contrario, tomaremos $V \supset C$. Por todo ello, cuando indiquemos una isotopía sólo por una isounidad $\widehat{I} \in C$ y la operación $*$, supondremos que $V = C$. Si $\widehat{I} \notin C$, será $V \supset C$.

Vemos por último que, para la construcción del conjunto isotópico no se ha hecho distinción acerca de la característica del cuerpo con el que se trabaja. Tengamos en cuenta además lo ya anotado con anterioridad de que para poder realizar una isotopía, aparte de las condiciones impuestas a la isounidad $\widehat{I}$, dicha isounidad también puede depender del tiempo, de las coordenadas y de sus derivadas, etc. Esto tiene gran importancia desde el punto de vista físico y analítico. No obstante, para fijar ideas, comenzaremos suponiendo en primer lugar que $\widehat{I}$ es un elemento constante.

3.3. Isogrupos

Comenzaremos dando la definición general de isogrupo (pueden verse de forma más exhaustiva en **[98]**), para indicar después el modelo de construcción de un isogrupo a partir de una isounidad y una operación $*$ fijadas. Tras mostrar finalmente algunos ejemplos, se plantea también la posibilidad de realizar el levantamiento isotópico de algunas subestructuras relacionadas con los grupos y de las aplicaciones que existen entre los isogrupos.

Definición 3.3.1 *Sea $(G, \circ)$ un grupo, siendo $\circ$ una ley de composición interna asociativa, con elemento unidad e. Un* isogrupo *$\widehat{G}$ es una isotopía de G, dotada de una nueva ley de composición interna, $\widehat{\circ}$, tal que el par $(\widehat{G}, \widehat{\circ})$ verifica las propiedades de grupo, es decir, que $\forall \widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma} \in \widehat{G}$, se verifican:*

1. Asociatividad: $(\widehat{\alpha}\widehat{\circ}\widehat{\beta})\widehat{\circ}\widehat{\gamma} = \widehat{\alpha}\widehat{\circ}(\widehat{\beta}\widehat{\circ}\widehat{\gamma})$.

2. Elemento unidad (isounidad): $\exists \widehat{I} \in \widehat{G}$ *tal que* $\widehat{\alpha}\widehat{\circ}\widehat{I} = \widehat{I}\widehat{\circ}\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}$.

3. Elemento inverso (isoinversa): *Dado* $\widehat{\alpha} \in \widehat{G}$*, existe* $\widehat{\alpha}^{-\widehat{I}} \in \widehat{G}$ *tal que* $\widehat{\alpha}\widehat{\circ}\widehat{\alpha}^{-\widehat{I}} = \widehat{\alpha}^{-\widehat{I}}\widehat{\circ}\widehat{\alpha} = \widehat{I}$.

Si además se verifica que $\widehat{\alpha}\widehat{\circ}\widehat{\beta} = \widehat{\beta}\widehat{\circ}\widehat{\alpha}$*, para todos* $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta} \in \widehat{G}$*, entonces se dice que* $\widehat{G}$ *es un* isogrupo isoabeliano *o* isogrupo isoconmutativo.

Observemos en primer lugar que como esta noción así definida de isogrupo es general, el elemento unidad asociado a $\widehat{\circ}$, al que se le llama isounidad, no corresponde siempre con la isounidad a la que hacíamos referencia para la construcción de una isotopía de Santilli. Sin embargo, cuando realizamos tal construcción, buscamos hacerla de tal forma que estos dos elementos coincidan. Notemos además que el hecho de escribir $\widehat{I}$ y no $\widehat{e}$, no es casual. Ello es debido a que si seguimos las notaciones usadas hasta ahora, $\widehat{e}$ es el levantamiento isotópico del elemento e, pero en general, $\widehat{e}$ no tiene porqué ser un elemento unidad de la operación $\widehat{\circ}$. Ésta es una de las razones fundamentales por las que las nociones, propiedades y teoremas desarrollados por la estructura de partida no sean necesariamente aplicables a la nueva estructura más general.

Veamos este hecho anterior en el caso de la construcción de una isotopía de Santilli a partir de una isounidad y una operación $*$ fijadas.

Para ello, una vez que tenemos el grupo $(G, \circ)$ de partida, consideramos la isounidad $\widehat{I}$ (no necesariamente perteneciente a G), y definimos la operación $*$ con la que deseamos trabajar. Ya es conocida la forma de construir el conjunto isotópico asociado a G mediante la isounidad $\widehat{I}$ y la operación $*$, pues ya se ha dicho que el modelo de construcción visto en las secciones anteriores es válido para cualquier estructura. Resulta entonces $\widehat{G} = \{\widehat{\alpha} = \alpha * \widehat{I} = \alpha\widehat{I} \mid \alpha \in G\}$.

Se va a ver a continuación, por primera vez en este texto, cómo levantar las operaciones asociadas a la estructura de partida (en nuestro caso sólo hay que levantar la ley $\circ$). Dependiendo del caso en que se encuentre la isounidad $\widehat{I}$ en cuestión (esto es, $\widehat{I} \in G$ o $\widehat{I} \notin G$), podremos hacer uso de tantos levantamientos de las operaciones como podamos construir. Sin embargo, comenzaremos con un levantamiento que servirá siempre y que va a ser fundamental en la teoría, no sólo de los isogrupos, sino del conjunto de isoestructuras en general.

Este levantamiento consiste, en nuestro caso particular, en definir, $\widehat{\alpha}\widehat{\circ}\widehat{\beta} = \widehat{\alpha} * T * \widehat{\beta}$, $\forall \widehat{\alpha}, \widehat{\beta} \in \widehat{G}$, donde $T = \widehat{I}^{-I}$ es el elemento isotópico dado en la Definición 3.1.3. Teniendo en cuenta entonces la definición del conjunto isotópico dada, resulta que $\widehat{\alpha} = \alpha * \widehat{I}$ y $\widehat{\beta} = \beta * \widehat{I}$ y por tanto, $\widehat{\alpha}\widehat{\circ}\widehat{\beta} = (\alpha * \widehat{I}) * T * (\beta * \widehat{I})$.

Observando esta última expresión nos damos cuenta de la importancia que tendría imponer la condición de asociatividad a la operación $*$, condición que no es necesaria para la formación de isotopías de Santilli en general. Sin embargo, cuando la operación que queramos levantar por este procedimiento tenga la propiedad de asociatividad (como en el caso que nos ocupa), sí deberemos imponer que $*$ sea asociativa, como se verá más adelante. Por ello, supondremos a partir de ahora que $*$ es una ley asociativa.

Entonces, supuesta la condición de asociatividad de $*$, obtenemos finalmente que

$$\widehat{\alpha}\widehat{\circ}\widehat{\beta} = \widehat{\alpha} * T * \widehat{\beta} = (\alpha * \widehat{I}) * T * (\beta * \widehat{I}) = \alpha * (\widehat{I} * T) * \beta * \widehat{I} = \alpha * I * \beta * \widehat{I}$$

donde I es el elemento unidad asociado a $*$. De ahí que $\widehat{\alpha}\widehat{\circ}\widehat{\beta} = (\alpha * \beta) * \widehat{I}$. El producto resultante de esta construcción recibe el nombre de *isoproducto.*

Ya hemos dicho que este modelo constructivo de levantamiento isotópico de la operación $\circ$ asociada al grupo G, no es propio de los isogrupos, y de hecho seguiremos utilizándolo en la construcción del resto de las isoestructuras. Ello se debe a que la utilización del isoproducto permite, tras unas adecuadas restricciones en la isounidad $\widehat{I}$ y a la operación $*$, el correcto levantamiento de la estructura de partida a la isoestructura correspondiente. En el caso de los isogrupos, la condición que vamos a imponer es que, con las notaciones usuales, $(G, *)$ sea un grupo con elemento unidad $I \in G$ (donde I es el elemento unidad respecto a $*$ en el conjunto general V).

Se puede demostrar entonces que $(\widehat{G}, \widehat{\circ})$, según se ha definido, es un isogrupo, viendo que $\widehat{\circ}$ es una operación interna y que verifica además las tres condiciones de la Definición 3.3.1.

En efecto, $\forall\widehat{\alpha},\widehat{\beta},\widehat{\gamma}\in\widehat{G}$, vemos que

a) $\widehat{\circ}$ es una operación interna para $\widehat{G}$, ya que $\widehat{\alpha}\widehat{\circ}\widehat{\beta}=(\alpha*\beta)*\widehat{I}\in\widehat{G}$, al ser $\alpha*\beta\in G$, por ser $*$ una operación interna sobre G por hipótesis (recordemos que $(G,*)$ es un grupo).

b) $(\widehat{\alpha}\widehat{\circ}\widehat{\beta})\widehat{\circ}\widehat{\gamma}=(\widehat{\alpha}*T*\widehat{\beta})*T*\widehat{\gamma}=\widehat{\alpha}*T*(\widehat{\beta}*T*\widehat{\gamma})=\widehat{\alpha}\widehat{\circ}(\widehat{\beta}\widehat{\circ}\widehat{\gamma})$. (Obsérvese que es primordial que $*$ sea asociativa para lograr que lo sea $\widehat{\circ}$).

c) $I*\widehat{I}=\widehat{I}\in\widehat{G}$, dado que $I\in G$. Además, $\widehat{I}$ es la isounidad buscada pues $\widehat{\alpha}\widehat{\circ}\widehat{I}=\widehat{\alpha}*T*\widehat{I}=\widehat{\alpha}*(T*\widehat{I})=\widehat{\alpha}=\widehat{I}\widehat{\circ}\widehat{\alpha}$.

d) Dado $\widehat{\alpha}\in\widehat{G}$, se verificará $\widehat{\alpha}=\alpha*\widehat{I}$, con $\alpha\in G$. Entonces, por ser $(G,*)$ un grupo con elemento unidad I, existe $\alpha^{-I}\in G$, tal que $\alpha*\alpha^{-I}=\alpha^{-I}*\alpha=I$. De esta forma, bastará tomar al elemento $\widehat{\alpha^{-I}}=\alpha^{-I}*\widehat{I}$, como isoinverso de $\widehat{\alpha}$ respecto a $\widehat{\circ}$, pues entonces se tiene que $\widehat{\alpha}\widehat{\circ}\widehat{\alpha^{-I}}=\widehat{\alpha}*T*\widehat{\alpha^{-I}}=(\alpha*\alpha^{-I})*\widehat{I}=I*\widehat{I}=\widehat{I}=\widehat{\alpha^{-I}}\widehat{\circ}\widehat{\alpha}$. Obsérvese además que si $\alpha*\widehat{I}=\beta*\widehat{I}$, entonces $\alpha=\alpha*\widehat{I}*T=\beta*\widehat{I}*T=\beta$. Está bien definido por tanto el isoinverso.

e) Además, si $*$ es conmutativa, $(\widehat{G},\widehat{\circ})$ será conmutativo, pues $\widehat{\alpha}\widehat{\circ}\widehat{\beta}=\widehat{\alpha}*T*\widehat{\beta}=(\alpha*\beta)*\widehat{I}=(\beta*\alpha)*\widehat{I}=\widehat{\beta}\widehat{\circ}\widehat{\alpha}$

Se ha probado, por tanto, la siguiente:

Proposición 3.3.2 *Sea $(G,\circ)$ un grupo asociativo y sean $\widehat{I}$ y $*$ dos elementos de isotopía en las condiciones de la Definición 3.1.3. Si $(G,*)$ tiene estructura de grupo asociativo con elemento unidad $I\in G$ (siendo I el elemento unidad de $*$ en el conjunto general correspondiente V), entonces el levantamiento isotópico $(\widehat{G},\widehat{\circ})$ realizado por el procedimiento del isoproducto, tiene estructura de isogrupo. Si además $(G,*)$ es conmutativo, entonces $(\widehat{G},\widehat{\circ})$ es un isogrupo conmutativo.* □

Se van a ver a continuación algunos ejemplos de isogrupos:

Ejemplo 3.3.3 *Consideremos el grupo $(\mathbf{R},+)$ de los números reales con la ley de composición dada por la suma usual. Un levantamiento isotópico trivial vendría dado a partir de la isounidad $\widehat{I}=0$ y la operación $*\equiv+$ (evidentemente $(\mathbf{R},*)=(\mathbf{R},+)$ sería un grupo con elemento unidad $0\in\mathbf{R}$), con la que obtendríamos el par $(\widehat{\mathbf{R}}_0,\widehat{+})$, donde $\widehat{\mathbf{R}}_0=\{\widehat{a}=a*0=a+0=a\mid a\in\mathbf{R}\}=\mathbf{R}$. Por otro lado, al* *ser* $* \equiv +$, *el elemento unidad respecto a* $*$ *en* $\mathbf{R}$ *será* $I = 0$ *y así,* $T = \widehat{I}^{-I} = \widehat{I}^{-0} = 0^{-0} = 0$. *De esta forma, el isoproducto quedaría definido según*

$$\widehat{a}\widehat{+}\widehat{b} = \widehat{a}*0*\widehat{b} = (a*0)*0*(b*0) = (a+0)+0+(b+0) = (a+b)+0 = \widehat{a+b} = a+b$$

Así, tendríamos que $\widehat{+} \equiv * \equiv +$. *Conviene indicar, no obstante, que aunque correctamente deberíamos hablar de* isosuma, *mantendremos el término de isoproducto por razones que se verán en las siguientes secciones.*

Por tanto, la isotopía de $(\mathbf{R}, +)$, *dada por la isounidad* 0 *y la operación* $* \equiv +$, *coincide con la isotopía trivial, esto es, la identidad. Esto demuestra que la construcción que estamos llevando a cabo de una isotopía de Santilli es correcta, pues si no variamos ni la unidad de partida ni la operación asociada al grupo, éste permanece invariante tras la isotopía.* $\triangleleft$

Ejemplo 3.3.4 *Consideremos ahora para el grupo* $(\mathbf{R}^*, \times)$, *siendo* $\mathbf{R}^*$ *el conjunto de los números reales salvo el cero, la isotopía que surge considerando como isounidad a* $\widehat{I} = i$ *y utilizando como ley el producto de complejos* $* \equiv \bullet$.

Según lo visto anteriormente, llegamos a que el conjunto isotópico es $\widehat{\mathbf{R}^*}_i = Im(\mathbf{C}) \setminus \{0\}$. *Se va a estudiar ahora el levantamiento isotópico del producto* $\times$. *Para ello, como* $* \equiv \bullet$, *el elemento unidad respecto a* $*$ *será* $I = 1$. *Así,* $\widehat{I}^{-I} = \widehat{I}^{-1} = i^{-1} = -i$, *ya que* $i \bullet (-i) = (-i) \bullet i = 1$.

Finalmente, el isoproducto queda definido de la siguiente forma: $\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{b} = \widehat{a} * (-i) * \widehat{b} = (a * i) * (-i) * (b * i) = (a \bullet i) \bullet (-i) \bullet (b \bullet i) = (a \bullet b) \bullet i = \widehat{a \bullet b} = \widehat{a \times b}$, *para todos* $a, b \in \mathbf{R}$. $\triangleleft$

Observamos además que los isogrupos obtenidos en los dos ejemplos anteriores son isoconmutativos, al serlo los grupos de partida correspondientes, pudiéndose aplicar entonces la Proposición 3.3.2.

Ahora, como paso previo a nuestro desarrollo y con el fin de continuar con la intención de distinguir los conceptos isotópicos de los usuales, damos la siguiente:

Definición 3.3.5 *Dada la isotopía* $(\widehat{G}, \widehat{\circ})$ *de un grupo* $(G, \circ,)$ *si existe un entero positivo minimal* p *tal que* $\overbrace{a\widehat{\circ}\ldots\widehat{\circ}a}^{p\ veces} = \widehat{I}$ *(siendo* $\widehat{I}$ *la isounidad del isogrupo en cuestión), diremos que el isogrupo* $\widehat{G}$ *tiene* isocaracterística p. *En otro caso, se dirá que tiene* isocaracterística cero.

A continuación se van a estudiar los posibles levantamientos de las subestructuras relacionadas con los grupos, es decir, los subgrupos. Para seguir la construcción que hemos venido haciendo, debemos definir un isosubgrupo como el levantamiento isotópico de un subgrupo H de un grupo fijado, G. El problema se plantea entonces desde el momento en que queremos que todo levantamiento isotópico de una estructura dada deba ser una estructura del mismo tipo. Así, toda isotopía de H debería tener estructura de subgrupo y, por tanto, el levantamiento isotópico de H no podría ser independiente del levantamiento de G. Con todo ello, la definición de isosubgrupo quedaría como sigue:

Definición 3.3.6 *Sea* $(G, \circ)$ *un grupo asociativo y sea* $(\widehat{G}, \widehat{\circ})$ *un isogrupo asociado. Sea* H *un subgrupo de* G. *Se dice que* $\widehat{H}$ *es un* isosubgrupo *de* $\widehat{G}$ *si, siendo una isotopía de* H, *el par* $(\widehat{H}, \widehat{\circ})$ *es un subgrupo de* $\widehat{G}$, *es decir, si* $\widehat{H} \subseteq \widehat{G}$, $\widehat{\circ}$ *es una ley de composición interna para* $\widehat{H}$ *y* $(\widehat{H}, \widehat{\circ})$ *tiene estructura de grupo.*

Vamos a aplicar ahora esta definición anterior al modelo de construcción que venimos haciendo, mediante una isounidad y una operación $*$. Supongamos entonces que tenemos el grupo asociativo $(G, \circ)$ y el isogrupo $(\widehat{G}, \widehat{\circ})$, obtenido mediante una isounidad $\widehat{I}$ y una operación $*$ fijadas. Sea H un subgrupo de G. Dado que deseamos que en el futuro isosubgrupo $\widehat{H}$ la ley asociada sea la propia $\widehat{\circ}$, si seguimos la construcción dada del isoproducto, tanto la operación como la isounidad bajo las cuales hagamos la isotopía tienen que ser, respectivamente, $*$ e $\widehat{I}$, ya que en otro caso no se obtendría la misma operación $\widehat{\circ}$ en general. Veamos un ejemplo de ello:

Ejemplo 3.3.7 *Consideremos el grupo* $(\mathbf{Z}, +)$ *de los números enteros con la suma usual. Tomamos, bajo las notaciones usuales,* $* \equiv$

$+$, $\widehat{I} = 2$. *Como* $(\mathbf{Z}, *) = (\mathbf{Z}, +)$ *es un grupo con elemento unidad* $0 \in \mathbf{Z}$, *podemos realizar la isotopía de elementos* $*$ *e* $\widehat{I}$. *Entonces,* $\widehat{\mathbf{Z}}_2 = \{\widehat{a} = a * 2 = a + 2 \mid a \in \mathbf{Z}\} = \mathbf{Z}$. *Por su parte, como* $* \equiv +$, $I = 0$ *será el elemento unidad respecto a* $*$. *Así,* $\widehat{I}^{-I} = \widehat{I}^{-0} = 2^{-0} = -2$ *y llegamos por tanto al isoproducto dado por* $\widehat{a}\widehat{+}\widehat{b} = \widehat{a} * (-2) * \widehat{b} = (a+2)*(-2)*(b+2) = a+2+(-2)+b+2 = a+b+2 = (a+b)*2 = \widehat{a+b}$, *para todos* $a, b \in \mathbf{Z}$. *Hemos obtenido así el isogrupo* $(\widehat{\mathbf{Z}}_2, \widehat{+})$, *proveniente del grupo aditivo* $(\mathbf{Z}, +)$.

Consideramos ahora el subgrupo $(\mathbf{P}, +)$ *de los enteros pares y el cero. Si realizamos la isotopía relativa a los mismos elementos anteriores (que de nuevo puede realizarse al ser* $(\mathbf{P}, *) = (\mathbf{P}, +)$ *un grupo con elemento unidad* $0 \in \mathbf{P}$*), obtenemos por una parte el conjunto isotópico* $\widehat{\mathbf{P}}_2 = \{\widehat{m} = m * 2 = m + 2 \mid m \in \mathbf{P}\} = \mathbf{P}$, *y por otra parte, llegaríamos al mismo isoproducto* $\widehat{+}$.

Se va a demostrar ahora que $(\widehat{\mathbf{P}}_2, \widehat{+})$ *es un isosubgrupo de* $(\widehat{\mathbf{Z}}_2, \widehat{+})$, *teniendo en cuenta que, desde luego,* $\widehat{\mathbf{P}}_2$ *es una isotopía de* $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Z}$. *Para ello se observa que*

a) $\widehat{\mathbf{P}}_2 \subseteq \widehat{\mathbf{Z}}_2$, *pues* $\widehat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}$, $\widehat{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}$ *y* $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Z}$.

b) *Para todos* $m, n \in \mathbf{P}$ *se verifica* $\widehat{m}\widehat{+}\widehat{n} = m + n + 2 \in \mathbf{P}$. *Así,* $\widehat{+}$ *es una ley de composición interna en* $\widehat{\mathbf{P}}_2$.

c) *Se verifican también las condiciones de grupo, al ser*

1. *La asociatividad la hereda de* $(\widehat{G}, \widehat{\circ})$.
2. *La isounidad* $\widehat{I} = 2$ *(que es el elemento unidad respecto a* $\widehat{+}$*) pertenece a* $\widehat{\mathbf{P}}_2 = \mathbf{P}$. *Sería* $\widehat{I} = \widehat{0} = 0 + 2$.
3. $\forall m \in \mathbf{P}$, $m^{-\widehat{I}} = -m \in \widehat{\mathbf{P}}_2$, *ya que* $m\widehat{+}(-m) = (m + (-m)) + 2 = 0 + 2 = 2 = \widehat{I} = (-m)\widehat{+}m$.

Por consiguiente, queda demostrado que $(\widehat{\mathbf{P}}_2, \widehat{+})$ *es un isosubgrupo de* $(\widehat{\mathbf{Z}}_2, \widehat{+})$. $\triangleleft$

Nótese que en el ejemplo anterior pueden suprimirse algunas partes de la demostración. Por ejemplo, dado que la operación $*$ y la isounidad utilizadas son las mismas en ambas isotopías, tendremos que si H es subgrupo de un grupo fijado $(G, \circ)$, entonces $\widehat{H} \subseteq \widehat{G}$, pues, con las notaciones usuales, $\widehat{h} = h * \widehat{I}$ con $h \in H \subseteq G \Rightarrow h \in G \Rightarrow \widehat{h} \in \widehat{G}$. Por otra parte, una vez probado que podemos realizar la isotopía correspondiente a los elementos con los que construímos $\widehat{G}$, para construir $\widehat{H}$, nos evitaremos algunas comprobaciones más. Recordemos que, según la Proposicion 3.3.2, una de las condiciones que debe verificarse para poder construir la isotopía es que el par $(H, *)$ sea un grupo con elemento unidad el mismo que tenía V respecto $*$, I, que a su vez deberá coincidir con el elemento unidad de $(G, *)$ (pues ya damos por supuesto que se puede realizar la isotopía del grupo G). Entonces, de forma análoga a como se comprobó que $(\widehat{G}, \widehat{\circ})$ tenía estructura de grupo mediante el isoproducto $\widehat{\circ}$ formado a partir de $*$, tenemos que el hecho de ser $\widehat{+}$ una ley de composición interna en $\widehat{\mathbf{P}}_2$ y las condiciones (2) y (3) se tienen por construcción. Finalmente, la condición (1) de asociatividad se tiene evidentemente, pues $\widehat{\circ}$ es ya asociativa en $(\widehat{G}, \widehat{\circ})$, al ser $*$ asociativa por hipótesis.

Con todo ello queda probada la siguiente:

Proposición 3.3.8 *Sea $(G, \circ)$ un grupo asociativo y sea $(\widehat{G}, \widehat{\circ})$ el isogrupo asociado correspondiente a la isotopía de elementos $\widehat{I}$ y $*$. Sea H un subgrupo de G. Entonces, si $(H, *)$ tiene estructura de grupo, con elemento unidad el mismo que el de $(G, *)$, el levantamiento isotópico $(\widehat{H}, \widehat{\circ})$, correspondiente a la isotopía de elementos $\widehat{I}$ y $*$, es un isosubgrupo de $\widehat{G}$.* □

De hecho, dado que el modelo de construcción de isogrupos ya nos señalaba esta condición, podríamos indicar simplemente que, en el caso de poder realizarse la isotopía correspondiente a $\widehat{I}$ y $*$, el levantamiento isotópico $(\widehat{H}, \widehat{\circ})$ es ya un isosubgrupo de $\widehat{G}$. Por tanto, el único problema que se plantea ahora es que no se pueda realizar dicha isotopía por falta de condiciones iniciales. Veamos esta situación en el siguiente:

Ejemplo 3.3.9 *Consideremos el grupo $(\mathbf{Z}/\mathbf{Z_2}, +)$ del conjunto cociente $\mathbf{Z}/\mathbf{Z_2}$ con la suma usual. Consideramos ahora, con las notaciones también usuales, $\widehat{I} = 1 + \mathbf{Z_2}$ y la operación $*$ definida según*

$$(1 + \mathbf{Z_2}) * (1 + \mathbf{Z_2}) = 1 + \mathbf{Z_2} = (0 + \mathbf{Z_2}) * (0 + \mathbf{Z_2})$$

$$(1+\mathbf{Z_2})*(0+\mathbf{Z_2}) = (0+\mathbf{Z_2})*(1+\mathbf{Z_2}) = 0+\mathbf{Z_2}.$$

Probemos en primer lugar que $*$, así definida, es una ley asociativa. Para ello,
$((1+\mathbf{Z_2})*(1+\mathbf{Z_2}))*(1+\mathbf{Z_2}) = (1+\mathbf{Z_2})*(1+\mathbf{Z_2}) = 1+\mathbf{Z_2} = (1+\mathbf{Z_2})*(1+\mathbf{Z_2}) = (1+\mathbf{Z_2})*((1+\mathbf{Z_2})*(1+\mathbf{Z_2}))$.

$((1+\mathbf{Z_2})*(1+\mathbf{Z_2}))*(0+\mathbf{Z_2}) = (1+\mathbf{Z_2})*(0+\mathbf{Z_2}) = 0+\mathbf{Z_2} = (1+\mathbf{Z_2})*(0+\mathbf{Z_2}) = (1+\mathbf{Z_2})*((1+\mathbf{Z_2})*(0+\mathbf{Z_2}))$.

$((1+\mathbf{Z_2})*(0+\mathbf{Z_2}))*(0+\mathbf{Z_2}) = (0+\mathbf{Z_2})*(0+\mathbf{Z_2}) = 1+\mathbf{Z_2} = (1+\mathbf{Z_2})*(1+\mathbf{Z_2}) = (1+\mathbf{Z_2})*((0+\mathbf{Z_2})*(0+\mathbf{Z_2}))$.

$((0+\mathbf{Z_2})*(0+\mathbf{Z_2}))*(0+\mathbf{Z_2}) = (1+\mathbf{Z_2})*(0+\mathbf{Z_2}) = 0+\mathbf{Z_2} = (0+\mathbf{Z_2})*(1+\mathbf{Z_2}) = (0+\mathbf{Z_2})*((0+\mathbf{Z_2})*(0+\mathbf{Z_2}))$.
y los otros casos posibles se tendrían por conmutatividad. Resulta así que $(\mathbf{Z}/\mathbf{Z}_2, *)$ tiene estructura de grupo con elemento unidad $I = \widehat{I} =$ $1+\mathbf{Z_2} \in \mathbf{Z}/\mathbf{Z_2}$.

Además, realizando ahora la isotopía correspondiente a $\widehat{I}$ y $*$, obtenemos como conjunto isotópico a $\widehat{\mathbf{Z}/\mathbf{Z}}_{\mathbf{2}_{1+\mathbf{Z_2}}} = \{0+\mathbf{Z_2}, 1+\mathbf{Z_2}\} = \mathbf{Z}/\mathbf{Z_2}$.

Por su parte, como $\widehat{I}^{-I} = (1+\mathbf{Z}_2)^{-(1+\mathbf{Z_2})} = 1+\mathbf{Z}_2$, el correspondiente isoproducto $\widehat{+}$ vendrá dado por

$$(0+\mathbf{Z_2})\widehat{+}(0+\mathbf{Z_2}) = ((0+\mathbf{Z_2})*(1+\mathbf{Z_2}))*(1+\mathbf{Z_2})*((0+\mathbf{Z_2})*(1+\mathbf{Z_2})) =$$

$$((0+\mathbf{Z_2})*(0+\mathbf{Z_2}))*(1+\mathbf{Z_2}) = (1+\mathbf{Z_2})*(1+\mathbf{Z_2}) = 1\widehat{+\mathbf{Z}}_{\mathbf{2}} = 1+\mathbf{Z_2}$$

$$(0+\mathbf{Z_2})\widehat{+}(1+\mathbf{Z_2}) = ((0+\widehat{\mathbf{Z_2})*(}1+\mathbf{Z_2})) = 0\widehat{+\mathbf{Z}}_{\mathbf{2}} = 0+\mathbf{Z_2}$$

$$(1+\mathbf{Z_2})\widehat{+}(1+\mathbf{Z_2}) = ((1+\widehat{\mathbf{Z_2})*(}1+\mathbf{Z_2})) = 1\widehat{+\mathbf{Z}}_{\mathbf{2}} = 1+\mathbf{Z_2}$$

Así pues, $\widehat{+} \equiv *$ y por tanto, $(\widehat{\mathbf{Z}/\mathbf{Z}}_{\mathbf{2}_{1+\mathbf{Z_2}}}, \widehat{+}) = (\mathbf{Z}/\mathbf{Z_2}, *)$ es un nuevo isogrupo.

Consideremos por otro lado el subgrupo $(\{0+\mathbf{Z_2}\},+)$ *de* $(\mathbf{Z}/\mathbf{Z_2},+)$. *Vemos que* $(\{0+\mathbf{Z_2}\},*)$ *no tiene sin embargo estructura de grupo, pues* $*$ *no es una operación interna para* $\{0+\mathbf{Z_2}\}$, *al ser* $(0+\mathbf{Z_2})*(0+\mathbf{Z_2}) = 1+\mathbf{Z_2} \notin \{0+\mathbf{Z_2}\}$. *Por tanto, no se verifican las condiciones de la Proposición 3.3.8 para obtener un isosubgrupo aplicando la isotopía de elementos* $\widehat{I} = 1+\mathbf{Z_2}$ *y* $*$, *ya que en caso de que construyéramos el conjunto isotópico y el isoproducto correspondientes, el resultado obtenido no tendría estructura de grupo. Tendríamos de hecho que* $\{\widehat{0+\mathbf{Z}}_2\}_{1+\mathbf{Z}_2} = \{(0+\mathbf{Z}_2)*(1+\mathbf{Z}_2)\} = \{0+\mathbf{Z}_2\}$, *siendo* $(0+\mathbf{Z}_2)\widehat{+}(0+\mathbf{Z}_2) = \widehat{1+\mathbf{Z}}_2 = 1+\mathbf{Z}_2 \notin \{\widehat{0+\mathbf{Z}}_2\}_{1+\mathbf{Z}_2}$. $\triangleleft$

Cabría entonces hacerse ahora una nueva pregunta. Demos antes las condiciones necesarias para plantearla: sea $(G,\circ)$ un grupo asociativo de elemento unidad I y $(\widehat{G},\widehat{\circ})$ el isogrupo asociado a la isotopía de elementos $\widehat{I}$ y $*$. Sabemos que todo isosubgrupo de $\widehat{G}$ tiene estructura de subgrupo. También hemos visto ejemplos en los que subgrupos de G no pueden dar lugar a isosubgrupos de $\widehat{G}$, usando como elementos de isotopía también a $\widehat{I}$ y a $*$. Debemos de plantearnos finalmente si todo subgrupo de $\widehat{G}$ tiene estructura de isosubgrupo de $(\widehat{G},\widehat{\circ})$, esto es, si proviene del levantamiento isotópico de un subgrupo de G. Desde luego, ya ha quedado patente que como fijado un subgrupo $(\widehat{H},\widehat{\circ})$ de $(\widehat{G},\widehat{\circ})$, la ley $\widehat{\circ}$ debe ser la misma en ambos pares, los elementos de la isotopía correspondientes deben coincidir. Es decir, en caso de que $\widehat{H}$ sea un isosubgrupo, deberá ser proveniente de una isotopía con los mismos elementos que la que construye $\widehat{G}$. Por tanto, el único posible subconjunto de G que daría lugar al posible isosubgrupo sería $H = \{a \in G : \widehat{a} \in \widehat{H}\} \subseteq G$. Sin embargo, el par $(H,\circ)$ no tiene porqué ser un subgrupo de $(G,\circ)$ en general, como puede verse en el siguiente:

Ejemplo 3.3.10 *Consideremos* $(\mathbf{Z}/\mathbf{Z_2},+)$ *y el isogrupo* $(\widehat{\mathbf{Z}/\mathbf{Z}}_{\mathbf{2}1+\mathbf{Z_2}},*)$ *dados en el ejemplo anterior. Como únicos subgrupos propios de ambos tenemos a los pares* $(\{0+\mathbf{Z_2}\},+)$ *y* $(\{1+\mathbf{Z_2}\},*)$, *respectivamente.*

Según lo visto, si con las notaciones anteriores tomamos $\widehat{H} = (\{1+\mathbf{Z_2}\},*)$ *subgrupo de* $(\widehat{\mathbf{Z}/\mathbf{Z}}_{\mathbf{2}1+\mathbf{Z_2}},*)$, *el único posible subconjun-*

to de $\mathbf{Z}/\mathbf{Z_2}$ *del que se podría dotar a* $\widehat{H}$ *de estructura de isosubgrupo, sería* $H = \{1 + \mathbf{Z_2}\}$*, pues* $(1 + \mathbf{Z_2}) * (1 + \mathbf{Z_2}) = 1 + \mathbf{Z_2}$*, siendo* $\widehat{I} = 1 + \mathbf{Z_2}$ *la isounidad que utilizamos en dicho ejemplo para construir la isotopía. Sin embargo,* $(\{1 + \mathbf{Z_2}\}, +)$ *no es subgrupo de* $(\mathbf{Z}/\mathbf{Z_2}, +)$*, pues, por ejemplo,* $+$ *no es una operación interna para* $\{1 + \mathbf{Z}_2\}$*, al ser* $(1 + \mathbf{Z_2}) + (1 + \mathbf{Z_2}) = 0 + \mathbf{Z_2}$. $\triangleleft$

Vemos por tanto que con este ejemplo queda respondida negativamente la pregunta que nos habíamos planteado, quedando finalmente resuelto el problema de la relación existente entre grupos e isogrupos.

Finalizamos esta sección dando las definiciones de las posibles aplicaciones que se establecen entre isogrupos:

Definición 3.3.11 *Sean* $(\widehat{G}, \widehat{\circ})$ *y* $(\widehat{G'}, \widehat{\bullet})$ *dos isogrupos. Una aplicación* $f : \widehat{G} \to \widehat{G'}$ *se dice* homomorfismo *de isogrupos si se verifica que* $f(\widehat{\alpha}\widehat{\circ}\widehat{\beta}) = f(\widehat{\alpha})\widehat{\bullet}f(\widehat{\beta})$*, para todos* $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta} \in \widehat{G}$*. Si* f *es biyectiva, se dice entonces* isomorfismo *de isogrupos. Si* $\widehat{G'} = \widehat{G}$*,* f *se dice* endomorfismo *y si además* f *es isomorfismo, entonces se dice* automorfismo.

3.4. Isoanillos

Para realizar el estudio de esta nueva isoestructura seguiremos el mismo procedimiento que el hecho para el caso de los isogrupos. En una primera subsección, estudiaremos los propios *isoanillos* y los *isosubanillos*. En las siguientes dos subsecciones trataremos respectivamente de los *isoideales* y de los *isoanillos cocientes*.

3.4.1. Isoanillos e Isosubanillos

Definición 3.4.1 *Sea* $(A, \circ, \bullet)$ *un anillo con elemento unidad* e*. Se denomina* isoanillo $\widehat{A}$ *a toda isotopía de* A*, dotada de dos nuevas leyes de composición internas,* $\widehat{\circ}$ *y* $\widehat{\bullet}$*, la segunda con elemento unidad* $\widehat{I} \in \widehat{A}$

(isounidad), no necesariamente perteneciente a A, verificando los axiomas de anillo. Es decir, tales que para todos $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma} \in \widehat{A}$, se verifiquen:

1. $(\widehat{A}, \widehat{\circ})$ *es un isogrupo abeliano.*
2. *Asociatividad de* $\widehat{\bullet}$: $(\widehat{\alpha}\widehat{\bullet}\widehat{\beta})\widehat{\bullet}\widehat{\gamma} = \widehat{\alpha}\widehat{\bullet}(\widehat{\beta}\widehat{\bullet}\widehat{\gamma})$.
3. *Distributividad:*

   a) $\widehat{\alpha}\widehat{\bullet}(\widehat{\beta}\widehat{\circ}\widehat{\gamma}) = (\widehat{\alpha}\widehat{\bullet}\widehat{\beta})\widehat{\circ}(\widehat{\alpha}\widehat{\bullet}\widehat{\gamma})$
   b) $(\widehat{\alpha}\widehat{\circ}\widehat{\beta})\widehat{\bullet}\widehat{\gamma} = (\widehat{\alpha}\widehat{\bullet}\widehat{\gamma})\widehat{\circ}(\widehat{\beta}\widehat{\bullet}\widehat{\gamma})$.

Si además se verifica que $\widehat{\alpha}\widehat{\bullet}\widehat{\beta} = \widehat{\beta}\widehat{\bullet}\widehat{\alpha}$, para todos $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta} \in \widehat{A}$, se dice que $\widehat{A}$ es isoconmutativo.

Observamos que en el caso de los isoanillos se tiene la existencia de dos isounidades: la isounidad relativa a la operación $\widehat{\circ}$, que denotaremos por $\widehat{S}$, y la relativa a $\widehat{\bullet}$, a la que ya hemos denotado por $\widehat{I}$. Si nos centramos en el caso de las isotopías de Santilli, ya hemos visto que cada una de éstas viene determinada por una isounidad y una operación $*$. Por otra parte, la construcción hecha para los isogrupos favorecía que la isounidad de la isotopía coincidiera con la isounidad del isogrupo. Sin embargo, aquí aparecen dos isounidades en la isoestructura. ¿Sería necesario entonces el uso de dos isotopías distintas para la construcción de un isoanillo? Para contestar a esta pregunta fijaremos en primer lugar una ley asociativa $*$ y una isounidad a la que llamaremos $\widehat{I}$, ya que buscaremos que, por construcción, la misma coincida con la isounidad respecto $\widehat{\circ}$, ya citada anteriormente. Respecto a esta isotopía ya sabemos construir explícitamente el conjunto isotópico asociado a A, que vendrá dado por $\widehat{A} = \{\widehat{a} = a * \widehat{I} \mid a \in A\}$.

Una vez levantado isotópicamente el conjunto de elementos de la estructura de partida, debemos realizar el levantamiento de las operaciones asociadas, $\circ$ y $\bullet$. Para ello, comenzaremos levantando isotópicamente la segunda operación, $\bullet$, mediante el procedimiento de construcción del isoproducto, ya visto en la sección anterior. Esto es, si $*$ tiene como elemento unidad a I y se tiene $T = \widehat{I}^{-I}$, tendremos como isoproducto $\widehat{\bullet}$ a la operación definida según

$$\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{b} = \widehat{a} * T * \widehat{b} = (a * b) * \widehat{I},\ \forall \widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{A}$$

De esta forma, al igual que se hizo para isogrupos, se consigue que la operación $\widehat{\bullet}$ sea asociativa al serlo $*$. Además, imponiendo $I \in A$ tenemos que $\widehat{I} \in \widehat{A}$, siendo la isounidad señalada en la definición anterior respecto a $\widehat{\bullet}$.

Faltaría aún por levantar la operación $\circ$. Si buscamos un procedimiento análogo al modelo del isoproducto, nos harían falta una isounidad $\widehat{S}$ y una operación $\star$, similares a $\widehat{I}$ y a $*$. Ahora bien, dado que el conjunto isotópico del futuro isoanillo ya ha sido construido, la operación $\star$ debería ser tal que el conjunto isotópico formado a partir de ella coincida con el que ya teníamos. Además, dado que $(\widehat{A}, \widehat{\circ})$ debería ser un isogrupo, tendría que verificarse $\widehat{S} \in \widehat{A}$, con lo que $\widehat{S}$ debería ser de la forma $\widehat{S} = s * \widehat{I}$, con $s \in A$. Por este motivo, siguiendo la notación de la Definición 3.1.3, consideraremos que el conjunto general V asociado al levantamiento de la operación $\circ$ sea el mismo que el utilizado para el levantamiento de A y de $\bullet$. Por otro lado, si $\star$ fuera una ley con elemento unidad S, sabemos que como condiciones para realizar una isotopía de un grupo es necesario imponer que $(A, \star)$ sea un grupo con $S \in A$. También impondremos que $\star$ sea asociativa y que junto a $*$ verifique la propiedad distributiva en $\widehat{A}$, es decir, que $\forall a, b, c \in A$ se verifiquen

1. $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$.
2. $a * (b \star c) = (a * b) \star (a * c)$; $(a \star b) * c = (a * c) \star (b * c)$.

Con todo ello, suponiendo que $\widehat{S}^{-S} = \widehat{R} = r * \widehat{I} \in \widehat{A}$ (con $r \in A$), construiríamos el isoproducto $\widehat{\circ}$ definiéndolo para todos $\widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{A}$ según $\widehat{a}\widehat{\circ}\widehat{b} = \widehat{a} \star \widehat{R} \star \widehat{b} = (\widehat{a} \star \widehat{R}) \star \widehat{b} = ((a * \widehat{I}) \star (r * \widehat{I})) \star \widehat{b} = ((a \star r) * \widehat{I}) \star (b * \widehat{I}) = (a \star r \star b) * \widehat{I}$ que trivialmente está en $\widehat{A}$, pues $a \star r \star b \in A$, al ser $(A, \star)$ un grupo.

Entonces, de forma análoga al caso general ya visto, llegaríamos bajo estas condiciones a que $(\widehat{A}, \widehat{\circ})$ es un isogrupo, verificándose así la condición (1) de la definición anterior, por lo que la única condición que faltaría por comprobar sería la distributividad. Sin embargo, como se verá a continuación, en general no se cumple esta condición. En efecto, sean $\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c} \in \widehat{A}$. Entonces: $\widehat{a}\widehat{\bullet}(\widehat{b}\widehat{\circ}\widehat{c}) = \widehat{a}\widehat{\bullet}(\widehat{b} \star \widehat{R} \star \widehat{c}) = \widehat{a}\widehat{\bullet}((b \star r \star c) * \widehat{I}) = (a*(b\star r\star c))*\widehat{I} = ((a*b)\star(a*r)\star(a*c))*\widehat{I} \neq ((a*b)\star r\star(a*c))*\widehat{I} = (\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{b})\widehat{\circ}(\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{c})$ y análogamente, tampoco se verifica la ley distributiva a izquierda en general. Sí se tendría a derecha cuando $a * r = r$, $\forall a \in A$ (respectivamente a izquierda cuando $r * a = r$), $\forall a \in A$. En caso de verificarse $a * r = r = r * a$, $\forall a \in A$, entonces sí se verificaría la distributividad y por tanto, ya habríamos construido el isoanillo, que finalmente provendría de la isotopía de elementos principales $\widehat{I}$ y $*$, y de elementos secundarios $\widehat{S}$ y $\star$.

Señalemos que en el caso de que la isotopía se pudiese construir, como $*$ (elemento principal de la misma) se ha utilizado para levantar la operación $\bullet$, el isoanillo construido recibe el nombre de *isoanillo respecto a la multiplicación*, dado que en la práctica, $\circ \equiv +$ y $\bullet \equiv \times$. Realizando un procedimiento análogo, usando $*$ para levantar a $\circ$, llegaríamos a un *isoanillo respecto a la suma*. De hecho, atendiendo a este criterio, a partir de ahora al levantamiento isotópico de la primera operación, $\circ$, le denominaremos *isosuma*, mientras que al levantamiento de la segunda le seguiremos llamando isoproducto.

Por otro lado, aunque no se cumpliera la condición final $a * r = r$, $\forall a \in A$ (y por tanto no se verificara la distributividad), como todas las demás condiciones sí se cumplen, al levantamiento obtenido mediante el procedimiento anterior se le denomina *pseudoisotopía* o *levantamiento pseudoisotópico*. Se obtendría así de esta forma un nuevo tipo de estructura matemática, llamada en general *pseudoisoestructura* (vease **[128]**). En este caso particular, se obtendría un *pseudoisoanillo*.

Notamos además que el procedimiento usado puede simplificarse teniendo en cuenta que la segunda operación interna de un anillo no tiene porqué verificar la condición de elemento inverso, con lo que podríamos a su vez simplificar esta condición en el caso de $*$, si es un isoanillo respecto a la multiplicación, o en el caso de $\star$, si es un isoanillo respecto a la suma. El procedimiento general servirá para estructuras más particulares como, por ejemplo, los isocuerpos, que veremos en la próxima sección.

De todo lo anterior, se deduce la siguiente:

Proposición 3.4.2 *Sea* $(A, \circ, \bullet)$ *un anillo y sean* $\widehat{I}, \widehat{S}, *$ *y* $\star$, *elementos de isotopía en las condiciones de la Definición 3.1.3, siendo* I *y* S *las unidades respectivas de* $*$ *y* $\star$. *En estas condiciones, si* $(A, \star, *)$ *tiene estructura de anillo con unidades respectivas* $S, I \in A$, *entonces el levantamiento isotópico* $(\widehat{A}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ *realizado por el procedimiento del isoproducto, correspondiente a la isotopía de elementos principales* $\widehat{I}$ *y* $*$ *, y secundarios* $\widehat{S}$ *y* $\star$, *tiene estructura de isoanillo respecto a la multiplicación si* $a * r = r = r * a, \forall a \in A$, *siendo* $r \in A$ *tal que* $\widehat{R} = \widehat{S}^{-S} = r * \widehat{I}$. *Análogamente, si es* $(A, *, \star)$ *el que tiene estructura de anillo con unidades respectivas* $I, S \in A$, *entonces el levantamiento isotópico por la construcción del isoproducto,* $(\widehat{A}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$, *correspondiente a la misma isotopía anterior, tiene estructura de isoanillo respecto a la suma, si se cumple que* $a \star t = t = t \star a, \forall a \in A$, *siendo* $t \in A$ *tal que* $t * \widehat{I} = T = \widehat{I}^{-I}$. $\square$

De acuerdo entonces con esta definición, la respuesta a la pregunta de si eran necesarias dos isotopías para obtener un isoanillo, es negativa, ya que sólo es necesaria una isotopía, aunque con dos elementos principales $\widehat{I}$ y $*$, y dos secundarios $\widehat{S}$ y $\star$, los cuales habrán de indicarse explícitamente de cualquier modo.

Veamos a continuación algunos ejemplos de isoanillos:

Ejemplo 3.4.3 *Consideremos el anillo* $(\mathbf{Z}, +, \times)$ *de los enteros con la suma y el producto usuales. De forma análoga al Ejemplo 3.3.3 se comprueba que la isotopía de elementos* $\widehat{I} = 0$ *y* $* \equiv +$ *(de elemento unidad* $I = 0 = \widehat{I}$, *y por tanto* $T = \widehat{I}^{-I} = 0^{-0} = 0 = 0 + 0 = 0 * 0$*), levanta isotópicamente el grupo* $(\mathbf{Z}, +)$ *en* $(\widehat{\mathbf{Z}}, \widehat{+}) = (\mathbf{Z}, +)$, *de forma que dicha isotopía equivale a la identidad.*

De igual manera, si añadimos los elementos de isotopía secundarios $\widehat{S} = 1$ *y* $\star \equiv \times$ *(aunque en este caso podrían ser considerados también como primarios, dado que no habría diferencia en el resultado final), obtendríamos como levantamiento isotópico del anillo* $(\mathbf{Z}, +, \times)$ *este mismo anillo.*

Para probar este aserto, observamos en primer lugar que el conjunto isotópico construido por $\star$ *y* $\widehat{S}$ *sería* $\widehat{\mathbf{Z}}_1 = \{\widehat{a} = a \times 1 = a \mid a \in \mathbf{Z}\} =$

$\mathbf{Z}$, *que coincide con el construido a partir de los elementos* $\widehat{I} = 0$ *y* $* \equiv +$ *anteriores. Ahora bastaría definir el isoproducto originado por* $\star$ *para los elementos de* $\widehat{\mathbf{Z}}_0 = \mathbf{Z}$. *Ahora bien, como el elemento unidad respecto* $\star$ *es* $S = 1$ *y por tanto,* $\widehat{S}^{-S} = 1^{-1} = 1$, *se deduciría que* $\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{b} = \widehat{a} \star 1 \star \widehat{b} = \widehat{a} \times 1 \times \widehat{b} = (a+0) \times (1+0) \times (b+0) = (a \times 1 \times b) + 0 = \widehat{a \times 1 \times b} = \widehat{a \times b} = a \times b$, *para todos* $\widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{\mathbf{Z}}_0$. *Entonces* $\widehat{\times} \equiv \times$, *con lo que finalizaría la demostración, ya que al ser* $(\mathbf{Z}, *, \star) = (\mathbf{Z}, +, \times)$ *un anillo con unidades respectivas* $0, 1 \in \mathbf{Z}$ *y verificándose* $a \star 0 = a \times 0 = 0 = 0 \times a = 0 \star a$, $\forall a \in \mathbf{Z}$, *la Proposición 3.4.2 asegura que el levantamiento isotópico de elementos principales* $\widehat{I}$ *y* $*$ *y secundarios* $\widehat{S}$ *y* $\star$ *del anillo* $(\mathbf{Z}, +, \times)$, *es un isoanillo. Obtendríamos de esta forma una isotopía trivial del anillo de partida, lo que corroboraría el hecho de que si en un levantamiento isotópico cualquiera no varían ni las operaciones de partida ni los elementos unidades correspondientes, la estructura de partida no cambia.* $\triangleleft$

Ejemplo 3.4.4 *Consideremos de nuevo el anillo* $(\mathbf{Z}, +, \times)$. *Tomemos la operación* $* \equiv \times$ *y la isounidad* $\widehat{I} = -1$ *(siendo* $T = \widehat{I}^{-I} = (-1)^{-1} = -1 = \widehat{I}$, *dado que el elemento unidad respecto a* $*$ *es* $I = 1$*) y busquemos construir un isoanillo respecto a la multiplicación. Como conjunto isotópico quedaría entonces* $\widehat{\mathbf{Z}}_{-1} = \{\widehat{a} = a \times (-1) = -a : a \in \mathbf{Z}\} = \mathbf{Z}$.

Por su parte, el isoproducto queda definido como $\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{b} = \widehat{a} * (-1) * \widehat{b} = (a * b) * (-1) = (a \times b) * (-1) = \widehat{a \times b} = -(a \times b)$, *para todos* $\widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{\mathbf{Z}}_{-1}$.

En general, a la isotopía que surge de considerar como isounidad a $\widehat{I} = -I$ *se le denomina isotopía* isodual. *Esta isotopía fue introducida por el propio Santilli en* **[110]**, **[111]**, **[114]** *y* **[115]**.

Buscamos ahora levantar la operación $+$, *dejándola invariante. Para ello bastaría tomar como isounidad secundaria a* $\widehat{S} = 0$ *y como operación* $\star$ *a la propia* $+$, *tal como se ha hecho en ejemplos anteriores. Así, dado que el elemento unidad de* $\star$ *sería* $S = 0$, *tendríamos que* $\widehat{R} = \widehat{S}^{-S} = 0^{-0} = 0 = 0 * 1$, *siendo* $a * 0 = a \times 0 = 0 = 0 \times a = 0 * a$, $\forall a \in \mathbf{Z}$. *De esta forma,* $(\mathbf{Z}, \star, *) = (\mathbf{Z}, +, \times)$ *es un anillo verificando las con-*

diciones de la Proposición 3.4.2, con lo que el levantamiento isotópico $(\mathbf{Z}, +, \widehat{\times})$ *resulta ser un isoanillo respecto a la multiplicación.* $\triangleleft$

Ejemplo 3.4.5 *Siguiendo con el anillo* $(\mathbf{Z}, +, \times)$, *podemos estudiar un caso no visto hasta ahora. Veamos un ejemplo en el que la isounidad* $\widehat{I}$ *esté en el conjunto isotópico resultante, pero no así el elemento isotópico* $T = \widehat{I}^{-I}$. *En nuestro caso, bastaría considerar por ejemplo* $* \equiv \times$ *e* $\widehat{I} = 2$. *Resultaría el conjunto isotópico* $\widehat{\mathbf{Z}}_2 = \{\widehat{a} = a \times 2 \mid a \in \mathbf{Z}\} = \mathbf{P} = \mathbf{Z_2}$. *Por otro lado, dado que el elemento unidad respecto* $*$ *es* $I = 1$, *entonces* $\widehat{I}^{-I} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \notin \mathbf{P}$, *quedando el isoproducto definido por:* $\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{b} = \widehat{a} * \frac{1}{2} * \widehat{b} = (a \times 2) \times \frac{1}{2} \times (b \times 2) = (a \times b) \times 2 = \widehat{a \times b}$, *para todos* $\widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{\mathbf{Z}}_2$.

En todo caso, si como en el ejemplo anterior queremos que la operación $+$ *quede invariante, sólo podríamos tomar como isounidad secundaria a* $\widehat{S} = 0 = 0 * 2$, *pues* $r = 0$ *es el único elemento de* $\mathbf{Z}$ *tal que* $a * r = r = r * a$ *para todo* $a \in \mathbf{Z}$, *que es una condición necesaria para construir el isoanillo, según la Proposición 3.4.2. Por tanto, completando nuestra isotopía con los elementos secundarios* $\widehat{S} = 0$ *y* $\star \equiv +$, *obtendríamos que* $(\mathbf{P}, +, \widehat{\times})$ *es un isoanillo respecto a la multiplicación.* $\triangleleft$

Observemos finalmente que si lo que queremos obtener es un isoanillo (respecto a la suma) del anillo $(\mathbf{Z}, +, \times)$, a partir de $* \equiv +$ y $\star \equiv \times$, la isounidad principal $\widehat{I}$ debería ser necesariamente $\widehat{I} = 0$, para asegurar así la condición señalada de que $a \star t = a \times t = t = t \times a = t \star a$, $\forall a \in \mathbf{Z}$, siendo $t \in \mathbf{Z}$ tal que $T = \widehat{I}^{-I} = t * \widehat{I}$. De esta forma, el isoanillo $(\mathbf{P}, +, \widehat{\times})$ anterior también puede considerarse como isoanillo respecto a la suma.

Seguidamente estudiaremos las isotopías de las subestructuras asociadas a los anillos, es decir, los subanillos. Damos en primer lugar la definición de isosubanillo.

Definición 3.4.6 *Sean* $(A, \circ, \bullet)$ *un anillo y* $(\widehat{A}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ *un isoanillo asociado con elemento unidad* $\widehat{I}$ *respecto a* $\widehat{\bullet}$. *Sea* B *un subanillo de* A. *Se dice que* $\widehat{B}$ *es un* isosubanillo *de* $\widehat{A}$ *si, siendo una isotopía de* B, $(\widehat{B}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ *es subanillo de* $\widehat{A}$, *es decir, se verifican:*

1. *$(\widehat{B}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ es cerrado, verificándose las condiciones de asociatividad y distributividad.*
2. *$(\widehat{B}, \widehat{\circ})$ es un isosubgrupo de $(\widehat{A}, \widehat{\circ})$.*
3. *$\widehat{I} \in \widehat{B}$.*

Se va a ver a continuación si es posible aplicar la definición anterior al modelo de construcción de isotopías que estamos llevando a cabo. Para ello, supongamos que tenemos el anillo $(A, \circ, \bullet)$ y el isoanillo $(\widehat{A}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$, obtenido por la isotopía de elementos principales $\widehat{I}$ y $*$ (de elemento unidad I), y elementos secundarios $\widehat{S}$ y $\star$ (de elemento unidad S), en las condiciones de la Proposición 3.4.2. Lo veremos en el caso de isoanillos respecto a la multiplicación, siendo análogo en el caso de la suma, con las modificaciones oportunas.

Al igual que ocurría para isosubgrupos, dado que se desea que en el futuro isosubanillo $\widehat{B}$ las leyes asociadas sean las mismas que las del anillo $(\widehat{A}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$, si seguimos la construcción dada por el isoproducto, los elementos de isotopías principales y secundarios que debemos utilizar para el levantamiento del subanillo B han de ser exactamente los mismos que los utilizados para el levantamiento del anillo A. Obtendremos así en particular que $\widehat{B} \subseteq \widehat{A}$, condición necesaria para tener estructura de subanillo. Si además imponemos que $(B, \star, *)$ tenga estructura de anillo, obtendremos por construcción la condición (1) de la Definición 3.4.6 (la condición de distributividad se cumple, pues dado que estamos en las condiciones de la Proposición 3.4.2, $(B, \star, *)$ hereda de $(A, \star, *)$ el hecho de que $a * r = r = r * a$, $\forall a \in B$, donde r es el elemento señalado en dicha proposición). Por otro lado, imponiendo que $I \in B$, llegaremos a que $\widehat{I} = I * \widehat{I} \in \widehat{B}$, obteniendo la condición (3). Por último, dado que ya tenemos que $(B, \star)$ tiene estructura de grupo, al ser $(B, \star, *)$ anillo, si imponemos además que $S \in B$, tendremos que $\widehat{S} = S \star \widehat{S} \in \widehat{B}$ (recordemos que los elementos secundarios de una isotopía actúan de igual forma que los primarios, sólo que deben producir el mismo conjunto isotópico que el que consiguen estos últimos), con lo que la Proposición 3.3.8 nos garantizaría que también se verifica la condición (2).

También sería equivalente imponer que $s \in B$, en el caso de que fuese $\widehat{S} = s * \widehat{I}$, pues de igual forma se llegaría a $\widehat{S} \in \widehat{B}$, y de nuevo podríamos aplicar la Proposición 3.3.8. De hecho, observamos que $s \in B \Leftrightarrow S \in B$, pues se verifican:

a) $s \in B \Rightarrow \widehat{S} = s * \widehat{I} \in \widehat{B} \Rightarrow \exists a \in B$ tal que $a \star \widehat{S} = \widehat{S}$. Ahora bien, si $\widehat{R} = \widehat{S}^{-S}$, entonces $a \star \widehat{S} \star \widehat{R} = \widehat{S} \star \widehat{R} \Rightarrow a \star S = S \Rightarrow a = S \Rightarrow S \in B$.

b) $S \in B \Rightarrow \widehat{S} = S \star \widehat{S} \in \widehat{B} \Rightarrow \exists a \in B$ tal que $a * \widehat{I} = \widehat{S}$. Ahora bien, tenemos que $s * \widehat{I} = \widehat{S}$. Entonces, si $T = \widehat{I}^{-I}$, se tiene $a * \widehat{I} * T = \widehat{S} * T = s * \widehat{I} * T \Rightarrow a * I = s * I \Rightarrow a = s \Rightarrow s \in B$.

Nótese que este desarrollo anterior vale de hecho también para isoanillos. Con esto llegamos además a que si tenemos que $s \in B$ y $S \notin B$, o al revés, entonces no es posible la isotopía de elementos $\widehat{I}, \widehat{S}, *$ y $\star$, pues las leyes $*$ y $\star$ no serían compatibles para la formación del mismo conjunto isotópico. De todo ello se sigue la siguiente:

Proposición 3.4.7 *Sean $(A, \circ, \bullet)$ un anillo y $(\widehat{A}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ el isoanillo asociado correspondiente a la isotopía de elementos principales $\widehat{I}$ y $*$ (de elemento unidad I), y elementos secundarios $\widehat{S} = s * \widehat{I}$ y $\star$ (de elemento unidad S), en las condiciones de la Proposición 3.4.2. Sea B un subanillo de A. En estas condiciones, si $(B, \star, *)$ es un subanillo de $(A, \star, *)$ con $I \in B$ y $S \in B$ (o bien, $s \in B$), entonces el levantamiento isotópico $(\widehat{B}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$, correspondiente a la isotopía de los mismos elementos anteriores, es un isosubanillo de $\widehat{A}$.* $\square$

Veamos a continuación un ejemplo de isosubanillo:

Ejemplo 3.4.8 *Consideremos el anillo $(\mathbf{Q}, +, \times)$ de los números racionales con la suma y el producto usuales. Tomemos la isounidad $\widehat{I} = 2$ y la ley $* \equiv \times$, resultando el conjunto isotópico $\widehat{\mathbf{Q}}_2 = \{\widehat{a} = a \times 2 \mid a \in \mathbf{Q}\} = \mathbf{Q}$. Como $* \equiv \times$, se tiene que el elemento unidad respecto $*$ es $I = 1 \in \mathbf{Q}$, con lo que $\widehat{I}^{-I} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$, obteniéndose entonces el isoproducto definido según $\widehat{a} \widehat{\times} \widehat{b} = \widehat{a} * \frac{1}{2} * \widehat{b} = \widehat{a * b} = \widehat{a \times b} = (a \times b) \times 2$, para todos $\widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{\mathbf{Q}}_2$.*

Si por otro lado consideramos los elementos de isotopía secundarios $\widehat{S} = 0$ y $\star \equiv +$ (con lo cual $s = S = 0$), obtendremos de forma análoga *a como se hizo en el Ejemplo 3.4.5, que* $(\widehat{\mathbf{Q}}_2, +, \widehat{\times}) = (\mathbf{Q}, +, \widehat{\times})$ *es un isoanillo.*

Consideramos ahora el subanillo $(\mathbf{Z}, +, \times)$ *de* $(\mathbf{Q}, +, \times)$*, de los números enteros e intentemos realizar la isotopía de este subanillo, de elementos los mismos que los usados en la construcción del isoanillo* $(\mathbf{Q}, +, \widehat{\times})$.

Resultaría entonces el conjunto isotópico $\widehat{\mathbf{Z}}_2 = \{\widehat{a} = a \times 2 \mid a \in \mathbf{Z}\} = \mathbf{P}$. *Por tanto, como* $(\mathbf{Z}, \star, *) = (\mathbf{Z}, +, \times)$ *tiene estructura de subanillo de* $(\mathbf{Q}, \star, *) = (\mathbf{Q}, +, \times)$*, con elemento unidad respecto a* $*$, $I = 1 \in \mathbf{Z}$ *(el mismo que para* $(\mathbf{Q}, \star, *)$*) y* $s = S = 0 \in \mathbf{Z}$*, llegamos por la Proposición 3.4.7, a que* $(\widehat{\mathbf{Z}}_2, +, \widehat{\times}) = (\mathbf{P}, +, \widehat{\times})$ *es un isosubanillo de* $\widehat{\mathbf{Q}}_2$.

De esta forma observamos, si tenemos en cuenta el Ejemplo 3.4.5, que $(\mathbf{P}, +, \widehat{\times})$ *puede dotarse tanto de estructura de isoanillo como de isosubanillo, respecto a la misma isotopía señalada.* $\triangleleft$

Al igual que ocurría con los isogrupos, también podemos plantearnos si todo subanillo da origen a un isosubanillo bajo una isotopía determinada o si todo subanillo de un isoanillo dado tiene estructura de isosubanillo. De la misma forma que en los isosubgrupos, los posibles contraejemplos deberían encontrarse en aquellos casos en los que no se cumplan las condiciones necesarias de la Proposición 3.4.7. Sin embargo, salvo que tengamos en cuenta algunos ejemplos de levantamientos más complicados que los que hemos venido utilizando hasta ahora, encontrar tales contraejemplos resulta bastante complicado, pues si, como hemos hecho casi siempre, dejamos prácticamente invariantes las operaciones de partida, las propiedades de éstas se mantendrán conservándose en todo momento. Sin embargo, teóricamente sí es posible encontrar contraejemplos que den una respuesta negativa a las dos preguntas planteadas. Bastaría para ello por ejemplo, en las condiciones de la Proposición 3.4.7, que tuviéramos un subanillo B de A tal que $S \notin A$ o bien $I \notin B$.

En la misma línea, si tuviéramos un subanillo $\widehat{B}$ del isoanillo $\widehat{A}$, con $\widehat{S} \in \widehat{B}$, tal que $S \notin C$, para todo C, subanillo de A, no podríamos dotar entonces de estructura de isosubanillo a $\widehat{B}$, pues no podríamos encontrar ningún subanillo en A que diera como resultado el propio $\widehat{B}$, tras el levantamiento isotópico correspondiente. De esta forma, podemos conjeturar que en general, no todo subanillo puede levantarse isotópicamente a un isosubanillo mediante una isotopía fijada, ni que todo subanillo de un isoanillo tiene estructura de isosubanillo mediante la isotopía correspondiente a dicho isoanillo.

Referente a las distintas aplicaciones que existen entre isoanillos, se tiene la siguiente:

Definición 3.4.9 *Sean $(\widehat{A}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ y $(\widehat{A'}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ dos isoanillos de isounidades y operaciones respectivas $\{\widehat{I}, \widehat{\bullet}\}$ e $\{\widehat{I'}, \widehat{\times}\}$. Una aplicación $f : \widehat{A} \to \widehat{A'}$ se dice* homomorfismo de isoanillos *si para todos $\widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{A}$ se verifican*

1. $f(\widehat{a}\widehat{\circ}\widehat{b}) = f(\widehat{a})\widehat{+}f(\widehat{b})$.
2. $f(\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{b}) = f(\widehat{a})\widehat{\times}f(\widehat{b})$.
3. $f(\widehat{I}) = \widehat{I'}$.

Si f es biyectiva, se dice isomorfismo *y si $\widehat{A} = \widehat{A'}$,* endomorfismo. *En este último caso, si además f es biyectiva, se dice* automorfismo.

En las dos próximas subsecciones estudiaremos, respectivamente, las nociones básicas de dos nuevas isoestructuras relacionadas con los isoanillos: los isoideales y los isoanillos cocientes.

3.4.2. Isoideales

Definición 3.4.10 *Sean $(A, \circ, \bullet)$ un anillo y $(\widehat{A}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ un isoanillo asociado. Sea $\Im \subseteq A$ un ideal de A. Se dice que $\widehat{\Im}$ es* isoideal *de $\widehat{A}$ si, siendo una isotopía de $\Im$, $\widehat{\Im}$ tiene estructura de ideal con respecto a $(\widehat{A}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$, es decir, si se verifican las dos siguientes condiciones:*

1. *$(\widehat{\Im}, \widehat{\circ})$ es un isosubgrupo de $\widehat{A}$.*

2. $\widehat{\Im}\widehat{\bullet}\widehat{A} \subseteq \widehat{\Im}$, $\widehat{A}\widehat{\bullet}\widehat{\Im} \subseteq \widehat{\Im}$, *es decir,* $\widehat{x}\widehat{\bullet}\widehat{a}$ *y* $\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{x} \in \widehat{\Im}$*, para todos* $\widehat{a} \in \widehat{A}$ *y* $\widehat{x} \in \widehat{\Im}$*.*

Consideramos ahora el modelo de isotopía que estamos llevando a cabo. Supongamos entonces que tenemos un anillo $(A, \circ, \bullet)$ y el isoanillo $(\widehat{A}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ obtenido por la isotopía de elementos principales $\widehat{I}$ y $*$, y elementos secundarios $\widehat{S}$ y $\star$. Como ya hicimos anteriormente, trataremos únicamente el caso de isoanillos respecto a la multiplicación, entendiendo que respecto a la suma se procedería de forma análoga.

Tal como en casos anteriores, si tenemos un ideal $\Im$ de A, deseamos que el futuro isoideal tenga como leyes asociadas las de $(\widehat{A}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$. Para ello, si seguimos la construcción del isoproducto, tomaremos como elementos de isotopía principales y secundarios exactamente los mismos que fueron necesarios para la construcción del isoanillo $(\widehat{A}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$. De esta forma tendremos que $\widehat{\Im} \subseteq \widehat{A}$, ya que $\Im \subseteq A$.

Si además imponemos que $\Im$ sea un ideal del anillo $(A, \star, *)$ vemos que se verifican las dos condiciones de la definición anterior, ya que:

a) la condición (1) se tiene sin más que aplicar la Proposición 3.3.8.

b) si T es el elemento isotópico asociado a la isotopía de isounidad $\widehat{I}$ y ley $*$, entonces $\widehat{x}\widehat{\bullet}\widehat{a} = \widehat{x} * T * \widehat{a} = (x * a) * \widehat{I} \in \widehat{\Im}$, para todos $\widehat{x} \in \widehat{\Im}$ y $\widehat{a} \in \widehat{A}$, ya que al ser $\Im$ ideal de $(A, \star, *)$, sería $x * a \in \Im$.

Por ello, llegamos finalmente a que $\widehat{\Im}$ es un isoideal de $\widehat{A}$, con lo que se ha probado la siguiente:

Proposición 3.4.11 *Sean* $(A, \circ, \bullet)$ *un anillo y* $(\widehat{A}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ *el isoanillo asociado correspondiente a la isotopía de elementos principales* $\widehat{I}$ *y* $*$*, y elementos secundarios* $\widehat{S}$ *y* $\star$*, en las condiciones de la Proposición 3.4.2. Sea* $\Im$ *un ideal de* $(A, \circ, \bullet)$*. Si* $\Im$ *es un ideal de* $(A, \star, *)$*, siendo* $(\Im, \star)$ *un subgrupo de* $(A, \star)$*, con elemento unidad el de este último, entonces el levantamiento isotópico* $(\widehat{\Im}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ *correspondiente a la isotopía de elementos los señalados anteriormente, es un isoideal de* $\widehat{A}$*.* $\square$

Veamos a continuación algunos ejemplos de isoideales:

Ejemplo 3.4.12 *Consideremos el anillo* $(\mathbf{Z},+,\times)$ *y el isoanillo* $(\mathbf{Z},+,\widehat{\times})$ *asociado a él del Ejemplo 3.4.4. Tomemos ahora* $\mathbf{P} = \mathbf{Z_2}$ *como ideal de* $(\mathbf{Z},+,\times)$*. Entonces, con las notaciones del citado ejemplo,* $(\mathbf{P},+)$ *es un subgrupo de* $(\mathbf{Z},+)$*, con elemento unidad* $0 \in \mathbf{P}$*, siendo* $(\mathbf{P},\star,*) = (\mathbf{P},+,\times)$ *ideal de* $(\mathbf{Z},+,\times)$*. La Proposición 3.4.11 nos dice entonces que* $(\widehat{\mathbf{P}}_{-1},+,\widehat{\times})$ *es un isoideal de* $(\mathbf{Z},+,\widehat{\times})$*. Ahora bien, como* $\widehat{\mathbf{P}}_1 = \{\widehat{a} = a*(-1) = a\times(-1) = -a : a \in \mathbf{P}\} = \mathbf{P}$*, se tiene que* $(\widehat{\mathbf{P}}_{-1},+,\widehat{\times}) = (\mathbf{P},+,\widehat{\times})$ *es el isoideal señalado.* $\lhd$

Ejemplo 3.4.13 *Consideremos ahora el anillo* $(\mathbf{Z},+,\times)$ *y el isoanillo asociado* $(\mathbf{P},+,\widehat{\times})$ *dado en el Ejemplo 3.4.5. Tomando nuevamente el ideal* $(\mathbf{P},+,\times)$ *de* $(\mathbf{Z},+,\times)$*, tendríamos, con las notaciones del Ejemplo 3.4.5, que* $(\mathbf{P},\star,*) = (\mathbf{P},+,\times)$*, que es ideal a su vez de* $(\mathbf{Z},\star,*) = (\mathbf{Z},+,\times)$*, siendo* $(\mathbf{P},\star)$ *subgrupo de* $(\mathbf{Z},\star)$ *con el mismo elemento unidad (en este caso,* $I = 0 \in \mathbf{P}\cap\mathbf{Z}$*). De esta forma, la Proposición 3.4.11 nos asegura que* $(\widehat{\mathbf{P}}_2,+,\widehat{\times})$ *es un isoideal de* $\mathbf{Z}$*. Ahora bien,* $\widehat{\mathbf{P}}_2 = \{\widehat{a} = a*2 = a\times 2 \mid a \in \mathbf{P}\} = \mathbf{Z_4}$ *y por tanto,* $(\widehat{\mathbf{P}}_2,+,\widehat{\times}) = (\mathbf{Z_4},+,\widehat{\times})$ *es el isoideal señalado.* $\lhd$

Definimos ahora el concepto de isosubideal.

Definición 3.4.14 *Sean* $(A,\circ,\bullet)$ *un anillo,* $(\widehat{A},\widehat{\circ},\widehat{\bullet})$ *un isoanillo asociado e* $\Im$ *un ideal de* A*, tal que el levantamiento isotópico correspondiente,* $\widehat{\Im}$ *es un isoideal. Sea* J *un subideal de* $\Im$*. Se dice que* $\widehat{J}$ *es un* isosubideal *de* $\widehat{\Im}$ *si, siendo una isotopía de* J*,* $(\widehat{J},\widehat{\circ},\widehat{\bullet})$ *es un subideal de* $\widehat{\Im}$ *respecto a* $(\widehat{A},\widehat{\circ},\widehat{\bullet})$*, es decir, si se verifican:*

1. $(\widehat{J},\widehat{\circ})$ *es un isosubgrupo de* $\widehat{A}$*.*
2. $\widehat{J}\widehat{\bullet}\widehat{A} \subseteq \widehat{J} \subseteq \widehat{\Im}$*.*

Se prueba fácilmente que con la construcción habitual de una isotopía por medio de una isounidad y del modelo de construcción del isoproducto se llega, de forma análoga al caso de ideales, al siguiente resultado:

Proposición 3.4.15 *Sean* $(A,\circ,\bullet)$ *un anillo y* $(\widehat{A},\widehat{\circ},\widehat{\bullet})$ *el isoanillo asociado correspondiente a la isounidad de elementos principales* $\widehat{I}$ *y* $*$ *y* *secundarios* $\widehat{S}$ *y* $\star$, *en las condiciones de la Proposición 3.4.2. Sea* $\Im$ *un ideal de* A *tal que el levantamiento isotópico correspondiente,* $(\widehat{\Im}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ *, sea un isoideal de* $\widehat{A}$. *Sea finalmente* J *un subideal de* $\Im$. *Si* $(J, \star, *)$ *es un subideal de* $(\Im, \star, *)$, *con elemento unidad del grupo* $(\Im, \star)$ *el mismo que el de* $(\Im, *)$, *entonces el levantamiento isotópico correspondiente,* $(\widehat{J}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ *es un isosubideal de* $\widehat{\Im}$. □

Observamos que la construcción habitual permite que, dado que $J \subseteq \Im$ (al ser un subideal suyo) y dado que los elementos de isotopía usados son los mismos que para la construcción de $\widehat{\Im}$, $\widehat{J} \subseteq \widehat{\Im}$.

Como ejemplo de subideal tenemos el siguiente:

Ejemplo 3.4.16 *En el Ejemplo 3.4.12 consideremos el subideal* $(\mathbf{Z_6}, +, \times)$ *de* $(\mathbf{P}, +, \times)$. *Con las notaciones de dicho ejemplo se tiene que* $(\mathbf{Z_6}, \star, *) = (\mathbf{Z_6}, +, \times)$ *es un subideal de* $(\mathbf{P}, \star, *) = (\mathbf{P}, +, \times)$ *, con elemento unidad de* $(\mathbf{Z_6}, \star)$ *el mismo que el de* $(\mathbf{P}, \star)$ *(en este caso,* $S = 0 \in \mathbf{Z_6} \cap \mathbf{P}$*). Entonces, aplicando la Proposición 3.4.15 se tiene que* $(\mathbf{Z_6}, +, \widehat{\times})$ *es un isosubideal de* $(\mathbf{P}, +, \widehat{\times})$ *, siendo* $\widehat{\mathbf{Z_6}}_{-1} = \{\widehat{a} = a * (-1) = a \times (-1) = -a \mid a \in \mathbf{Z_6}\} = \mathbf{Z_6}$. *Por tanto,* $(\mathbf{Z_6}, +, \widehat{\times})$ *es el isosubideal señalado.* ◁

Al igual que en casos anteriores y dada la particularidad de las condiciones impuestas en la Proposición 3.4.15, podemos **conjeturar** que no todo subideal de un anillo dado puede levantarse isotópicamente a un isosubideal mediante una isotopía fijada, ni que todo subideal de un isoanillo deba tener estructura de isosubideal. Para contestar afirmativamente estas conjeturas haría falta el uso de levantamientos de las operaciones de partida más complicados que los que hemos venido utilizando. Éstos, sin embargo, no aportan un carácter importante al desarrollo que estamos realizando para dar una base de la isoteoría de Lie-Santilli.

Finalizamos esta sección con una última subsección en la que realizaremos el estudio de los isoanillos cocientes. Daremos la definición de esta nueva isoestructura y se plantearán los problemas que surgen en su construcción.

3.4.3. Isoanillos cocientes

Definición 3.4.17 *Sean* $(A, \circ, \bullet)$ *un anillo,* $\Im$ *un ideal de* A *y* $A/\Im$ *el anillo cociente con la estructura usual,* $(A/\Im, +, \times)$. *Se dice que* $\widehat{A/\Im}$ *es un* isoanillo cociente *si, siendo una isotopía de* $A/\Im$, $(\widehat{A/\Im}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ *tiene estructura de anillo cociente, es decir, si existen un anillo* $(B, \Box, \Diamond)$ *y un ideal* J *de* B, *tales que* $\widehat{A/\Im} = B/J$, *siendo* $\widehat{+}$ *y* $\widehat{\times}$ *las operaciones usuales de anillos cocientes, provenientes de* $\Box$ *y* $\Diamond$.

Obsérvese que la definición dada permite que en general el anillo B y su ideal J no tengan porqué ser levantamientos isotópicos del anillo A y su ideal $\Im$, permitiendo así diferenciar el concepto de isoanillo cociente del de anillo cociente construido a partir de un isoanillo y de un isoideal suyo. De hecho, teóricamente puede darse el caso de que o bien sólo B, o bien sólo J, sean levantamientos isotópicos de A ó $\Im$, respectivamente. De esta forma, aunque todos tuvieran estructura de anillo cociente, habría que distinguir entre los posibles conjuntos B/J, $\widehat{A}/J$, $B/\widehat{\Im}$ y $\widehat{A}/\widehat{\Im}$

Nótese además que si estudiamos el modelo de construcción de isotopías que estamos llevando a cabo, tal distinción resulta más evidente. Por lo ya estudiado de isoanillos e isoideales, en caso de poderse construir el anillo cociente $\widehat{A}/\widehat{\Im}$, sabemos que las isotopías que se usen para obtener $\widehat{A}$ e $\widehat{\Im}$, deben tener los mismos elementos de isotopía principales y secundarios. Por su parte, dado que el levantamiento isotópico $\widehat{A/\Im}$ del anillo cociente $A/\Im$ se haría según el modelo ya visto de levantamientos de anillos, la isotopía usada constaría también de dos elementos principales y de dos secundarios. Desde luego, dada las características distintas de los anillos A y $A/\Im$, los elementos de isotopías no serán en general los mismos, pues en particular las operaciones estarían definidas sobre conjuntos distintos. Sin embargo, podría darse el caso en el que $\widehat{A/\Im} = \widehat{A}/\widehat{\Im}$, aunque en general no serán iguales. Veamos un ejemplo de ello:

Ejemplo 3.4.18 *Consideremos el anillo* $(\mathbf{Z}, +, \times)$ *y su ideal* $(\mathbf{Z_3}, +, \times)$, *con la suma y el producto usuales. Realizando la isoto-*

pía del Ejemplo 3.4.5, de elementos principales $\widehat{I} = 2$ *y* $* \equiv \times$ *y elementos secundarios* $\widehat{S} = 0$ *y* $\star \equiv +$*, obtenemos el isoanillo* $(\mathbf{P}, +, \widehat{\times})$ *y su isoideal* $(\mathbf{Z}_6, +, \widehat{\times})$ *(hay que tener en cuenta que* $\widehat{\mathbf{Z}_3}_2 = \{\widehat{a} = a \times 2 \mid a \in \mathbf{Z_3}\} = \mathbf{Z_6}$*). Construiríamos así el anillo cociente* $\mathbf{P}/\mathbf{Z}_6 = \{0 + \mathbf{Z_6}, 2 + \mathbf{Z_6}, 4 + \mathbf{Z_6}\}$*, con las operaciones suma y producto usuales en anillos cocientes, provenientes de* $+$ *y* $\widehat{\times}$*. Denotando éstas también por* $+$ *y* $\widehat{\times}$*, indicaremos explícitamente la segunda, que viene dada por:*

1. $(0 + \mathbf{Z_6})\widehat{\times}(a + \mathbf{Z_6}) = (0\widehat{\times}a) + \mathbf{Z_6} = ((0 \times a) \times 2) + \mathbf{Z_6} = 0 + \mathbf{Z_6} = (a + \mathbf{Z_6})\widehat{\times}(0 + \mathbf{Z_6})$, *para todo* $a \in \{0, 2, 4\}$.
2. $(2+\mathbf{Z_6})\widehat{\times}(2+\mathbf{Z_6}) = (2\widehat{\times}2)+\mathbf{Z_6} = (2\times 2\times 2)+\mathbf{Z_6} = 8+\mathbf{Z_6} = 2+\mathbf{Z_6}$
3. $(2 + \mathbf{Z_6})\widehat{\times}(4 + \mathbf{Z_6}) = (2 \times 4 \times 2) + \mathbf{Z_6} = 16 + \mathbf{Z_6} = 4 + \mathbf{Z_6} = (4 + \mathbf{Z_6})\widehat{\times}(2 + \mathbf{Z_6})$.
4. $(4 + \mathbf{Z_6})\widehat{\times}(4 + \mathbf{Z_6}) = (4 \times 4 \times 2) + \mathbf{Z}_6 = 32 + \mathbf{Z_6} = 2 + \mathbf{Z_6}$.

Se llega así en particular a que el elemento unidad de $\mathbf{P}/\mathbf{Z_6} = \mathbf{Z_2}/\mathbf{Z_6} = \widehat{\mathbf{Z}}_2/\widehat{\mathbf{Z}_3}_2$ *es* $2 + \mathbf{Z_6}$.

Consideremos por otro lado el anillo cociente $\mathbf{Z}/\mathbf{Z_3}$ *, con las operaciones usuales en anillos cocientes, provenientes de las operaciones* $+$ *y* $\times$ *del anillo* $(\mathbf{Z}, +, \times)$*, a las que denotaremos por* $\circ$ *y* $\bullet$*. Realizamos ahora un levantamiento* parecido *al anterior, con elementos de isotopía principales* $\widehat{I} = 2 + \mathbf{Z_3}$ *y* $* \equiv \bullet$ *, y elementos secundarios* $\widehat{S} = 0 + \mathbf{Z_3}$ *y* $\star \equiv \circ$*. De forma análoga a los ejemplos ya vistos, el resultado final de tal isotopía es el isoanillo* $(\mathbf{Z}/\mathbf{Z_3}, \circ, \widehat{\bullet})$*, donde el isoproducto* $\widehat{\bullet}$ *viene definido por:*

1. $(0 + \mathbf{Z_3})\widehat{\bullet}(a + \mathbf{Z_3}) = ((0 + \mathbf{Z_3}) \times (a + \mathbf{Z_3})) \times (2 + \mathbf{Z_3}) = 0 + \mathbf{Z}_3 = (a + \mathbf{Z_3})\widehat{\bullet}(0 + \mathbf{Z_3})$, *para todo* $a \in \{0, 1, 2\}$.
2. $(1 + \mathbf{Z_3})\widehat{\bullet}(1 + \mathbf{Z_3}) = ((1 + \mathbf{Z_3}) \times (1 + \mathbf{Z_3})) \times (2 + \mathbf{Z_3}) = 2 + \mathbf{Z_3}$.
3. $(1 + \mathbf{Z_3})\widehat{\bullet}(2 + \mathbf{Z_3}) = ((1 + \mathbf{Z_3}) \times (2 + \mathbf{Z_3})) \times (2 + \mathbf{Z_3}) = 1 + \mathbf{Z_3} = (2 + \mathbf{Z_3})\widehat{\bullet}(1 + \mathbf{Z_3})$.
4. $(2 + \mathbf{Z_3})\widehat{\bullet}(2 + \mathbf{Z_3}) = ((2 + \mathbf{Z_3}) \times (2 + \mathbf{Z_3})) \times (2 + \mathbf{Z_3}) = 2 + \mathbf{Z_3}$

De esta forma, el isoanillo obtenido es un isoanillo cociente, pues se construye a partir del anillo $(\mathbf{Z}, +, \widehat{\times})$ *y su ideal* $(\mathbf{Z_3}, +, \widehat{\times})$*, donde* $+$ *y* $\widehat{\times}$ *son las operaciones citadas del Ejemplo 3.4.5.*

Observamos finalmente que pese al parecido *de las isotopías utilizadas, llegamos a que* $\widehat{\mathbf{Z}/\mathbf{Z_3}} \neq \widehat{\mathbf{Z}}/\widehat{\mathbf{Z}_3}$ *(donde no señalamos intencionadamente las isounidades a las que están referidos ambos conjuntos, para vislumbrar la diferencia entre ellos), lo que demuestra el cuidado que hay que tener al distinguir entre isoanillo cociente y anillo cociente proveniente de un isoanillo y un isoideal suyo.* $\triangleleft$

3.5. Isocuerpos

La siguiente isoestructura que vamos a estudiar en este Capítulo es la que proviene del levantamiento isotópico de los cuerpos (véase **[121]**). Al igual que hemos hecho con las isoestructuras anteriores, se dará en primer lugar la definición de *isocuerpo*, seguida del modelo de construcción de éstos por medio del isoproducto y de varios ejemplos. También se indicarán las operaciones más usuales entre los elementos de los isocuerpos, los *isonúmeros*.

Definición 3.5.1 *Sea* $K = K(a, +, \times)$ *un cuerpo de elementos* $\{a, b, \ldots\}$ *con producto* $\times$ *asociativo (o alternado, respectivamente, es decir, tal que* $a \times (b \times b) = (a \times b) \times b$ *y* $(a \times a) \times b = a \times (a \times b)$, *para todos* $a, b \in K$*). Se denomina* isocuerpo $\widehat{K}$ *a toda isotopía de* K, *dotada de dos nuevas operaciones* $\widehat{+}$ *y* $\widehat{\times}$, *verificando los axiomas de cuerpo, es decir,*

1. *Axiomas de adición:*
   - a) $(\widehat{K}, \widehat{+})$ *es cerrado, es decir,* $\widehat{a}\widehat{+}\widehat{b} \in \widehat{K}, \forall \widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{K}$.
   - b) *Conmutatividad:* $\widehat{a}\widehat{+}\widehat{b} = \widehat{b}\widehat{+}\widehat{a}, \forall \widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{K}$.
   - c) *Asociatividad:* $(\widehat{a}\widehat{+}\widehat{b})\widehat{+}\widehat{c} = \widehat{a}\widehat{+}(\widehat{b}\widehat{+}\widehat{c}), \forall \widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c} \in \widehat{K}$.
   - d) *Elemento neutro:* $\exists \widehat{S} \in \widehat{K}$ *tal que* $\widehat{a}\widehat{+}\widehat{S} = \widehat{S}\widehat{+}\widehat{a} = \widehat{a}, \forall \widehat{a} \in \widehat{K}$.
   - e) *Elemento opuesto: Dado* $\widehat{a} \in \widehat{K}$, *existe* $\widehat{a}^{-\widehat{S}} \in \widehat{K}$ *tal que* $\widehat{a}\widehat{+}\widehat{a}^{-\widehat{S}} = \widehat{a}^{-\widehat{S}}\widehat{+}\widehat{a} = \widehat{S}$.

2. *Axiomas de multiplicación:*

a) *$(\widehat{K}, \widehat{\times})$ es cerrado, es decir, $\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{b} \in \widehat{K}, \forall \widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{K}$.*
b) *Isoconmutatividad: $\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{b} = \widehat{b}\widehat{\times}\widehat{a}, \forall \widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{K}$.*
c) *Isoasociatividad: $(\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{b})\widehat{\times}\widehat{c} = \widehat{a}\widehat{\times}(\widehat{b}\widehat{\times}\widehat{c}), \forall \widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c} \in \widehat{K}$.*
d) *(Isoalternancia, respectivamente): $\widehat{a}\widehat{\times}(\widehat{b}\widehat{\times}\widehat{b}) = (\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{b})\widehat{\times}\widehat{b}$, $(\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{a})\widehat{\times}\widehat{b} = \widehat{a}\widehat{\times}(\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{b}), \forall \widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{K}$.*
e) *Isounidad: $\exists \widehat{I} \in \widehat{K}$ tal que $\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{I} = \widehat{I}\widehat{\times}\widehat{a} = \widehat{a}, \forall \widehat{a} \in \widehat{K}$.*
f) *Isoinversa: Dado $\widehat{a} \in \widehat{K}$, existe $\widehat{a}^{-\widehat{I}} \in \widehat{K}$ tal que $\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{a}^{-\widehat{I}} = \widehat{a}^{-\widehat{I}}\widehat{\times}\widehat{a} = \widehat{I}$.*

3. *Axiomas de adición y multiplicación:*

a) *$(\widehat{K}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ es cerrado: $\widehat{a}\widehat{\times}(\widehat{b}\widehat{+}\widehat{c})$, $(\widehat{a}\widehat{+}\widehat{b})\widehat{\times}\widehat{c} \in \widehat{K}, \forall \widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c} \in \widehat{K}$.*
b) *Isodistributividad: $\widehat{a}\widehat{\times}(\widehat{b}\widehat{+}\widehat{c}) = (\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{b})\widehat{+}(\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{c})$, $(\widehat{a}\widehat{+}\widehat{b})\widehat{\times}\widehat{c} = (\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{c})\widehat{+}(\widehat{b}\widehat{\times}\widehat{c}), \forall \widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c} \in \widehat{K}$.*

Señalemos por último que a los elementos del isocuerpo $\widehat{K}$ se les llama usualmente isonúmeros.

A continuación se va a aplicar el modelo de construcción de isotopías mediante una isounidad y un isoproducto, a la obtención de isocuerpos a partir de un cuerpo dado. Fijemos por tanto un cuerpo $K = K(a, +, \times)$ en las condiciones de la Definición 3.5.1. Debemos tener en cuenta que deben aparecer en esta construcción dos isounidades y dos leyes, en las condiciones de la Definición 3.1.3, (ya que deben aparecer, por definición de isocuerpo, un elemento neutro $\widehat{S}$ para el levantamiento $\widehat{+}$ y una isounidad $\widehat{I}$ para $\widehat{\times}$).

Además, no hay que perder de vista que todo cuerpo no es más que un anillo que verifica la condición de elemento inverso respecto a la segunda operación, por lo que la construcción que ya hicimos de isoanillos deberá ser muy parecida a la que estamos buscando para isocuerpos. De hecho, si nos restringimos a las condiciones de la Proposición 3.4.2, obtendríamos todos los axiomas señalados en la definición anterior, salvo el de la isoinversa.

Por otra parte, si estamos trabajando con el axioma de alternancia en lugar del de asociatividad, bastaría restringir a su vez la asociatividad de la ley $*$ (ó $\star$, si se trata de buscar un isoanillo respecto a la suma) al grado de alternancia. Por esto, a partir de ahora supondremos que estamos trabajando siempre con el axioma de asociatividad, dado el manejo análogo del de alternancia. También supondremos que en la utilización de la Proposición 3.4.2 estaremos manejando isoanillos respecto a la multiplicación, siendo análogo respecto a la suma. De hecho, observando la analogía entre la construcción de isoanillos e isocuerpos, cabe ya señalar que toda isotopía de un cuerpo, construida mediante el modelo del isoproducto, constará, al igual que en el caso de los isoanillos, de dos elementos de isotopía principales, $\widehat{I}$ y $*$, y dos secundarios, $\widehat{S}$ y $\star$. También, dependiendo de si $* \equiv \times$ ó si $* \equiv +$, denotaremos al levantamiento isotópico del cuerpo de partida, *isocuerpo respecto a la multiplicación* o *respecto a la suma*, respectivamente. Por razones de extensión, realizaremos nuestra construcción buscando la obtención de un isocuerpo únicamente respecto a la multiplicación, dado que el procedimiento sería análogo respecto a la suma.

Para resolver el problema suscitado por la isoinversa bastaría imponer en la Proposición 3.4.2 que el anillo $(A, \star, *)$ (en nuestro caso sería $A = K$) tuviese la propiedad de elemento inverso para la segunda operación, es decir, bastaría imponer que $(A, \star, *)$ tuviese estructura de cuerpo.

Con las notaciones de la Proposición 3.4.2, para ver que efectivamente se verificaría la condición de isoinversa, fijaríamos un elemento $\widehat{a} \in \widehat{A}$ tal que $\widehat{a} = a * \widehat{I}$, con $a \in A$. Entonces, como $(A, \star, *)$ tendría estructura de cuerpo, existiría $a^{-I} \in A$, elemento inverso de a respecto a $*$, con lo que bastaría por tanto tomar $\widehat{a}^{-\widehat{I}} = \widehat{a^{-I}}$, ya que entonces $\widehat{a} \widehat{\times} \widehat{a^{-I}} = (a * a^{-I}) * \widehat{I} = I * \widehat{I} = \widehat{I} = \widehat{a^{-I}} \widehat{\times} \widehat{a}$. De esta forma se verificaría la existencia de isoinversa, que era el axioma que faltaba para la obtención del isocuerpo respecto a la multiplicación.

Con todo ello tenemos demostrada la siguiente:

Proposición 3.5.2 *Sea $K = K(a, +, \times)$ un cuerpo asociativo y sean $\widehat{I}, \widehat{S}, *$ y $\star$ elementos de isotopía en las condiciones de la Definición 3.1.3, siendo I y S los elementos unidades respectivos de $*$ y $\star$. En estas condiciones, si $K(a, \star, *)$ tiene estructura de cuerpo con elemen-*

tos unidades respectivos $S, I \in K$, *entonces el levantamiento isotópico* $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$, *realizado por el procedimiento del isoproducto, correspondiente a la isotopía de elementos principales* $\widehat{I}$ *y* $*$ *y secundarios* $\widehat{S}$ *y* $\star$, *tiene estructura de isocuerpo respecto a la multiplicación, siempre que* $a{*}r = r = r{*}a$, *para todo* $\forall a \in K$ *siendo* $r \in K$ *tal que* $\widehat{R} = \widehat{S}^{-S} = r{*}\widehat{I}$.

Análogamente, si es $K(a, *, \star)$ *el que tiene estructura de cuerpo con elementos unidades respectivos* $I, S \in K$, *entonces el levantamiento isotópico por la construcción del isoproducto* $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$, *correspondiente a la isotopía de elementos los señalados anteriormente, tiene estructura de isocuerpo respecto a la suma si se verifica que* $a{\star}t = t = t{\star}a, \forall a \in K$, *siendo* $t \in K$ *tal que* $t * \widehat{I} = T = \widehat{I}^{-I}$. □

De nuevo al igual que en el caso de isoanillos, si no se cumpliera la condición final de ser $a{*}r = r = r{*}a$, o bien ser $a{\star}t = t = t{\star}a$, $\forall a \in K$, no se verificaría entonces el axioma de distributividad. Sin embargo, como el resto de axiomas sí se verifican, a la estructura resultante se le da el nombre de *pseudoisocuerpo* (véase **[128]**).

Antes de ver algunos ejemplos de isocuerpos, señalemos que la conservación de los axiomas de K permiten que la isounidad $\widehat{I}$ respecto a la operación $\widehat{\times}$ siga verificando los axiomas usuales de la unidad de la operación $\times$, del cuerpo inicial (véase **[145]**). Así, por ejemplo, con las notaciones usuales se tienen:

1. $\widehat{I}^2 = \widehat{I}\widehat{\times}\widehat{I} = (I * I) * \widehat{I} = I * \widehat{I} = \widehat{I}$.
2. $\widehat{I}^n = \overbrace{\widehat{I}\widehat{\times} \ldots \widehat{\times}\widehat{I}}^{\text{n veces}} = (\overbrace{I* \ldots *I}^{\text{n veces}}) * \widehat{I} = I * \widehat{I} = \widehat{I}$.
3. $\widehat{I}\widehat{\times}\widehat{I}^{-I} = \widehat{I}$, pues $\widehat{I}\widehat{\times}\widehat{I} = \widehat{I}$.

Además, el levantamiento isotópico que estamos llevando a cabo no implica un cambio en los números usados en una teoría determinada, puesto que si multiplicamos un isonúmero $\widehat{n}$ por una cantidad Q, se tiene que $\widehat{n}\widehat{\times}Q = (n * \widehat{I}) * T * Q = n * Q$ (véase **[175]**). Por otro lado, todas las operaciones usuales dependientes de la multiplicación sobre K, se generalizan a $\widehat{K}$ de forma única mediante el levantamiento correspondiente (véase **[145]**). Así, se tiene la siguiente:

Definición 3.5.3 *Con las notaciones usuales, para todos* $\widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{K}$, *se definen las siguientes* isooperaciones*:*

1. Isocociente*:* $\widehat{a}\widehat{/}\widehat{b} = \widehat{a}\widehat{\times}\widehat{b}^{-\widehat{I}} = (a * b^{-I}) * \widehat{I} \in \widehat{K}$.
2. Isocuadrado*:* $\widehat{a}^{\widehat{2}} = \widehat{a}\widehat{\times}\widehat{a} = (a * a) * \widehat{I} \in \widehat{K}$.
3. Isorraíz cuadrada*:* $\widehat{a}^{\widehat{\frac{1}{2}}} = \widehat{b} \in \widehat{K} \Leftrightarrow \widehat{b}^{\widehat{2}} = \widehat{a}$.
4. Isonorma*:* $\widehat{|}\widehat{a}\widehat{|} = (\widehat{\overline{a} * a})^{\widehat{\frac{1}{2}}} \in \widehat{K}$, *donde* $\overline{a}$ *representa el conjugado de* a *en* K *respecto a* $*$.

No obstante, en la práctica es usual que $* \equiv \times$. En estos casos, el levantamiento de las operaciones anteriores se ve aún de forma más clara en la siguiente:

Definición 3.5.4 *Se definen en la práctica*

1. Isocociente*:* $\widehat{a}\widehat{/}\widehat{b} = (a * b^{-I}) * \widehat{I} = (a \times b^{-I}) * \widehat{I} = (a/b) * \widehat{I} = \widehat{a/b} \in \widehat{K}$.
2. Isocuadrado*:* $\widehat{a}^{\widehat{2}} = (a * a) * \widehat{I} = (a \times a) * \widehat{I} = a^2 * \widehat{I} = \widehat{a^2} \in \widehat{K}$.
3. Isorraíz cuadrada*:* $\widehat{a}^{\widehat{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{2}} * \widehat{I} = \widehat{a^{\frac{1}{2}}} \in \widehat{K}$, *ya que* $\widehat{a^{\frac{1}{2}}}^{\widehat{2}} = (a^{\frac{1}{2}})^2 * \widehat{I} = a * \widehat{I} = \widehat{a}$.
4. Isonorma*:* $\widehat{|}\widehat{a}\widehat{|} = (\widehat{\overline{a} * a})^{\widehat{\frac{1}{2}}} = (\overline{a} \times a)^{\frac{1}{2}} * \widehat{I} = |a| * \widehat{I} = \widehat{|a|} \in \widehat{K}$.

Nótese que queda patente además que todas las isooperaciones definidas son cerradas en $\widehat{K}$. Definiremos por último el concepto de isocaracterística de un isocuerpo:

Definición 3.5.5 *Se dice que un isocuerpo* $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ *es de* isocaracterística p *si existe un entero positivo minimal* p *tal que* $\overbrace{\widehat{a}\widehat{\times} \ldots \widehat{\times}\widehat{a}}^{p \text{ veces}} = \widehat{I}$ *(siendo* $\widehat{I}$ *la isounidad del isocuerpo en cuestión respecto a la operación* $\widehat{\times}$*). En otro caso se dice que tiene* isocaracterística cero.

Veamos a continuación algunos ejemplos de isocuerpos:

Ejemplo 3.5.6 *De forma análoga al Ejemplo 3.4.3 se prueba, por aplicación de la Proposición 3.5.2, que si consideramos el cuerpo* $(\mathbf{R}, +, \times)$ *de los números reales, con la suma y el producto usuales, y tomamos como elementos de isotopía principales* $\widehat{I} = 1$ *y* $* \equiv \times$ *(con* *elemento unidad* $I = 1 = \widehat{I} \in \mathbf{R}$*) y como secundarios* $\widehat{S} = 0 = 0 * 1$ *y* $\star \equiv +$ *(con elemento unidad* $S = 0 = \widehat{S} \in \mathbf{R}$*), entonces el levantamiento isotópico de* $(\mathbf{R}, +, \times)$*, correspondiente a la isotopía de elementos los señalados, equivale a la identidad, dejando invariante tanto las operaciones como los elementos del cuerpo de partida. Así,* $(\widehat{\mathbf{R}}, \widehat{+}, \widehat{\times}) = (\mathbf{R}, +, \times)$. ◁

Obsérvese que este ejemplo corrobora nuevamente que si en un levantamiento isotópico de una estructura no varían ni las operaciones de partida ni sus unidades correspondientes, la isoestructura resultante coincide con la estructura inicial.

Ejemplo 3.5.7 *Consideramos de nuevo el cuerpo* $(\mathbf{R}, +, \times)$*. Tomemos ahora los elementos de isotopía principales* $\widehat{I} = i$ *y* $* \equiv \bullet$ *(el producto de complejos) y los secundarios* $\widehat{S} = 0$ *y* $\star \equiv +$ *(la suma de complejos). Entonces se tiene que* $(\mathbf{R}, \star, *) = (\mathbf{R}, +, \bullet) = (\mathbf{R}, +, \times)$ *es un cuerpo con elementos unidades respectivos* $S = 0$ *e* $I = 1$*, ambos en* $\mathbf{R}$*. Como además* $\widehat{S}^{-S} = 0^{-0} = 0 = 0 * 1$ *y* $a * 0 = 0 = 0 * a$, $\forall a \in \mathbf{R}$*, la Proposición 3.5.2 nos asegura entonces que el levantamiento isotópico correspondiente a la isotopía de elementos los señalados, es un isocuerpo respecto a la multiplicación. El conjunto isotópico resultante sería* $\widehat{\mathbf{R}}_i = \{\widehat{a} = a * i = a \bullet i \mid a \in \mathbf{R}\} = Im(\mathbf{C})$*. Por otro lado, el isoproducto* $\widehat{\times}$ *quedaría definido según:* $\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{b} = (a * b) * i = (a \bullet b) \bullet i = \widehat{a \bullet b} = \widehat{a \times b}$*, para todos* $\widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{\mathbf{R}}_i$*. Por tanto,* $(Im(\mathbf{C}), +, \widehat{\times})$ *sería el isocuerpo señalado.* ◁

Es importante notar que mediante esta isotopía hemos dotado a $Im(\mathbf{C})$ de estructura de cuerpo, estructura que no posee con el producto de complejos $\bullet$, ya que dados $z = z_0 \bullet i$, $\omega = \omega_0 \bullet i \in Im(\mathbf{C})$, se tiene que $z \bullet \omega = z_0 \bullet i \bullet \omega_0 \bullet i = z_0 \bullet \omega_0 \bullet (-1) = -(z_0 \bullet \omega_0) \notin Im(\mathbf{C})$. Sin embargo, el nuevo isoproducto sí dota a $Im(\mathbf{C})$ de estructura de cuerpo, puesto que $\widehat{\times}$ es una operación interna, debido a que, con las notaciones anteriores, se tiene que $z \widehat{\times} \omega = (z_0 \bullet i) \widehat{\times} (\omega_0 \bullet i) = (z_0 \bullet \omega_0) \bullet i \in Im(\mathbf{C})$.

Terminaremos esta sección con una observación no considerada hasta ahora. Ésta consiste en que dadas una estructura y una isoestructura asociada, si consideramos que estamos trabajando en el nivel abstracto de los axiomas (esto es, donde sólo se tienen en cuenta los axiomas que verifican un determinado objeto matemático), la estructura y la isoestructura anteriores pueden considerarse equivalentes, al tener asociados los mismos axiomas (véase **[175]**). Esto servirá para toda estructura en general, pudiendo considerarse por tanto equivalentes en el nivel abstracto de los axiomas, los grupos y los isogrupos, los anillos y los isoanillos, los ideales y los isoideales, etc. También en el caso de los cuerpos y de los isocuerpos puede considerarse que éstos son equivalentes en dicho nivel abstracto axiomático.

Esto último induce a pensar que en particular todo cuerpo puede obtenerse a partir de uno dado, mediante una isotopía determinada o, al menos, mediante una serie de isotopías sucesivas. De hecho, Santilli demostró en 1991 que todo cuerpo de característica cero es el levantamiento isotópico del cuerpo de los números reales, correspondiente a una isotopía determinada (véase **[121]**). Lo que ocurre sin embargo es que este levantamiento isotópico no tiene porqué seguir el modelo analizado hasta ahora. Veamos a continuación, para terminar ya esta sección, un ejemplo de lo comentado anteriormente para el caso particular del cuerpo $\mathbf{C}$ de los números complejos:

Ejemplo 3.5.8 *Consideremos* $(\mathbf{R}, +, \times)$ *y los isocuerpos* $(\widehat{\mathbf{R}}_1, +, \times)$, *del Ejemplo 3.5.6 y* $(\widehat{\mathbf{R}}_i, +, \widehat{\times})$, *del Ejemplo 3.5.7. Bastaría llegar a una isotopía de* $\mathbf{R}$ *que diera como resultado* $\mathbf{C} = \widehat{\mathbf{R}} = \widehat{\mathbf{R}}_1 \oplus \widehat{\mathbf{R}}_i$ *(donde* $\oplus$ *denota la suma directa habitual), estableciendo como isoproducto el producto usual asociado a la suma directa. Esto es, teniendo en cuenta que un elemento genérico de* $\widehat{\mathbf{R}}$ *sería de la forma* $z = \alpha \oplus \beta$, *con* $\alpha \in \widehat{\mathbf{R}}_1$ *y* $\beta \in \widehat{\mathbf{R}}_i$ *(es decir,* $\alpha \in \mathbf{R}$ *y* $\beta \in Im(\mathbf{C})$*), entonces, dados* $z = \alpha \oplus \beta$, $z' = \alpha' \oplus \beta' \in \widehat{\mathbf{R}}$, *consideraríamos el isoproducto* $\bullet : \widehat{\mathbf{R}} \times \widehat{\mathbf{R}} \to \widehat{\mathbf{R}}$, *tal que* $(z, z') \to z \bullet z' = (\alpha \oplus \beta) \bullet (\alpha' \oplus \beta') = (\alpha \times \alpha') \oplus (\beta \widehat{\times} \beta') \in \widehat{\mathbf{R}}_1 \times \widehat{\mathbf{R}}_i$ *(y por tanto* $\bullet$ *está bien definida). De esta forma, la isounidad asociada a* $\widehat{\mathbf{R}}$ *respecto a* $\bullet$ *sería* $\widehat{I} = 1 \oplus i$, *ya que si* $z = \alpha \oplus \beta$, *entonces* $z \bullet \widehat{I} = (\alpha \oplus \beta) \bullet (1 \oplus i) = (\alpha \times 1) \oplus (\beta \widehat{\times} i) = \alpha \oplus \beta = z = \widehat{I} \bullet z$.

Por otra parte, como levantamiento de la operación $+$ *daríamos la suma usual asociada a la suma directa. Así, para los elementos* z *y* z' *anteriores, sería* $\circ : \widehat{\mathbf{R}} \times \widehat{\mathbf{R}} \to \widehat{\mathbf{R}}$, *tal que* $(z, z') \to z \circ z' = (\alpha \oplus \beta) \circ (\alpha' \oplus \beta') = (\alpha + \alpha') \oplus (\beta + \beta') \in \widehat{\mathbf{R}}_1 \times \widehat{\mathbf{R}}_i = \widehat{\mathbf{R}}$ *(y por tanto* $\circ$ *está bien definida). La isounidad de* $\widehat{\mathbf{R}}$ *respecto a* $\circ$ *sería entonces* $\widehat{S} = 0 \oplus 0$, *ya que entonces, si* $z = \alpha \oplus \beta$, *se tendría* $z \circ \widehat{S} = (\alpha \oplus \beta) \circ (0 \oplus 0) = (\alpha + 0) \oplus (\beta + 0) = \alpha \oplus \beta = z = \widehat{S} \circ z$.

Por tanto, llegamos a que podemos considerar el cuerpo de los complejos como una isotopía de $(\mathbf{R}, +, \times)$, *tomando* $\mathbf{C} = \widehat{\mathbf{R}}_{1 \oplus i}$ *y las operaciones* $\circ$ *y* $\bullet$ *definidas antes.* $\triangleleft$

Capítulo 4
ISOTEORÍA DE LIE-SANTILLI: ESTRUCTURAS ISOTÓPICAS (II)

En este Capítulo continuaremos el estudio de la Isoteoría de Lie-Santilli, realizando el levantamiento isotópico de estructuras algebraicas más complejas que las vistas anteriormente. Se estudiarán en primer lugar los *isoespacios vectoriales*, para tratar a continuación los *isomódulos*. Entre ambas isoestructuras, no obstante, también se estudiará el concepto de *isotransformación*.

4.1. Isoespacios vectoriales

En la primera subsección de esta sección se estudian los isoespacios e isosubespacios vectoriales (véase **[77]**). En la segunda, se tratan los *isoespacios vectoriales métricos* (véanse **[121]** y **[111]**). En ambas, se seguirá el mismo procedimiento utilizado para las isoestructuras ya vistas.

4.1.1. Isoespacios e isosubespacios vectoriales

Definición 4.1.1 *Sea* $(U, \circ, \bullet)$ *un espacio vectorial definido sobre un cuerpo* $K = K(a, +, \times)$. *Sea* $\widehat{K} = \widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ *un isocuerpo asociado a* K. *Se dice que* $\widehat{U}$ *es un* isoespacio vectorial *sobre* $\widehat{K}$ *si, siendo una isotopía de* U, *dotada de dos nuevas operaciones* $\widehat{\circ}$ *y* $\widehat{\bullet}$, $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$, *tiene estructura de espacio vectorial sobre* $\widehat{K}$, *es decir, si* $\forall \widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{K}$ *y* $\forall \widehat{X}, \widehat{Y} \in \widehat{U}$, *se verifican*

1. $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ *es cerrado, siendo* $(\widehat{U}, \widehat{\circ})$ *un isosubgrupo.*
2. *Se verifican los* 4 *axiomas de la ley externa:*

   a) $\widehat{a}\widehat{\bullet}(\widehat{b}\widehat{\bullet}\widehat{X}) = (\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{b})\widehat{\bullet}\widehat{X}$.
   b) $\widehat{a}\widehat{\bullet}(\widehat{X}\widehat{\circ}\widehat{Y}) = (\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X})\widehat{\circ}(\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{Y})$.
   c) $(\widehat{a}\widehat{+}\widehat{b})\widehat{\bullet}\widehat{X} = (\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X})\widehat{\circ}(\widehat{b}\widehat{\bullet}\widehat{X})$.
   d) $\widehat{I}\widehat{\bullet}\widehat{X} = \widehat{X}$,

   siendo $\widehat{I}$ *la isounidad asociada a* $\widehat{K}$ *respecto a la operación* $\widehat{\times}$.

A los elementos del isoespacio $\widehat{U}$ *se les denomina usualmente* isovectores.

Nótese que por el último axioma de la ley externa, el elemento $\widehat{I}$, que es la isounidad asociada al isocuerpo $\widehat{K}$ respecto a $\widehat{\times}$, se convierte también en isounidad de $\widehat{U}$ respecto a $\widehat{\bullet}$. Además, es importante notar la presencia de dos isotopías distintas en el levantamiento isotópico de un espacio vectorial. Por un lado tendríamos la isotopía correspondiente a la obtención del isocuerpo $\widehat{K}$, mientras que por otro lado estaría la correspondiente al isoespacio vectorial $\widehat{U}$, propiamente dicha.

Por otra parte, si ahora pasamos a estudiar el modelo de construcción de isotopías que estamos llevando a cabo a partir de una isounidad y del isoproducto, notaremos una serie de diferencias que aparecen respecto a los casos ya estudiados. Para empezar no cabe hacer distinción entre isoespacios vectoriales respecto a la suma o respecto a la multiplicación, debido a que ya tenemos impuesta una de las isounidades que debemos utilizar. Veamos esto con más detenimiento.

Supongamos que tenemos un espacio vectorial $(U, \circ, \bullet)$ definido sobre un cuerpo $K(a, +, \times)$ y un isocuerpo respecto a la multiplicación (respecto a la suma sería análogo) asociado a K, correspondiente a la isotopía de elementos principales $\widehat{I}$ y $*$ (de elemento unidad I), y elementos secundarios $\widehat{S}$ y $\star$. Buscamos construir una estructura $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ que verifique las condiciones de la definición anterior. Para ello debemos imponer que la isounidad principal sea $\widehat{I}$ y que ésta debe actuar en el levantamiento de la operación $\bullet$ para obtener $\widehat{\bullet}$. Por su parte, dado que queremos obtener dos nuevas operaciones $\widehat{\circ}$ y $\widehat{\bullet}$, deberemos complementar la isounidad $\widehat{I}$ con los elementos de isotopías principales y secundarios que vienen siendo habituales en este tipo de levantamientos. Vamos a suponer por tanto que tenemos los elementos de isotopía principales $\widehat{I}$ y $\square$, y los secundarios $\widehat{S'}$ y $\diamond$, siendo ambos pares de elementos compatibles para la construcción del mismo conjunto isotópico $\widehat{U}_{\widehat{I}} = \{\widehat{X} = X \square \widehat{I} \mid X \in U\}$, en el sentido ya visto para isoanillos.

No obstante hay que destacar que en un espacio vectorial no tiene sentido hablar de elemento inverso respecto a la segunda operación, al ser ésta externa. Por eso, si de forma análoga a los casos ya estudiados, nos interesara imponer que $(U, \diamond, \square)$ tuviese estructura de espacio vectorial sobre $K(a, \star, *)$ (que tiene estructura de cuerpo según la condición impuesta en la Proposición 3.5.2 para la obtención de un isocuerpo), no tendría sentido hablar de elemento inverso de $\square$, ni por tanto de elemento isotópico en el sentido de ser la inversa de $\widehat{I}$. Lo que sí habría que señalar es que el conjunto general V' asociado a la isotopía que estamos construyendo fuese tal que $K \cup U \subseteq V'$, pues sería necesario definir $\square$ como operación externa para obtener que $(U, \diamond, \square)$ sea un espacio vectorial sobre $K(a, \star, *)$. Por todo esto, el modelo de construcción del isoproducto que se ha venido haciendo hasta ahora, no será válido para la obtención de la operación $\widehat{\bullet}$.

Para construir esta última operación, sí impondríamos que $(U, \circ)$ fuese un grupo con el mismo elemento unidad que el de $(V, \circ)$, siendo V el conjunto general asociado a la isotopía en cuestión. A dicho elemento unidad lo denotaremos por S'. De esta forma, si $\widehat{S'}^{-S'} = \widehat{R'} = R' \square \widehat{I}$, tendríamos finalmente que $\widehat{\circ}$ quedaría definido según $\widehat{X} \widehat{\circ} \widehat{Y} = \widehat{X} \diamond \widehat{R'} \diamond \widehat{Y}$, para todos $\widehat{X}, \widehat{Y} \in \widehat{U}$. De esta forma tendríamos además por la Proposición 3.3.2 que $(\widehat{U}, \widehat{\circ})$ sería un isogrupo.

En cuanto a la operación $\widehat{\bullet}$, a pesar de no poder definirla como hemos venido haciendo hasta ahora, de forma constructiva, sí podemos hacerlo directamente, diciendo que $\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X}=(a\Box X)\Box\widehat{I} = \widehat{a\Box X}$, para todos $\widehat{a} \in \widehat{K}, \forall \widehat{X} \in \widehat{U}$.

Deberíamos imponer entonces que $\Box$ tuviese como elemento unidad a I (elemento unidad de $*$), pues entonces se tendría $\widehat{I}\widehat{\bullet}\widehat{X} = (I\Box X)\Box\widehat{I} = X\Box\widehat{I} = \widehat{X}$, para todo $\widehat{X} \in \widehat{U}$, y ya se verificaría el último axioma $(2.d)$ de la ley externa de la definición.

Imponiendo además, como ya señalamos antes, que $(U, \diamond, \Box)$ sea un espacio vectorial sobre $K(a, \star, *)$, tendremos que $\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X} = (a\Box X)\Box\widehat{I} \in \widehat{U}$, para todos $\widehat{a} \in \widehat{K}$ y $\widehat{X} \in \widehat{V}$, pues entonces $a\Box X \in U$. De esta forma se habría probado que $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ es cerrado y como además ya se ha visto que $(\widehat{U}, \widehat{\circ})$ es un isogrupo, tenemos también ya probada la condición (1) de la definición.

Además, el hecho de ser $(U, \diamond, \Box)$ un espacio vectorial sobre $K(a, \star, *)$ implica que $\Box$ tiene como elemento unidad a I, con lo que tendríamos lo ya señalado antes para obtener $\widehat{I}$ como isounidad de $\widehat{\bullet}$.

La condición (2.b) ya se cumple con todo lo anterior, al verificarse que $\widehat{a}\widehat{\bullet}(\widehat{b}\widehat{\bullet}\widehat{X}) = \widehat{a}\widehat{\bullet}((b\Box X)\Box\widehat{I}) = (a\Box(b\Box X))\Box\widehat{I} = ((a * b)\Box X)\Box\widehat{I} = \widehat{a * b}\widehat{\bullet}\widehat{X} = (\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{b})\widehat{\bullet}\widehat{X}$, para todos $\widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{K}$ y $\widehat{X} \in \widehat{U}$.

Para probar la condición (2.c) bastaría imponer que $\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{R'} = \widehat{R'}$, para todo $\widehat{a} \in \widehat{K}$, ya que entonces, dados $\widehat{a} \in \widehat{K}$ y $\widehat{X}, \widehat{Y} \in \widehat{U}$ se tendría $\widehat{a}\widehat{\bullet}(\widehat{X}\widehat{\circ}\widehat{Y}) = \widehat{a}\widehat{\bullet}(\widehat{X} \diamond \widehat{R'} \diamond \widehat{Y}) = \widehat{a}\widehat{\bullet}((X\Box\widehat{I}) \diamond (R'\Box\widehat{I}) \diamond (Y\Box\widehat{I})) = \widehat{a}\widehat{\bullet}((X \diamond R' \diamond Y))\Box\widehat{I}) = (a\Box(X \diamond R' \diamond Y))\Box\widehat{I} = ((a\Box X) \diamond (a\Box R') \diamond (a\Box Y))\Box\widehat{I} = (a\Box X\Box\widehat{I}) \diamond (a\Box R'\Box\widehat{I}) \diamond (a\Box Y\Box\widehat{I}) = (\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X}) \diamond (\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{R'}) \diamond (\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{Y}) = (\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X}) \diamond \widehat{R'} \diamond (\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{Y}) = (\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X}) \diamond (\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{Y})$.

Finalmente, para que se verificase la condición (2.d) habría que imponer que si $\widehat{S}^{-S} = \widehat{R} = R * \widehat{I}$, entonces $\widehat{R}\widehat{\bullet}\widehat{X} = \widehat{R'}$, $\forall \widehat{X} \in \widehat{U}$, ya que entonces, dados $\widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{K}$ y $\widehat{X} \in \widehat{U}$, se tendría que $(\widehat{a}\widehat{+}\widehat{b})\widehat{\bullet}\widehat{X} = (\widehat{a}\star\widehat{R}\star\widehat{b})\widehat{\bullet}\widehat{X} = (\widehat{a \star R \star b})\widehat{\bullet}\widehat{X} = ((a\star R\star b)\Box X)\Box\widehat{I} = (a\star R\star b)\Box(X\Box\widehat{I}) = (a\Box X\Box\widehat{I}) \diamond (R\Box X\Box\widehat{I}) \diamond (b\Box X\Box\widehat{I}) = (\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X}) \diamond (\widehat{R}\widehat{\bullet}\widehat{X}) \diamond (\widehat{b}\widehat{\bullet}\widehat{X}) = (\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X}) \diamond \widehat{R'} \diamond (\widehat{b}\widehat{\bullet}\widehat{X}) = (\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X})\widehat{\circ}(\widehat{b}\widehat{\bullet}\widehat{X})$.

Por tanto, como consecuencia de todo lo anterior, está ya probada la siguiente:

Proposición 4.1.2 *Sea $(U, \circ, \bullet)$ un espacio vectorial definido sobre el cuerpo $K(a, +, \times)$. Sea $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ el isocuerpo respecto a la multiplicación asociado a K, correspondiente a la isotopía de elementos principales $\widehat{I}$ y $*$ (de elemento unidad I) y elementos secundarios $\widehat{S}$ y $\star$ (de elemento unidad S, siendo $\widehat{S}^{-S} = \widehat{R} = R * \widehat{I}$), en las condiciones de la Proposición 3.5.2. Sean $\square$ (de elemento unidad I), $\widehat{S'}$ y $\diamond$ (de elemento unidad S', siendo $\widehat{S'}^{-S'} = \widehat{R'} = R' \square \widehat{I}$), elementos de isotopía que junto a $\widehat{I}$ estén en las condiciones de la Definición 3.1.3, siendo el conjunto general V' asociado tal que $K \cup U \subseteq V'$. En estas condiciones, si $(U, \diamond, \square)$ tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $K(a, \star, *)$, siendo $(U, \diamond)$ un grupo con elemento unidad $S' \in U$, $\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{R'} = \widehat{R'}$, para todo $\widehat{a} \in \widehat{K}$ y $\widehat{R}\widehat{\bullet}\widehat{X} = \widehat{R'}$, para todo $\widehat{X} \in \widehat{U}$, entonces el levantamiento isotópico $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$, correspondiente a la isotopía de elementos principales $\widehat{I}$ y $\square$ y secundarios $\widehat{S}$ y $\diamond$, mediante el procedimiento del isoproducto, tiene estructura de isoespacio vectorial sobre $\widehat{K}$.* $\square$

Veamos a continuación algunos ejemplos de isoespacios vectoriales:

Ejemplo 4.1.3 *Se va a dar un ejemplo de isoespacio vectorial de tipo general, que se utiliza mucho como modelo en la práctica.*

Sea $(U, \circ, \bullet)$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $K(a, +, \times)$ (de elementos unidades respectivos $0, I \in K$), de elementos unidades respectivos $\overrightarrow{0}, I \in U$, verificando las propiedades usuales (como $0 \bullet X = \overrightarrow{0}$, $\forall X \in U$, $a \bullet \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$, $\forall a \in K$, no existe 0^{-I}, etc). Sea $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times}) = \widehat{K}(\widehat{a}, +, \widehat{\times})$ el isocuerpo respecto a la multiplicación asociado a K, correspondiente a la isotopía de elementos principales $\widehat{I} \in K$ y $* \equiv \times$ (de elemento unidad I) y secundarios $\widehat{S} = 0$ y $\star \equiv +$ (de elemento unidad $S = 0$. Se va a levantar isotópicamente el espacio vectorial U utilizando como elementos de isotopía principales $\widehat{I}$ y $\square \equiv \bullet$ (de elemento unidad I y como elementos de isotopía secundarios $\diamond \equiv \circ$ y $\widehat{S'} = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \bullet \widehat{I}$.

Como $\widehat{I} \in K$, se tiene que el conjunto isotópico asociado es el propio U, es decir, $\widehat{U}_{\widehat{I}} = \{\widehat{X} = X \square \widehat{I} = X \bullet \widehat{I} : X \in U\} = U$, pues si existiera un elemento $X \in U$ tal que $X \notin \widehat{U}$, tomando entonces $X \bullet T \in U$, siendo $T = \widehat{I}^{-I} \in K$ (pues $\widehat{I} \in K$, siendo $K(a, \star, *) = K(a, +, \times)$ un cuerpo, según se vio en la construcción hecha en la Proposición 3.5.2), *llegaríamos a que* $(X \bullet T) \bullet \widehat{I} = X \in \widehat{U}$, *lo que sería una contradicción. De esta forma están además bien tomados los elementos secundarios* $\diamond$ *y* $\widehat{S}'$, *que también mantienen a* U *como conjunto isotópico asociado.*

Las operaciones $\widehat{\circ}$ *y* $\widehat{\bullet}$ *quedarían definidas como sigue:*

a) $\widehat{X}\widehat{\circ}\widehat{Y} = (X\Box\widehat{I}) \circ 0 \circ (Y\Box\widehat{I}) = (X\Box\widehat{I}) \circ (Y\Box\widehat{I}) = (X \bullet \widehat{I}) \circ (Y \bullet \widehat{I}) = (X \circ Y) \bullet \widehat{I} = (X \circ Y)\Box\widehat{I} = \widehat{X} \circ \widehat{Y} \Rightarrow \widehat{\circ} \equiv \circ$ *para todos* $\widehat{X}, \widehat{Y} \in \widehat{U}$.

b) $\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X} = (a * \widehat{I})\widehat{\bullet}(X\Box\widehat{I}) = (a \bullet X)\Box\widehat{I}$, *para todos* $\widehat{a} \in \widehat{K}$ *y para todo* $\widehat{X} \in \widehat{U}$.

Además se tiene que

c) $(U, \diamond, \Box) = (U, \circ, \bullet)$ *tiene estructura de espacio vectorial definido sobre el cuerpo* $K(a, \star, *) = K(a, +, \times)$, *siendo* $(U, \diamond) = (U, \circ)$ *un grupo con elemento unidad* $S' = \overrightarrow{0} = \widehat{S}' \in U$.

d) *Como* $\widehat{R'} = \widehat{S'}^{-S'} = \overrightarrow{0}^{-\overrightarrow{0}} = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}\Box\widehat{I}$, *para todo* $\widehat{a} \in \widehat{K}$ *se tiene que* $\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{R'} = (a\Box\overrightarrow{0})\Box\widehat{I} = (a \bullet \overrightarrow{0})\Box\widehat{I} = \overrightarrow{0}\Box\widehat{I} = \overrightarrow{0} = \widehat{R'}$.

e) *Como también* $\widehat{R} = \widehat{S}^{-S} = 0^{-0} = 0 = 0 \times \widehat{I} = \widehat{0}$, *se tiene, para todo* $\widehat{X} \in \widehat{U}$, *que* $\widehat{0}\widehat{\bullet}\widehat{X} = (0\Box X)\Box\widehat{I} = (0 \bullet X)\Box\widehat{I} = \overrightarrow{0}\Box\widehat{I} = \overrightarrow{0} = \widehat{R'}$.

Por todo ello, estamos en condiciones de poder aplicar la Proposición 4.1.2, obteniéndose entonces que $(\widehat{U}_{\widehat{I}}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}) = (U, \circ, \widehat{\bullet})$ *es un isoespacio vectorial sobre el cuerpo* $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times}) = \widehat{K}(\widehat{a}, +, \widehat{\times})$. $\triangleleft$

Se va a ver ahora un ejemplo concreto del modelo anterior.

Ejemplo 4.1.4 *Sea* $(M_{m\times n}(\mathbf{R}), +, \bullet)$ *el espacio vectorial de las matrices reales de dimensión* $m \times n$, *con la suma y el producto usual de matrices sobre el cuerpo* $(\mathbf{R}, +, \times)$ *de los números reales con la suma y el producto habituales. Consideremos el isocuerpo respecto a la multiplicación* $(\widehat{\mathbf{R}}_2, +, \widehat{\times})$ *asociado a* $(\mathbf{R}, +, \times)$, *correspondiente a la isotopía de elementos principales* $\widehat{I} = 2$ *y* $* \equiv \times$ *y secundarios* $\widehat{S} = 0$ *y* $\star \equiv +$. *Entonces,* $\widehat{\mathbf{R}}_2 = \{\widehat{a} = a \times 2 \mid a \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$, *quedando el isoproducto* $\widehat{\times}$ *definido según* $\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{b} = (a \times b) \times 2 = \widehat{a \times b}$, *para todos* $\widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{K}$. *Puede observarse, de forma análoga a los ejemplos anteriores, que podemos aplicar la Proposición 3.5.2, llegando entonces a que* $(\widehat{\mathbf{R}}_2, +, \widehat{\times}) = (\mathbf{R}, +, \widehat{\times})$ *es efectivamente un isocuerpo.*

Consideramos ahora los elementos de isotopía principales $\widehat{I} = 2$ *y* $\Box \equiv \bullet$ *y los secundarios* $\widehat{S} = \mathbf{0}$ *(la matriz nula) y* $\diamond \equiv +$.

El Ejemplo 4.1.3 asegura entonces que el levantamiento isotópico $(\widehat{M_{m\times n}(\mathbf{R})}, \widehat{+}, \widehat{\bullet})$, *asociado a* $(M_{m\times n}(\mathbf{R}), +, \bullet)$, *es un isoespacio vectorial sobre el cuerpo* $(\mathbf{R}, +, \widehat{\times})$. *Además, se verifican*

a) $\widehat{M_{m\times n}(\mathbf{R})}_2 = \{\widehat{A} = A \bullet 2 \mid A \in M_{m\times n}(\mathbf{R})\} = M_{m\times n}(\mathbf{R})$.

b) $\widehat{+} \equiv +$, *como ya se ha visto en el Ejemplo 4.1.3.*

Finalmente, el isoproducto $\widehat{\bullet}$ *quedaría definido según* $\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{A} = (a\bullet A)\bullet 2$, *para todo* $\widehat{a} \in \widehat{\mathbf{R}}_2$ *y para todo* $\widehat{A} \in \widehat{M_{m\times n}(\mathbf{R})}_2$

Por tanto, $(M_{m\times n}(\mathbf{R}), +, \widehat{\bullet})$ *es el isoespacio vectorial buscado.* $\lhd$

Se van a estudiar a continuación unos objetos fundamentales de todo espacio vectorial: sus bases. Todo isoespacio vectorial, por tener estructura de espacio vectorial, debe llevar asociado al menos una base. Cabría preguntarse entonces por el concepto de isobase. Es decir, habría que preguntarse si dada una base de un espacio vectorial, el levantamiento isotópico de dicha base sería una base del isoespacio vectorial correspondiente. En caso afirmativo, al levantamiento isotópico de dicha base se le denomina *isobase*. Por otro lado, también podemos preguntarnos si toda base de un isoespacio vectorial tiene estructura de isobase.

Para contestar a ambas preguntas vamos a suponer que estamos en las condiciones de la Proposición 4.1.2, conservando todas las notaciones allí usadas. Supongamos además que tenemos los conjuntos $\beta = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ y $\widehat{\beta} = \{\widehat{e_1} = e_1\Box\widehat{I}, \widehat{e_2} = e_2\Box\widehat{I}, \ldots, \widehat{e_n} = e_n\Box\widehat{I}\}$. Nos interesará estudiar entonces bajo qué condiciones se tiene que si β es una base de U, entonces $\widehat{\beta}$ es una base de $\widehat{U}$, y su recíproco. Esto lo podemos hacer tal y como hemos realizado estudios análogos, es decir, imponiendo condiciones a los elementos de isotopía que intervengan en el levantamiento en cuestión. Lo que ocurre es que de esta forma no aparecerían algunos casos posibles. Por ejemplo, si tuviésemos que β es una base de U, $\widehat{\beta}$ es una base de $\widehat{U}$ y $X = e_1 + e_2$, siendo $\widehat{X} = \widehat{e_3}$, en principio no podríamos establecer ninguna relación entre los elementos de isotopía que intervienen para obtener otra determinada entre los elementos e_1, e_2 y $\widehat{e_3}$, pues lo más seguro es que restringiéramos la posibilidad de poderse realizar ciertos levantamientos de elementos de U que de otra forma sí podrían realizarse. Si pese a lo anterior quisiésemos proponer un modelo de isotopía bajo la cual pudieran contestarse las dos preguntas anteriores, la forma de conseguirlo no tendría porqué ser única, debido justamente a que un levantamiento genérico no tiene porqué conservar ninguna relación entre elementos de la base. De hecho esto hace que, pese a poder encontrar modelos de isotopías que verifiquen la conservación de bases, en general la respuesta a las dos preguntas enunciadas antes sea negativa.

En concreto, uno de tales modelos sería el que se ha dado en el Ejemplo 4.1.3, que es muy utilizado en la práctica por su propiedad de conservar bases. Para verlo, vamos a comenzar reduciendo la pregunta de conservación de bases a la de sistemas generadores y sistemas linealmente independientes. Suponemos así en primer lugar, que β es un sistema generador de U y queremos ver si $\widehat{\beta}$ es un sistema generador de $\widehat{U}$, bajo las condiciones del Ejemplo 4.1.3. Para ello tomamos $\widehat{X} \in \widehat{U}$. Será entonces $X \in U$. Ahora bien, como β es un sistema generador de U, podremos escribir $X = (\lambda_1 \bullet e_1) \circ ... \circ (\lambda_n \bullet e_n)$, con $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$. Entonces será $\widehat{X} = X \Box \widehat{I} = ((\lambda_1 \bullet e_1) \circ ... \circ (\lambda_n \bullet e_n)) \Box \widehat{I}$. Teniendo en cuenta entonces que $\Box \equiv \bullet$ y $\widehat{\circ} \equiv \circ, \widehat{I} \in K$ y la definición del isoproducto $\widehat{\bullet}$, dada en la construcción del isoespacio vectorial, tendremos finalmente que $\widehat{X} = ((\lambda_1 \bullet e_1) \circ \ldots \circ (\lambda_n \bullet e_n)) \bullet \widehat{I} = ((\lambda_1 \bullet e_1) \bullet \widehat{I}) \circ \ldots \circ ((\lambda_n \bullet e_n) \bullet \widehat{I}) = ((\lambda_1 \Box e_1) \Box \widehat{I}) \widehat{\circ} \ldots \widehat{\circ} ((\lambda_n \Box e_n) \Box \widehat{I}) = (\widehat{\lambda_1} \widehat{\bullet} \widehat{e_1}) \widehat{\circ} \ldots \widehat{\circ} (\widehat{\lambda_n} \widehat{\bullet} \widehat{e_n})$, con $\widehat{\lambda_1}, \ldots, \widehat{\lambda_n} \in \widehat{K}$. Como consecuencia de ello, $\widehat{\beta}$ es un sistema generador de $\widehat{U}$.

Supongamos ahora que β es un sistema linealmente independiente en U y vamos a ver si $\widehat{\beta}$ lo es en $\widehat{U}$, siempre bajo las condiciones del Ejemplo 4.1.3. Tomamos para ello $\widehat{\lambda_1}, ..., \widehat{\lambda_n} \in \widehat{K}$, tales que $(\widehat{\lambda_1} \widehat{\bullet} \widehat{e_1}) \widehat{\circ} \ldots \widehat{\circ} (\widehat{\lambda_n} \widehat{\bullet} \widehat{e_n}) = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \bullet \widehat{I}$ (que es el elemento unidad de $(\widehat{U}, \widehat{\circ}) = (U, \circ)$). Tendríamos entonces que: $(\widehat{\lambda_1} \widehat{\bullet} \widehat{e_1}) \widehat{\circ} \ldots \widehat{\circ} (\widehat{\lambda_n} \widehat{\bullet} \widehat{e_n}) = ((\lambda_1 \bullet e_1) \circ \ldots \circ (\lambda_n \bullet e_n)) \Box \widehat{I} = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \Box \widehat{I}$. Ahora bien, con las condiciones impuestas en el Ejemplo 4.1.3, el único elemento de U que puede levantarse a $\overrightarrow{0}$ es $\overrightarrow{0}$, pues si existiera otro elemento distinto $X \in U$, tal que $X \Box \widehat{I} = X \bullet \widehat{I} = \overrightarrow{0}$, debería ser $\widehat{I} = 0$, lo cual no es posible ya que en el levantamiento del cuerpo K se ha tomado $* \equiv \times$, no siendo el cero invertible (condición necesaria para que exista el elemento isotópico $T = \widehat{I}^{-I}$ y así construir el isocuerpo). Por tanto, deberá tenerse que $(\lambda_1 \bullet e_1) \circ \ldots \circ (\lambda_n \bullet e_n) = \overrightarrow{0}$. Entonces, aplicando que β es un sistema linealmente independiente, tendríamos que $\lambda_i = 0, \forall i = 1, \ldots, n$. Entonces, $\widehat{\lambda_i} = \lambda_i * \widehat{I} = \lambda_i \times \widehat{I} = 0 \times \widehat{I} = 0$ (que es el elemento unidad de $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}) = K(a, +))$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, llegándose por tanto a que $\widehat{\beta}$ es un sistema linealmente independiente en $\widehat{U}$.

Consecuencia de todo lo anterior es la siguiente:

Proposición 4.1.5 *Consideremos los sistemas de vectores e isovectores $\beta = \{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\widehat{\beta} = \{\widehat{e_1} = e_1 \square \widehat{I}, \ldots, \widehat{e_n} = e_n \square \widehat{I}\}$. En las condiciones de la Proposición 4.1.2 y siguiendo el modelo de isotopía utilizada en el Ejemplo 4.1.3, si β es una base de U, entonces $\widehat{\beta}$ es una isobase de $\widehat{U}$.* $\square$

En cuanto a ver si toda base de un isoespacio vectorial puede tener estructura de isobase, volvemos a señalar que esto dependerá en todo momento del modelo de isotopía que estemos utilizando. En particular, vamos a ver que de nuevo el modelo del Ejemplo 4.1.3. da una respuesta afirmativa a esta pregunta, pese a que la misma en general tenga respuesta negativa, al depender del levantamiento utilizado.

Consideremos entonces las condiciones de la Proposición 4.1.2 y el modelo de isotopía del Ejemplo 4.1.3. Supongamos que tenemos los conjuntos β y $\widehat{\beta}$ señalados con anterioridad. Vamos a probar en primer lugar que si $\widehat{\beta}$ es un sistema generador de $\widehat{U}$, entonces β es un sistema generador de U. Para ello tomamos $X \in U$. Será entonces $\widehat{X} = X \square \widehat{I} \in \widehat{U}$. Por ser $\widehat{\beta}$ un sistema generador de $\widehat{U}$, podremos escribir $\widehat{X} = (\widehat{\lambda_1} \widehat{\bullet} \widehat{e_1}) \widehat{\circ} \ldots \widehat{\circ} (\widehat{\lambda_n} \widehat{\bullet} \widehat{e_n})$. Entonces, teniendo en cuenta las condiciones impuestas en el Ejemplo 4.1.3, quedaría: $\widehat{X} = ((\lambda_1 \bullet e_1) \circ \ldots \circ (\lambda_n \bullet e_n)) \square \widehat{I}$, de donde obtendríamos que $X = (\lambda_1 \bullet e_1) \circ \ldots \circ (\lambda_n \bullet e_n)$, pues suponiendo que existiese un elemento $Y \in U$, con $Y \neq X$, tal que $\widehat{X} = \widehat{Y}$, tendríamos que $X \square \widehat{I} = Y \square \widehat{I} \Rightarrow X \bullet \widehat{I} = Y \bullet \widehat{I} \Rightarrow (X \bullet \widehat{I}) \circ (Y \bullet \widehat{I})^{-\overrightarrow{0}} = \overrightarrow{0} \Rightarrow (X \bullet \widehat{I}) \circ (Y^{-\overrightarrow{0}} \bullet \widehat{I}) = \overrightarrow{0} \Rightarrow (X \circ Y^{-\overrightarrow{0}}) \bullet \widehat{I} = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \bullet \widehat{I} \Rightarrow X \circ Y^{-\overrightarrow{0}} = \overrightarrow{0} \Rightarrow X = Y$, lo que supone una contradicción con el hecho de ser $X \neq Y$. Por tanto, habríamos obtenido entonces X como combinación de los elementos $e_1, \ldots, e_n$, lo que demuestra que β es un sistema generador de U.

Nótese que esta particularidad del modelo de isotopía que estamos considerando de verificarse $X = Y$ si $\widehat{X} = \widehat{Y}$, no es una propiedad común en las isotopías. Más aún, esta particularidad es además una de las razones principales por las que la respuesta a la pregunta de si toda base de un isoespacio vectorial tiene estructura de isobase es negativa. Esto se debe a que si tenemos, como en el ejemplo anterior, $\widehat{X} = ((\lambda_1 \bullet e_1) \circ \ldots \circ (\lambda_n \bullet e_n)) \Box \widehat{I} \in \widehat{U}$, siendo $Y = (\lambda_1 \bullet e_1) \circ \ldots \circ (\lambda_n \bullet e_n) \in U$, no tiene porqué ser $X = Y$, pudiéndose de hecho encontrar otra combinación distinta de elementos e_i que represente a X o incluso no tener porqué darse ninguna. Por ello es conveniente dar la siguiente:

Definición 4.1.6 *En las condiciones de la Definición 3.1.3, un levantamiento isotópico de la estructura E se dice* inyectivo *(o bien que* corresponde a una isotopía inyectiva*) si se verifica que $X = Y$, para todos $X, Y \in G$ tales que $\widehat{X} = \widehat{Y}$.*

Supongamos ahora que $\widehat{\beta}$ es un sistema linealmente independiente en $\widehat{U}$ y vamos a probar que β también lo es en U, siempre bajo las condiciones del Ejemplo 4.1.3. Tomamos para ello $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, tales que $(\lambda_1 \bullet e_1) \circ \ldots \circ (\lambda_n \bullet e_n) = \overrightarrow{0}$. Entonces, $((\lambda_1 \bullet e_1) \circ \ldots \circ (\lambda_n \bullet e_n)) \Box \widehat{I} = (\widehat{\lambda_1} \widehat{\bullet} \widehat{e_1}) \widehat{\circ} \ldots \widehat{\circ} (\widehat{\lambda_n} \widehat{\bullet} \widehat{e_n}) = \widehat{\overrightarrow{0}} = \overrightarrow{0}$, y por tanto, se tendría $\widehat{\lambda_i} = 0 = 0 \times \widehat{I} = 0 * \widehat{I} = 0$ (el elemento unidad de $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}) = K(a, +)$), $\forall i = 1, \ldots, n$, al ser $\widehat{\beta}$ base de $\widehat{U}$. Ahora bien, lo anterior implica que $\lambda_i = 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$, pues si existiese otro elemento $a \in K$ (distinto de 0), tal que $\widehat{a} = a * \widehat{I} = a \times \widehat{I} = 0$, entonces debería ser $\widehat{I} = 0$, lo cual es imposible por lo ya visto anteriormente de que no existiría el elemento isotópico $T = \widehat{I}^{-I}$, necesario para la construcción del isocuerpo $\widehat{K}$. Por tanto, β es un sistema linealmente independiente.

Todo lo anterior prueba la siguiente:

Proposición 4.1.7 *En las condiciones de la Proposición 4.1.2 y siguiendo el modelo de isotopía utilizada en el Ejemplo 4.1.3, toda base del isoespacio vectorial $\widehat{U}$ es una isobase.* $\Box$

Finalizaremos esta sección estudiando los levantamientos isotópicos de las subestructuras asociadas a los espacios vectoriales: los subespacios vectoriales. Para ello seguiremos el procedimiento que viene siendo habitual.

Definición 4.1.8 *Sean* $(U, \circ, \bullet)$ *un espacio vectorial sobre* $K(a, +, \times)$, $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ *un isoespacio vectorial asociado a* U, *sobre el cuerpo* $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ *y* $(W, \circ, \bullet)$ *un subespacio vectorial de* U. *Se dice que* $\widehat{W} \subseteq \widehat{U}$ *es un* isosubespacio vectorial *de* $\widehat{U}$ *si, siendo una isotopía de* W, $(\widehat{W}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ *es un subespacio vectorial de* $\widehat{U}$, *es decir, si,* $(\widehat{W}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ *tiene estructura de isoespacio vectorial sobre* $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ *(dado que ya se tiene que* $\widehat{W} \subseteq \widehat{U}$*).*

Como se ha venido haciendo hasta ahora al pasar al modelo de construcción de isotopías por medio de una isounidad y del isoproducto, como queremos que las leyes asociadas al futuro isosubespacio vectorial sean las mismas que las asociadas al isoespacio vectorial de partida, deberemos utilizar los mismos elementos de isotopía que los usados para construir $\widehat{U}$. Tendremos así en particular que, fijado un subespacio vectorial W del espacio vectorial $(U, \circ, \bullet)$ sobre $K(a, +, \times)$, y el isoespacio vectorial asociado $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ sobre $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$, resultará $\widehat{W} \subseteq \widehat{U}$, al realizar el correspondiente levantamiento isotópico. Por su parte, dado que la otra condición que debe cumplir $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ para ser isosubespacio vectorial es que tenga estructura de isoespacio vectorial, lo único que hará falta para lograr que lo sea es ajustar las condiciones de la Proposición 4.1.2 a nuestro conjunto W, que a su vez tiene estructura de espacio vectorial, al ser un subespacio vectorial de U. Tendremos por tanto, de forma análoga a la proposición citada, la siguiente:

Proposición 4.1.9 *Sea* $(U, \circ, \bullet)$ *un espacio vectorial definido sobre el cuerpo* $K(a, +, \times)$. *Sea* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ *el isoespacio vectorial sobre el isocuerpo* $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ *asociado a* U, *correspondiente a la isotopía de elementos* $\widehat{I}, \widehat{S}, \widehat{S'}, *, \star, \Box$ *y* $\diamond$, *en las condiciones de la Proposición 4.1.2. Sea* $(W, \circ, \bullet)$ *un subespacio vectorial de* U. *En estas condiciones, si* $(W, \diamond, \Box)$ *tiene estructura de subespacio vectorial de* $(U, \diamond, \Box)$ *sobre el* *cuerpo* $K(a,\star,*)$, *siendo* $(W,\diamond)$ *un grupo con elemento unidad* $S' \in W$, *entonces el levantamiento isotópico* $(\widehat{W},\widehat{\circ},\widehat{\bullet})$ *correspondiente a la isotopía de elementos los anteriormente señalados, tiene estructura de isosubespacio vectorial de* $\widehat{U}$ *sobre el cuerpo* $\widehat{K}(\widehat{a},\widehat{+},\widehat{\times})$. $\square$

Obsérvese que no es necesario suponer aquí el resto de las hipótesis exigidas en la Proposición 4.1.2, ya que todas ellas se verifican por la construcción de $\widehat{U}$ (es decir, $\widehat{W}$ las hereda de $\widehat{U}$).

Finalizamos esta sección indicando un ejemplo de isosubespacio vectorial.

Ejemplo 4.1.10 *Volvemos a considerar de nuevo el espacio vectorial* $(M_{m\times n}(\mathbf{R}),+,\bullet)$ *de las matrices reales de dimensión* $m\times n$, *pero ahora tomado sobre el cuerpo de los racionales* $(\mathbf{Q},+,\times)$, *con la suma y el producto usuales. Podemos realizar entonces el levantamiento isotópico de dicho espacio vectorial, correspondiente a la isotopía de elementos exactamente los mismos que en el Ejemplo 4.1.4, con lo que obtendríamos entonces el isoespacio vectorial* $(M_{m\times n}(\mathbf{R}),+,\widehat{\bullet})$ *sobre el cuerpo* $(\mathbf{Q},+,\widehat{\times})$, *donde los diferentes isoproductos se definen de forma análoga al ejemplo citado.*

Sea ahora el subespacio vectorial $(M_{m\times n}(\mathbf{Q}),+,\bullet)$ *de* $M_{m\times n}(\mathbf{R})$, *de las matrices racionales sobre el cuerpo* $(\mathbf{Q},+,\times)$. *Dado que entonces (con las notaciones del Ejemplo 4.1.4),* $(M_{m\times n}(\mathbf{Q}),\diamond,\square) = (M_{m\times n}(\mathbf{Q}),+,\bullet)$ *es un subespacio vectorial de* $(M_{m\times n}(\mathbf{R}),\diamond,\square) = (M_{m\times n}(\mathbf{R}),+,\bullet)$ *sobre* $(\mathbf{Q},\star,*) = (\mathbf{Q},+,\times)$, *siendo* $(M_{m\times n}(\mathbf{Q}),\diamond) = (M_{m\times n}(\mathbf{Q}),+)$ *un grupo con elemento unidad* $S' = \mathbf{0} \in M_{m\times n}(\mathbf{Q})$, *se tendrá por la Proposición 4.1.9, que el levantamiento isotópico* $(\widehat{M_{m\times n}}(\mathbf{Q})_2,\widehat{+},\widehat{\bullet})$ *correspondiente a la isotopía de elementos los anteriormente citados, es un isosubespacio vectorial de* $(M_{m\times n}(\mathbf{R}),+,\widehat{\bullet})$ *sobre* $(\mathbf{Q},+,\widehat{\times})$. *Se comprueba entonces, de manera análoga a los ejemplos ya vistos anteriormente, que dicho subespacio vectorial sería* $(\widehat{M_{m\times n}}(\mathbf{Q})_2,\widehat{+},\widehat{\bullet}) = (M_{m\times n}(\mathbf{Q}),+,\widehat{\bullet})$. $\triangleleft$

Pasamos a continuación a la siguiente subsección de esta sección, en la que se dotará a los isoespacios vectoriales de una *isométrica*, de forma similar a como se dota de una métrica a los espacios vectoriales convencionales.

4.1.2. Isoespacios vectoriales métricos

Seguiremos nuestro estudio con el levantamiento isotópico de los espacios vectoriales métricos (véase **[110]**), lo cual implica a su vez el levantamiento isotópico de las geometrías convencionales, que da lugar a las denominadas *isogeometrías* (véase **[127]**).

Para llevar a cabo este estudio podríamos seguir el modelo habitual hasta ahora, consistente en dar una definición general del levantamiento isotópico en cuestión y estudiar su posible construcción. Sin embargo, cuando se comienza a estudiar la estructura de espacio vectorial métrico aparecen una serie de conceptos relacionados a la misma, que no permiten tal estudio generalizado. Esto ocurre por ejemplo al estudiar la noción de producto escalar o de distancia, al aparecer también entonces el concepto de buen orden en un cuerpo, que hasta ahora no había hecho falta.

Para solucionar estos problemas podríamos ir imponiendo condiciones a las distintas estructuras con las que trabajemos, para ir obteniendo los resultados buscados, de forma similar a lo que se ha venido haciendo hasta ahora. No obstante, no hay que perder de vista que la meta final del estudio de los espacios vectoriales métricos son las isométricas. Éstas, al igual que el resto de geometrías existentes, requieren un estudio eminentemente práctico, al que las generalizaciones excesivas no le aportan ningún carácter importante. De hecho, en la práctica, las isogeometrías que se han estudiado hasta el momento consisten sobre todo en una generalización de las unidades convencionales de las geometrías que se levantan isotópicamente. Se trata de ver cómo influye en dichas geometrías el hecho de cambiar la unidad convencional por otra distinta, aunque con propiedades topológicas idénticas.

Por todo ello, para evitar generalizaciones demasiadas abstractas, nos restringiremos casi siempre en nuestro estudio al caso de los isoespacios vectoriales métricos y a las isogeometrías provenientes de las isotopías que siguen el modelo dado en el Ejemplo 4.1.3. Bajo este modelo, el conjunto de nociones relacionadas con los isoespacios vectoriales métricos tienen una fácil adaptación, como se irá viendo a lo largo de esta sección. De todas formas las definiciones de los diversos conceptos que vayan apareciendo se darán en el sentido más general posible.

Comenzaremos con las definiciones de una serie de conceptos básicos para la construcción de un isoespacio vectorial métrico. Se trata de seguir con la línea de distinguir las nociones isotópicas de las convencionales, como se ha venido haciendo hasta el momento:

Definición 4.1.11 *Sea $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ un isoespacio vectorial definido sobre un isocuerpo $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$. Se dice que una aplicación $f : \widehat{U} \times \widehat{U} \to \widehat{K}$ es una* forma isobilineal *si para todos $\widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{K}$, y para todos $\widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{Z} \in \widehat{U}$ verifica las siguientes condiciones:*

1. $f((\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X})\widehat{\circ}(\widehat{b}\widehat{\bullet}\widehat{Y}), \widehat{Z}) = (\widehat{a}\widehat{\times}f(\widehat{X}, \widehat{Z}))\widehat{+}(\widehat{b}\widehat{\times}f(\widehat{Y}, \widehat{Z}))$.
2. $f(\widehat{X}, (\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{Y})\widehat{\circ}(\widehat{b}\widehat{\bullet}\widehat{Z})) = (\widehat{a}\widehat{\times}f(\widehat{X}, \widehat{Y}))\widehat{+}(\widehat{b}\widehat{\times}f(\widehat{X}, \widehat{Z}))$.

Nótese que este concepto dado en la definición anterior es el equivalente isotópico de las formas bilineales en los espacios vectoriales, cumpliendo de hecho las propiedades usuales que verifican estas últimas. Así por ejemplo, siguiendo las notaciones de las definición anterior, si $\beta = \{\widehat{e_1}, \widehat{e_2}, \ldots, \widehat{e_n}\}$ es una base del isoespacio vectorial $\widehat{U}$, entonces la forma isobilineal f quedaría determinada por los n^2 isonúmeros de la forma $f_{i,j} = f(\widehat{e_i}, \widehat{e_j})$, con $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Ello se debe a que dados los isovectores $\widehat{X} = \sum_{i=1}^n \widehat{x_i}\widehat{\bullet}\widehat{e_i}, \widehat{Y} = \sum_{j=1}^n \widehat{y_j}\widehat{\bullet}\widehat{e_j} \in \widehat{U}$, con $\widehat{x_i}, \widehat{y_j} \in \widehat{K}$, se tiene

$$f(\widehat{X,Y}) = f(\sum_{i=1}^n \widehat{x_i}\widehat{\bullet}\widehat{e_i}, \sum_{j=1}^n \widehat{y_j}\widehat{\bullet}\widehat{e_j}) = \sum_{i=1}^n \widehat{x_i}\widehat{\bullet}f(\widehat{e_i}, \sum_{j=1}^n \widehat{y_j}\widehat{\bullet}\widehat{e_j}) =$$

$$\sum_{i=1}^n \widehat{x_i}\widehat{\bullet}(\sum_{j=1}^n \widehat{y_j}\widehat{\bullet}f(\widehat{e_i}, \widehat{e_j})) = \sum_{i,j=1}^n (\widehat{x_i}\widehat{\times}\widehat{y_j})\widehat{\bullet}f(\widehat{e_i}, \widehat{e_j}),$$

para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, donde el símbolo $\sum$ denota al sumatorio habitual, aunque respecto a la operación $\widehat{\circ}$, notación que seguiremos usando posteriormente con significado análogo.

Veamos ahora un ejemplo de forma isobilineal de gran importancia en el estudio de los isoespacios vectoriales métricos: el *producto isoescalar*. Se trata del concepto análogo para isoespacios vectoriales del producto escalar convencional.

Definición 4.1.12 *Sea* $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ *un isocuerpo asociado a* $K(a, +, \times)$, *dotado de un orden* $\leq$, *siendo* $0 \in \widehat{K}$ *el elemento unidad de* $\widehat{K}$ *respecto a* $\widehat{+}$, *con las propiedades usuales respecto al orden* $\leq$. *Sea* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ *un isoespacio vectorial sobre* $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$, *asociado a un espacio vectorial de Hilbert* $(U, \circ, \bullet)$, *con producto escalar* $< .,. >$ *con el elemento* $\overrightarrow{0} \in \widehat{U}$ *como elemento unidad respecto a* $\widehat{\circ}$. *Se dice que* $\widehat{U}$ *es un* isoespacio vectorial de Hilbert *si está dotado de un* producto isoescalar, $\widehat{< .,. >} : \widehat{U} \times \widehat{U} \to \widehat{K}$, *verificando para todos* $\widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{K}$, *y para todos* $\widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{Z} \in \widehat{U}$, *las siguientes condiciones:*

1. $0 \leq \widehat{< \widehat{X}, \widehat{X} >}$; $\widehat{< \widehat{X}, \widehat{X} >} = 0 \Leftrightarrow \widehat{X} = \overrightarrow{0}$.
2. $\widehat{< \widehat{X}, \widehat{Y} >} = \overline{\widehat{< \widehat{Y}, \widehat{X} >}}$, *donde* $\overline{\widehat{a}}$ *representa el conjugado de* $\widehat{a}$ *en el isocuerpo* $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$, *para todo* $\widehat{a} \in \widehat{K}$.
3. $\widehat{< \widehat{X}, (\widehat{a} \widehat{\bullet} \widehat{Y}) \widehat{\circ} (\widehat{b} \widehat{\bullet} \widehat{Z}) >} = (\widehat{a} \widehat{\times} \widehat{< \widehat{X}, \widehat{Y} >}) \widehat{+} (\widehat{b} \widehat{\times} \widehat{< \widehat{X}, \widehat{Z} >})$.

Obsérvese también que como viene siendo habitual en el nivel isotópico, hay que distinguir entre $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ como isoespacio vectorial de Hilbert sobre $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$, (cuya definición acabamos de ver) y $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ como espacio vectorial de Hilbert sobre $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ que, dotado de un producto escalar $\widehat{< .,. >}$, no tiene porqué proceder del levantamiento isotópico de un espacio vectorial de Hilbert $(U, \circ, \bullet)$ sobre $K(a, +, \times)$ (aunque sí del espacio vectorial U sobre K).

Cabría entonces la posibilidad de encontrar un isoespacio vectorial sobre el que se pueda definir un producto isoescalar, pero que sin embargo no sea un isoespacio vectorial de Hilbert, por no proceder del levantamiento isotópico de un espacio vectorial de Hilbert. De igual forma también puede darse el caso de que el levantamiento isotópico de un espacio vectorial de Hilbert sea un isoespacio vectorial, pero que no sea de Hilbert, por no poderse encontrar un producto isoescalar del que dotar a dicho isoespacio vectorial.

Veamos a continuación un ejemplo de isoespacio vectorial de Hilbert:

Ejemplo 4.1.13 *Sea* $(U, \circ, \bullet)$ *un espacio de Hilbert sobre* $(\mathbf{R}, +, \times)$, *dotado del orden* $\leq$ *usual, respecto a un producto escalar* $< .,. >$. *Consideremos una isotopía del espacio vectorial* U *que siga el modelo dado en el Ejemplo 4.1.3. Obtendremos entonces un isoespacio vectorial* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}) = (U, \circ, \widehat{\bullet})$ *y un isocuerpo* $(\widehat{\mathbf{R}}, \widehat{+}, \widehat{\times}) = (\mathbf{R}, +, \widehat{\times})$.

Sobre este último podemos aplicar el mismo orden usual $\leq$ *de los números reales, como el que necesita en la Definición 4.1.12. Impondremos además que la isounidad principal usada en tal levantamiento isotópico,* $\widehat{I} \in \mathbf{R}$, *sea tal que* $\widehat{I} > 0$.

Consideremos ahora la aplicación $\widehat{< .,. >} : \widehat{U} \times \widehat{U} \to \widehat{\mathbf{R}}$, *tal que* $\widehat{< \widehat{X}, \widehat{Y} >} = < X, Y > * \widehat{I} = < X, Y > \times \widehat{I}$, *dados* $\widehat{X}, \widehat{Y} \in \widehat{U}$. *Entonces, se verificará que* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}) = (U, \circ, \widehat{\bullet})$ *es un isoespacio vectorial de Hilbert sobre* $\widehat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$, *al cumplirse para todos* $\widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{K}$ *y para todos* $\widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{Z} \in \widehat{U}$, *las condiciones de la Definición 4.1.12. En efecto, se tienen*

a) $\widehat{< \widehat{X}, \widehat{X} >} = < X, X > \times \widehat{I} \geq 0$, *por ser* $\widehat{I} > 0$ *y ser* $< X, X > \geq 0$, *al ser* $< .,. >$ *un producto escalar de* $(U, \circ, \bullet)$ *sobre* $(\mathbf{R}, +, \times)$.

Además, $\widehat{< \widehat{X}, \widehat{X} >} = 0 \Leftrightarrow < X, X > \times \widehat{I} = 0 \Leftrightarrow < X, X > = 0$ *(ya que* $\widehat{I} \neq 0$ *y estamos en el cuerpo* $(\mathbf{R}, +, \times)$, *dotado de las operaciones usuales con el orden usual)* $\Leftrightarrow X = \overrightarrow{0}$ *(al ser* $< .,. >$ *un producto escalar)* $\Leftrightarrow \widehat{X} = \overrightarrow{0} * \widehat{I} = \overrightarrow{0} \times \widehat{I} = \overrightarrow{0}$.

b) $\widehat{< \widehat{X}, \widehat{Y} >} = < X, Y > \times \widehat{I} = \overline{< Y, X >} \times \widehat{I} = (- \widehat{< Y, X >}) \times \widehat{I} = -(< Y, X > \times \widehat{I}) = - \widehat{< \widehat{Y}, \widehat{X} >} = \widehat{< \widehat{Y}, \widehat{X} >}$.

c) $\widehat{< \widehat{X}, (\widehat{a} \widehat{\bullet} \widehat{Y}) \widehat{\circ} (\widehat{b} \widehat{\bullet} \widehat{Z})) >} = \widehat{< \widehat{X}, ((a \bullet Y) \bullet \widehat{I}) \circ (b \bullet Z) \bullet \widehat{I}) >} =$
$\widehat{< \widehat{X}, (a \bullet Y) \circ (b \bullet Z) >} = < X, (a \bullet Y) \circ (b \bullet Z) > \times \widehat{I} =$
$((a \times < X, Y >) + (b \times < X, Z >)) \times \widehat{I} = ((a \times < X, Y >) \times \widehat{I}) +$
$((b \times < X, Z >) \times \widehat{I}) = (\widehat{a} \widehat{\times} (< X, Y > \times \widehat{I})) + (\widehat{b} \widehat{\times} (< X, Z > \times \widehat{I})) =$
$(\widehat{a} \widehat{\times} \widehat{< \widehat{X}, \widehat{Y} >}) \widehat{+} (\widehat{b} \widehat{\times} \widehat{< \widehat{X}, \widehat{Z} >})$. $\triangleleft$

El siguiente concepto a adaptar al nivel isotópico será el de *distancia métrica.* Recordemos que todo espacio vectorial métrico es un espacio vectorial dotado de una métrica, que a su vez está asociada a una distancia métrica. Por tanto, para obtener la estructura de isoespacio vectorial métrico deberemos dar también la definición de *isodistancia métrica.*

Para ello, como en un espacio vectorial métrico la distancia métrica puede venir dada respecto a los elementos de una base de dicho espacio, si $\beta = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base de un espacio vectorial métrico $(U, \circ, \bullet)$ sobre el cuerpo $K(a, +, \times)$, la posible distancia asociada a U vendría dada como una función d, representada mediante los n^2 números $d_{i,j} = d(e_i, e_j)$. De esta forma, si tenemos dos elementos $X = \sum_{i=1}^{n} x_i \bullet e_i, Y = \sum_{j=1}^{n} y_j \bullet e_j \in U$, con $x_i, y_j \in K$, tendríamos que $d(X, Y) = \sum_{i,j=1}^{n} (x_i \times y_j) \bullet d(e_i, e_j)$.

Ahora podríamos considerar una matriz $(n \times n)$-dimensional, de elementos los n^2 números anteriores $(d_{ij})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$, que es la que define a la métrica asociada a la distancia d, a la que denotaremos por g. Por convenio, se nota de hecho $g \equiv (g_{ij})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} = (d_{i,j})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$. Además, teniendo en cuenta las condiciones que debe verificar toda distancia métrica, se tiene que la matriz g representa a una métrica si y sólo si es una matriz regular, simétrica y definida positiva.

Con estas observaciones previas ya estamos en condiciones de poder definir la noción de *isoespacio vectorial métrico* y de estudiar cómo alcanzar su construcción.

Definición 4.1.14 *Sea $U(X, g, K)$ un espacio vectorial métrico (con elementos X, Y, $Z, \ldots$) sobre un cuerpo $K(a, +, \times)$, con una métrica g asociada a una distancia métrica d. Se dice que $\widehat{U}(\widehat{X}, \widehat{g}, \widehat{K})$ es un* isoespacio vectorial métrico *si, siendo una isotopía de U , es un isoespacio vectorial sobre el isocuerpo $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$, dotado de un orden $\leq$ y siendo $0 \in \widehat{K}$ su elemento unidad respecto a $\widehat{+}$ (con propiedades usuales respecto al orden $\leq$), con elementos $\widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{Z}, \ldots$ y dotado de una nueva* isométrica $\widehat{g}$, *que será una isotopía de la métrica g verificando las propiedades necesarias para ser una métrica en $\widehat{U}$; es decir, que $\widehat{g}$*

está asociada a una isodistancia métrica $\widehat{d}$, *que siendo una isotopía de la distancia métrica* d *verifica, para todos* $\widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{Z} \in \widehat{U}$, *las siguientes condiciones:*

1. $0 \leq \widehat{d}(\widehat{X}, \widehat{Y}) \quad ; \quad \widehat{d}(\widehat{X}, \widehat{Y}) = 0 \Leftrightarrow \widehat{X} = \widehat{Y}$.
2. $\widehat{d}(\widehat{X}, \widehat{Y}) = \widehat{d}(\widehat{Y}, \widehat{X})$.
3. *Desigualdad triangular:* $\widehat{d}(\widehat{X}, \widehat{Y}) \leq \widehat{d}(\widehat{X}, \widehat{Z}) \widehat{+} \widehat{d}(\widehat{Z}, \widehat{Y})$.

Definición 4.1.15 *Si* d *en lugar de ser una distancia métrica fuese una distancia pseudométrica, (entonces* $U(X, g, K)$ *sería un espacio vectorial pseudométrico), se dice que* $\widehat{U}(\widehat{X}, \widehat{g}, \widehat{K})$ *es un* isoespacio vectorial pseudométrico *si verifica las tres condiciones anteriores excepto la (1), verificando en su lugar la siguiente:*

$(1')$ $0 \leq \widehat{d}(\widehat{X}, \widehat{Y}) \quad ; \quad \widehat{d}(\widehat{X}, \widehat{X}) = 0$, *para todos* $\widehat{X}, \widehat{Y} \in \widehat{U}$.

En este caso, a $\widehat{g}$ *se la denomina* isopseudométrica *y a* $\widehat{d}$ isodistancia pseudométrica.

Veamos ahora un ejemplo de isoespacio vectorial métrico.

Ejemplo 4.1.16 *Sea* $U(X, g, \mathbf{R})$ *un espacio vectorial métrico asociado al espacio vectorial* $(U, \circ, \bullet)$ *n-dimensional sobre el cuerpo* $(\mathbf{R}, +, \times)$, *dotado del orden usual* $\leq$, *con una métrica* g. *Consideremos una isotopía del espacio vectorial* U *que siga el modelo dado en el Ejemplo 4.1.3, imponiendo además que* $\widehat{I} \in \mathbf{R}$ *sea tal que* $\widehat{I} > 0$. *Obtendremos entonces el isoespacio vectorial* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}) = (U, \circ, \widehat{\bullet})$ *sobre el isocuerpo* $(\widehat{\mathbf{R}}, \widehat{+}, \widehat{\times}) = (\mathbf{R}, +, \widehat{\times})$. *Podemos dotar entonces al isocuerpo* $\widehat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$ *del mismo orden usual* $\leq$ *anterior.*

Queremos ahora dotar a $\widehat{U}$ *de una métrica* $\widehat{g}$, *que sea un levantamiento isotópico de la métrica* g. *Esta posible métrica* $\widehat{g}$ *va a estar asociada a una matriz que a su vez provendrá de una isodistancia métrica* $\widehat{d}$, *en unas condiciones análogas a la métrica* g *y a su distancia métrica* d *(siguiendo el modelo general visto antes). Ahora bien, ya vimos en la sección de isoespacios vectoriales que el modelo del Ejemplo 4.1.3 lleva bases en bases. Por tanto, como el isoespacio vectorial* U *de partida* *se supuso n -dimensional, el isoespacio vectorial* $\widehat{U}$ *obtenido será también n-dimensional. Entonces, la matriz que represente a la isométrica* $\widehat{g}$ *deberá ser* $(n \times n)$, *al igual que la matriz que representa a la métrica g. Además, dicha matriz ha de tener sus elementos en el isocuerpo* $\widehat{\mathbf{R}}$, *que, siguiendo las notaciones del Ejemplo 4.1.3, son de la forma* $\widehat{a} = a * \widehat{I} = a \times \widehat{I}$, *con* $a \in \mathbf{R}$.

Entonces, si buscamos obtener el levantamiento isotópico de la métrica g siguiendo el modelo que viene dado por una isounidad y por el isoproducto, una posibilidad vendría dada al multiplicar cada elemento $(g_{i,j})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$, *de la matriz que representa a g, por la isounidad* $\widehat{I}$ *que teníamos, respecto a la ley* $* \equiv \times$, *que también estaba ya fijada en el levantamiento del cuerpo K. Definiríamos así* $\widehat{g} \equiv (\widehat{g_{i,j}})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} = (g_{i,j} * \widehat{I})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} = (g_{i,j} \times \widehat{I})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$.

Para ver entonces que $\widehat{g}$ *así definida es efectivamente una métrica, debemos comprobar que la matriz que la representa es regular, simétrica y definida positiva. Sin embargo, la dos últimas condiciones se tienen fácilmente con las condiciones impuestas en el Ejemplo 4.1.3, teniendo en cuenta además que* $\widehat{I} > 0$, *ya que*

a) $\widehat{g_{i,j}} = g_{i,j} * \widehat{I} = g_{j,i} * \widehat{I} = \widehat{g_{j,i}}$, *para todos* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

b) $\widehat{g_{ii}} = g_{i,i} * \widehat{I} = g_{i,i} \times \widehat{I} > 0$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$, *al ser* $g_{i,i} > 0$ *para todo* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *(por ser g una métrica, y ser* $\widehat{I} > 0$*).*

Falta entonces probar que la matriz $(\widehat{g_{i,j}})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$ *es regular. Para esto, observamos que la forma de obtención de la nueva matriz, multiplicando cada elemento de la antigua por* $\widehat{I}$ *respecto a* $* \equiv \times$, *equivale al producto usual de dicha matriz por la matriz* $diag(\widehat{I}, \ldots, \widehat{I})$, *a la que denotaremos por* $\widehat{H}$. *Dado que además no hemos salido del cuerpo* $\mathbf{R}$ *(al ser* $\widehat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$*), vemos que el determinante de la matriz* $\widehat{H}$ *coincide con* $\widehat{I}$. *Entonces* $\det((\widehat{g_{i,j}})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}) = \det((g_{i,j})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}) \times \det(diag(\widehat{I}, \ldots, \widehat{I})) = \det((g_{i,j})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}) \times \widehat{I} \neq 0$, *al ser* $\widehat{I} > 0$ *por suposición, y ser regular la matriz que representa a g.*

Se llega entonces por tanto a que $\widehat{g}$ *es efectivamente una métrica, estando además la isodistancia* $\widehat{d}$, *asociada a la isométrica* $\widehat{g}$, *de la siguiente manera:* $\widehat{d}(\widehat{X}, \widehat{Y}) = d(X, Y) \times \widehat{I}$, *para todos* $\widehat{X}, \widehat{Y} \in \widehat{U}$. $\lhd$

Obsérvese que en el ejemplo anterior, la matriz $\widehat{H}$ podría ser cualquier matriz en $M_{n\times n}(\mathbf{R})$, siempre que la matriz resultante para representar a $\widehat{g}$ fuese regular, simétrica y definida positiva. Ello se debe al hecho de que el modelo de isotopía dado en el Ejemplo 4.1.3 hace que el isocuerpo $\widehat{K}$ coincida con el cuerpo de partida K. De esta forma, sea cual fuese la matriz $\widehat{H}$, los elementos de la matriz $\widehat{g_{i,j}}$, van a estar siempre en $\widehat{K}$, que es la condición necesaria que hay que imponer.

Volvemos ahora a tratar el nivel abstracto de los axiomas en el tema que nos ocupa. Recordamos que en dicho nivel todos los espacios vectoriales y los isoespacios vectoriales son equivalentes, pudiéndose pasar (al igual que en el caso de isocuerpos) de un espacio vectorial a otro cualquiera por medio de una isotopía determinada. Podríamos preguntarnos entonces si ocurre lo mismo para los isoespacios vectoriales métricos. Para que así fuese, lo único que haría falta sería ver que todas las métricas e isométricas son equivalentes en el nivel isotópico, es decir, que se puede pasar de una a otra mediante una isotopía. Ahora bien, al igual que vimos para isocuerpos, las posibles isotopías a usar para ello no tienen porqué seguir el modelo de construcción por una isounidad y por el isoproducto, que es el modelo que hemos estado viendo hasta ahora.

No obstante, la propuesta que dio Santilli en 1983 para responder a esta cuestión (véase **[110]**), fue la de interpretar toda isométrica $\widehat{g}$ como un levantamiento isotópico de la métrica euclidiana $\delta \equiv diag(1,\ldots,1)$, considerando como isounidad $\widehat{I}$ a la matriz asociada a $\widehat{g}$, de tal forma que se obtuviese como resultado el levantamiento $\delta \to \delta * \widehat{I} = \widehat{I} \equiv \widehat{g}$. Así, si adaptamos esta propuesta al modelo al que estamos acostumbrados, deberíamos imponer que, con las notaciones usuales, la ley $*$ tuviese como elemento unidad a $I = \delta$. Veamos un ejemplo de lo anterior.

Ejemplo 4.1.17 *Supongamos que $U(X,\delta,\mathbf{R})$ es un espacio vectorial métrico n-dimensional $(U,\circ,\bullet)$ sobre el cuerpo $(\mathbf{R},+,\times)$, dotado del orden usual $\leq$ y de la métrica euclidiana $\delta \equiv diag(1,\ldots,1)$.*

Supongamos también que tenemos un isoespacio vectorial $(\widehat{U},\widehat{\circ},\widehat{\bullet})$ asociado a U, sobre un isocuerpo $(\widehat{\mathbf{R}},\widehat{+},\widehat{\times})$, correspondiente a una iso-

topía que siga el modelo del Ejemplo 4.1.3, es decir $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}) = (U, \circ, \widehat{\bullet})$ *y* $(\widehat{\mathbf{R}}, \widehat{+}, \widehat{\times}) = (\mathbf{R}, +, \widehat{\times})$. *Consideremos entonces que este tal isoespacio vectorial* $\widehat{U}$ *está dotado de una métrica* $\widehat{g} \equiv (\widehat{g_{i,j}})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$ *y vamos a probar que tal métrica se puede interpretar de hecho como una isotopía de la métrica euclídea* δ *del espacio vectorial métrico* U*, siguiendo el modelo propuesto por Santilli en 1983.*

Para ello, dado que la matriz asociada a $\widehat{g}$ *tiene elementos en* $\widehat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$*, consideraremos como isounidad para tal levantamiento a dicha matriz y como la ley necesaria para la isotopía, al producto usual de matrices reales* $(n \times n)$*-dimensionales, que tiene como elemento unidad a la matriz* $diag(1, \ldots, 1)$ *(que es la asociada a la métrica euclídea* δ*). Tiene sentido además hablar de la matriz de* $\widehat{g}$ *como isounidad pues respecto a la operación indicada posee matriz inversa, por ser regular. Dicha matriz inversa correspondería al elemento isotópico de la isotopía en cuestión de la métrica* δ*. De esta forma, se tiene finalmente el levantamiento isotópico buscado:*

$$\delta \to \delta \cdot (\widehat{g_{i,j}})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} = (\widehat{g_{i,j}})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} \equiv \widehat{g}$$

$\lhd$

Con este ejemplo, junto con el 4.1.16, queda patente además el hecho de que el levantamiento isotópico de la métrica g del espacio vectorial métrico de partida no viene dado de forma única. En cada uno de los dos ejemplos citados se da un posible modelo de tal isotopía. De hecho, si no tuviésemos que buscar en el Ejemplo 4.1.17 un levantamiento isotópico que forzosamente llevase g a $\widehat{g}$, podríamos dotar al isoespacio $\widehat{U}$ de una isométrica distinta de $\widehat{g}$. Bastaría para ello tomar el modelo de isotopía visto en el Ejemplo 4.1.16, de multiplicar la matriz asociada a g por la matriz $diag(\widehat{I}, \ldots, \widehat{I})$, donde $\widehat{I}$ fuese la isounidad principal en la construcción del isoespacio vectorial $\widehat{U}$. Incluso ya se ha comentado que se podría multiplicar la matriz asociada a g por cualquier $\widehat{H} \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$, siempre que la matriz resultante fuese regular, simétrica y definida positiva.

Esta observación nos indica además que el modelo de isotopía dado en el Ejemplo 4.1.3 es de vital importancia en la construcción de isoespacios vectoriales métricos. De hecho, podemos llegar, imponiendo nuevas condiciones, a resultados de gran interés, como la siguiente:

Proposición 4.1.18 *Sea* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ *un isoespacio vectorial definido sobre el isocuerpo* $(\widehat{\mathbf{R}}, \widehat{+}, \widehat{\times})$, *asociado al espacio vectorial* n*-dimensional* $(U, \circ, \bullet)$ *sobre el cuerpo* $(\mathbf{R}, +, \times)$, *en las hipótesis de la Proposición 4.1.2, siguiendo el modelo de isotopía del Ejemplo 4.1.3 e imponiéndose además que la isounidad principal utilizada* $\widehat{I} \in \mathbf{R}$, *sea tal que* $\widehat{I} > 0$, *donde se hace uso del orden* $\leq$ *usual en* $\mathbf{R}$. *Entonces puede dotarse a* $\widehat{U}$ *de una métrica si y sólo si* $\widehat{U}$ *tiene estructura de isoespacio vectorial métrico, es decir, si y sólo si el espacio vectorial* U *de partida está dotado de una métrica* g, *que pueda levantarse isotópicamente a una isométrica* $\widehat{g}$ *en* $\widehat{U}$.

Demostración

Se hará mediante la doble inclusión:

a) $\Leftarrow$

Es inmediato, pues si $\widehat{U}$ tiene estructura de isoespacio vectorial métrico es debido a que está dotado de una isométrica $\widehat{g}$, que a su vez verifica las condiciones necesarias para ser una métrica.

b) $\Rightarrow$

Supongamos que podemos dotar a $\widehat{U}$ de una métrica $\widehat{g} \equiv (\widehat{g_{i,j}})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$. Hay que probar entonces que existe una métrica g en U, que pueda levantarse isotópicamente a la métrica $\widehat{g}$, convirtiéndose ésta así en una isométrica.

Para ello, por las condiciones impuestas en el Ejemplo 4.1.3, sabemos que $\widehat{U}$ es un isoespacio vectorial n-dimensional, ya que este tipo de isotopía lleva bases en bases, por lo que también se conserva entonces la dimensión del espacio vectorial. Tendremos por tanto que la matriz $\widehat{g} \equiv (\widehat{g_{i,j}})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$, asociada a $\widehat{g}$, será $(n \times n)$-dimensional, con elementos en $\widehat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$. . Podemos construir entonces la matriz $(g_{i,j})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$, siendo $g_{i,j} \in \mathbf{R}$ tales que $g_{ij} * \widehat{I} = (g_{i,j}) \times \widehat{I} = \widehat{g_{i,j}}$, para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, es decir, tales que sean los números reales de los que provienen los n^2 isonúmeros que constituyen la matriz asociada a $\widehat{g}$.

Veamos entonces que la nueva matriz construida es regular, simétrica y definida positiva, con lo que será una matriz asociada a una métrica g del espacio vectorial U, que se podría levantar isotópicamente a $\widehat{g}$ sin más que considerar el modelo propuesto en el Ejemplo 4.1.16, de multiplicar dicha matriz por $diag(\widehat{I}, \ldots, \widehat{I})$. Para ello, como $\widehat{I} \in \mathbf{R}$ y $* \equiv \times$, tenemos que $T = \widehat{I}^{-I} = \widehat{I}^{-1} \in \mathbf{R}$, de donde $g_{i,j} = \widehat{g_{i,j}} * T = \widehat{g_{i,j}} \times T$, para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Ahora, se prueba que la matriz $(g_{i,j})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$ es regular, simétrica y definida positiva de forma totalmente análoga a como se hizo en el Ejemplo 4.1.16 respecto a la isométrica allí señalada, dado que $T > 0$ al ser $\widehat{I} > 0$ y estar considerando el orden usual en $\mathbf{R}$. Por ello, la matriz $(g_{i,j})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$ está asociada a una métrica en U, lo que finaliza la prueba. □

Una consecuencia inmediata de este resultado es que, bajo las hipótesis exigidas, un isoespacio vectorial $\widehat{U}$ tiene estructura de espacio vectorial métrico si y sólo si tiene estructura de isoespacio vectorial métrico, resultado que no se tiene en general, debido a lo ya mencionado anteriormente en varias ocasiones de que las nociones isotópicas presentan diferencias con las nociones convencionales, cuando se trata de proyectar la nueva teoría en la antigua.

Terminaremos esta sección con unas breves notas sobre *isogeometría.* Ya hemos dicho que de igual forma que las geometrías convencionales aparecen tras estudiar los espacios métricos, las isogeometrías deben aparecer al estudiar los isoespacios métricos. También se ha dicho que el aspecto importante de las isogeometrías es que permiten estudiar cómo varían las nociones usuales de las geometrías convencionales cuando se cambian las unidades usuales por otras de características topológicas idénticas. Un ejemplo de esto se tiene cuando se estudia el levantamiento isotópico de un espacio euclídeo $E(X, \delta, \mathbf{R})$ sobre el cuerpo $(\mathbf{R}, +, \times)$, dotado de la métrica euclídea $\delta \equiv diag(1, \ldots, 1)$. Una característica determinante en tales espacios es que si nos fijamos en los ejes euclídeos, todos tienen como unidad elemental el mismo elemento $+1$. En cambio, un aspecto importante de los *isoespacios euclídeos* (también llamados *espacios isoeuclídeos* o *espacios de Euclides-Santilli*, de los que se obtiene la *isogeometría euclidiana*) es que permiten alterar las unidades del espacio convencional, incluidas las unidades axiales. Veámoslo en el siguiente:

Ejemplo 4.1.19 *En el caso del espacio euclídeo* 3*-dimensional* $E(X, \delta, \mathbf{R})$*, las unidades para los tres ejes serían* $I_k = +1$*, para* $k = 1, 2, 3$ *(*$\approx$ *ejes* OX*,* OY *y* OZ*).*

Consideremos ahora un isoespacio euclídeo correspondiente a una isotopía 3-dimensional de clase I, esto es, un levantamiento isotópico donde la isounidad $\widehat{I}$ *sea una matriz* (3×3)*-dimensional, hermítica y definida positiva (véase* **[145]***). Debido a este último carácter,* $\widehat{I}$ *puede diagonalizarse en la forma* $\widehat{I} = diag(n_1^2, n_2^2, n_3^2)$*, con* $n_1, n_2, n_3 \in \mathbf{R} \backslash \{0\}$*, obteniendo así como nuevas isounidades para los ejes los elementos* $\widehat{I}_k = n_k^2$*, para* $k = 1, 2, 3$*. Esto quiere decir que no sólo las unidades originales se levantan a valores arbitrarios invertibles, sino que las unidades de ejes diferentes tienen generalmente valores diferentes.* $\triangleleft$

Estas condiciones permiten nuevas aplicaciones. Un ejemplo es la unificación de todos los posibles elipsoides

$$X^2 = \frac{X_1^2}{n_1^2} + \frac{X_2^2}{n_2^2} + \frac{X_3^2}{n_3^2} = r^2 \in \mathbf{R}$$

en el espacio euclídeo $E(X, \delta, \mathbf{R})$, en las llamadas *isoesferas*

$$\widehat{X}^{\widehat{2}} = \left(\frac{X_1^2}{n_1^2} + \frac{X_2^2}{n_2^2} + \frac{X_3^2}{n_3^2} \right) * \widehat{I} = r^2 * \widehat{I} \in \widehat{\mathbf{R}}$$

que son las esferas en el isoespacio $\widehat{E}(\widehat{X}, \widehat{\delta}, \widehat{\mathbf{R}})$ sobre el isocuerpo $\widehat{\mathbf{R}}$ (véase **[145]**).

De hecho, la deformación de las unidades axiales de la esfera, $I_k = +1$, en las nuevas isounidades $\widehat{I}_k = n_k^2$, conserva la esfericidad perfecta. Por otra parte, estudios más avanzados permiten al trabajar con isotopías de clase III que obtengamos la unificación de todas las cónicas compactas y no compactas. El uso de la clase IV permite a su vez la inclusión de todas las cónicas (véase **[145]**).

Por último, señalemos que estas generalizaciones tienen también implicaciones muy importantes en Física. Un ejemplo de ello lo tenemos en que los cambios en las unidades, vistos anteriormente, permiten poder transformar distancias (longitudes) muy grandes en distancias muy pequeñas, y al revés. También tienen repercusiones en la generalización de las mecánicas convencionales (Newtoniana, Analítica, Cuántica, etc) en nuevas mecánicas isotópicas, al igual que en los problemas clásicos de dinámica interior y exterior. El lector interesado puede consultar estos temas en **[145]**.

4.2. Isotransformaciones

Antes de continuar con el estudio de nuevas isoestructuras, vamos a dedicar esta sección a las diferentes aplicaciones que se pueden establecer entre isoespacios vectoriales. En ella, no sólo se van a indicar las aplicaciones usuales que existen al considerar los isoespacios vectoriales como espacios vectoriales, tal como ya se hizo para los isogrupos o los isoanillos. Se va a dar un paso más, definiendo las *isotransformaciones*, que serán aquellas transformaciones que provengan de un tipo de levantamiento isotópico de una transformación entre los espacios vectoriales correspondientes a los isoespacios vectoriales anteriores (véase **[121]**).

Por otro lado va a quedar patente el hecho de que las isotopías de Santilli son unas herramientas muy útiles para el paso de una teoría *lineal y local* a otra no lineal y no local, que esté estrechamente relacionada con la anterior. Ya se dijo en la Definición 3.1.2 que las isotopías de Santilli eran aquellas capaces de levantar estructuras lineales, locales y canónicas a las formas no lineales, no locales y no canónicas más generales posibles, siendo capaces de reconstruir la linealidad, la locacidad y la canonicidad de partida en ciertos espacios generalizados. Pues bien, vamos a ver que en el caso de que estemos trabajando con espacios vectoriales, la no linealidad y no locacidad anteriores ocurren sólo cuando la nueva teoría se proyecta sobre la teoría original, ya que de hecho, la isoteoría reconstruye la linealidad y la locacidad en el isoespacio vectorial construido. Con respecto a la canonicidad tendríamos un resultado análogo, que empezó a ser desarrollado por Santilli a partir de la definición de *isocálculo* (que es el levantamiento isotópico del cálculo convencional) en 1996 (véase **[145]**), pero que debido a su extensión no será tratado en nuestro estudio.

Comenzamos por tanto con la definición de las aplicaciones entre isoespacios vectoriales, considerados estos como espacios vectoriales, y que en conjunto reciben el nombre de *transformaciones*:

Definición 4.2.1 *Sean* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ *y* $(\widehat{U'}, \widehat{\triangle}, \widehat{\bigtriangledown})$ *dos isoespacios vectoriales sobre un isocuerpo* $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$. *Una aplicación* $f : \widehat{U} \to \widehat{U'}$ *se dice* homomorfismo *de isoespacios vectoriales si para todo* $\widehat{a} \in \widehat{K}$ *y para todos* $\widehat{X}, \widehat{Y} \in \widehat{U}$, *se verifican:*

1. $f(\widehat{X}\widehat{\circ}\widehat{Y}) = f(\widehat{X})\widehat{\triangle}f(\widehat{Y})$.
2. $f(\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X}) = \widehat{a}\widehat{\bigtriangledown}f(\widehat{X})$.

Si f *es biyectiva, se dice* isomorfismo *y si* $\widehat{U} = \widehat{U'}$, endomorfismo. *En este último caso, si además* f *es biyectiva, se dice* automorfismo.

A todo endomorfismo se le denomina también *operador lineal*. Este tipo particular de transformaciones tiene la propiedad de que cuando se da entre espacios vectoriales convencionales, viene dado de forma unívoca por el producto asociativo por un elemento $a \in K$, independiente de variables locales. Así, si tenemos el operador lineal $f : (U, \circ, \bullet) \to (U, \circ, \bullet)$, donde U es un isoespacio vectorial sobre un cuerpo $K(a, +, \times)$ y f viene dado por el elemento $a \in K$, se tendría que $f(X) = a \bullet X$, para todo $X \in U$.

En caso de que el elemento a tenga dependencia en variables locales x, la transformación f se dirá *no lineal*. Entonces, $a = a(x)$, quedando f definida según $f(X) = a(x) \bullet X$, para todo $X \in U$. Si esta dependencia es de tipo integral se dice entonces que f es una transformación *no local*, mientras que en caso contrario se dirá *local*.

Entonces, en el mismo sentido, como estamos considerando los isoespacios vectoriales como espacios vectoriales, dado el operador lineal

$f : \widehat{U} \to \widehat{U}$, de la Definición 4.2.1, tendremos que f viene dado por un elemento $\widehat{a} \in \widehat{K}$, de forma que se verificará $f(\widehat{X}) = \widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X}$, para todo $\widehat{X} \in \widehat{U}$. También se hablaría de transformación no lineal o no local en el isoespacio vectorial $\widehat{U}$, de forma análoga a lo visto anteriormente para el espacio vectorial U.

Señalemos por último que la forma que tienen los operadores lineales permiten establecer una relación entre un operador lineal existente en un espacio vectorial $(U, \circ, \bullet)$ sobre un cuerpo $K(a, +, \times)$ y un operador lineal en un isoespacio vectorial $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$, sobre $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$, asociado a U. Supongamos entonces, por ejemplo, que sea $f : U \to U$, el primero de dichos operadores lineales, dado por el elemento $a \in K$, es decir, tal que $f(X) = a \bullet X$, para todo $X \in U$. Podríamos considerar entonces el levantamiento $\widehat{a} \in \widehat{K}$, correspondiente al elemento $a \in K$, y tomar así el operador lineal existente en el isoespacio vectorial $\widehat{U}$, que viene dado por el elemento $\widehat{a}$. Llamando $\widehat{f}$ a tal operador lineal, resultaría que $\widehat{f}(\widehat{X}) = \widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X}$, para todo $\widehat{X} \in \widehat{U}$. Entonces, $\widehat{f}$ recibe el nombre de *isotransformación*, al originarse por el levantamiento isotópico de una transformación f entre espacios vectoriales y resultar una transformación entre los isoespacios vectoriales correspondientes. Se tiene además la siguiente:

Definición 4.2.2 *Una isotransformación $\widehat{f}$ dada por un elemento $\widehat{a}$ proveniente de una isotopía inyectiva, se dice* isolineal *o* isolocal *cuando el elemento a correspondiente que represente a la transformación f sea lineal o local, respectivamente. Se dirá* no isolineal *o* no isolocal *cuando dicho elemento a sea no lineal o no local, respectivamente.*

El hecho de imponer en la definición anterior que la isotopía con la que estemos trabajando sea inyectiva se debe a que en caso contrario pudiera darse que existiese un segundo elemento $b \in K$, con $b \neq a$, tal que fuese $\widehat{b} = \widehat{a}$, siendo b no lineal (no local, respectivamente), con lo que la isotransformación $\widehat{f}$ sería por una parte isolineal (isolocal, respectivamente), mientras que por otro sería no isolineal (no isolocal, respectivamente), lo que sería una contradicción. De todas formas podríamos ampliar la definición anterior a isotopías que no permitiesen la existencia de tal elemento b no lineal (no local, respectivamente), aunque no fueran inyectivas. Sin embargo, para evitar problemas impondremos en lo sucesivo la condición de inyectividad en las isotopías utilizadas. De esta forma, esta definición permite distinguir los conceptos de *isolinealidad* e *isolocacidad*, de los conceptos de linealidad y locacidad convencionales. Podemos de hecho tener que una determinada isotransformación $\widehat{f}$ sea no lineal y no local, por serlo el elemento $\widehat{a}$, y en cambio ser isolineal e isolocal, por serlo el elemento a correspondiente, al igual que cualquier otra combinación posible de estos conceptos. Sin embargo, sí se verifica el siguiente resultado:

Proposición 4.2.3 *Sea $(U, \circ, \bullet)$ un espacio vectorial sobre $K(a, +, \times)$, siendo $f : U \to U$, una transformación de tipo operador lineal, dada por el elemento $a \in K$. Sea $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ un isoespacio asociado a U, sobre el cuerpo $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$, correspondiente a una isotopía que sea inyectiva. Entonces f es una transformación lineal (local, respectivamente) si y sólo si la correspondiente isotransformación $\widehat{f}$ en $\widehat{U}$, dada por el elemento $\widehat{a} \in \widehat{K}$, es isolineal (isolocal, respectivamente).*

Demostración

Basta tener en cuenta la Definición 4.2.2, ya que entonces $\widehat{f}$ será isolineal (isolocal, respectivamente) si y sólo si el elemento $a \in K$ es lineal (local, respectivamente), lo que equivale a su vez a decir que f es una transformación lineal (local, respectivamente). □

Por tanto, los resultados anteriores nos muestran que necesitamos levantar isotópicamente las aplicaciones lineales y locales para conservar la linealidad y la locacidad en los isoespacios correspondientes, y que la no linealidad y no locacidad de la isoteoría sólo se da cuando ésta se proyecta en la teoría de partida. En nuestro caso, tal proyección se tiene cuando buscamos obtener la linealidad y la locacidad de la transformación $\widehat{f}$ en el elemento $\widehat{a} \in \widehat{K}$ del que viene dada univocamente (tal y como se hace en la teoría convencional), en lugar de en el elemento $a \in K$, como se ha hecho en la Definición 4.2.2.

Así pues, volviendo al nivel abstracto de los axiomas (que ya tratamos en la sección de los isocuerpos), resulta que al igual que pueden considerarse equivalentes en dicho nivel los espacios vectoriales y los isoespacios vectoriales, también pueden considerarse equivalentes las transformaciones lineales entre los primeros y las isotransformaciones isolineales entre los segundos, así como las transformaciones locales y las isotransformaciones isolocales.

Se va a estudiar a continuación un ejemplo de las isotransformaciones, que consistirá en estudiar aquellas isotransformaciones que provienen de las isotopías de Santilli, consecuencia de la construcción dada por una isounidad y por el isoproducto:

Ejemplo 4.2.4 *Supongamos un espacio vectorial* $(U, \circ, \bullet)$ *definido sobre un cuerpo* $K(a, +, \times)$. *Sea* $f : U \to U$, *el operador lineal existente en* U, *dado por un elemento fijado* $a \in K$. *Sea ahora* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ *el isoespacio vectorial sobre el isocuerpo* $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$, *correspondiente a la isotopía de elementos* $\widehat{I}, \widehat{S}, \widehat{S'}, *, \star, \Box$ *y* $\diamond$, *en las condiciones de la Proposición 4.1.2. Tendremos entonces que el levantamiento del elemento* $a \in K$ *respecto a la isotopía anterior es* $\widehat{a} = a * \widehat{I} \in \widehat{K}$ *y que el operador lineal existente en* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$, *que viene dado por el elemento* $\widehat{a}$, *es* $\widehat{f} : \widehat{U} \to \widehat{U}$, *tal que* $\widehat{f}(\widehat{X}) = \widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X} = (a \Box X) \Box \widehat{I}$, *para todo* $\widehat{X} \in \widehat{U}$. *Ya sabemos además, por la sección anterior, que el isoproducto* $\widehat{\bullet}$ *es asociativo al verificar la condición (2.a) de la Definición 4.1.1, por construcción. Tendríamos por tanto que* $\widehat{f}$ *es efectivamente un operador lineal, que proviene del levantamiento isotópico del operador lineal* f *y por tanto* $\widehat{f}$ *es una isotransformación.* $\triangleleft$

Veamos por último, para acabar esta sección, un resultado particular en este modelo de isotopía, que corrobora algo ya citado en el caso general (véase **[175]**):

Proposición 4.2.5 *Sean* $(U, \circ, \bullet)$ *un espacio vectorial definido sobre el cuerpo* $K(a, +, \times)$ *y* $f : U \to U$, *una transformación no lineal (no local, respectivamente), dada por el elemento* $a = a(x)$, *donde* $a(x) \in K$ *para toda variable local* x. *Entonces, en estas condiciones, y bajo condiciones topológicas adecuadas, existe una isotransformación lineal (local, respectivamente),* $\widehat{f}$ *en un isoespacio* $\widehat{U}$, *asociado a* U.

Demostración

Las condiciones topológicas a buscar serán aquellas que permitan encontrar una descomposición $a = b * T$, con $b \in K$, lineal (local, respectivamente) y donde $*$ sea el elemento de isotopía principal de la isotopía que levante al cuerpo K y que tenga como elemento isotópico a T. Deberá ser por tanto T invertible, siendo entonces $\widehat{I} = T^{-I}$ (si I es el elemento unidad respecto a $*$) la isounidad principal que usemos en nuestro levantamiento isotópico.

Bajo una isotopía compatible con los elementos anteriores, sería entonces $\widehat{a} = \widehat{b * T} = (b * T) * \widehat{I} = b * T * \widehat{I} = b \in \widehat{K}$ el elemento levantado isotópicamente. Entonces, la isotransformación $\widehat{f}$ que se definiría en el correspondiente isoespacio vectorial $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$, vendría dada por el elemento $b \in \widehat{K}$ anterior, quedando definida según $f(\widehat{X}) = b \widehat{\bullet} \widehat{X}$, para todo $\widehat{X} \in \widehat{U}$. Entonces, $\widehat{f}$ sería por tanto lineal (local, respectivamente) al serlo b, con lo que se tiene el resultado buscado. □

Observemos finalmente que en la descomposición $a = b * T$, realizada en la demostración anterior, lo que se ha hecho verdaderamente es traspasar la no linealidad (no locacidad, respectivamente) del elemento $a \in K$, al elemento isotópico T. El problema que se plantea consistiría en encontrar en cada caso concreto la descomposición más favorable, imponiendo las suficientes condiciones para ello. Por ejemplo, imponiendo que b sea invertible respecto $*$, tomaríamos entonces $T = b^{-I} * a$, debiendo además imponer que a fuese invertible respecto $*$, para que así lo fuese T.

La siguiente isoestructura a estudiar será el levantamiento isotópico de los módulos. Para ello seguiremos el desarrollo habitual, comenzando con la definición de *isomódulo*.

4.3. Isomódulos

Siguiendo en esta sección un desarrollo similar al de las anteriores, estudiaremos los isomódulos, los isosubmódulos y las aplicaciones entre estas isoestructuras (véase **[103]**) .

Definición 4.3.1 *Sean* $(A, \circ, \bullet)$ *un anillo y* $(\widehat{A}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ *un isoanillo asociado. Sea* $(M, +)$ *un* A*-módulo con producto externo* $\times$*. Se denomina* iso-$\widehat{A}$-módulo $\widehat{M}$ *a toda isotopía de* M*, dotada de una nueva operación interna* $\widehat{+}$ *y de una nueva operación externa* $\widehat{\times}$*, verificando los axiomas de* $\widehat{A}$*-módulo, es decir, tal que*

1. $(\widehat{M}, \widehat{+})$ *es un isogrupo, siendo además* $\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{m} \in \widehat{M}$, $\forall \widehat{a} \in \widehat{A}, \forall \widehat{m} \in \widehat{M}$.
2. *Axiomas de la ley externa:*

   a) $\widehat{a}\widehat{\times}(\widehat{b}\widehat{\times}\widehat{m}) = (\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{b})\widehat{\times}\widehat{m}$, $\forall \widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{A}, \forall \widehat{m} \in \widehat{M}$
   b) $\widehat{a}\widehat{\times}(\widehat{m}\widehat{+}\widehat{n}) = (\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{m})\widehat{+}(\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{n})$, $\forall \widehat{a} \in \widehat{A}, \forall \widehat{m}, \widehat{n} \in \widehat{M}$.
   c) $(\widehat{a}\widehat{\circ}\widehat{b})\widehat{\times}\widehat{m} = (\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{m})\widehat{+}(\widehat{b}\widehat{\times}\widehat{m})$, $\forall \widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{A}, \forall \widehat{m} \in \widehat{M}$.
   d) $\widehat{I}\widehat{\times}\widehat{m} = \widehat{m}$, $\forall \widehat{m} \in \widehat{M}$.

   siendo $\widehat{I}$ *la isounidad asociada a* $\widehat{A}$ *respecto a la operación* $\widehat{\bullet}$.

Obsérvese en primer lugar que, en las condiciones de la definición anterior, si A fuese un cuerpo y $\widehat{A}$ un isocuerpo asociado a A , tendríamos que M tendría estructura de espacio vectorial sobre A y que $\widehat{M}$ tendría estructura de isoespacio vectorial asociado a M, sobre $\widehat{A}$. Por tanto, aquí, al igual que ocurre con las estructuras convencionales, un isomódulo no es más que una generalización de un isoespacio vectorial.

Otro ejemplo que se deduce del caso convencional es el siguiente:

Ejemplo 4.3.2 *Sea* $\Im$ *un ideal del anillo* A*, siendo* $\widehat{\Im}$ *un isoideal de* $\widehat{A}$ *asociado a* $\Im$*. Dado que* $\Im$ *tiene estructura de* A*-módulo para la multiplicación interna del isoanillo* A*,* $\bullet$*, es inmediato que* $\widehat{\Im}$ *tiene estructura de iso-*$\widehat{A}$*-módulo para la multiplicación interna* $\widehat{\bullet}$ *del isoanillo* $\widehat{A}$*, pues se verifican:*

a) $(\widehat{\Im}, \widehat{\circ})$ *es un isogrupo, por ser* $\widehat{\Im}$ *isoideal de* $\widehat{A}$.

b) $\widehat{a}\widehat{\bullet}(\widehat{b}\widehat{\bullet}\widehat{m}) = (\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{b})\widehat{\bullet}\widehat{m}$*,* $\forall \widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{A}, \forall \widehat{m} \in \widehat{\Im}$.

c) $\widehat{a}\widehat{\bullet}(\widehat{m}\widehat{\circ}\widehat{n}) = (\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{m})\widehat{\circ}(\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{n})$, *$\forall \widehat{a} \in \widehat{A}, \forall \widehat{m}, \widehat{n} \in \widehat{M}$.*
d) $(\widehat{a}\widehat{\circ}\widehat{b})\widehat{\bullet}\widehat{m} = (\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{m})\widehat{\circ}(\widehat{b}\widehat{\bullet}\widehat{m})$, *$\forall \widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{A}, \forall \widehat{m} \in \widehat{M}$.*
e) $\widehat{I}\widehat{\bullet}\widehat{m} = \widehat{m}$, *$\forall \widehat{m} \in \widehat{M}$; siendo $\widehat{I}$ la isounidad asociada a $\widehat{A}$ respecto a la multiplicación $\widehat{\bullet}$.* $\triangleleft$

Observemos sin embargo que, pese a tener $A/\Im$ estructura de A-módulo para la multiplicación usual por un escalar ($A \times A/\Im \to A/\Im$, tal que: $(a, b+\Im) \to (a\bullet b)+\Im$), no podemos pasar este ejemplo convencional al caso de isomódulos, ya que en general $\widehat{A}/\widehat{\Im}$ no tiene porqué coincidir con el levantamiento isotópico de ningún anillo cociente, tal como vimos en la sección de isoanillos. No obstante, $\widehat{A}/\widehat{\Im}$ sí tiene estructura de $\widehat{A}$-módulo mediante el producto usual por un isoescalar, con lo que nuevamente aparecen las diferencias habituales entre los conceptos y propiedades convencionales y los isotópicos.

Pasamos ahora a considerar el procedimiento de construcción de isotopías a partir de una isounidad y del isoproducto. De igual forma que en el caso de los isoespacios vectoriales, tal construcción deberá tener algunas diferencias en el caso de isomódulos respecto a las isoestructuras anteriores. De hecho, dado que la única diferencia que existe entre un isoanillo y un isocuerpo es que en este último cabe hablar de isoinversa respecto a la segunda operación, cosa que no ocurre en los isoanillos, y dado que esta propiedad no interviene de forma directa en la construcción del levantamiento isotópico de un espacio vectorial o de un módulo, el modelo de construcción de ambos ha de ser totalmente análogo. Llegaríamos por tanto, de forma similar a la Proposición 4.1.2 de isoespacios vectoriales, a la siguiente:

Proposición 4.3.3 *Sean $(A, \circ, \bullet)$ un anillo y $(M, +)$ un A-módulo con producto externo $\times$. Sea $(\widehat{A}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ el isoanillo respecto a la multiplicación asociado a A, correspondiente a la isotopía de elementos principales $\widehat{I}$ y $*$ (de elemento unidad I) y elementos secundarios $\widehat{S}$ y $\star$ (de elemento unidad S, siendo $\widehat{S}^{-S} = \widehat{R} = R * \widehat{I}$), en las condiciones de la Proposición 3.4.2. Sean $\Box$ (de elemento unidad I), $\widehat{S'}$ y $\diamond$ (de elemento unidad S', siendo $\widehat{S'}^{-S'} = \widehat{R'} = R' \Box \widehat{I}$), elementos de isotopía que junto* *a $\widehat{I}$ estén en las condiciones de la Definición 3.1.3, siendo el conjunto general V' asociado tal que $A \cup U \subseteq V'$. En estas condiciones, si se verifican* **a)** $(M, \diamond)$ *tiene estructura de módulo con respecto al anillo* $(A, \star, *)$, *con producto externo* $\Box$, **b)** $(M, \diamond)$ *tiene estructura de grupo con elemento unidad* $S' \in M$, **c)** $\widehat{a} \widehat{\times} \widehat{R'} = \widehat{R'}$, $\forall \widehat{a} \in \widehat{K}$ *y* **d)** $\widehat{R} \widehat{\times} \widehat{m} = \widehat{R'}$, *para todo* $\widehat{m} \in \widehat{M}$, *entonces el levantamiento isotópico* $(\widehat{M}, \widehat{+})$ *correspondiente a la isotopía de elementos principales* $\widehat{I}$ *y* $\Box$ *y secundarios* $\widehat{S}$ *y* $\diamond$, *mediante el procedimiento del isoproducto, es un iso-*$\widehat{A}$*-módulo para el producto externo* $\widehat{\times}$ *(también construido por la isotopía anterior).* $\Box$

Señalemos que esta proposición tiene su equivalente en el caso de que $\widehat{A}$ sea un isoanillo respecto a la suma, obteniéndose un resultado análogo.

Veamos ahora algunos ejemplos de isomódulos. Ya hemos comentado al principio de esta sección que tanto los isoespacios vectoriales como los isoideales pueden dotarse de estructura de isomódulo. De hecho, todos los ejemplos que hemos visto de isoespacios vectoriales son válidos como ejemplos de isomódulos. Veremos entonces un caso particular de isomódulo proveniente de un isoideal y generalizaremos el modelo de isotopía del Ejemplo 4.1.3 al caso de isomódulos, dando un ejemplo concreto de ello:

Ejemplo 4.3.4 *Consideremos el anillo* $(\mathbf{Z}, +, \times)$ *y el isoanillo* $(\mathbf{P}, +, \widehat{\times})$ *vistos en el Ejemplo 3.4.5 y el ideal* $(\mathbf{P}, +, \times)$ *y el isoideal* $(\mathbf{Z_4}, +, \widehat{\times})$ *del Ejemplo 3.4.13.*

Sabemos que en la estructura convencional, el ideal $(\mathbf{P}, +, \times)$ *puede dotarse de estructura de* $\mathbf{Z}$*-módulo, tomando como producto externo la segunda operación* $\times$. *Veamos que, tal y como hemos dicho anteriormente, podemos hacer lo mismo con el isoideal* $(\mathbf{Z_4}, +, \widehat{\times})$, *dotándolo de estructura de iso-*$\mathbf{P}$*-módulo, con respecto al producto externo* $\widehat{\times}$. *Para ello, comprobaremos que se verifican las condiciones de la Proposición 4.3.3.*

Empezaremos adaptando las notaciones usadas en el Ejemplo 3.4.13 con las usadas para la construcción de un isomódulo. Tendríamos así que los elementos de isotopía utilizados para la construcción del iso-

$\mathbf{P}$*-módulo serían los elementos principales* $\widehat{I} = 2$ *y* $\square \equiv * \equiv \times$ *y los elementos secundarios* $\widehat{S'} = 0 = \widehat{S}$ *y* $\diamond \equiv \star \equiv +$ *(de elemento unidad* $S' = 0 = S$ *(el elemento unidad respecto a* $\star$*, que es la ley usada en la construcción del isoanillo* $(\mathbf{Z}, +, \widehat{\times})$*). De esta forma, el conjunto general que utilizaremos en la isotopía será* $V' = \mathbf{Z} = \mathbf{Z} \cup \mathbf{P}$*, que está en las condiciones impuestas por la Proposición 4.3.3.*

Trivialmente, tanto el conjunto isotópico como las operaciones asociadas al iso-$\mathbf{P}$*-módulo han de ser iguales a los correspondientes asociados al isoideal* $(\mathbf{Z_4}, +, \widehat{\times})$*. Observemos que la operación* $\widehat{\times}$ *definida en el Ejemplo 3.4.5, no presenta problemas con la construcción del isoproducto dada para un isomódulo (que equivale a su vez a la dada para un isoespacio vectorial), pues sería* $\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{b} = \widehat{a} * \frac{1}{2} * \widehat{b} = \widehat{a} \times \frac{1}{2} \times \widehat{b} = (a \times b) \times 2 = (a \square b) \square 2$*, para todo* $\widehat{a} \in \mathbf{P} = \widehat{\mathbf{Z}}_2$ *y para todo* $\widehat{b} \in \mathbf{Z_4} = \widehat{\mathbf{P}}_2$*.*

Finalmente vemos que se verifican:

a) $(\mathbf{P}, \diamond) = (\mathbf{P}, +)$ *tiene estructura de módulo con respecto al anillo* $(\mathbf{Z}, \star, *) = (\mathbf{Z}, +, \times)$*, con producto externo* $\square \equiv * \equiv \times$ *(pues corresponde justamente a la forma convencional de dotar de estructura de módulo a un ideal determinado).*

b) $(\mathbf{P}, \diamond) = (\mathbf{P}, +)$ *tiene estructura de grupo con respecto al elemento unidad* $S' = 0 \in \mathbf{P}$*.*

c) *Como* $\widehat{R'} = \widehat{S'}^{-S'} = 0^{-0} = 0 = 0 \times 2 = 0 \square \widehat{I}$*, tendríamos que:* $\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{R'} = (a \times 2)\widehat{\times}(0 \times 2) = (a \times 0) \times 2 = 0 \times 2 = \widehat{R'}$*, para todo* $\widehat{a} \in \mathbf{P} = \widehat{\mathbf{Z}}_2$*.*

d) *Como* $\widehat{R} = \widehat{S'}^{-S'} = 0^{-0} = 0 = 0 \times 2 = \widehat{R'}$*, tendríamos que* $\widehat{R}\widehat{\times}\widehat{m} = (0 \times 2)\widehat{\times}(m \times 2) = (0 \times m) \times 2 = 0 \times 2 = \widehat{R'}$*, para todo* $\widehat{m} \in \mathbf{Z_4} = \widehat{\mathbf{P}}_2$*.*

Aplicando entonces la Proposición 4.3.3, se tiene que $(\widehat{\mathbf{P}}_2, \widehat{+}) = (\mathbf{Z_4}, +)$ *tiene estructura de iso-*$\mathbf{P}$*-módulo respecto al producto externo* $\widehat{\times}$*. De esta forma dotamos a* $(\mathbf{Z_4}, +, \widehat{\times})$ *de una nueva estructura, pues recordemos que ya lo habíamos dotado de estructura de isoideal, respecto a la isotopía de los mismos elementos.* $\lhd$

Vamos ahora a realizar una generalización para el caso de isomódulos, del modelo de isotopía dado en el Ejemplo 4.1.3. Notemos que de hecho el Ejemplo 4.3.4 es un caso concreto de tal generalización, pues el isoanillo $(\mathbf{P}, +, \widehat{\times})$ asociado a $(\mathbf{Z}, +, \times)$ corresponde a la isotopía de elementos principales $\widehat{I} = 2 \in \mathbf{Z}$ y $* \equiv \times$ (de elemento unidad 1, el mismo que el de $(\mathbf{Z}, \times)$), y secundarios $\widehat{S} = 0$ y $\star \equiv +$ (de elemento unidad $S = 0$, el mismo que el de $(\mathbf{Z}, +)$), con lo que estaríamos ante una isotopía de las mismas condiciones que la usada para el levantamiento del cuerpo K del Ejemplo 4.1.3. En cuanto a los elementos de isotopía usados para la obtención del iso-$\mathbf{P}$ -módulo $(\mathbf{Z_4}, +, \widehat{\times})$, también están en las mismas condiciones que los usados para la obtención del isoespacio vectorial $\widehat{U}$ del Ejemplo 4.1.3, pues tendríamos como elementos principales a $\widehat{I}$ y a $\square \equiv \times$ (que es el producto externo del $\mathbf{Z}$-módulo de partida, $(\mathbf{P}, +, \times)$, que a su vez equivale a la segunda operación $\bullet$ del espacio vectorial U del Ejemplo 4.1.3, y como elementos secundarios a $\widehat{S'} = \widehat{S}$ y $\diamond \equiv +$ (que equivale a la primera operación $\circ$ del espacio vectorial U).

Respecto a las condiciones de la Proposición 4.3.3 (equivalentes a las de la Proposición 4.1.2), ya hemos visto en el Ejemplo 4.3.4 que se verifican, por lo que finalmente el modelo de isotopía del Ejemplo 4.1.3 llega a tener su equivalente para isomódulos.

Sin embargo, una diferencia respecto al modelo del Ejemplo 4.1.3 (que también se da en el Ejemplo 4.3.4) es que, en general, el conjunto isotópico correspondiente al levantamiento de un A-módulo M no tiene porqué coincidir con él mismo, al contrario que sucedía en el ejemplo citado, donde siempre $\widehat{U} = U$. Esto se debe al hecho de que en un anillo no cabe hablar de elemento inverso respecto a la segunda operación, con lo que no valdría una demostración análoga a la dada en el Ejemplo 4.1.3, de que dado $X \in U$, entonces $X = X \bullet T \bullet \widehat{I} \in \widehat{U}$, si $T = \widehat{I}^{-I} \in A$, pues en nuestro caso puede que $T \notin A$.

Observemos finalmente que este caso concreto del Ejemplo 4.3.4 puede generalizarse, no ya sólo al resto de ideales de un determinado anillo, sino a casos en que el módulo de partida en cuestión esté en condiciones similares. Veamos un ejemplo de esto último:

Ejemplo 4.3.5 *Consideremos el anillo* $(\mathbf{Z}, +, \times)$ *y el isoanillo* $(\mathbf{P}, +, \widehat{\times})$ *vistos en el Ejemplo 3.4.5. Tomemos además el* $\mathbf{Z}$*-módulo* $(\mathbf{Q}, +)$ *de los racionales con la suma usual, con producto externo* $\bullet$

(producto usual de los racionales). Realizando entonces la isotopía de elementos principales $\widehat{I} = 2$ *y* $\square \equiv \bullet$ *y secundarios* $\widehat{S} = 0$ *y* $\diamond \equiv +$ *(suma de racionales), llegaríamos, de forma análoga al Ejemplo 4.3.4, y usando la Proposición 4.3.3, al iso-***P***-módulo* $(\mathbf{Q}, +, \widehat{\bullet})$*, donde el isoproducto* $\widehat{\bullet}$ *estaría definido según* $\widehat{m}\widehat{\bullet}\widehat{n} = (m \bullet n) \bullet 2$*, para todos* $\widehat{m}, \widehat{n} \in \widehat{\mathbf{Q}}_2 = \mathbf{Q}$*.* $\triangleleft$

Continuaremos ahora nuestro estudio con el levantamiento de las subestructuras asociadas a los módulos: los submódulos. Daremos en primer lugar la definición de tales levantamientos, a los que se les denominará *isosubmódulos*:

Definición 4.3.6 *Sean* $(A, \circ, \bullet)$ *un anillo y* $(\widehat{A}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ *un isoanillo asociado. Sean* $(M, +)$ *un* A*-módulo con producto externo* $\times$ *y* $(\widehat{M}, \widehat{+})$ *un iso-*$\widehat{A}$*-módulo, con producto externo* $\widehat{\times}$*, asociado a* M*. Sea* N *un submódulo de* M*. Se dice que* $\widehat{N} \subseteq \widehat{M}$ *es un* isosub-$\widehat{A}$-módulo *de* $\widehat{M}$ *si, siendo una isotopía de* N*, tiene estructura de sub-*$\widehat{A}$*-módulo de* $\widehat{M}$*, es decir, si* $(\widehat{N}, \widehat{+})$ *tiene estructura de iso-*$\widehat{A}$*-módulo, con producto externo* $\widehat{\times}$ *(dado que ya se tiene que* $\widehat{N} \subseteq \widehat{M}$*).*

Pasamos ahora al modelo de construcción de isotopías por medio de una isounidad y del isoproducto, buscando que las leyes asociadas al futuro isosubmódulo sean las mismas que las del isomódulo de partida. Necesitamos por tanto que los elementos de isotopía sean exactamente los mismos que los usados para construir dicho isomódulo. Con esto obtendremos además que el conjunto isotópico resultante del levantamiento del submódulo de partida esté contenido en el resultante del levantamiento del módulo correspondiente. Faltaría aún, no obstante, darle a dicho conjunto estructura de isomódulo. Para ello bastaría adaptar las condiciones de la Proposición 4.3.3 al submódulo de partida, que a su vez tiene estructura de módulo. Tendremos así, de forma análoga a dicha proposición, la siguiente:

Proposición 4.3.7 *Sean* $(A, \circ, \bullet)$ *un anillo y* $(M, +)$ *un* A*-módulo con producto externo* $\times$*. Sean* $(\widehat{A}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ *un isoanillo asociado a* A *y* $(\widehat{M}, \widehat{+})$ *el iso-*$\widehat{A}$*-módulo con producto externo* $\widehat{\times}$*, correspondientes a la* *isotopía de elementos* $\widehat{I}, \widehat{S}, \widehat{S}', *, \star, \Box$ *y* $\diamond$*, en las condiciones de la Proposición 4.3.3. Sea* N *un submódulo de* M*. En estas condiciones, si* $(N, \diamond)$ *tiene estructura de submódulo de* $(M, \diamond)$*, ambos con producto externo* $\Box$ *respecto al anillo* $(A, \star, *)$*, siendo* $(N, \diamond)$ *un grupo con elemento unidad* $S' \in N$*, entonces el levantamiento isotópico* $(\widehat{N}, \widehat{+})$ *unido al producto* $\widehat{\times}$*, correspondiente a la isotopía de elementos los anteriormente señalados, tiene estructura de isosub-*$\widehat{A}$*-módulo.* $\Box$

Observemos que no hace falta suponer aquí el resto de las hipótesis de la Proposición 4.3.3, dado que se tienen por la propia construcción de $\widehat{M}$, es decir, que $\widehat{N}$ las hereda de $\widehat{M}$.

Veamos a continuación un ejemplo de isosubmódulo:

Ejemplo 4.3.8 *Consideremos el anillo* $(\mathbf{Z}, +, \times)$*, el isoanillo* $(\mathbf{P}, +, \widehat{\times})$*, el* $\mathbf{Z}$*-módulo* $(\mathbf{Q}, +)$*, con producto externo* $\bullet$ *y el iso-*$\mathbf{P}$*-módulo* $(\mathbf{Q}, +)$ *con producto externo* $\widehat{\bullet}$*, todos ellos dados en el Ejemplo 4.3.5. Tomemos también el* $\mathbf{Z}$*-módulo* $(\mathbf{P}, +)$ *con producto externo* $\times$ *(que además es un submódulo de* $\mathbf{Q}$ *y el iso-*$\mathbf{P}$*-módulo* $(\mathbf{P}, +)$ *con producto externo* $\widehat{\times}$*, del Ejemplo 4.3.4. Tendremos entonces que, con las notaciones de estos ejemplos,* $(\mathbf{P}, \diamond) = (\mathbf{P}, +)$ *tiene estructura de submódulo de* $(\mathbf{Q}, \diamond) = (\mathbf{Q}, +)$ *, ambos con producto externo* $\Box \equiv \times$*, respecto al anillo* $(\mathbf{Z}, \star, *) = (\mathbf{Z}, +, \times)$*, siendo* $(\mathbf{P}, \diamond) = (\mathbf{P}, +)$ *un grupo con elemento unidad* $0 \in \mathbf{P}$.

Entonces, por la Proposición 4.3.7, el levantamiento isotópico $(\mathbf{P}, +)$ *con producto externo* $\widehat{\times}$*, correspondiente a la isotopía de elementos los usados para el resto de las isoestructuras señaladas, tiene estructura de isosub-*$\mathbf{P}$*-módulo.* $\lhd$

Finalizaremos esta sección dando la definición de las distintas aplicaciones existentes entre isomódulos:

Definición 4.3.9 *Sea* $(\widehat{A}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ *un isoanillo y sean* $(\widehat{M}, \widehat{+})$ *y* $(\widehat{M'}, \widehat{\triangle})$ *dos iso-*$\widehat{A}$*-módulos con productos externos respectivos* $\widehat{\times}$ *y* $\widehat{\bigtriangledown}$*. Una aplicación* $f : \widehat{M} \to \widehat{M'}$ *se dice* homomorfismo de iso-$\widehat{A}$-módulos *si,* $\forall \widehat{a} \in \widehat{A}$ *y* $\forall \widehat{m}, \widehat{n} \in \widehat{M}$ *se verifican:*

1. $f(\widehat{m} \widehat{+} \widehat{n}) = f(\widehat{m}) \widehat{\triangle} f(\widehat{n})$.

2. $f(\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{m}) = \widehat{a}\widehat{\bigtriangledown}f(\widehat{m})$.

Además, al igual que en el resto de aplicaciones ya vistas anteriormente, si f es biyectiva, se dice isomorfismo *y si* $\widehat{M} = \widehat{M'}$, endomorfismo. *En este último caso, si además f es biyectiva, se dice* automorfismo.

Señalemos por último que, dada la semejanza ya mencionada entre espacios vectoriales y módulos, podemos generalizar al caso de isomódulos toda la teoría estudiada en la sección de isotransformaciones. Resultaría entonces una teoría totalmente análoga a la anterior, por lo que todo lo dicho acerca de isotransformaciones entre isoesopacios vectoriales puede ser a su vez aplicado al caso de isotransformaciones de isomódulos.

Capítulo 5
ISOTEORÍA DE LIE-SANTILLI: ESTRUCTURAS ISOTÓPICAS (III)

Se va a estudiar en este Capítulo el levantamiento isotópico de una nueva estructura: las álgebras. En una primera sección se tratarán las *isoálgebras* en general, siguiendo para ello el procedimiento ya utilizado en capítulos anteriores (véase **[98]**). También se estudiará el levantamiento de las subestructuras asociadas (las *isosubálgebras*). En la segunda sección se estudiará cómo se levanta isotópicamente un tipo particular de álgebras, las álgebras de Lie, dándose lugar a las *álgebras de Lie-Santilli*, pudiéndose observar entonces las mejoras que en la Teoría de Lie introduce la isoteoría de Santilli. En una tercera sección se estudiarán algunos tipos de isoálgebras isotópicas de Lie, entre ellas las *isosimples*, *isosemisimples*, *isorresolubles*, *isonilpotentes* e *isofiliformes*.

5.1. Isoálgebras

Definición 5.1.1 *Sea $(U, \circ, \bullet, \cdot)$ un álgebra con leyes internas $\circ$ y $\cdot$, y con producto externo $\bullet$ sobre un cuerpo $K(a, +, \times)$. Se denomina* isoálgebra *a toda isotopía $\widehat{U}$ de U, dotada de dos nuevas leyes de composición internas $\widehat{\circ}$ y $\widehat{\cdot}$, y con un isoproducto externo $\widehat{\bullet}$ sobre el isocuerpo $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$, verificando los axiomas de álgebra, es decir, tal que $\forall \widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{K}$, y $\forall \widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{Z} \in \widehat{U}$, se verifiquen:*

1. $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ *tiene estructura de isoespacio vectorial definido sobre el isocuerpo* $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$.
2. $(\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X})\widehat{\cdot}\widehat{Y} = \widehat{X}\widehat{\cdot}(\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{Y}) = \widehat{a}\widehat{\bullet}(\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y})$.
3. $\widehat{X}\widehat{\cdot}(\widehat{Y}\widehat{\circ}\widehat{Z}) = (\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y})\widehat{\circ}(\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Z}), \quad y \quad (\widehat{X}\widehat{\circ}\widehat{Y})\widehat{\cdot}\widehat{Z} = (\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Z})\widehat{\circ}(\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{Z})$.

En caso de que la ley $\widehat{\cdot}$ *sea conmutativa, es decir, si* $\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y} = \widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{X}$, $\forall \widehat{X}, \widehat{Y} \in \widehat{U}$, *se dirá que* $\widehat{U}$ *es un* isoálgebra isoconmutativa.

Si $\widehat{\cdot}$ *es asociativa, es decir, si* $\widehat{X}\widehat{\cdot}(\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{Z}) = (\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y})\widehat{\cdot}\widehat{Z}$, *para todos* $\widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{Z} \in \widehat{U}$, *se dirá que* $\widehat{U}$ *es un* isoálgebra isoasociativa.

Si $\widehat{X}\widehat{\cdot}(\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{Y}) = (\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y})\widehat{\cdot}\widehat{Y} \quad y \quad (\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{X})\widehat{\cdot}\widehat{Y} = \widehat{X}\widehat{\cdot}(\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y})$, *para todos* $\widehat{X}, \widehat{Y} \in \widehat{U}$, $\widehat{U}$ *se dirá* isoalternada.

Finalmente, si $\widehat{S} \in \widehat{U}$ *es el elemento unidad de* $\widehat{U}$ *respecto de la ley* $\widehat{\circ}$, *se dirá que* $\widehat{U}$ *es un* isoálgebra de isodivisión *si para todos* $\widehat{A}, \widehat{B} \in \widehat{U}$, *con* $\widehat{A} \neq \widehat{S}$, *la ecuación* $\widehat{A}\widehat{\cdot}\widehat{X} = \widehat{B}$ *tiene siempre solución.*

Veamos algunas observaciones acerca de la definición anterior. Para empezar, notemos que, de forma análoga al caso convencional, las isoálgebras son un caso particular de isoespacios vectoriales, para los cuales se define una segunda operación interna con las propiedades señaladas. Esta segunda operación interna no tiene porqué tener elemento unidad, por lo que en el caso de usar el levantamiento isotópico respecto a una isounidad y al isoproducto, la isounidad que se utilice no tiene porqué llegar a ser una isounidad de $\widehat{\cdot}$.

Por otro lado señalemos también que, de nuevo de forma análoga al caso convencional, toda isoálgebra isoasociativa es un isoálgebra isoalternada, pero no al revés en general, pues la propiedad de isoasociatividad implica la de isoalternancia de manera inmediata, pero no así de forma recíproca.

Procederemos ahora a la construcción de isoálgebras por medio del modelo dado a partir de una isounidad y del isoproducto. Debido al carácter particular de isoespacio vectorial que tienen las isoálgebras, resulta que la construcción de éstas, siguiendo el modelo citado, es totalmente análogo al de la construcción de isoespacios vectoriales, con la única excepción de que además hay que realizar el levantamiento isotópico de la segunda operación interna. Tengamos en cuenta para ello lo ya mencionado de que dicha operación no tiene porqué tener elemento unidad, ni tampoco su levantamiento isotópico correspondiente, con lo que consecuentemente no cabe hablar tampoco de elemento inverso respecto a estas operaciones. Por estos motivos, cuando en un isoálgebra se hable de la isounidad principal utilizada en su construcción, ésta se referirá a la isounidad usada en el levantamiento del isoespacio vectorial $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ (siguiendo las notaciones de la Definición 5.1.1). De esta forma queda claro que cuando se busque el levantamiento isotópico de un álgebra $(U, \circ, \bullet, \cdot)$ sobre un cuerpo $K(a, +, \times)$, lo primero que se debe hacer es levantar isotópicamente el espacio vectorial $(U, \circ, \bullet)$ a un isoespacio vectorial $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet})$ sobre un isocuerpo $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$, obteniéndose así la condición (1) de la definición. Con esto, suponiendo que se han utilizado como elementos de isotopía principales a $\widehat{I}$ y $\Box$, el conjunto isotópico $\widehat{U} = \widehat{U}_{\widehat{I}}$ queda además ya fijado.

Por todo lo anterior y aunque se podría hacer uso de una nueva isounidad y de una nueva ley (siempre que fueran compatibles con el conjunto isotópico $\widehat{U}$ ya obtenido), lo más cómodo para realizar el levantamiento del producto externo $\cdot$ será definirlo directamente con los elementos de isotopía de los que ya disponemos. Bastaría definir entonces el producto $\widehat{\cdot}$ según: $\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y} = (X\Box\widehat{I})\widehat{\cdot}(Y\Box\widehat{I}) = (X \cdot Y)\Box\widehat{I} = \widehat{X \cdot Y}$ para todos $\widehat{X}, \widehat{Y} \in \widehat{U}$. Nótese que $\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y} \in \widehat{U}$, pues al ser $\cdot$ una operación interna, $X \cdot Y \in U$.

Ahora habría que comprobar que $\widehat{U}$ con esta nueva operación $\widehat{\cdot}$ verifica el resto de condiciones exigidas en la definición para tener estructura de isoálgebra. Sin embargo, como viene siendo usual, deberemos imponer alguna propiedad a los elementos utilizados, para lograr alcanzar dichas condiciones. Vamos a probar que junto a las condiciones de la Proposición 4.1.2, bastará imponer además que $(U, \diamond, \Box, \cdot)$ tenga estructura de álgebra sobre el cuerpo $K(a, \star, *)$ y que $\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{R'} = \widehat{R'}\widehat{\cdot}\widehat{X} = \widehat{R'}$, para todo $\widehat{X} \in \widehat{U}$.

En efecto, para todo $\widehat{a} \in \widehat{K}$ y para todos $\widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{Z} \in \widehat{U}$, se tienen:

a) $(\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X})\widehat{\cdot}\widehat{Y} = ((a\Box X)\Box\widehat{I})\widehat{\cdot}\widehat{Y} = ((a\Box X) \cdot Y)\Box\widehat{I} = (X \cdot (a\Box Y))\Box\widehat{I} = \widehat{X}\widehat{\cdot}(\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{Y}) = (a\Box(X \cdot Y))\Box\widehat{I} = \widehat{a}\widehat{\bullet}((X \cdot Y)\Box\widehat{I}) = \widehat{a}\widehat{\bullet}(\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y})$.

b) $\widehat{X}\hat{\cdot}(\widehat{Y}\hat{\circ}\widehat{Z}) = \widehat{X}\hat{\cdot}((Y \diamond R' \diamond Z)\Box\widehat{I}) = (X \cdot (Y \diamond R' \diamond Z))\Box\widehat{I} = ((X \cdot Y) \diamond (X \cdot R') \diamond (X \cdot Z))\Box\widehat{I} = ((X \cdot Y)\Box\widehat{I}) \diamond ((X \cdot R')\Box\widehat{I}) \diamond ((X \cdot Z)\Box\widehat{I}) = (\widehat{X}\hat{\cdot}\widehat{Y}) \diamond (\widehat{X}\hat{\cdot}\widehat{R'}) \diamond (\widehat{X}\hat{\cdot}\widehat{Z}) = (\widehat{X}\hat{\cdot}\widehat{Y}) \diamond \widehat{R'} \diamond (\widehat{X}\hat{\cdot}\widehat{Z}) = (\widehat{X}\hat{\cdot}\widehat{Y})\hat{\circ}(\widehat{X}\hat{\cdot}\widehat{Z})$.
$(\cdot)(\widehat{X}\hat{\circ}\widehat{Y})\hat{\cdot}\widehat{Z} = ((X \diamond R' \diamond Y) \cdot Z)\Box\widehat{I} = ((X \cdot Z) \diamond (R' \cdot Z) \diamond (Y \cdot Z))\Box\widehat{I} = (\widehat{X}\hat{\cdot}\widehat{Z}) \diamond (\widehat{R'}\hat{\cdot}\widehat{Z}) \diamond (\widehat{Y}\hat{\cdot}\widehat{Z}) = (\widehat{X}\hat{\cdot}\widehat{Z}) \diamond \widehat{R'} \diamond (\widehat{Y}\hat{\cdot}\widehat{Z}) = (\widehat{X}\hat{\cdot}\widehat{Z})\hat{\circ}(\widehat{Y}\hat{\cdot}\widehat{Z})$.

Tendremos además que si U es un álgebra conmutativa, $\widehat{U}$ será una isoálgebra isoconmutativa, ya que $\widehat{X}\hat{\cdot}\widehat{Y} = (X \cdot Y)\Box\widehat{I} = (Y \cdot X)\Box\widehat{I} = \widehat{Y}\hat{\cdot}\widehat{X}$, para todos $\widehat{X}, \widehat{Y} \in \widehat{U}$.

En caso de ser U asociativa, $\widehat{U}$ será isoasociativa, pues $\widehat{X}\hat{\cdot}(\widehat{Y}\hat{\cdot}\widehat{Z}) = \widehat{X}\hat{\cdot}((Y \cdot Z)\Box\widehat{I}) = (X \cdot (Y \cdot Z))\Box\widehat{I} = ((X \cdot Y) \cdot Z)\Box\widehat{I} = ((X \cdot Y)\Box\widehat{I})\hat{\cdot}\widehat{Z} = (\widehat{X}\hat{\cdot}\widehat{Y})\hat{\cdot}\widehat{Z}$, para todos $\widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{Z} \in \widehat{U}$.

Si U es alternada, $\widehat{U}$ será isoalternada, pues se verifican $\widehat{X}\hat{\cdot}(\widehat{Y}\hat{\cdot}\widehat{Y}) = \widehat{X}\hat{\cdot}((Y \cdot Y)\Box\widehat{I}) = (X \cdot (Y \cdot Y))\Box\widehat{I} = ((X \cdot Y) \cdot Y)\Box\widehat{I} = (\widehat{X}\hat{\cdot}\widehat{Y})\hat{\cdot}\widehat{Y}$ y $(\widehat{X}\hat{\cdot}\widehat{X})\hat{\cdot}\widehat{Y} = ((X \cdot X)\Box\widehat{I})\hat{\cdot}\widehat{Y} = ((X \cdot X) \cdot Y)\widehat{I} = (X \cdot (X \cdot Y))\Box\widehat{I} = \widehat{X}\hat{\cdot}(\widehat{X}\hat{\cdot}\widehat{Y})$, para todos $\widehat{X}, \widehat{Y} \in \widehat{U}$.

Finalmente, para que $\widehat{U}$ fuese isoálgebra de isodivisión, no va a ser suficiente sólo que U sea álgebra de división, sino que además será necesario imponer que sea $\widehat{S} = \widehat{\overrightarrow{0}}$, siendo $\overrightarrow{0}$ el elemento unidad de U respecto a la operación $\circ$. De esta forma, dados $\widehat{A}, \widehat{B} \in \widehat{U}$, con $\widehat{A} \neq \widehat{\overrightarrow{0}}$, tendremos que la ecuación $\widehat{A}\hat{\cdot}\widehat{X} = \widehat{B}$ tiene siempre solución, ya que sería equivalente a $(A \cdot X)\Box\widehat{I} = B\Box\widehat{I}$, que tendría como una posible solución a un elemento $X \in U$ que verificase $A \cdot X = B$, el cual sabemos que existe al ser U un álgebra de división.

Con todo lo anterior tenemos demostrado el siguiente resultado:

Proposición 5.1.2 *Sea* $(U, \circ, \bullet, \cdot)$ *un álgebra definida sobre* $K(a, +, \times)$*. Sea* $(\widehat{U}, \hat{\circ}, \hat{\bullet})$ *un isoespacio vectorial sobre el isocuerpo* $\widehat{K}(\widehat{a}, \hat{+}, \hat{\times})$*, construido en las condiciones de la Proposición 4.1.2. Si además se verifica que* $(U, \diamond, \Box, \cdot)$ *tiene estructura de álgebra sobre el cuerpo* $K(a, \star, *)$ *y para todo* $\widehat{X} \in \widehat{U}$ *se tiene que* $\widehat{X}\hat{\cdot}\widehat{R'} = \widehat{R'}\hat{\cdot}\widehat{X} = \widehat{R'}$*, entonces el levantamiento isotópico* $(\widehat{U}, \hat{\circ}, \hat{\bullet}, \hat{\cdot})$*, correspondiente a la isotopía de elementos principales* $\widehat{I}$ *y* $\Box$ *y secundarios* $\widehat{S}$ *y* $\diamond$*, mediante el procedimiento del isoproducto, tiene estructura de isoálgebra sobre* $\widehat{K}$*. Además, dicho levantamiento conserva el tipo de álgebra inicial, es* *decir, si U es un álgebra conmutativa, asociativa o alternada, entonces $\widehat{U}$ será respectivamente un isoálgebra isoconmutativa, isoasociativa o isoalternada. Si además, $\widehat{S} = \widehat{\overrightarrow{0}}$, siendo $\overrightarrow{0}$ el elemento unidad de U respecto a $\circ$, se tiene que si U es un álgebra de división, entonces $\widehat{U}$ es un isoálgebra de isodivisión.* □

Otro aspecto importante para las isoálgebras es el de sus bases. De nuevo debido al carácter particular de las isoálgebras como isoespacios vectoriales, toda la teoría acerca de bases e isobases estudiada para estos últimos sirve para la nueva isoestructura. Tendríamos así en particular que, dado que el modelo de isotopía dado en el Ejemplo 4.1.3 sería totalmente compatible para el caso de isoálgebras, resulta que, en caso de usar tal modelo, la isotopía que se obtiene poseería también la propiedad de conservar bases, en el sentido de llevar bases en bases, de forma totalmente análoga al caso de isoespacios vectoriales.

Haciendo uso de las bases de un isoálgebra aparece también el concepto isotópico de norma (*isonorma*) y el de *algebra isonormada* (véase **[128]**):

Definición 5.1.3 *Sea $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ un isoálgebra sobre el isocuerpo $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ en las condiciones de la Proposición 5.1.2. Sea $\beta = \{\widehat{e_1}, \ldots, \widehat{e_n}\}$ una base de $\widehat{U}$ y sea $\widehat{X} \in \widehat{U}$. Si $X = \sum_{i=1}^n \widehat{x_i} \widehat{\times} \widehat{e_i}$ respecto de β, $\widehat{x_i} \in \widehat{K}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, se define la* isonorma *de $\widehat{X}$ en $\widehat{U}$, según:*

$$\widehat{|\widehat{X}|} = (\sum_{i=1}^{n} x_i \times x_i)^{1/2} * \widehat{I} = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) * \widehat{I} = |X| * \widehat{I} = |\widehat{X}| \in \widehat{U}$$

Además, el isoálgebra $\widehat{U}$ se dirá isonormada *si para todos $\widehat{X}, \widehat{Y} \in \widehat{U}$ y para todo $\widehat{a} \in \widehat{K}$, la isonorma verifica las dos siguientes condiciones:*

1. $\widehat{|\widehat{X} \widehat{\cdot} \widehat{Y}|} = \widehat{|\widehat{X}|} \widehat{\times} \widehat{|\widehat{Y}|} \in \widehat{K}$.
2. $\widehat{|\widehat{a} \widehat{\bullet} \widehat{X}|} = \widehat{|\widehat{a}|} \widehat{\times} \widehat{|\widehat{X}|}$, *donde $\widehat{|\widehat{a}|}$ representa la isonorma del elemento $\widehat{a}$ correspondiente al isocuerpo $\widehat{K}$.*

Obsérvese que si estamos trabajando con una isotopía que se encuentre bajo las condiciones de la Proposición 3.5.2, siguiendo el modelo del Ejemplo 4.1.3, es inmediato ver que si U es un álgebra normada, entonces $\widehat{U}$ es un isoálgebra isonormada, ya que $\forall \widehat{a} \in \widehat{K}$, y $\forall \widehat{X}, \widehat{Y} \in \widehat{U}$, se tienen

1. $\widehat{|}\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y}\widehat{|} = \widehat{|}(X \cdot Y)\Box\widehat{I}\widehat{|} = |\widehat{X \cdot Y}| = |\widehat{X| \times |Y}| = \widehat{|X|}\widehat{\times}\widehat{|Y|}$.
2. $\widehat{|}\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X}\widehat{|} = |\widehat{(a\Box X)}\Box\widehat{I}| = \widehat{|}\widehat{a\Box X}\widehat{|} = \widehat{|}\widehat{a \bullet X}\widehat{|} = |\widehat{a \bullet X}| = |\widehat{a| \times |X}| = \widehat{|a|}\widehat{\times}\widehat{|X|} = \widehat{|}\widehat{a}\widehat{|}\widehat{\times}\widehat{|}\widehat{X}\widehat{|}$.

Veamos a continuación algunos ejemplos de todo lo anterior. En el primero de ellos se va a probar que se puede dotar a los números isorreales de estructura de isoálgebra 1-dimensional isoconmutativa, isoasociativa (y por tanto, isoalternada), de isodivisión e isonormada.

Ejemplo 5.1.4 *Sea* $(\mathbf{R}, +, \times)$ *el cuerpo de los números reales con la suma y el producto usuales. Considerando el producto* $\times$ *como producto externo sobre el propio* $\mathbf{R}$ *podemos dotar a* $(\mathbf{R}, +, \times)$ *de estructura de espacio vectorial sobre el propio* $\mathbf{R}$. *A su vez, considerando el producto* $\times$ *como segunda operación interna, podemos dotar a* $(\mathbf{R}, +, \times, \times)$ *de estructura de álgebra sobre el propio* $\mathbf{R}$, *siendo además conmutativa, asociativa (y por tanto alternada), de división y normada, al usar las operaciones convencionales.*

Realizando ahora la isotopía del cuerpo $(\mathbf{R}, +, \times)$ *de elementos principales* $\widehat{I} \in \mathbf{R}$ *y* $* \equiv \times$ *y secundarios* $\widehat{S} = 0$ *y* $\star \equiv +$, *obtendríamos el isocuerpo* $(\widehat{\mathbf{R}}_{\widehat{I}}, +, \widehat{\times})$, *donde* $\widehat{\mathbf{R}}_{\widehat{I}} = \{a \times \widehat{I} \mid a \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$, *estando* $\widehat{\times}$ *definida según:* $\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{b} = (a \times b) \times \widehat{I}$, *para todos* $a, b \in \mathbf{R}$.

Por otro lado, tomando los elementos $\Box \equiv \times$, $\widehat{S'} = 0$ *y* $\diamond \equiv +$, *resultaría entonces que* $(\mathbf{R}, \diamond, \Box, \times) = (\mathbf{R}, +, \times, \times)$ *tiene estructura de álgebra sobre* $(\mathbf{R}, \star, *) = (\mathbf{R}, +, \times)$, *teniendo entonces* $(\mathbf{R}, \diamond, \Box)$ *estructura de espacio vectorial sobre el mismo cuerpo, y* $(\mathbf{R}, \diamond) = (\mathbf{R}, +)$ *estructura de grupo con elemento unidad* $S' = 0$, *que coincide con el elemento unidad de* $\mathbf{R}$ *respecto a* $\star$. *De esta forma,* $\widehat{R} = \widehat{S}^{-0} = 0 = 0 \times \widehat{I} = \widehat{0} = \widehat{S'}^{-0} = \widehat{R'}$. *Además, para todos* $\widehat{a}, \widehat{X} \in \widehat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$ *se tienen:*

a) $\widehat{a}\widehat{\times}\widehat{R'} = \widehat{a}\widehat{\times}\widehat{0} = (a \times 0) \times \widehat{I} = 0 \times \widehat{I} = \widehat{R'}$.

b) $\widehat{R}\widehat{\times}\widehat{a} = \widehat{0}\widehat{\times}\widehat{a} = \widehat{0} = \widehat{R}$.
c) $\widehat{X}\widehat{\times}\widehat{R'} = \widehat{X}\widehat{\times}\widehat{0} = \widehat{0} = \widehat{R'} = \widehat{0}\widehat{\times}\widehat{X} = \widehat{R'}\widehat{\times}\widehat{X}$.

Por tanto, como se tienen las hipótesis necesarias para poder aplicar la Proposición 5.1.2, se llega a que el levantamiento isotópico $(\widehat{\mathbf{R}}_{\widehat{I}}, \widehat{+}, \widehat{\times}, \widehat{\times}) = (\mathbf{R}, +, \widehat{\times}, \widehat{\times})$, *correspondiente a la isotopía de elementos los anteriormente citados, tiene estructura de isoálgebra sobre el isocuerpo* $(\mathbf{R}, +, \widehat{\times})$. *Además, dadas las características del álgebra* $(\mathbf{R}, +, \times, \times)$ *de partida, la isoálgebra obtenida es isoconmutativa e isoasociativa (y por tanto, isoalternada).*

Por otro lado, dado que $\widehat{S} = 0 = \widehat{0}$ *(siendo* 0 *el elemento unidad de* $\mathbf{R}$ *respecto a* $+$ *) y que el álgebra era de división, la isoálgebra resultante es también de isodivisión.*

También, dado que para obtener el isoespacio vectorial $(\mathbf{R}, +, \widehat{\times})$ *lo que se ha hecho es seguir el modelo de isotopía del Ejemplo 4.1.3, se tiene que por la observación indicada tras la Definición 5.1.3, y por ser el álgebra de partida un álgebra normada, la isoálgebra* $(\mathbf{R}, +, \widehat{\times}, \widehat{\times})$ *es isonormada.*

Finalmente, como la isotopía utilizada sigue el modelo del Ejemplo 4.1.3, también se tiene que nuestro levantamiento isotópico conserva bases y por tanto dimensiones, con lo que al ser el álgebra $\mathbf{R}$ *de partida* 1*-dimensional, también será de esa dimensión la isoálgebra obtenida. Más aún, como una base del álgebra inicial sería* $\beta = \{1\}$ *y teniendo en cuenta que:* $\widehat{1} = 1 * \widehat{I} = 1 \times \widehat{I} = \widehat{I}$, *llegaríamos a que una isobase asociada a* β *sería* $\widehat{\beta} = \{\widehat{I}\}$. $\lhd$

Ejemplo 5.1.5 *Consideremos el álgebra* $(M_{n\times n}(\mathbf{R}), +, \bullet, \cdot)$ *definida sobre el cuerpo* $(\mathbf{R}, +, \times)$, *de las matrices reales* $(n \times n)$*-dimensionales (con la suma y el producto usuales de matrices,* $+$ *y* $\cdot$ *y el producto habitual de una matriz por un escalar* $\bullet$. *Consideremos ahora el isoespacio vectorial* $(M_{n\times n}(\mathbf{R}), +, \widehat{\bullet})$ *sobre el isocuerpo* $(\mathbf{R}, +, \widehat{\times})$, *dado en el Ejemplo 4.1.4 (adaptados a matrices de dimensión* $(n \times n)$, *en lugar de* $(m \times n)$. *Tendremos entonces que, con las notaciones de dicho ejemplo,* $(M_{n\times n}(\mathbf{R}), \diamond, \Box, \cdot) = (M_{n\times n}(\mathbf{R}), +, \bullet, \cdot)$ *es un álgebra sobre el cuerpo* $(\mathbf{R}, \star, *) = (\mathbf{R}, +, \times)$.

Definimos ahora la operación $\widehat{\cdot}$ *según:* $\widehat{A}\widehat{\cdot}\widehat{B} = (A \cdot B)\square 2 = (A \cdot B)\bullet 2 \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$, *para todos* $A, B \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$.

Como entonces $\widehat{R'} = \widehat{S'}^{-S'} = \mathbf{0}^{-\mathbf{0}} = \mathbf{0} = \mathbf{0} \bullet 2 = \widehat{\mathbf{0}}$ *(la matriz nula* $(n\times n)$ *-dimensional), tendríamos que* $\widehat{A}\widehat{\cdot}\widehat{R'} = \widehat{A}\widehat{\cdot}\widehat{\mathbf{0}} = (A\cdot\mathbf{0})\bullet 2 = \mathbf{0}\bullet 2 = \mathbf{0} = \widehat{R'} = \widehat{R'}\widehat{\cdot}\widehat{A}$, *para todo* $\widehat{A} \in \widehat{M_{n\times n}(\mathbf{R})}_2 = M_{n\times n}(\mathbf{R})$.

Como se tienen por tanto las condiciones necesarias para poder aplicar la Proposición 5.1.2, es inmediato que el levantamiento isotópico dado por $(\widehat{M_{n\times n}(\mathbf{R})}_2, \widehat{+}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot}) = (M_{n\times n}(\mathbf{R}), +, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$, *correspondiente a la isotopía de elementos los anteriormente señalados, es un isoálgebra definida sobre el isocuerpo* $(\widehat{\mathbf{R}}_2, \widehat{+}, \widehat{\times}) = (\mathbf{R}, +, \widehat{\times})$, *que será además isoasociativa por ser asociativa el álgebra inicial.* $\triangleleft$

Se va a estudiar a continuación el levantamiento isotópico de las subestructuras asociadas a las álgebras: las subálgebras. Comenzaremos dando la definición de isosubálgebra:

Definición 5.1.6 *Sea* $(U, \circ, \bullet, \cdot)$ *un álgebra definida sobre* $K(a, +, \times)$ *y sea* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ *una isoálgebra asociada a* U, *sobre el isocuerpo* $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$. *Sea* $(W, \circ, \bullet, \cdot)$ *una subálgebra de* U. *Se dice que* $\widehat{W} \subseteq \widehat{U}$ *es una* isosubálgebra *de* $\widehat{U}$ *si, siendo una isotopía de* W, $(\widehat{W}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ *tiene estructura de subálgebra de* $\widehat{U}$, *es decir, si,* $(\widehat{W}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ *tiene estructura de isoálgebra sobre* $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ *(dado que ya tenemos que* $\widehat{W} \subseteq \widehat{U}$*).*

Pasaríamos ahora al modelo de construcción de isotopías por medio de una isounidad y del isoproducto, buscando que las leyes asociadas a la futura isosubálgebra sean las mismas que las asociadas a la isoálgebra de partida. Debemos por tanto usar los mismos elementos de isotopía que los usados para construir $\widehat{U}$, llegándose así en particular a que el conjunto isotópico asociado a la subálgebra W estará contenido en el correspondiente a U. Por su parte, para obtener que $(\widehat{W}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ tenga estructura de isoálgebra, bastará adaptar las condiciones de la Proposición 5.1.2 al conjunto W, que a su vez tiene estructura de álgebra, al ser subálgebra de U. Tendremos así, de forma análoga a la Proposición antes citada, la siguiente:

Proposición 5.1.7 *Sea* $(U, \circ, \bullet, \cdot)$ *un álgebra definida sobre el cuerpo* $K(a, +, \times)$*. Sea* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ *una isoálgebra asociada a* U*, sobre el isocuerpo* $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$*, asociado a* U*, correspondiente a la isotopía de elementos* $\widehat{I}, \widehat{S}, \widehat{S'}, *, \star, \Box$ *y* $\diamond$*, en las condiciones de la Proposición 5.1.2. En estas condiciones, si* $(W, \diamond, \Box, \cdot)$ *tiene estructura de subálgebra de* $(U, \diamond, \Box, \cdot)$ *sobre* $K(a, \star, *)$*, siendo* $(W, \diamond)$ *un grupo con elemento unidad* $S' \in W$*, entonces el levantamiento isotópico* $(\widehat{W}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$*, correspondiente a la isotopía de elementos los anteriormente citados, tiene estructura de isosubálgebra de* $\widehat{U}$*, sobre el isocuerpo* $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$*.* $\Box$

Nótese que no es necesario exigir en la Proposición anterior el resto de las hipótesis que se pedían en la Proposición 5.1.2, pues $\widehat{W}$ las heredaría de $\widehat{U}$.

Veamos a continuación un ejemplo de isosubálgebra:

Ejemplo 5.1.8 *Consideremos de nuevo el álgebra* $(M_{n\times n}(\mathbf{R}), +, \bullet, \cdot)$*, ahora sobre el cuerpo* $(\mathbf{Q}, +, \times)$ *y realicemos el levantamiento isotópico de elementos exactamente los mismos que los del Ejemplo 5.1.5. Obtendremos entonces, de esta manera, la isoálgebra* $(M_{n\times n}(\mathbf{R}), +, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ *sobre el isocuerpo* $(\mathbf{Q}, +, \widehat{\times})$*, donde los diferentes isoproductos se definen análogamente a los de dicho ejemplo.*

Consideremos ahora la subálgebra $(M_{n\times n}(\mathbf{Q}), +, \bullet, \cdot)$ *de* $M_{n\times n}(\mathbf{R})$*. Bajo las notaciones del Ejemplo 5.1.5,* $(M_{n\times n}(\mathbf{Q}), \diamond, \Box, \cdot) = (M_{n\times n}(\mathbf{Q}), +, \bullet, \cdot)$ *es una subálgebra de* $(M_{n\times n}(\mathbf{R}), \diamond, \Box, \cdot) = (M_{n\times n}(\mathbf{R}), +, \bullet, \cdot)$ *sobre* $(\mathbf{Q}, \star, *) = (\mathbf{Q}, +, \times)$*, siendo entonces* $(M_{n\times n}(\mathbf{Q}), \diamond) = (M_{n\times n}(\mathbf{Q}), +)$ *un grupo con elemento unidad* $\mathbf{0} \in M_{n\times n}(\mathbf{Q})$ *(que es el elemento unidad de* $(M_{n\times n}(\mathbf{R}), \diamond) = (M_{n\times n}(\mathbf{R}), +)$*, se tendrá por la Proposición 5.1.7, que el levantamiento isotópico* $(\widehat{M_{n\times n}}(\mathbf{Q})_2, \widehat{+}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot}) = (M_{n\times n}(\mathbf{Q}), +, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$*, correspondiente a la isotopía de elementos los anteriormente señalados, es una isosubálgebra de* $(M_{n\times n}(\mathbf{R}), +, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ *sobre* $(\mathbf{Q}, +, \widehat{\times})$*, teniéndose que* $\widehat{M_{n\times n}}(\mathbf{Q})_2 = M_{n\times n}(\mathbf{Q})$*.* $\lhd$

De forma análoga a las isoestructuras ya consideradas anteriormente, continuaremos ahora esta sección con la definición de las diversas aplicaciones existentes entre las isoálgebras:

Definición 5.1.9 *Sean* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ *y* $(\widehat{U'}, \widehat{\triangle}, \widehat{\bigtriangledown}, \widehat{\triangleright})$ *dos isoálgebras sobre un mismo isocuerpo* $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$. *Una aplicación* $f : \widehat{U} \to \widehat{U'}$ *se dice* homomorfismo *de isoálgebras si,* $\forall \widehat{X}, \widehat{Y} \in \widehat{U}$, *se verifican:*

1. *f es un homomorfismo de isoespacios vectoriales restringido a las operaciones* $\widehat{\circ}$ *y* $\widehat{\bullet}$.
2. $f(\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y}) = f(\widehat{X})\widehat{\triangleright}f(\widehat{Y})$.

Los conceptos de isomorfismo, endomorfismo *y* automorfismo *se definen de forma totalmente análoga al caso de las isoestructuras ya consideradas anteriormente.*

Finalizaremos esta sección mencionando un interesante resultado sobre la existencia de posibles isoálgebras isonormadas con isounidad isomultiplicativa en los isorreales (véase **[128]**).

Históricamente, los cuatro tipos de números que constituyen las álgebras asociativas de dimensiones respectivas 1, 2, 4 y 8 (es decir, los números reales, complejos, cuaterniones y octoniones, respectivamente), se han obtenido como las únicas soluciones de la siguiente ecuación:

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) \times (b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) = A_1^2 + A_2^2 + ... + A_n^2,$$

para un cierto $n \in \mathbf{N}$ fijo, con $A_k = \sum_{r,s=1}^{n} c_{krs} \times a_r \times b_s$, $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, siendo los elementos a_r, b_s y c_{krs} pertenecientes a un cuerpo $K(a, +, \times)$, con operaciones usuales $+$ y $\times$. Por otra parte, todas las posibles álgebras normadas con unidad multiplicativa en los números reales están dadas por álgebras de dimensión 1 (reales), 2 (complejos), 4 (cuaterniones) y 8 (octoniones).

Entonces, si reformulamos nuestro problema bajo la isotopía usual dada por una isounidad y por el isoproducto, siguiendo el modelo del Ejemplo 4.1.3, resultaría:

$$(\widehat{a_1}^{\widehat{2}}\widehat{+}\widehat{a_2}^{\widehat{2}}\widehat{+}\ldots\widehat{+}\widehat{a_n}^{\widehat{2}})\widehat{\times}(\widehat{b_1}^{\widehat{2}}\widehat{+}\widehat{b_2}^{\widehat{2}}\widehat{+}\ldots\widehat{+}\widehat{b_n}^{\widehat{2}}) = \widehat{A_1}^{\widehat{2}}\widehat{+}\widehat{A_2}^{\widehat{2}}\widehat{+}\ldots\widehat{+}\widehat{A_n}^{\widehat{2}},$$

con $\widehat{A_k} = \sum_{r,s=1}^{n} \widehat{c_{krs}} \widehat{\times} \widehat{a_r} \widehat{\times} \widehat{b_s}$, $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, con $a_r, b_s, c_{krs} \in \widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$.

Utilizando los resultados que se deducen del Ejemplo 4.1.3, resulta que, si usamos como isounidad principal a $\widehat{I} \in K$, el problema anterior es equivalente a:

$$((a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \times (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2))\widehat{I} = (A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2)\widehat{I}$$

obteniéndose entonces como posibles soluciones del mismo las provenientes del problema inicial, levantadas isotópicamente. De ello se deduce (véase **[128]**) la siguiente:

Proposición 5.1.10 *Todas las posibles isoálgebras isonormadas con isounidad isomultiplicativa sobre los isorreales son las isoálgebras de dimensión* 1 *(isorreales),* 2 *(isocomplejos),* 4 *(isocuaterniones) y* 8 *(isooctoniones).* □

5.2. Isoálgebras isotópicas de Lie

En esta sección vamos a estudiar un tipo particular de isoálgebras, que nos permitirá introducirnos ya de forma directa en la generalización de la teoría de Lie, realizada por Santilli. Se trata de las *isoálgebras isotópicas de Lie* (véase **[98]**), generalización isotópica de las denominadas álgebras de Lie, elementos básicos de la teoría convencional de Lie.

Comenzaremos con unas definiciones previas, señalando antes que, fijado un isoálgebra $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$, se denotará por $-\widehat{X} \in \widehat{U}$ al elemento inverso de $\widehat{X}$ en $\widehat{U}$ respecto a $\widehat{\circ}$, es decir, al elemento $-\widehat{X} = \widehat{X}^{-\widehat{S}}$, si $\widehat{S}$ es la isounidad de $\widehat{U}$ respecto a $\widehat{\circ}$. De igual forma, $-X \in U$ denotará el elemento inverso de X en un álgebra $(U, \circ, \bullet, \cdot)$ respecto a la operación $\circ$.

Definición 5.2.1 *Sea* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \cdot)$ *una isoálgebra definida sobre un isocuerpo* $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$. *Se dice que* $\widehat{U}$ *es* isotópica de Lie *o* Lie-isotópica *si* *verifica los axiomas de álgebra de Lie; es decir, si para todos* $\widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{K}$ *y para todos* $\widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{Z} \in \widehat{U}$*, se verifican:*

1. $\widehat{\cdot}$ *es una operación bilineal, es decir:*

   a) $((\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X})\widehat{\circ}(\widehat{b}\widehat{\bullet}\widehat{Y}))\widehat{\cdot}\widehat{Z} = (\widehat{a}\widehat{\bullet}(\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Z}))\widehat{\circ}(\widehat{b}\widehat{\bullet}(\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{Z}))$.

   b) $\widehat{X}\widehat{\cdot}((\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{Y})\widehat{\circ}(\widehat{b}\widehat{\bullet}\widehat{Z})) = (\widehat{a}\widehat{\bullet}(\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y}))\widehat{\circ}(\widehat{b}\widehat{\bullet}(\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Z}))$.

2. $\widehat{\cdot}$ *es anticonmutativo:* $\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y} = -(\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{X})$.

3. *Identidad isotópica de Jacobi (o isoidentidad de Jacobi):*

$$((\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y})\widehat{\cdot}\widehat{Z})\widehat{\circ}((\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{Z})\widehat{\cdot}\widehat{X})\widehat{\circ}((\widehat{Z}\widehat{\cdot}\widehat{X})\widehat{\cdot}\widehat{Y}) = \widehat{S}$$

   donde $\widehat{S}$ *es la isounidad de* $\widehat{U}$ *respecto a* $\widehat{\circ}$.

Definición 5.2.2 *Una isoálgebra* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ *sobre un isocuerpo* $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ *se dice* isorreal *(respectivamente* isocompleja*) según sea el isocuerpo asociado a ella. Asimismo se denomina* dimensión *de una isoálgebra isotópica de Lie* $\widehat{U}$ *a la dimensión que tiene* $\widehat{U}$ *como isoespacio vectorial.*

Definición 5.2.3 *Si* $\{\widehat{e_1}, \ldots, \widehat{e_n}\}$ *es una isobase de* $\widehat{U}$*, siendo* $\widehat{\widehat{e_i}\widehat{\cdot}\widehat{e_j}} = \sum \widehat{c_{ij}^h}\widehat{\bullet}\widehat{e_h}$*,* $\forall\ 1 \leq i, j \leq n$*, a los coeficientes* $\widehat{c_{ij}^h} \in \widehat{K}$ *se les denomina* isoconstantes de estructura *o* isoconstantes de Maurer-Cartan *de la isoálgebra.*

Definición 5.2.4 *Una isoálgebra* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ *sobre un isocuerpo* $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ *se dice* isoadmisible de Lie *si con el producto conmutador* $[.,.]_{\widehat{U}}$ *asociado a* $\widehat{\cdot}$ *(definido según:* $[\widehat{X}, \widehat{Y}]_{\widehat{U}} = (\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y}) - (\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{X})$*, para todos* $\widehat{X}, \widehat{Y} \in \widehat{U}$*),* $\widehat{U}$ *es una isoálgebra isotópica de Lie.*

Vamos a continuar nuestro estudio comparando los conceptos de isoálgebras isotópicas de Lie e isoálgebras isoadmisibles de Lie, antes definidos, con los conceptos convencionales análogos. Si estudiamos la construcción de isotopías por medio de una isounidad y del isoproducto, observamos que en general no se tiene que el levantamiento isotópico de un álgebra de Lie o de un álgebra admisible de Lie sea respectivamente una isoálgebra isotópica de Lie o bien una isoálgebra isoadmisible de Lie.

Para ver esto, empecemos fijando un álgebra $(U, \circ, \bullet, \cdot)$ definida sobre un cuerpo $K(a, +, \times)$ y una isoálgebra $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ asociada a U sobre el isocuerpo $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$, bajo una isotopía de isounidad principal $\widehat{I}$. En general, se tendrá entonces que, $(-X)\widehat{I} \neq -\widehat{X}$, con $X \in U$, pues los elementos unidades y las operaciones bajo las que se toman el elemento inverso correspondiente son distintos. De esta manera, aunque U sea de Lie, se tiene en general que $\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y} = (X \cdot Y)\widehat{I} = (-(Y \cdot X))\widehat{I} \neq -(\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{X})$, con lo que no se verificaría la anticonmutatividad necesaria para que $\widehat{U}$ fuese una isoálgebra isotópica de Lie. El mismo inconveniente se presentaría en el caso de que U fuese admisible de Lie, para que al levantarse a $\widehat{U}$, esta última fuese una isoálgebra isoadmisible de Lie. Deberíamos por tanto imponer alguna condición más en el levantamiento isotópico del álgebra U, para que se pudieran conservar los tipos de álgebras anteriores.

Una posibilidad consistiría en imponer que en el levantamiento isotópico, la operación $\widehat{\circ}$ estuviese definida según: $\widehat{X}\widehat{\circ}\widehat{Y} = (X \circ Y)\widehat{I} = \widehat{X \circ Y}$, para todos $X, Y \in U$. De esta forma, si $\overrightarrow{0} \in U$ es el elemento unidad de U respecto a $\circ$, sería $\widehat{S} = \widehat{\overrightarrow{0}} \in \widehat{U}$ el elemento unidad de $\widehat{U}$ respecto a $\widehat{\circ}$, pues dado $X \in U$, se tendría $\widehat{X}\widehat{\circ}\widehat{\overrightarrow{0}} = (X \circ \overrightarrow{0})\widehat{I} = X\widehat{I} = \widehat{X} = \widehat{\overrightarrow{0}}\widehat{\circ}\widehat{X}$. Llegaríamos así por tanto al resultado buscado de que dado $X \in U$, fuese $(-X)\widehat{I} = -\widehat{X}$, pues $\widehat{X}\widehat{\circ}((-X)\widehat{I}) = (X - X)\widehat{I} = \overrightarrow{0}\widehat{I} = \widehat{\overrightarrow{0}}$.

Vamos a probar entonces que de hecho, la condición anterior es suficiente para que si U es un álgebra de Lie, entonces $\widehat{U}$ sea una isoálgebra isotópica de Lie. Comprobaremos para ello que se verifican las condiciones de la Definición 5.2.1. Para ello, dados $\widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{K}$ y $\widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{Z} \in \widehat{U}$, se tienen

a) $((\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X})\widehat{\circ}(\widehat{b}\widehat{\bullet}\widehat{Y}))\widehat{\cdot}\widehat{Z} = ((\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X})\widehat{\cdot}\widehat{Z})\widehat{\circ}((\widehat{b}\widehat{\bullet}\widehat{Y})\widehat{\cdot}\widehat{Z}) = (\widehat{a}\widehat{\bullet}(\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Z}))\widehat{\circ}(\widehat{b}\widehat{\bullet}(\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{Z}))$.

b) $\widehat{X}\widehat{\cdot}((\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{Y})\widehat{\circ}(\widehat{b}\widehat{\bullet}\widehat{Z})) = (\widehat{X}\widehat{\cdot}(\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{Y}))\widehat{\circ}(\widehat{X}\widehat{\cdot}(\widehat{b}\widehat{\bullet}\widehat{Z})) = (\widehat{a}\widehat{\bullet}(\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y}))\widehat{\circ}(\widehat{b}\widehat{\bullet}(\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Z}))$.

c) $\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y} = (X \cdot Y)\widehat{I} = (-(Y \cdot X))\widehat{I} = -(\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{X})$.

d) $((\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y})\widehat{\cdot}\widehat{Z})\widehat{\circ}((\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{Z})\widehat{\cdot}\widehat{X})\widehat{\circ}((\widehat{Z}\widehat{\cdot}\widehat{X})\widehat{\cdot}\widehat{Y}) = ((X \cdot Y) \cdot Z) \circ ((Y \cdot Z) \cdot X) \circ ((Z \cdot X) \cdot Y)))\widehat{I} = \overrightarrow{0}\widehat{I} = \widehat{\overrightarrow{0}}$

De forma análoga, manteniendo la condición impuesta antes, si $(U, \circ, \bullet, \cdot)$ es un álgebra admisible de Lie, $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ será un álgebra isoadmisible de Lie, pues el producto conmutador vendría dado por: $[\widehat{X}, \widehat{Y}]_{\widehat{U}} = (\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y}) - (\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{X}) = (X \cdot Y - Y \cdot X)\widehat{I} = [X, Y]_U \widehat{I}$, para todos $\widehat{X}, \widehat{Y} \in \widehat{U}$, siendo $[.,.]_U$ el producto conmutador en U asociado a $\cdot$. De esta forma, como $(U, \circ, \bullet, [.,.]_U)$ sería un álgebra de Lie (por ser $(U, \circ, \bullet, \cdot)$ un álgebra de Lie admisible), se tendría que $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\cdot}, [.,.]_{\widehat{U}})$ sería una isoálgebra isotópica de Lie, pues estaríamos en las mismas condiciones de la situación que acabamos de ver. Finalmente, tendríamos por definición que $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ sería una isoálgebra isoadmisible de Lie.

Con todo lo anterior tenemos demostrada la siguiente:

Proposición 5.2.5 *Bajo las condiciones de la Proposición 5.1.2 y supuesta definida la operación $\widehat{\circ}$ del isoálgebra $\widehat{U}$ según $\widehat{X}\widehat{\circ}\widehat{Y} = (X \circ Y)\Box\widehat{I}$, para todos $X, Y \in U$, se tiene que si U es un álgebra de Lie (respectivamente, un álgebra admisible de Lie), entonces $\widehat{U}$ es una isoálgebra isotópica de Lie (respectivamente, una isoálgebra isoadmisible de Lie).* $\Box$

Por ello, a partir de ahora supondremos en todo momento que la construcción de las isoálgebras isotópicas de Lie se hará según el modelo de la Proposición anterior, pues bajo éste podemos obtener las propiedades usuales de un álgebra de Lie cualquiera, adaptadas a una isoálgebra isotópica de Lie. Así, tenemos:

Proposición 5.2.6 *Sea $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ una isoálgebra isotópica de Lie sobre un isocuerpo $\widehat{K}$, asociado a un álgebra de Lie $(U, \circ, \bullet, \cdot)$. Si $\widehat{K}$ es de isocaracterística nula, se verifican los siguientes resultados:*

1. *$\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{X} = \widehat{S}$, para todo $\widehat{X} \in \widehat{U}$, donde $\widehat{S} = \widehat{\overrightarrow{0}}$ es el elemento unidad de $\widehat{U}$ respecto a $\widehat{\circ}$.*
2. *$\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{S} = \widehat{S}\widehat{\cdot}\widehat{X} = \widehat{S}$, para todo $\widehat{X} \in \widehat{U}$.*
3. *Si los tres isovectores que forman una isoidentidad de Jacobi son iguales o proporcionales, cada sumando de la isoidentidad es nulo.*

4. Las isoconstantes de estructuras de $\widehat{U}$ *definen la isoálgebra y verifican:*

a*)* $\widehat{c_{ij}^h} = -\widehat{c_{ij}^h}$.

b*)* $\sum(\widehat{c_{ij}^r}\widehat{c_{rh}^s}\widehat{+}\widehat{c_{jh}^r}\widehat{c_{ri}^s}\widehat{+}\widehat{c_{hi}^r}\widehat{c_{rj}^s}) = \widehat{0}$, *donde* $\widehat{0}$ *es el elemento unidad de* $\widehat{K}$ *respecto a* $\widehat{+}$.

Demostración

Dada la anticonmutatividad de $\widehat{\cdot}$ se tiene que $\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{X} = -\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{X}$, para todo $\widehat{X} \in \widehat{U}$, lo cual implica la condición (1), al ser $\widehat{K}$ de isocaracterística nula.

Sea ahora $\widehat{X} \in \widehat{U}$. Entonces, al ser U álgebra de Lie, $\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{S} = (X \cdot S)\widehat{I} = S\widehat{I} = \widehat{S}$, que es la condición (2).

Para probar (3), sean $\widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{Z} \in \widehat{U}$, tales que $\widehat{Y} = \widehat{\lambda}\widehat{X}$, $\widehat{Z} = \widehat{\mu}\widehat{X}$, con $\widehat{\lambda}, \widehat{\mu} \in \widehat{K}$. Consideremos el primer sumando de la isoidentidad de Jacobi. Usando la bilinealidad de $\widehat{\cdot}$ y los resultados anteriores, se tiene que $((\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y})\widehat{\cdot}\widehat{Z}) = ((\widehat{X}\widehat{\cdot}(\widehat{\lambda}\widehat{X}))\widehat{\cdot}(\widehat{\mu}\widehat{\cdot}\widehat{X})) = (\widehat{\lambda}\widehat{\times}\widehat{\mu})\widehat{\bullet}((\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{X})\widehat{\cdot}\widehat{X}) = (\widehat{\lambda}\widehat{\times}\widehat{\mu})\widehat{\bullet}(\widehat{S}\widehat{\cdot}\widehat{X}) = (\widehat{\lambda}\widehat{\times}\widehat{\mu})\widehat{\bullet}\widehat{S} = \widehat{S}$. Para el resto de los sumandos de la isoidentidad de Jacobi, el procedimiento es análogo.

Para probar (4) veamos en primer lugar que las isoconstantes de estructura definen el isoálgebra. Para ello, dados $\widehat{X} = \sum \widehat{\lambda}_i\widehat{e}_i$, $\widehat{Y} = \sum \widehat{\mu_j}\widehat{e}_j$, dos isovectores de $\widehat{U}$, se tiene $\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y} = \sum(\widehat{\lambda}_i\widehat{\times}\widehat{\mu_j})\widehat{\bullet}(\widehat{e}_i\widehat{\cdot}\widehat{e}_j) = \sum((\widehat{\lambda}_i\widehat{\times}\widehat{\mu_j})\widehat{\times}\widehat{c_{ij}^h}\widehat{\bullet}\widehat{e}_h$.

Además, estas isoconstantes verifican:

a) $\widehat{e}_i\widehat{\cdot}\widehat{e}_j = \sum \widehat{c_{ij}^h}\widehat{e}_h = -\widehat{e}_j\widehat{\cdot}\widehat{e}_i = -\sum \widehat{c_{ji}^h}\widehat{e}_h \Rightarrow \widehat{c_{ij}^h} = -\widehat{c_{ji}^h}$, teniendo en cuenta la unicidad de escritura en una isobase de un isoespacio vectorial.

b) Según la isoidentidad de Jacobi, se tiene que

$$\widehat{S} = ((\widehat{e}_i\widehat{\cdot}\widehat{e}_j)\widehat{\cdot}\widehat{e}_h)\widehat{\circ}((\widehat{e}_j\widehat{\cdot}\widehat{e}_h)\widehat{\cdot}\widehat{e}_i)\widehat{\circ}((\widehat{e}_h\widehat{\cdot}\widehat{e}_i)\widehat{\cdot}\widehat{e}_j) =$$

$$((\sum \widehat{c_{ij}^r}\widehat{e}_r)\widehat{\cdot}\widehat{e}_h)\widehat{\circ}((\sum \widehat{c_{jh}^r}\widehat{e}_r)\widehat{\cdot}\widehat{e}_i)\widehat{\circ}((\sum \widehat{c_{hi}^r}\widehat{e}_r)\widehat{\cdot}\widehat{e}_j) =$$

$$(\sum(\widehat{c_{ij}^r}\widehat{\times}\widehat{c_{rh}^p})\widehat{\bullet}\widehat{e}_p)\widehat{\circ}(\sum(\widehat{c_{jh}^r}\widehat{\times}\widehat{c_{ri}^p})\widehat{\bullet}\widehat{e}_p)\widehat{\circ}(\sum(\widehat{c_{hi}^r}\widehat{\times}\widehat{c_{rj}^p})\widehat{\bullet}\widehat{e}_p) =$$

$$\sum((\widehat{c_{ij}^r}\widehat{\times}\widehat{c_{rh}^p})\widehat{+}(\widehat{c_{jh}^r}\widehat{\times}\widehat{c_{ri}^p})\widehat{+}(\widehat{c_{hi}^r}\widehat{\times}\widehat{c_{rj}^p}))\widehat{\bullet}\widehat{e}_p$$

lo cual implica que $(\widehat{c_{ij}^r}\widehat{\times}\widehat{c_{rh}^p})\widehat{+}(\widehat{c_{jh}^r}\widehat{\times}\widehat{c_{ri}^p})\widehat{+}(\widehat{c_{hi}^r}\widehat{\times}\widehat{c_{rj}^p}) = \widehat{0}$, $\forall p \in \{1, \ldots, n\}$, de donde se deduce el resultado. □

Nótese que como consecuencia inmediata de esta Proposición, la operación $\widehat{\cdot}$ es isodistributiva y no isoasociativa.

Con respecto al tema de las aplicaciones, aparecen también aquí los morfismos entre isoálgebras isotópicas de Lie y las isosubálgebras de éstas como casos particulares de las Definiciones 5.1.9 y 5.1.6, respectivamente. Nos detendremos algo más en el concepto de isoideal de una isoálgebra isotópica de Lie, estudiando las propiedades que debe verificar como levantamiento isotópico de un ideal de un álgebra de Lie y viendo algunos ejemplos:

Definición 5.2.7 *Sea $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ una isoálgebra isotópica de Lie sobre el isocuerpo $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$, asociado a un álgebra $(U, \circ, \bullet, \cdot)$ sobre el cuerpo $K(a, +, \times)$. Se dice que $\widehat{\Im}$ es un* isoideal *de $\widehat{U}$ si, siendo el levantamiento isotópico de un ideal $\Im$ de U, es una isosubálgebra de $\widehat{U}$ tal que para todo $\widehat{X} \in \widehat{\Im}$, $\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y} \in \widehat{\Im}$, para todo $\widehat{Y} \in \widehat{U}$, es decir, si $\widehat{\Im}\widehat{\cdot}\widehat{U} \subset \widehat{\Im}$.*

Veamos a continuación algunos ejemplos de isoideales:

Ejemplo 5.2.8 *Toda isoálgebra isotópica de Lie $\widehat{U}$, asociada a un álgebra de Lie U, es un isoideal de ella misma, pues $\widehat{U}\widehat{\cdot}\widehat{U} \subset \widehat{U}$, siendo $\widehat{U}$ isosubálgebra de $\widehat{U}$ y U ideal de U, de manera trivial.* ◁

Ejemplo 5.2.9 *Bajo las condiciones de la Proposición 5.2.6, el conjunto $\{\widehat{S}\}$, donde $\widehat{S}$ es el elemento unidad de una isoálgebra isotópica de Lie $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ respecto a $\widehat{\circ}$, es un isoideal de $\widehat{U}$.*

En efecto, en primer lugar, $\{\widehat{S}\}$ es una isosubálgebra de $\widehat{U}$, ya que según se ha visto, $\widehat{S} = \widehat{\overrightarrow{0}}$, por lo que se tiene que $(\{\widehat{S}\}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ es el levantamiento isotópico de la subálgebra (e ideal) $(\{\overrightarrow{0}\}, \circ, \bullet, \cdot)$ del álgebra de Lie $(U, \circ, \bullet, \cdot)$ a la que está asociado $\widehat{U}$. Como además $(\{\widehat{S}\}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ es de forma evidente subálgebra de $\widehat{U}$, se llega a que efectivamente es una isosubálgebra.

Falta ver ahora que $\{\widehat{S}\}\widehat{\cdot}\widehat{U} \subset \{\widehat{S}\}$, pero ello es inmediato por el resultado (2) de la Proposición 5.2.6. Con esto queda demostrado que $\{\widehat{S}\}$ es un isoideal de $\widehat{U}$. ◁

A los dos ideales anteriores, $\{\widehat{S}\}$ y $\widehat{U}$ se les llama isoideales *principales* de la isoálgebra $\widehat{U}$.

Ejemplo 5.2.10 *Un tercer ejemplo de isoideal viene dado a partir de los morfismos entre isoálgebras isotópicas de Lie. En la teoría convencional de álgebras de Lie sabemos que si $\Phi : U \to U'$ es un morfismo de álgebras de Lie entonces el núcleo de dicho morfismo es un ideal de U.*

Sin embargo, en general, si $\varphi : \widehat{U} \to \widehat{U'}$ es un morfismo de isoálgebras isotópicas de Lie, ker φ *no tiene porqué ser un isoideal de $\widehat{U}$ (aunque sí será un ideal de $\widehat{U}$, considerando la estructura de álgebra de éste último). Esto se debe a que puede fallar la condición que viene siendo habitual en estos casos, esto es, que aunque* ker φ *sea un ideal, no tiene porqué ser el levantamiento isotópico de un ideal de una determinada álgebra de Lie.*

No obstante, vamos a probar que con las restricciones oportunas, sí se logra que ker φ *sea un isoideal. Para ello bastará restringirnos a las condiciones de la Proposición 5.2.5. Así, si tenemos dos isoálgebras isotópicas de Lie, $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ y $(\widehat{U'}, \widehat{\triangle}, \widehat{\bigtriangledown}, \widehat{\triangleright})$, asociadas a las álgebras de Lie $(\widehat{U}, \circ, \bullet, \cdot)$ y $(U', \triangle, \bigtriangledown, \triangleright)$, respectivamente y $\Phi : U \to U'$ un morfismo de álgebras de Lie, podremos entonces definir $\widehat{\Phi} : \widehat{U} \to \widehat{U'}$ según: $\widehat{\Phi}(\widehat{X}) = \widehat{\Phi(X)}$, para todo $\widehat{X} \in \widehat{U}$. Entonces, si $\widehat{S'} = \widehat{\overrightarrow{0}}'$ es el elemento unidad de $\widehat{U'}$ respecto a $\widehat{\triangle}$, tendremos que $\widehat{\Phi}(\widehat{X}) = \widehat{S'} \Leftrightarrow \widehat{\Phi(X)} = \widehat{S'} = \widehat{\overrightarrow{0}}' \Leftrightarrow X \in \ker \Phi \Leftrightarrow \widehat{X} \in \widehat{\ker \Phi}$. Por tanto, bajo las condiciones de la Proposición 5.2.5 se verifica que $\ker \widehat{\Phi} = \widehat{\ker \Phi}$ y de esta forma, $\ker \widehat{\Phi}$ es una isotopía de un ideal del álgebra de Lie U. Como además tiene estructura de ideal de $\widehat{U}$, considerando $\widehat{\Phi}$ como morfismo entre álgebras de Lie, llegamos a que $\ker \widehat{\Phi}$ es un isoideal de $\widehat{U}$, como queríamos probar.* $\triangleleft$

Para ver un cuarto ejemplo de isoideal de isoálgebra isotópica de Lie damos antes la siguiente definición:

Definición 5.2.11 *Se denomina* centro *de un isoálgebra isotópica de Lie $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ al conjunto de isovectores $\widehat{X} \in \widehat{U}$, tales que $\widehat{X} \widehat{\cdot} \widehat{Y} = \widehat{S}$,* *para todo* $\widehat{Y} \in \widehat{U}$, *donde* $\widehat{S}$ *es el elemento unidad de* $\widehat{U}$ *respecto a* $\widehat{\circ}$. *En lo que sigue, el centro se notará por* $cen\widehat{U}$.

Ejemplo 5.2.12 *Se tiene que cen* $\widehat{U}$ *es un ideal de* $\widehat{U}$, *considerando este último con la estructura de álgebra. Sin embargo, para que sea un isoideal hace falta que fuese el levantamiento isotópico de un ideal de una determinada álgebra de Lie.*

No obstante, el modelo que venimos utilizando hasta ahora, basado en las hipótesis de la Proposición 5.2.5 va a resolver nuevamente este problema. En efecto, si $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ *es una isoálgebra asociada al álgebra de Lie* $(U, \circ, \bullet, \cdot)$ *bajo dichas hipótesis, siendo* $cenU$ *el centro del álgebra de Lie* U, *entonces* $\widehat{X} \in cen\widehat{U} \Leftrightarrow \widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y} = \widehat{X \cdot Y} = \widehat{S} = \widehat{\overrightarrow{0}}$, *para todo* $\widehat{Y} \in \widehat{U} \Leftrightarrow X \cdot Y = \overrightarrow{0}$, *para todo* $Y \in U \Leftrightarrow X \in cenU$. *Por tanto,* $cen\widehat{U} = \widehat{cenU}$, *de donde se deduce que* $cen\widehat{U}$ *es el levantamiento isotópico de un ideal de un álgebra de Lie, lo que implica a su vez que* $cen\widehat{U}$ *es un isoideal de* $\widehat{U}$. $\triangleleft$

Podemos recoger todos los ejemplos anteriores en la siguiente:

Proposición 5.2.13 *Bajo las hipótesis de la Proposición 5.2.5, si tenemos una isoálgebra* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ *asociada al álgebra de Lie* $(U, \circ, \bullet, \cdot)$, *entonces los siguientes conjuntos:* $\widehat{U}$, $\{\widehat{S}\}$, *y* $cen\widehat{U}$ *son isoideales de* $\widehat{U}$. *Además, si* $\widehat{\Phi} : \widehat{U} \to \widehat{U'}$ *es un morfismo de isoálgebras asociado a un morfismo* $\Phi : U \to U'$, *de álgebras de Lie, entonces* $\ker\widehat{\Phi}$ *es un isoideal de* $\widehat{U}$. $\square$

Sin embargo, un resultado más general vendrá dado en la siguiente:

Proposición 5.2.14 *En las hipótesis de la Proposición 5.1.7, dada una isoálgebra isotópica de Lie* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$, *asociada a un álgebra de Lie* $(U, \circ, \bullet, \cdot)$ *y dado* $\Im$ *ideal de* U, *entonces el correspondiente levantamiento isotópico* $\widehat{\Im}$ *es un isoideal de* $\widehat{U}$.

Demostración

Por ser $\Im$ ideal de U, será en particular una subálgebra de U y por tanto, al verificarse las hipótesis de la Proposición 5.1.7, tenemos que

$\widehat{\Im}$ es una isosubálgebra de $\widehat{U}$. Además por construcción, dado $\widehat{X} \in \widehat{\Im}$, tendremos que $\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y} = \widehat{X \cdot Y}$, para todo $\widehat{Y} \in \widehat{U}$. Entonces $X \in \Im$ e $Y \in U$, y por ser $\Im$ ideal de U, tendremos que $X \cdot Y \in \Im$, de donde $\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y} = \widehat{X \cdot Y} \in \widehat{\Im}$, que es la condición que faltaba para que $\widehat{\Im}$ fuese un isoideal de $\widehat{U}$, ya que $\widehat{X}$ era un isovector arbitrario de $\widehat{\Im}$. □

A continuación veremos cómo obtener nuevos isoideales a partir de unos dados. Para ello damos antes la siguiente:

Definición 5.2.15 *Sean* $(\widehat{U_1}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ *y* $(\widehat{U_2}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ *dos isoálgebras isotópicas de Lie. Se denomina* suma de ambas *al conjunto* $\{\widehat{X} = \widehat{X_1}\widehat{\circ}\widehat{X_2} \mid \widehat{X_1} \in \widehat{U_1}$ *y* $\widehat{X_2} \in \widehat{U_2}\}$.

Se dice que la suma es directa *si* $\widehat{U_1} \cap \widehat{U_2} = \{\widehat{S}\}$ *y* $\widehat{U_1}\widehat{\cdot}\widehat{U_2} = \widehat{S}$. *Al conjunto de isovectores de la suma directa se le denotará por* $\widehat{U_1} \oplus \widehat{U_2}$.

Nótese que la escritura en una suma directa de isoálgebras isotópicas de Lie es única, pues si $\widehat{X} \in \widehat{U_1} \oplus \widehat{U_2}$ es tal que $\widehat{X} = \widehat{X_1}\widehat{\circ}\widehat{X_2} = \widehat{Y_1}\widehat{\circ}\widehat{Y_2}$, con $\widehat{X_1}, \widehat{Y_1} \in \widehat{U_1}$ y $\widehat{X_2}, \widehat{Y_2} \in \widehat{U_2}$, entonces $\widehat{X_1} - \widehat{Y_1} = \widehat{Y_2} - \widehat{X_2}$, con $\widehat{X_1} - \widehat{Y_1} \in \widehat{U_1}$ e $\widehat{Y_2} - \widehat{X_2} \in \widehat{U_2}$. Como $\widehat{U_1} \cap \widehat{U_2} = \{\widehat{S}\}$, serán $\widehat{X_1} = \widehat{Y_1}$ e $\widehat{Y_2} = \widehat{X_2}$, lo que demuestra que la escritura es única.

Se verifica además la siguiente:

Proposición 5.2.16 *Sea* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ *una isoálgebra isotópica de Lie. Dados dos isoideales* $\widehat{\Im_1}$ *y* $\widehat{\Im_2}$ *de* $\widehat{U}$, *se verifican:*

1. $\widehat{\Im_1} \cap \widehat{\Im_2}$ *es isoideal de* $\widehat{U}$.
2. *Además, bajo las hipótesis de la Proposición 5.2.5, se verifican*
   a) $\widehat{\Im_1}\widehat{\circ}\widehat{\Im_2}$ *es isoideal de* $\widehat{U}$.
   b) $\widehat{\Im_1}\widehat{\cdot}\widehat{\Im_2}$ *es isoideal de* $\widehat{U}$.

Demostración

A partir de la teoría convencional de Lie sabemos que dando a $\widehat{U}$ estructura de álgebra de Lie y a $\widehat{\Im_1}, \widehat{\Im_2}$ estructuras de ideales de $\widehat{U}$, entonces, $\widehat{\Im_1} \cap \widehat{\Im_2}$, $\widehat{\Im_1}\widehat{\circ}\widehat{\Im_2}$, $\widehat{\Im_1}\widehat{\cdot}\widehat{\Im_2}$ son ideales de $\widehat{U}$.

Faltaría entonces ver que son levantamientos isotópicos de ideales de una determinada álgebra de Lie. Supongamos para ello que $\widehat{\Im_j}$ es el levantamiento isotópico de $\Im_j$, ideal de un álgebra de Lie U, que será el asociado a $\widehat{U}$, para $j = 1,2$. Sea $\widehat{X} \in \widehat{\Im_1} \cap \widehat{\Im_2}$. Entonces, $\widehat{X} \in \widehat{\Im_j}$ $(j = 1,2) \Leftrightarrow X \in \Im_j (j = 1,2) \Leftrightarrow X \in \Im_1 \cap \Im_2$. Por tanto, $\widehat{\Im_1} \cap \widehat{\Im_2} = \widehat{\Im_1 \cap \Im_2}$. Como además estamos bajo las hipótesis de la Proposición 5.2.5, tendremos que por un lado, $\widehat{\Im_1} \widehat{\circ} \widehat{\Im_2} = \widehat{\Im_1 \circ \Im_2}$ y por otro, $\widehat{\Im_1} \widehat{\cdot} \widehat{\Im_2} = \widehat{\Im_1 \cdot \Im_2}$, de donde se prueba que en los tres casos tenemos levantamientos isotópicos, y por tanto se obtienen nuevos isoideales. $\square$

Nótese que para demostrar la última condición sólo se han necesitado las hipótesis de la Proposición 5.1.2, pues de hecho la Proposición 5.2.5 mejora las hipótesis sobre la operación $\widehat{\circ}$, mientras que la primera Proposición sólo mejora $\widehat{\cdot}$.

Terminaremos esta sección con el levantamiento isotópico de las álgebras derivadas de un álgebra de Lie $(U, \circ, \bullet, \cdot)$, esto es, con la generalización isotópica del conjunto $U \cdot U$. Como viene siendo habitual, dada una isoálgebra isotópica de Lie podemos considerar su estructura de álgebra de Lie y así trabajar con el álgebra $\widehat{U} \widehat{\cdot} \widehat{U}$, derivada de $\widehat{U}$. Ahora bien, restringiéndonos al modelo de construcción de la Proposición 5.1.2, considerando que $\widehat{U}$ es el levantamiento isotópico del álgebra de Lie $(U, \circ, \bullet, \cdot)$, tendremos que $\widehat{U} \widehat{\cdot} \widehat{U} = \widehat{U \cdot U}$, y por tanto, el álgebra derivada de $\widehat{U}$ es a su vez una isoálgebra, por ser el levantamiento isotópico de un álgebra (que es el álgebra derivada de U). Podemos hablar entonces de la *isoálgebra derivada* de $\widehat{U}$. Se tendrá además que la isoálgebra derivada de $\widehat{U}$ es un isoideal de $\widehat{U}$, pues es el levantamiento isotópico del álgebra derivada de U, que a su vez es ideal de U.

Por otra parte nos interesará también estudiar, de forma análoga al caso convencional, cuándo se verifica que $\widehat{U} \widehat{\cdot} \widehat{U} = \widehat{S}$. Para ello damos previamente la siguiente:

Definición 5.2.17 *Se dice que un isoideal $\widehat{\Im}$ de una isoálgebra isotópica de Lie $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$, es* isoconmutativo *si $\widehat{X} \widehat{\cdot} \widehat{Y} = \widehat{S}$, para todo $\widehat{X} \in \widehat{\Im}$ y para todo $\widehat{Y} \in \widehat{U}$. A su vez, una isoálgebra isotópica de Lie se dirá* isoconmutativa *si considerada como isoideal es isoconmutativa.*

Se verifican entonces los siguientes resultados:

Proposición 5.2.18 *Una isoálgebra isotópica de Lie es isoconmutativa si y sólo si su isoálgebra derivada es nula.*

Demostración

Sea $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ una isoálgebra isotópica de Lie. Entonces $\widehat{U}$ es isoconmutativa $\Leftrightarrow \widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y} = \widehat{S}$, $\forall \widehat{X}, \widehat{Y} \in \widehat{U} \Leftrightarrow \widehat{U}\widehat{\cdot}\widehat{U} = \widehat{S}$. □

Proposición 5.2.19 *Bajo las hipótesis de la Proposición 5.2.5, una isoálgebra* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ *asociada a un álgebra de Lie* $(U, \circ, \bullet, \cdot)$ *es isoconmutativa si y sólo si* U *es conmutativa.*

Demostración

Bajo las condiciones de la Proposición 5.2.5, sabemos que dados $\widehat{X}, \widehat{Y} \in \widehat{U}$, entonces $\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y} = \widehat{X \cdot Y} = \widehat{S} = \widehat{\overrightarrow{0}} \Leftrightarrow X \cdot Y = \overrightarrow{0}$. Por tanto, como $\widehat{X}, \widehat{Y}$ son isovectores arbitrarios en U, se tiene que $\widehat{U}$ es isoconmutativa $\Leftrightarrow U$ es conmutativa. □

5.3. Tipos de isoálgebras isotópicas de Lie

Daremos en esta sección algunos ejemplos de isoálgebras isotópicas de Lie. Comenzaremos estudiando las *álgebras de Lie-Santilli* (véase **[98]** y **[174]**) y seguiremos con el estudio de algunos tipos de isoálgebras isotópicas de Lie, entre ellas las *isosimples*, *isosemisimples*, *isorresolubles*, *isonilpotentes* e *isofiliformes*.

5.3.1. Álgebras de Lie-Santilli

Definición 5.3.1 *Sea* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ *una isoálgebra isoasociativa sobre un isocuerpo* $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$. *Se denomina* producto corchete de Lie-Santilli *respecto a* $\widehat{\cdot}$, *y se representa por* $[.,.]_S$, *a la operación producto conmutador en* $\widehat{U}$ *asociado a* $\widehat{\cdot}$, *es decir, a la operación definida según:*

$[\widehat{X},\widehat{Y}]_S = (\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y}) - (\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{X})$, *para todos* $\widehat{X},\widehat{Y} \in \widehat{U}$. *A la isoálgebra* $(\widehat{U},\widehat{\circ},\widehat{\bullet},[.,.]_S)$ *se le denomina entonces* álgebra de Lie-Santilli.

Vamos a comprobar a continuación que el nombre dado en esta definición a la isoálgebra $(\widehat{U},\widehat{\circ},\widehat{\bullet},[.,.]_S)$ no es arbitrario. Para ello, comenzamos observando que $(\widehat{U},\widehat{\circ},\widehat{\bullet})$ es un espacio vectorial sobre $\widehat{K}(\widehat{a},\widehat{+},\widehat{\times})$, por ser $(\widehat{U},\widehat{\circ},\widehat{\bullet},\widehat{\cdot})$ una isoálgebra sobre dicho cuerpo. Además, para todos $\widehat{a} \in \widehat{K}$ y $\widehat{X},\widehat{Y},\widehat{Z} \in \widehat{U}$, se tienen

a) $[\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X},\widehat{Y}]_S = ((\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X})\widehat{\cdot}\widehat{Y}) - (\widehat{Y}\widehat{\cdot}(\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X})) = (\widehat{X}\widehat{\cdot}(\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{Y})) - ((\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{Y})\widehat{\cdot}\widehat{X}) = [\widehat{X},\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{Y}]_S = (\widehat{a}\widehat{\bullet}(\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y})) - (\widehat{a}\widehat{\bullet}(\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{X})) = \widehat{a}\widehat{\bullet}((\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y}) - (\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{X})) = \widehat{a}\widehat{\bullet}[\widehat{X},\widehat{Y}]_S$.

b) $[\widehat{X},\widehat{Y}\widehat{\circ}\widehat{Z}]_S = (\widehat{X}\widehat{\cdot}(\widehat{Y}\widehat{\circ}\widehat{Z})) - ((\widehat{Y}\widehat{\circ}\widehat{Z})\widehat{\cdot}\widehat{X}) = ((\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y})\widehat{\circ}(\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Z})) - ((\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{X})\widehat{\circ}(\widehat{Z}\widehat{\cdot}\widehat{X})) = (\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y})\widehat{\circ}(\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Z}) - (\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{X}) - (\widehat{Z}\widehat{\cdot}\widehat{X}) = ((\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y}) - (\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{X}))\widehat{\circ}((\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Z}) - (\widehat{Z}\widehat{\cdot}\widehat{X})) = [\widehat{X},\widehat{Y}]_S\widehat{\circ}[\widehat{X},\widehat{Z}]_S$.

c) $[\widehat{X}\widehat{\circ}\widehat{Y},\widehat{Z}]_S = ((\widehat{X}\widehat{\circ}\widehat{Y})\widehat{\cdot}\widehat{Z}) - (\widehat{Z}\widehat{\cdot}(\widehat{X}\widehat{\circ}\widehat{Y})) = ((\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Z})\widehat{\circ}(\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{Z})) - ((\widehat{Z}\widehat{\cdot}\widehat{X})\widehat{\circ}(\widehat{Z}\widehat{\cdot}\widehat{Y})) = (\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Z})\widehat{\circ}(\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{Z}) - (\widehat{Z}\widehat{\cdot}\widehat{X}) - (\widehat{Z}\widehat{\cdot}\widehat{Y}) = ((\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Z}) - (\widehat{Z}\widehat{\cdot}\widehat{X}))\widehat{\circ}((\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{Z}) - (\widehat{Z}\widehat{\cdot}\widehat{Y})) = [\widehat{X},\widehat{Z}]_S\widehat{\circ}[\widehat{Y},\widehat{Z}]_S$,

y por tanto, $(\widehat{U},\widehat{\circ},\widehat{\bullet},[.,.]_S)$ es un álgebra sobre $\widehat{K}(\widehat{a},\widehat{+},\widehat{\times})$. Además es un álgebra de Lie, pues para todos $\widehat{a},\widehat{b} \in \widehat{K}$ y $\widehat{X},\widehat{Y},\widehat{Z} \in \widehat{U}$, se verifican

d) $[(\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X})\widehat{\circ}(\widehat{b}\widehat{\bullet}\widehat{Y}),\widehat{Z}]_S = [\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{X},\widehat{Z}]_S\widehat{\circ}[\widehat{b}\widehat{\bullet}\widehat{Y},\widehat{Z}]_S = (\widehat{a}\widehat{\bullet}[\widehat{X},\widehat{Z}]_S)\widehat{\circ}(\widehat{b}\widehat{\bullet}[\widehat{Y},\widehat{Z}]_S)$.

e) $[\widehat{X},(\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{Y})\widehat{\circ}(\widehat{b}\widehat{\bullet}\widehat{Z})]_S = [\widehat{X},\widehat{a}\widehat{\bullet}\widehat{Y}]_S\widehat{\circ}[\widehat{X},\widehat{b}\widehat{\bullet}\widehat{Z}]_S = (\widehat{a}\widehat{\bullet}[\widehat{X},\widehat{Y}]_S)\widehat{\circ}(\widehat{b}\widehat{\bullet}[\widehat{X},\widehat{Z}]_S)$.

f) $[\widehat{X},\widehat{Y}]_S = (\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y}) - (\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{X}) = -((\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{X}) - (\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y})) = -[\widehat{Y},\widehat{X}]_S$.

g) Isoidentidad de Jacobi:

$$[[\widehat{X},\widehat{Y}]_S,\widehat{Z}]_S\widehat{\circ}[[\widehat{Y},\widehat{Z}]_S,\widehat{X}]_S\widehat{\circ}[[\widehat{Z},\widehat{X}]_S,\widehat{Y}]_S = [(\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y}) - (\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{X}),\widehat{Z}]_S\widehat{\circ}$$

$$[(\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{Z}) - (\widehat{Z}\widehat{\cdot}\widehat{Y}),\widehat{X}]_S\widehat{\circ}[(\widehat{Z}\widehat{\cdot}\widehat{X}) - (\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Z}),\widehat{Y}]_S = (((\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y}) -$$

$$(\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{X}))\widehat{\cdot}\widehat{Z}) - (\widehat{Z}\widehat{\cdot}((\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y}) - (\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{X})))\widehat{\circ}(((\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{Z}) - (\widehat{Z}\widehat{\cdot}\widehat{Y}))\widehat{\cdot}\widehat{X}) -$$

$$(\widehat{X}\widehat{\cdot}((\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{Z}) - (\widehat{Z}\widehat{\cdot}\widehat{Y})))\widehat{\circ}(((\widehat{Z}\widehat{\cdot}\widehat{X}) - (\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Z}))\widehat{\cdot}\widehat{Y}) - (\widehat{Y}\widehat{\cdot}((\widehat{Z}\widehat{\cdot}\widehat{X}) - (\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Z}))) =$$

$$(\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{Z}) - (\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Z}) - (\widehat{Z}\widehat{\cdot}\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y})\widehat{\circ}(\widehat{Z}\widehat{\cdot}\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{X})\widehat{\circ}(\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{Z}\widehat{\cdot}\widehat{X}) - (\widehat{Z}\widehat{\cdot}\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{X}) -$$

$$(\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{Z})\widehat{\circ}(\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Z}\widehat{\cdot}\widehat{Y})\widehat{\circ}(\widehat{Z}\widehat{\cdot}\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y}) - (\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Z}\widehat{\cdot}\widehat{Y}) - (\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{Z}\widehat{\cdot}\widehat{X})\widehat{\circ}(\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Z}) = \widehat{S}$$

siendo $\widehat{S}$ el elemento unidad de $\widehat{U}$ respecto a $\widehat{\circ}$).

Sin embargo, lo que no puede asegurarse en principio es que $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, [.,.]_S)$ sea isotópica de Lie, pues de hecho no sabemos ni siquiera si es isoálgebra, ya que para ello $[.,.]_S$ debería ser el levantamiento isotópico de la segunda operación interna de un álgebra U. No obstante, esto puede solucionarse restringiéndonos a las condiciones de la Proposición 5.2.5, que en particular eliminaban los problemas referentes a los elementos inversos respecto a las primeras operaciones de un álgebra y de una isoálgebra asociada. Bajo dichas condiciones además, si $[.,.]$ representa al producto corchete de Lie respecto a $\cdot$ en el álgebra U (definido según: $[X,Y] = (X \cdot Y) - (Y \cdot X)$, para todos $X, Y \in U$ y coincidente por tanto con el producto conmutador asociado a $\cdot$), se tiene entonces que el producto corchete de Lie-Santilli queda definido según: $[\widehat{X}, \widehat{Y}]_S = (\widehat{X} \widehat{\cdot} \widehat{Y}) - (\widehat{Y} \widehat{\cdot} \widehat{X}) = ((X \cdot Y) - (Y \cdot X)) \square \widehat{I} = [X,Y] \square \widehat{I} = \widehat{[X,Y]}$, para todos $\widehat{X}, \widehat{Y} \in \widehat{U}$.

Por tanto, se tendría así que el producto corchete de Lie-Santilli no es más que el levantamiento isotópico por el modelo del isoproducto, del producto corchete de Lie. Si se impone además que $(U, \circ, \bullet, \cdot)$ sea un álgebra asociativa, se tiene, de forma análoga al caso isotópico que acabamos de ver, que $(U, \circ, \bullet, [.,.])$ es un álgebra de Lie. (Convencionalmente, a U dotado de esta nueva operación interna se le representa por U^- y se le llama *álgebra conmutadora* del álgebra asociativa U). Por otra parte, en caso de que U sea un álgebra admisible de Lie, también se llegaría, por propia definición de admisibilidad de Lie, a que $(U, \circ, \bullet, [.,.])$ es un álgebra de Lie.

Por tanto, en cualquiera de los dos casos anteriores, se llegaría finalmente a que $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, [.,.]_S)$ es una isoálgebra sobre el isocuerpo $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$, correspondiente al levantamiento isotópico del álgebra $(U, \circ, \bullet, [.,.])$ sobre el cuerpo $K(a, +, \times)$, bajo una isotopía en las condiciones de la Proposición 5.2.5. Como además también se verifican las condiciones necesarias para ser isoálgebra isotópica de Lie (al verificarse los axiomas de la Definición 5.2.1 por ser álgebra de Lie), se ha probado finalmente el siguiente resultado:

Proposición 5.3.2 *Sea* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ *una isoálgebra isoasociativa sobre un isocuerpo* $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$, *asociada a un álgebra* $(U, \circ, \bullet, \cdot)$ *definida sobre el cuerpo* $K(a, +, \times)$, *bajo las condiciones de la Proposición 5.2.5. Entonces, el álgebra de Lie-Santilli* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, [.,.]_S)$, *correspondiente a la isoálgebra anterior, es una isoálgebra isotópica de Lie si el álgebra* U *es o bien asociativa o bien admisible de Lie. En este caso, el álgebra de Lie-Santilli será un levantamiento isotópico asociado al álgebra de Lie* $(U, \circ, \bullet, [.,.])$. □

Nótese también que bajo las condiciones de la Proposición 5.2.5, si U es una álgebra conmutativa y $\overrightarrow{0}$ es el elemento unidad de U respecto a $\circ$, entonces el producto corchete de Lie-Santilli es constante e igual a $\widehat{\overrightarrow{0}}$, ya que, para todos $X, Y \in U$, se tiene que $[\widehat{X}, \widehat{Y}]_S = ((X \cdot Y) - (Y \cdot X))\Box\widehat{I} = ((X \cdot Y) - (X \cdot Y))\Box\widehat{I} = \overrightarrow{0}\Box\widehat{I} = \widehat{\overrightarrow{0}}$. Se corrobora así entonces que $\widehat{U}$ sería una isoálgebra isoconmutativa (como indica la Proposición 5.1.2, bajo cuyas condiciones nos encontramos), pues, para todos $X, Y \in U$, se tendría que $[\widehat{X}, \widehat{Y}]_S = \widehat{\overrightarrow{0}} = ((Y \cdot X) - (Y \cdot X))\Box\widehat{I} = ((Y \cdot X) - (X \cdot Y))\Box\widehat{I} = [\widehat{Y}, \widehat{X}]_S$.

Por otro lado, si bajo las condiciones de la Proposición 5.3.2, se sigue el modelo de isotopía dado en el Ejemplo 4.1.3, cabe destacar que el levantamiento isotópico $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, [.,.]_S)$ conserva las constantes de estructura del álgebra $(U, \circ, \bullet, [.,.])$ (véase **[174]**), en el siguiente sentido: como ese modelo de isotopía conserva los sistemas de generadores, pues de hecho conserva bases, si $\{X_k\}_{k=1,\ldots,n}$ es un sistema generador de U, entonces $\{\widehat{X_k} = X_k\Box\widehat{I}\}_{k=1,\ldots,n}$ será un sistema generador de $\widehat{U}$. Entonces, fijados dos de esos generadores, $X_i, X_j \in U$, tales que $[X_i, X_j] = (c_{i,j}^1 \bullet X_1) \circ \ldots \circ (c_{i,j}^n \bullet X_n)$, con $c_{i,j}^k \in K$, para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que $[\widehat{X_i}, \widehat{X_j}]_S = [X_i, X_j]\Box\widehat{I} = ((c_{ij}^1 \bullet X_1) \circ \ldots \circ (c_{ij}^n \bullet X_n))\Box\widehat{I} = (\widehat{c_{ij}^1}\widehat{\bullet}\widehat{X_1})\widehat{\circ}\ldots\widehat{\circ}(\widehat{c_{ij}^n}\widehat{\bullet}\widehat{X_n}) = (c_{ij}^1 \bullet X_1) \widehat{\circ \ldots \circ} (c_{ij}^n \bullet X_n)$. Por tanto, si $\{c_{i,j}^k\}_{k=1,\ldots,n}$ son las constantes de estructura asociadas a los generadores X_i y X_j de U, entonces las isoconstantes de estructura asociadas a los generadores $\widehat{X_i}$ y $\widehat{X_j}$ de $\widehat{U}$, son $\{\widehat{c_{i,j}^k} = c_{i,j}^k * \widehat{I}\}_{k=1,\ldots,n}$.

Veamos a continuación un ejemplo de álgebra de Lie-Santilli:

Ejemplo 5.3.3 *Consideremos el álgebra* $(M_{n\times n}(\mathbf{R}), +, \bullet, \cdot)$ *definida sobre el cuerpo* $(\mathbf{R}, +, \times)$ *y el isoálgebra* $(M_{n\times n}(\mathbf{R}), +, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ *definida sobre el isocuerpo* $(\mathbf{R}, +, \times)$*, dados en el Ejemplo 5.1.5. Como la isotopía seguida es la dada en ese ejemplo, que verifica las hipótesis de la Proposición 5.1.2, estando además el levantamiento* $\widehat{+} \equiv +$ *definido según:* $\widehat{A}\widehat{+}\widehat{B} = (A + B) \bullet 2$*, para todos* $A, B \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$*, nos encontramos en las condiciones de la Proposición 5.2.5.*

Como además el álgebra $(M_{n\times n}(\mathbf{R}), +, \bullet, \cdot)$ *es asociativa, se tiene por la Proposición 5.1.2 que la isoálgebra* $(M_{n\times n}(\mathbf{R}), +, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ *es isoasociativo, y por tanto,* $(M_{n\times n}(\mathbf{R}), +, \widehat{\bullet}, [.,.]_S)$ *es un álgebra de Lie-Santilli, estando definido el producto corchete de Lie-Santilli según:* $[\widehat{A}, \widehat{B}]_S = (\widehat{A}\widehat{\cdot}\widehat{B}) - (\widehat{B}\widehat{\cdot}\widehat{A}) = ((A \cdot B) - (B \cdot A)) \bullet 2$*, para todos* $A, B \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$.

Además, por ser $(M_{n\times n}(\mathbf{R}), +, \bullet, \cdot)$ *asociativa, la Proposición 5.3.2 asegura que* $(M_{n\times n}(\mathbf{R}), +, \widehat{\bullet}, [.,.]_S)$ *es una isoálgebra isotópica de Lie sobre* $(\mathbf{R}, +, \widehat{\times})$ *(asociada al álgebra conmutadora* $(M_{n\times n}(\mathbf{R}), +, \bullet, [.,.])$*, donde* $[.,.]$ *denota el producto corchete de Lie respecto a la operación* $\cdot$*).* $\triangleleft$

5.3.2. Isoálgebras isotópicas de Lie isosimples e isosemisimples

Se va a estudiar a continuación el levantamiento isotópico de las álgebras de Lie simples y semisimples. Comenzamos con unas definiciones previas:

Definición 5.3.4 *Un isoálgebra isotópica de Lie* $\widehat{U}$ *se dice* isosimple *si siendo una isotopía de un álgebra de Lie simple, verifica además que no es isoconmutativa y que los únicos isoideales que contiene son los triviales. Análogamente,* $\widehat{U}$ *se dice* isosemisimple *si siendo una isotopía de un álgebra de Lie semisimple, no contiene isoideales isoconmutativos no triviales.*

A partir de la definición anterior y dado que toda álgebra de Lie semisimple es un álgebra de Lie simple, tendremos que toda isoálgebra isotópica de Lie isosemisimple es una isoálgebra isotópica de Lie isosimple. Además se tiene que si $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ es un isoálgebra isotópica de Lie isosimple, entonces $\widehat{U}\widehat{\cdot}\widehat{U} = \widehat{U}$, pues ya se ha visto que el isoálgebra derivada es un isoideal de $\widehat{U}$, que al no ser ésta isoconmutativa, no puede ser $\widehat{U}\widehat{\cdot}\widehat{U} = \{\widehat{S}\}$ y por tanto, necesariamente, $\widehat{U}\widehat{\cdot}\widehat{U} = \widehat{U}$, al ser éste el otro isoideal existente en $\widehat{U}$.

El siguiente paso es estudiar cuándo se puede asegurar que una isoálgebra isotópica de Lie es isosimple o isosemisimple dependiendo del álgebra de la que se ha levantado. Un primer intento sería ver qué ocurre en las condiciones de la Proposición 5.2.5.

Supongamos entonces una isoálgebra $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ asociada a un álgebra de Lie $(U, \circ, \bullet, \cdot)$. Si suponemos que U es un álgebra de Lie simple, entonces U no es conmutativa y los únicos ideales que contiene son los triviales. Ahora bien, la Proposición 5.2.19 asegura entonces que $\widehat{U}$ no es isoconmutativa. Por tanto, para que $\widehat{U}$ sea isosimple bastará ver que los únicos isoideales que contiene son los triviales. Ahora bien, si $\widehat{\Im}$ es un isoideal de $\widehat{U}$, deberá estar asociado entonces, por definición, a un ideal $\Im$ de U, que deberá ser o bien $\{\overrightarrow{0}\}$ o bien la propia U, por ser U simple y ser éstos los ideales triviales.

Entonces, si $\Im = \{\overrightarrow{0}\}$, se tiene que $\widehat{\Im} = \{\widehat{\overrightarrow{0}}\} = \{\widehat{S}\}$ y si $\Im = U$, entonces $\widehat{\Im} = \widehat{U}$, por lo que los únicos isoideales de $\widehat{U}$ son también los triviales, con lo que se llega finalmente a que $\widehat{U}$ es una isoálgebra isotópica de Lie isosimple. Además, como el último razonamiento puede hacerse análogamente para isoálgebras isotópicas de Lie isosemisimples, se deduce la siguiente:

Proposición 5.3.5 *En las condiciones de la Proposición 5.2.5, si* $(U, \circ, \bullet, \cdot)$ *es un álgebra de Lie simple (semisimple, respectivamente), entonces el levantamiento isotópico* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ *es una isoálgebra isotópica de Lie isosimple (isosemisimple, respectivamente).* □

Finalmente, se va a probar que, al igual que sucede en la teoría convencional de Lie, se verifica la siguiente:

Proposición 5.3.6 *Se verifican*

1. *Bajo las condiciones de la Proposición 5.1.2, toda isoálgebra isotópica de Lie isosemisimple* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ *verifica* $\widehat{U}\widehat{\cdot}\widehat{U} = \widehat{U}$.
2. *Bajo las condiciones de la Proposición 5.2.5, todo isoálgebra isotópica de Lie isosemisimple es suma directa de isoálgebras isotópicas de Lie isosimples.*

Demostración

Para probar (1), consideremos $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ una isoálgebra isotópica de Lie isosemisimple (que estará entonces asociada a un álgebra de Lie semisimple $(U, \circ, \bullet, \cdot)$). Según la teoría convencional de Lie sabemos que toda álgebra de Lie semisimple verifica que su álgebra derivada coincide con ella misma. Entonces, en nuestro caso, será $U \cdot U = U$. Pero entonces, dado que estamos en las condiciones de la Proposición 5.1.2, será $\widehat{U}\widehat{\cdot}\widehat{U} = \widehat{U \cdot U} = \widehat{U}$, lo que demuestra el resultado.

Para probar (2), sea ahora $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ una isoálgebra isotópica de Lie isosemisimple (que estará asociada entonces a un álgebra de Lie semisimple $(U, \circ, \bullet, \cdot)$). También, por la teoría convencional de Lie, sabemos que toda álgebra de Lie semisimple es suma directa de álgebras de Lie simples. Supongamos en primer lugar que dicha álgebra semisimple es suma directa de dos álgebras de Lie simples. Entonces, se verificará $U = U_1 \oplus U_2$, con $(U_1, \circ, \bullet, \cdot)$, $(U_2, \circ, \bullet, \cdot)$ dos álgebras de Lie simples. Veamos entonces que $\widehat{U} = \widehat{U_1} \oplus \widehat{U_2}$, lo que probaría (2). Para ello, tomemos $\widehat{X} \in \widehat{U}$. Entonces $X \in U$ y podrá escribirse $X = X_1 \circ X_2$, con $X_1 \in U_1$ y $X_2 \in U_2$. Como además estamos en las condiciones de la Proposición 5.2.5, se tendría que $\widehat{X} = \widehat{X_1 \circ X_2} = \widehat{X_1}\widehat{\circ}\widehat{X_2}$, donde $\widehat{X_1} \in \widehat{U_1}$ y $\widehat{X_2} \in \widehat{U_2}$. Como $\widehat{X}$ es un isovector arbitrario de $\widehat{U}$ y $\widehat{U_1} \cap \widehat{U_2} = \widehat{U_1 \cap U_2} = \widehat{\overrightarrow{0}} = \widehat{S}$ y $\widehat{U_1}\widehat{\cdot}\widehat{U_2} = \widehat{U_1 \cdot U_2} = \widehat{\overrightarrow{0}} = \widehat{S}$, tendremos finalmente que $\widehat{U} = \widehat{U_1} \oplus \widehat{U_2}$, que es lo que se buscaba, pues $\widehat{U_1}$ y $\widehat{U_2}$ son isoálgebras isotópicas de Lie isosimples, por la Proposición 5.3.5. En el caso de que el álgebra semisimple fuese suma directa de más de dos álgebras de Lie simples, el razonamiento sería análogo. □

5.3.3. Isoálgebras isotópicas de Lie isorresolubles

Veremos ahora el levantamiento isotópico de las álgebras de Lie resolubles.

Definición 5.3.7 *Una isoálgebra isotópica de Lie* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ *se dice* isorresoluble *si, siendo una isotopía de un álgebra de Lie resoluble, en la sucesión*

$$\widehat{U}_1 = \widehat{U}, \quad \widehat{U}_2 = \widehat{U}\widehat{\cdot}\widehat{U}, \quad \widehat{U}_3 = \widehat{U}_2\widehat{\cdot}\widehat{U}_2, \ldots, \widehat{U}_i = \widehat{U}_{i-1}\widehat{\cdot}\widehat{U}_{i-1}, \ldots$$

(denominada sucesión de isorresolubilidad*), existe un número natural* n*, tal que* $\widehat{U}_n = \{\widehat{S}\}$*. El menor de estos números se denomina* índice de isorresolubilidad *del isoálgebra.*

Esta misma definición es también válida para el caso de los isoideales de la isoálgebra.

Se verifica entonces la siguiente:

Proposición 5.3.8 *Bajo las hipótesis de la Proposición 5.2.5, el levantamiento isotópico* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ *de un álgebra de Lie resoluble* $(U, \circ, \bullet, \cdot)$ *es una isoálgebra isotópica de Lie isorresoluble.*

Demostración

Es inmediata, ya que por ser U resoluble, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $U_n = \overrightarrow{0}$. Pero entonces, por construcción, se tiene que $\widehat{U}_n = \widehat{U_n} = \widehat{\overrightarrow{0}} = \widehat{S}$, lo que implica que $\widehat{U}$ es isorresoluble, al ser en particular una isoálgebra isotópica de Lie que está en las condiciones de la Proposición 5.2.5. □

Un ejemplo sencillo de isoálgebra isorresoluble lo constituyen las isoálgebras isotópicas de Lie isoconmutativas, pues verifican por definición que $\widehat{U}\widehat{\cdot}\widehat{U} = \widehat{U}_2 = \{\widehat{S}\}$. Con ello se tiene además que toda isoálgebra isoconmutativa no nula tiene índice de isorresolubilidad 2, siendo 1 el de la isoálgebra trivial $\{\widehat{S}\}$.

Se va a probar ahora que, al igual que sucede en la teoría convencional de Lie, se verifican los siguientes resultados:

Proposición 5.3.9 *Sea* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ *una isoálgebra isotópica de Lie asociada a un álgebra de Lie* $(U, \circ, \bullet, \cdot)$. *Bajo las hipótesis de la Proposición 5.1.2, se verifican:*

1. $\widehat{U}_i$ *es isoideal de* $\widehat{U}$ *y de* $\widehat{U}_{i-1}$, *para todo* $i \in \mathbf{N}$.
2. *Si* $\widehat{U}$ *es isorresoluble, siendo* U *resoluble, entonces toda isosubálgebra de* $\widehat{U}$ *es isorresoluble.*
3. *La intersección y el producto de dos isoideales isorresolubles de* $\widehat{U}$ *son isoideales isorresolubles. Además, bajo las hipótesis de la Proposición 5.2.5, también lo será la suma de dos isoideales isorresolubles.*

Demostración
Para probar (1), siguiendo el modelo de construcción de la Proposición 5.1.2, tenemos que $\widehat{U}_i = \widehat{U_i}$, para todo $i \in \mathbf{N}$. Ahora bien, según la teoría convencional de Lie, U_i es un ideal de U y de U_{i-1}. Por tanto, usando la Proposición 5.2.14, llegamos a que $\widehat{U_i}$ es un isoideal de $\widehat{U}$ y de $\widehat{U}_{i-1}$.
Para probar (2), sea $\widehat{W}$ una isosubálgebra de $\widehat{U}$ (que estará entonces asociada a una subálgebra W de U). La teoría convencional de Lie asegura entonces que W es resoluble. Por tanto, el razonamiento utilizado en la demostración de la Proposición 5.3.8 nos lleva también a que $\widehat{W}$ es isorresoluble, como queríamos probar. Nótese que este razonamiento se puede usar aunque no estemos en las hipótesis de la Proposición 5.2.5, ya que lo que interesa en nuestro caso particular es el modelo de construcción del isoproducto $\widehat{\cdot}$.
Para probar (3), la Proposición 5.2.16 asegura que en los tres casos propuestos se vuelven a obtener nuevos isoideales. Bastará por tanto usar de nuevo el razonamiento utilizado en la demostración de la Proposición 5.3.8 para deducir que los tres nuevos isoideales son también isorresolubles. □

Usando este último resultado (3) se llega a que la suma de todos los isoideales isorresolubles de $\widehat{U}$ es otro isoideal isorresoluble. Este nuevo isoideal recibe el nombre de *isorradical* de $\widehat{U}$, distinguiéndolo así del radical de $\widehat{U}$ que sería la suma de todos los ideales resolubles de $\widehat{U}$. Se denotará por *isorad* $\widehat{U}$, para no confundirlo con *rad* $\widehat{U}$, y siempre contendrá a $\{\widehat{S}\}$, al ser éste un isoideal isorresoluble trivial de toda isoálgebra. Obsérvese también que, dado que todo isoideal isorresoluble de $\widehat{U}$ es un ideal resoluble de $\widehat{U}$, se tiene que *isorad* $\widehat{U} \subset rad\ \widehat{U}$. De ahí que si $\widehat{U}$ es isorresoluble entonces $\widehat{U} = isorad\ \widehat{U} = rad\ \widehat{U}$, pues en particular $\widehat{U}$ sería resoluble.

También se tendrá la siguiente:

Proposición 5.3.10 *Bajo las hipótesis de la Proposición 5.2.6, si $\widehat{U}$ es una isoálgebra isotópica de Lie isosemisimple, entonces isorad $\widehat{U} = \{\widehat{S}\}$.*

Demostración

En efecto, por definición, $\widehat{U}$ será el levantamiento isotópico de un álgebra de Lie semisimple U. Entonces, de acuerdo con la teoría convencional de Lie tendremos que $rad\ U = \{\overrightarrow{0}\}$. Pero como $\{\widehat{S}\} \subset isorad$ $\widehat{U} \subset \widehat{rad U}$, llegamos finalmente a que *isorad* $\widehat{U} = \{\widehat{S}\}$. □

5.3.4. Isoálgebras isotópicas de Lie isonilpotentes e isofiliformes

Terminaremos esta subsección y con ella esta introducción a la isoteoría de Lie-Santilli realizando el levantamiento isotópico de las álgebras de Lie nilpotentes y de un caso particular de ellas, como son las álgebras de Lie filiformes. Comenzamos con la definición de *isoálgebra isonilpotente.*

Definición 5.3.11 *Una isoálgebra isotópica de Lie $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ se dice* isonilpotente *si, siendo una isotopía de un álgebra de Lie nilpotente, en la sucesión*

$$\widehat{U}^1 = \widehat{U}, \quad \widehat{U}^2 = \widehat{U}\widehat{\cdot}\widehat{U}, \quad \widehat{U}^3 = \widehat{U}^2\widehat{\cdot}\widehat{U}, \ldots, \widehat{U}^i = \widehat{U}^{i-1}\widehat{\cdot}\widehat{U}, \ldots$$

(que se denomina sucesión de isonilpotencia*), existe un número natural n tal que $\widehat{U}^n = \{\widehat{S}\}$. El menor de estos números naturales se denomina* índice de isonilpotencia *del isoálgebra.*

Esta misma definición es también válida para el caso de los isoideales de la isoálgebra.

De esta definición se deduce de forma inmediata que toda isoálgebra isotópica de Lie isonilpotente es isorresoluble, pues todo álgebra de Lie nilpotente es resoluble y además, $\widehat{U}_i \subset \widehat{U}^i$, para todo $i \in \mathbf{N}$. También se tiene de forma evidente que toda isoálgebra isotópica de Lie isoconmutativa no nula es isonilpotente, de índice de isonilpotencia 2, siendo 1 el índice de isonilpotencia de la isoálgebra $\{\widehat{S}\}$.

Se verifica además la siguiente:

Proposición 5.3.12 *Bajo las hipótesis de la Proposición 5.2.5, el levantamiento isotópico $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ de un álgebra de Lie nilpotente $(U, \circ, \bullet, \cdot)$ es una isoálgebra isotópica de Lie isonilpotente.*

Demostración

La misma Proposición 5.2.5 ya garantiza que $\widehat{U}$ es una isoálgebra isotópica de Lie. Entonces, como por ser U nilpotente existe $n \in \mathbf{N}$, tal que $U^n = \{\overrightarrow{0}\}$, usando el modelo de construcción utilizado en la Proposición 5.2.5, que es el habitual del isoproducto, tendremos que $\widehat{U}^n = \widehat{U^n} = \{\widehat{\overrightarrow{0}}\} = \{\widehat{S}\}$, con lo que se llega finalmente a que $\widehat{U}$ es isonilpotente. $\square$

Por otro lado, adaptando los resultados propios de la teoría convencional de Lie a esta nueva situación, probaremos la siguiente:

Proposición 5.3.13 *Sea $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ una isoálgebra isotópica de Lie asociada a un álgebra de Lie $(U, \circ, \bullet, \cdot)$. Se verifican entonces:*

1. *Bajo las hipótesis de la Proposición 5.2.5, la suma de dos isoideales isonilpotentes de $\widehat{U}$ es otro isoideal isonilpotente.*
2. *Si además $\widehat{U}$ es isonilpotente, siendo U nilpotente, entonces*

   a*) Bajo las hipótesis de la Proposición 5.1.7, toda isosubálgebra de $\widehat{U}$ es isonilpotente.*

b*) Bajo las hipótesis de la Proposición 5.2.5, si* $\widehat{U}$ *es isonilpotente no nula, su centro es no nulo.*

Demostración

Para probar (1), por la Proposición 5.2.16 ya se tiene que la suma es un nuevo isoideal. El mismo razonamiento de la demostración de la Proposición 5.3.12 nos sirve también para asegurar que este nuevo isoideal es además isonilpotente.

Para probar (2.a), sea $\widehat{W}$ una isosubálgebra de $\widehat{U}$ (que estará asociada a una subálgebra W de U). Como por la teoría convencional de Lie, W es un subálgebra nilpotente de U y como la construcción usada es la del modelo del isoproducto $\widehat{\cdot}$, se llega, al igual que se vio en la demostración de la Proposición 5.3.12, al resultado pedido.

Para probar (2.b), supongamos $\widehat{U} \neq \{\widehat{S}\}$. Entonces debe ser $U \neq \{\overrightarrow{0}\}$. Por una parte, la teoría convencional de Lie asegura que $cen\ U \neq \{\overrightarrow{0}\}$. Por otra, por construcción se tiene que $cen\ \widehat{U} = \widehat{cen U}$ y $\widehat{\{\overrightarrow{0}\}} = \{\widehat{S}\}$ y por último, estamos trabajando en base a una isounidad que es invertible respecto a la operación $*$ (que serán los elementos de isotopía con los que se haya realizado el levantamiento isotópico en cuestión). De todo ello se deduce que $cen\ \widehat{U} \neq \{\widehat{S}\}$. □

De forma análoga al caso isorresoluble, usando el resultado (1) anterior se llega a que la suma de todos los isoideales isonilpotentes de $\widehat{U}$ es otro isoideal isonilpotente, al que denotaremos *isonihil-radical* de $\widehat{U}$, para distinguirlo del nihil-radical de $\widehat{U}$, suma de sus ideales radicales. Lo representaremos por *isonil-rad* $\widehat{U}$, para distinguirlo de *nil- rad* $\widehat{U}$, verificándose además claramente que *isonil-rad* $\widehat{U} \subset$ *nil-rad* $\widehat{U} \cap$ *isorad* $\widehat{U} \subset$ *nil-rad* $\widehat{U} \subset$ *rad* $\widehat{U}$.

Por otro lado, se puede relacionar una isoálgebra isotópica de Lie isorresoluble con su isoálgebra derivada mediante la siguiente:

Proposición 5.3.14 *Bajo las hipótesis de la Proposición 5.2.5, una isoálgebra isotópica de Lie es isorresoluble si y sólo si su isoálgebra derivada es isonilpotente.*

Demostración

Sea $\widehat{U}$ una isoálgebra isotópica de Lie isorresoluble, que estará asociada a un álgebra de Lie U, resoluble. Sabemos, por la teoría convencional de Lie, que esto es equivalente a que el álgebra derivada de U es nilpotente. Entonces, la Proposición 5.3.12 asegura que la isoálgebra derivada de $\widehat{U}$ es isonilpotente, al coincidir por construcción con el levantamiento isotópico del álgebra derivada de U, al ser $\widehat{U}\widehat{\cdot}\widehat{U} = \widehat{U \cdot U}$.

Usando entonces esta última igualdad, tenemos que si la isoálgebra derivada de $\widehat{U}$ es isonilpotente, entonces el álgebra derivada de U, de la que es levantamiento isotópico, debe ser nilpotente, con lo cual U debe ser resoluble y por tanto, según la Proposición 5.3.8, $\widehat{U}$ será isorresoluble. $\square$

Finalizaremos este Capítulo y con ello este texto estudiando el levantamiento isotópico de las álgebras de Lie filiformes y algunas observaciones destacables:

Definición 5.3.15 *Una isoálgebra isotópica de Lie isonilpotente* $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ *se dice* isofiliforme *si, siendo una isotopía de un álgebra de Lie filiforme, verifica que* $\dim \widehat{U}^2 = n-2, \ldots, \dim \widehat{U}^i = n-i, \ldots, \dim \widehat{U}^n = 0$, *siendo* $\dim \widehat{U} = n$.

Observemos que toda la teoría referente a un álgebra de Lie filiforme U está fundamentada en términos de la base de dicho álgebra. Así, a partir de una cierta base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de U, preferiblemente *base adaptada*, podremos estudiar las dimensiones de U y de los elementos de la sucesión de nilpotencia, los invariantes i y j de U y en general, el resto de propiedades a partir de los coeficientes de estructura, que son de hecho los elementos fundamentales en el estudio de un álgebra de Lie filiforme.

Ahora bien, en un levantamiento isotópico ya hemos visto que en general no tienen porqué conservarse ni los elementos de la base de partida, ni la dimensión de ésta. Por tanto, el estudio de las relaciones entre una isoálgebra isofiliforme y el álgebra filiforme del que se ha obtenido la primera por isotopía, no puede hacerse de la misma forma a como se ha venido haciendo hasta ahora.

Por otro lado, sabemos que si seguimos el modelo de construcción de isotopía del Ejemplo 4.1.3, sí se tendrá la conservación de la base de partida en el sentido ya visto en su momento acerca de la conservación de las constantes de estructura. Esto último implica en particular que no se pueden relacionar isotópicamente mediante este modelo álgebras filiformes de la misma dimensión, pero con coeficientes de estructura distintos. Por tanto, si fijada un álgebra de Lie filiforme, realizamos una isotopía siguiendo convenientemente el modelo del Ejemplo 4.1.3, el isoálgebra isofiliforme a la que se llegue se comportará en todo momento de la misma manera que la inicial, teniendo sus mismas propiedades.

Sería entonces interesante poder relacionar álgebras filiformes de distintas dimensiones o bien de igual dimensión, pero de distintos coeficientes de estructura. Esto último lo podemos lograr no obstante desde el punto de vista más general de la teoría de las isotopías. Bastaría para ello, dadas dos álgebras de Lie filiformes U y U', de bases respectivas $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$, considerar a U' como el levantado isotópico de U, tomando $\widehat{U} = U'$, con base $\{\widehat{e_1} = e'_1, \ldots, \widehat{e_n} = e'_n\}$. Este procedimiento sería una isotopía en el sentido más general de su definición, ya que se trata de un levantamiento matemático de una estructura inicial como es un álgebra de Lie filiforme, que da como resultado una nueva estructura que verifica los mismos axiomas que la inicial, esto es, llegamos a una nueva álgebra de Lie filiforme.

Con esto se demostraría un caso particular de un tema ya mencionado anteriormente para otras estructuras: que en el nivel axiomático podemos considerar que todas las álgebras de Lie filiformes de la misma dimensión pueden identificarse isotópicamente, con lo cual tendríamos en particular que isotópicamente sólo existe un tipo de isoálgebra isotópica de Lie isofiliforme para cada dimensión posible.

Señalar por último que el hecho de haber considerado este caso tan particular de álgebras de Lie filiformes es debido a que éstas constituyen el motivo central de estudio del Grupo de Investigación dentro del cual se presenta este texto. No obstante, un desarrollo más específico del levantamiento de este tipo de álgebras se saldría del marco que nos hemos planteado al principio de nuestro estudio, acerca de introducir la isoteoría de Lie-Santilli. Por este motivo, con lo que acabamos de ver quedan patente las mejoras que logra la isoteoría de Lie-Santilli y la posibilidad de concretar más estas mejoras.

Referencias

1. I. Ado, Note sur la représentation des groupes finis et continus au moyen de substitutions linéaires, *Bull. Phys. Math. Soc. Kazan* t. VII (1935), 3-43.
2. A. A. Albert, *Trans. Amer. Math. Soc.* **64**, 552.
3. A. O. Animalu, Isosuperconductivity: A nonlocal-nonhamiltonian theory of pairing in high Tc superconductivity, *Hadronic J.* **17** (1994), 349-428.
4. A. O. Animalu, R. M. Santilli, Nonlocal isotopic representation of the Cooper Pair in superconductivity, *Quantum Chemistry Symposium* **29** (1995), 175-187.
5. Yu. Arestoov, R. M. Santilli, V. Solovianov, Evidence on the isominkowskian character of the hadronic structure, *Found. Phys. Letters* **11** (1998), 483-493.
6. A. K. Aringazin, Lie-isotopic Finslerian lifting of the Lorentz group and Blochintsev redeilike behaviour of the meson lifetime, *Hadronic J.* **12** (1989), 71-74.
7. A. K. Aringazin, A. Jannussis, D. F. Lopez, M. Nishioka and B. Veljanoski, Santilli's Lie-isotopic generalization of Galilei's and Einstein's Relativities, [Kostarakis Publisher], Athens, 1991.
8. A. K. Aringazin and K.M. Aringazin, Universality of Santilli's isominskowskian geometry, *Frontiers of Fundamental Physics*, [M. Barone and F. Selleri editors], Plenum, 1994.
9. R. A. K. Aringazin, D. A. khirukin and M. Santilli, Isotopic generalization of the Legendre, Jacobi and Bessel Functions, *Algebras, Groups and Geometries* **12** (1995), 255-305.
10. R. Ashlander, Infinitesimal motions on Santilli-Sourlas-Tsagas isomanifolds, *Algebras, Groups and Geometries* **15** (1998), 545-562.
11. H. F. Baker, Alternants and continuous groups, *Proc. London Math. Soc.*: III **2** (1905), 24-47.
12. K. Baltzer, Tomber's Bibliography and Index in Nonassociative Algebras, Hadronic Press, 1984.

13. G. Birkhoff, Continuous groups and linear spaces, *Rec. Math. Moscow* t. I (1936), 635-642.
14. N. Bourbaki, Groupes et algébres de Lie, *Eléments de mathématique* **2 y 3** (1972), Hermann, París.
15. R. Brauer, Eine Bedingung für vollständige Reduzibilität von Darstellungen gewöhnlicher und infinitesimaler Gruppen, *Math. Zeutschr* t. XLI (1936), 330-339.
16. R. H. Bruck, A Survey of Binary Systems. Springer-Verlag, Berlín, 1958.
17. F. Cardone, R, Mignani and R. M. Santilli, On a possible non-Lorentzian energy dependence of the K_0^S lifetime, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **18** (1992), L61-L65.
18. F. Cardone, R, Mignani and R. M. Santilli, Lie-isotopic energy dependence of the K_0^S lifetime, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **18** (1992), L141-L152.
19. F. Cardone and R, Mignani, Nonlocal approach to the Bose-Einstein correlation, Univ. of Rome, Preprint 894, July 1992.
20. E. Cartan, Œvres complètes, 6 vol., París (Gauthier-Villars), 1952-1954.
21. H. Casimir, B.L. van der Waenden, Algebraischer Beweis der vollständigen Reduzibilität der Darstellungen halbeinfacher Liescher Gruppen, *Math. Ann.* t. CXI (1935), 1-12.
22. C. Chabauty, Sur les points rationnels des courbes algébraiques de genre supérieur à l'unité, *C. R. Acad. Sci.* t. CCXII (1941), 882-884.
23. C. Chevalley, Theory of Lie Groups. Princenton University Press, 1946.
24. E. Dynkin, Calcul des coefficients de la formule de Campbell-Haussdorff, *Dokl. Akad. Nauk* t. LVII (1947), 323-326.
25. G. Eder, On the mutation parameters of the generalized spion algebra for particles with spin 1/2, *Hadronic J.* **5** (1981), 634-657.
26. F. Engel, Die Erzeugung der endlichen Transformattionen einer projektiven Gruppe durch die infinitesimalen Transformationen der Gruppe: I) Leipziger Ber. XLIV (1892), 279-296. II) Mit Beiträgen von E. Study, ibid, XLV (1893), 659-696.
27. J. Fronteau, A. Tellez-Arenas and R. M. Santilli, Lie-admissible structure of statistical mechanics, *Hadronic J.* **3** (1979), 130-176.
28. M. Gasperini, Elements for a Lie-isotopic gauge theory, *Hadronic J.* **6** (1983), 935-945.
29. M. Gasperini, Lie-isotopic lifting of gauge theories, *Hadronic J.* **6** (1983), 1462-1479.
30. P. Hall, A contribution to the theory of groups of prime power order, *Proc. London Math. Soc.* t, IV **3** (1932), 29-95.
31. F. Haussdorf, Die symbolische Exponentialformel in der Gruppentheorie, *Leipzieger Ber.* t. LVIII (1906), 19-48.

32. K. Hensel, Über die arithmetischen Eigensehaften der Zahlen, *Jahresber. der D. m: V.* t. XVI (1907), 299-319, 388-393, 474-496.
33. R. Hooke, Linear p-adic groups and their Lie algebras, *Ann. of Math.* t. XLIII (1942), 641-655.
34. A Hurwitz, Über die Erzeugung der Invariaten durch Integration, *Gött. Nachr* (1897), 71-90 (*Math. Werke* t. II (1897), 546-564).
35. Y. Ilamed, On realizations of infinite-dimensional Lie-admissible algebras, *Hadronic J. Suppl.* **1** (1985), 576-609.
36. N. Jacobson, Rational methods in the theory of Lie algebras, *Ann. of Math.* t. XXXVI (1935), 875-881.
37. N. Jacobson, Lie Algebras, Interscience, New York, 1962.
38. A. Jannussis, noncanonical quantum statistical mechanics, *Hadronic J. Suppl.* **1** (1985), 576-609.
39. A. Jannussis and R. Mignani, Algebraic structure of linear and nonlinear models of open quantum systems, *Physica A.* **152** (1988), 469-476.
40. A. Jannussis and R. Mignani, Lie-admissible perturbation methods for open quantum systems, *Physica A.* **187** (1992), 575-588.
41. A. Jannussis and I. Tsohantis, Review of recent studies on the Lie-admissible approach to quantum gravity, *Hadronic J.* **11** (1988), 1-11.
42. A. Jannussis, M. Miatovic and B. Veljanoski, Classical examples of Santilli's Lie-isotopic generalization of Galilei's relativity for closed systems with non-self-adjoint internal forces, *Physics essays* **4** (1991), 202-211.
43. A. Jannussis, D. Brodimas and R. Mignani, Studies in Lie-admissible models, *J. Phys. A.* **24** (1991), L775-L778.
44. C. X. Jiang, An Introduction to Santilli's Isonumber Theory. Hadronic Press,(1996).
45. C. Jordan, Mémoire sur les groupes de mouvements, *Ann. di Math.* t. X (1868-1869), 167-215, 332-345 (= Œvres, t. IV (1868-69), 231-302.
46. J. V. Kadeisvili, Elements of functional isoanalysis, *Algebras, Groups and Geometries* **9** (1992), 283-318.
47. J. V. Kadeisvili, Elements of the Fourier-Santilli isotransforms, *Algebras, Groups and Geometries* **9** (1992), 319-342.
48. J. V. Kadeisvili, Santilli's isotopies of contemporary algebras, *Geometries and Relativities* second edition, Ukraine Academy of sciences, Kiev, 1994.
49. J. V. Kadeisvili, An introduction to the Lie-Santilli theory, *Proceedings of the International Workshop on Symmetry Methods in Physics* [G. Pogosyan et al., editors] JINR, Dubna 1994.
50. J. V. Kadeisvili, Foundations of the Lie-Santilli isotheory, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* serie II, supl. 42 (1996), 83-136.
51. J. V. Kadeisvili, N. Kamiya and R. M. Santilli, A characterization of isofields and their isoduals, *Hadronic J.* **16** (1993), 168-185.

52. A. Kalnay and R. M. Santilli, Heuristic approach to symmetries and conserved quantities of classical and quantum versions of Nambu's generalized mechanics, *Hadronic J.* **6** (1982), 1798-1840.
53. N. Kamiya and R. M. Santilli, A characterization of pseudo-isofields, *Algebras, Groups and Geometries* **13** (1996), 283-284.
54. W. Killing, Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen, I) *Math. Ann.* t. XXXI (1888), 252-290, II) ibid. t. XXXIII (1889), 1-48, III) ibid. t. XXXIV (1889), 57-122, IV) ibid. t. XXXVI (1890), 161-189.
55. F. Klein, S. Lie, Sur une certaine famille de courbes et surfaces, *C. R. Acad. Sci* t. LXX (1870), 1222-1226, 1275-1279.
56. A. U. Klimyk and R. M. Santilli, Standard isorepresentations of isotopic Q-operator deformations of Lie algebras, *Algebras, Groups and Geometries* **10** (1993), 323-333.
57. J. A. Kobussen, Lie-admissible structure of classical field theory, *Hadronic J.* **3** (1979), 79-129.
58. M. Koiuv and J. Lohmus, generalized deformations of nonassociative algebras, *Hadronic J.* **3** (1979), 53-78.
59. C. N. Ktorides, H. C. Myung, R. M. Santilly, On the recently proposed test of Pauli principle under strong interactions, *Phys. Rev* **22** (1980), 892-907.
60. M. Lazard, Groupes analytiques p-adiques, *Publ. Math. I. H. E. S.* (**26**) (1965), 389-603.
61. E. E. Levi, Sulla struttura dei Gruppi finiti e continui, *Atti Acc. Sci. Torino* t. XL (1905), 551-565, (Opere) t. I (1905), 101-115.
62. S. Lie, Über eine Klasse geometrischer Transformationen, t. I, Abh. XII (1871), 153-214 (= *Christiana For.* (1871), 182-245).
63. S. Lie, Über partielle Diferentialgleichungen erster Ordrung, t. V, Abh. VII (1873), 32-63 (= *Christiana For.* (1873), 16-51).
64. S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen II, t.V, Abh. III (1876) 42-75 (= *Archiv f. Math* t. I (1876), 152-193).
65. S. Lie, Beiträge zur allgemeinen Tranformationenstheorie, t. VI, Abh. V (1888), 230-236 (= *Leipziger Ber.* (1888), 14-21).
66. S. Lie, Geometrie der Beruhrungstransformationen, Teubner, Leipzig, 1896. English translation by E. Trell, *Algebras, Groups and Geometries* **15** (1998).
67. S. Lie, F. Engel, Theorie der Transformationsgruppen, 3 vol., Leipzig (Teubner). 1888-1893.
68. J. Lõhmus, E. Paal, L. Sorgsepp, Nonassociative Algebras in Physics. Hadronic Press (1994).
69. D. F. Lopez, Confirmation of Logunov's relativistic gravitation via Santilli's Isoriemannian geometry, *Hadronic J.* **15** (1992), 431-439.
70. D. F. Lopez, Problematics aspects of q-deformation and their isotopic resolutions, *Hadronic J.* **16** (1993), 429-457.

71. E. Lutz, Sur l'équation $y^2 = x^3 - Ax - B$ dans les corps p-adiques, *J. Crelle* t. CLXXVII (1937), 237-247.
72. W. Magnus, a) Beziehunger zwischen Gruppen und Idealen in einen speziellen Ring, *Math. Ann.* t. CXI (1935), 259-280, b) Über Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren, *J. Crelle* t. CLXXVII (1937), 105-115.
73. K. McCrimmon, Isotopies of Jordan Algebras, *Pacific J. Math.* **15** (1965), 925-962.
74. R. Mignani, Lie-isotopic lifting of SU(n) symmetries, *Lett. Nuovo Cimento* **39** (1984), 413-416.
75. R. Mignani, Nonpotential scattering for the density matrix and quantum gravity, Univ. of Rome Report No. 688, 1989.
76. R. Mignani, Quasars redshift in isominkowski space, *Physics Essays* **5** (1992), 531-539.
77. R. Mignani, H. C. Myung and R. M. Santilli, Foundations of hadronic mechanics via an isotopic lifting of Dirac's formulation of quantum mechanics, *Hadronic J.* **6** (1983), 1873-1950.
78. M. Mikatovic, Inverse Lie and Lie-admissible approaches to systems with velocity-dependent forces, *Hadronic J.* **6** (1983), 1606-1618.
79. D. Montgomery, L. Zippin, Topological Transformation Groups, New York (Interscience). 1955.
80. M. R. Molaei, On Santilli's one-dimensional isodynamical systems, *Algebras, Groups and Geometries* **15** (1998), 563-568.
81. H. C. Myung and R. M. Santilli, Modular-isotopic Hilbert space formulation of the exterior strong problem, *Hadronic J.* **5** (1982), 1277-1366.
82. J. von Neumann, Zur Theorie der Darstellung kontinuierlicher Gruppen, Sitzungsber, Berlín, 76-90, 1927, (= *Collected Works* t. I (1927), 134-138).
83. M. Nishioka, *Hadronic J.* **7** (1984), p. 1636.
84. M. Nishioka, An introduction to gauge fields by the Lie-isotopic lifting of the Hilbert space, *Lett. Nuovo Cimento* **40** (1984), 309-312.
85. M. Nishioka, Extension of the Dirac-Myung-Santilli delta function to field theory, *Lett. Nuovo Cimento* **39** (1984), 369-372.
86. M. Nishioka, Remarks on the Lie algebras appearing in the Lie-isotopic lifting of gauge theories, *Lett. Nuovo Cimento* **85** (1985), 331-336.
87. M. Nishioka, Noncanonical commutation relations and the Jacobi identity, *Hadronic J.* **11** (1988), 143-146.
88. S. Okubo, A generalization of the Hurwitz theorem for flexible Lie-admissible algebras, *Hadronic J.* **3** (1979), 1-52.
89. R. H. Ohemke, Some elementary structure theorems for a class of Lie-admissible algebras, *Hadronic J.* **3** (1979), 293-219.
90. H. Poincaré, Œvres complètes, 11 vol., París (Gauthier-Villars). 1916-1956.
91. L. S. Pontrjagin, Topological Groups, Princenton Univ. Press. 1939.

92. D. L. Rapoport, The geometry of fluctuations: quantum gravity and ergodicity, *New frontiers in Algebras, Groups and Geometries* [Gr. T. Tsagas, editor], Hadronic Press, 1995.
93. P. Roman and R. M. Santilli, A Lie-admissible model for dissipative plasma, *Lett. Nuovo Cimento* **2** (1969) 449-455.
94. R. M. Santilli, Embedding of Lie algebras in nonassociative structures, *Nuovo Cimento* **51** (1967), 570-576.
95. R. M. Santilli, Dissipativity and Lie-admissible algebras, *Meccanica* **1** (1969), 3-11.
96. R. M. Santilli, An introduction to Lie-admissible algebras, *Suppl. Nuovo Cimento* **6** (1969), 1225-1249.
97. R. M. Santilli, Need for subjecting to an experimental verification the validity within a hadron of Einstein special relativity and Pauli's exclusion principle, *Hadronic J.* **1** (1978), 574-902.
98. R. M. Santilli, On a possible Lie-admissible covering of the Galilei Relativity in Newtonian Mechanics for nonconservative and Galilei noninvariant systems, *Hadronic J.* **1** (1978), 223-423. Addendum, ibid, **1** (1978), 1279-1342.
99. R. M. Santilli, *Hadronic J.* **1** (1978), 223-423.
100. R. M. Santilli, Foundations of Theoretical Mechanics, Vol. I: The Inverse Problem in Newtonian Mechanics, Springer-Verlag, Heidelberg, Germany 1978.
101. R. M. Santilli, Lie-Admissible Approach to the Hadronic Structure, Vol. I: Nonapplicability of Galilei's and Einstein's Relativities, Hadronic Press, 1978.
102. R. M. Santilli, Lie-Admissible Approach to the Hadronic Structure, Vol. II: Covering of Galilei's and Einstein's Relativities, Hadronic Press, 1978.
103. R. M. Santilli, Initiation of the representation theory of Lie-admissible algebras of operators on bimodular Hilbert spaces, *Hadronic J.* **3** (1979), 440-506.
104. R. M. Santilli, Isotopic breaking of Gauge symmetries, *Phys. Rev. D* **20** (1979), 555-570.
105. R. M. Santilli, Status of the mathematical and physical studies on the Lie-admissible formulations as of July 1979, *Hadronic J.* **2** (980), 1460-2019. Addendum ibidem **3** (1980), 854-914.
106. R. M. Santilli, An intriguing legacy of Einstein, Fermi, Jordan and others: the possible invalidation of quark conjectures (as elementary particles), *Found Phys.* **11** (1981), 383-472.
107. R. M. Santilli, An introduction to the Lie-admissible treatment of nonpotential interactions in Newtonian, statistical and particle mechanics, *Hadronic J.* **5** (1982), 264-359.
108. R. M. Santilli, Lie-isotopic lifting or unitary symmetries and of Wigner's theorem for extended deformable particles, *Lett. Nuovo Cimento* **3** (1983), 509-521.
109. R. M. Santilli, Lie-admissible approach to the Hadronic structure. Vol. II. Hadronic Press, 1983.

110. R. M. Santilli, Lie-isotopic lifting of the special relativity for extended-deformable particles, *Letter Nuovo Cimento* **37** (1983), 545-555.
111. R. M. Santilli, Lie-isotopic lifting of the special relativity for extended-deformable particles, *Letter Nuovo Cimento* **38** (1983), 509-521.
112. M. Santilli, Foundations of Theoretical Mechanics, Vol. II: Birkhoffian generalization of Hamiltonian Mechanics, Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 1983.
113. R. M. Santilli, Use of hadronic mechanics for the possible regaining of the exact space-reflection symmetry under weak interactions, *Hadronic J.* **7** (1984), 1680-1685.
114. R. M. Santilli, Lie-isotopic lifting of Lie Symmetries, I: general considerations, *Hadronic J.* **8** (1985), 25-35.
115. R. M. Santilli, Lie-isotopic lifting of Lie Symmetries, II: Lifting of Lie Symmetries, II: Lifting of rotations, *Hadronic J.* **8** (1985), 36-51.
116. R. M. Santilli, Isotopic liftings of contemporary mathematical structures, *Hadronic Journal Suppl.* **4** A (1988), 155-266.
117. R. M. Santilli, Isotopic lifting of Einstein general relativity for classical interior gravitational problems, *Hadronic J. Suppl.* **4** A (1988), 407-500.
118. R. M. Santilli, Isotopic lifting of Galilei's relativity for classical interior dynamical systems, *Hadronic J. Suppl.* **4.A** (1988), 1-153.
119. R. M. Santilli, Isotopic lifting of the special relativity for classical interior dynamical systems, *Hadronic J. Suppl.* **4.A** (1988), 267-405.
120. R. M. Santilli, Foundations of hadronic mechanics, *Hadronic J. Suppl.* **4** B (1989), 1-125.
121. R. M. Santilli, Isotopies of contemporary mathematical structures, I: Isotopies of fields, vector spaces, transformation theory, Lie algebras, analytic mechanics ans space-time symmetries, *Algebras, Groups and Geometries* **8** (1991), 169-266.
122. R. M. Santilli, Isotopic generalizations of Galilei's and Einstein's Relativities, Vol. I: Mathematical Foundations, Hadronic Press, 1991.
123. R. M. Santilli, Isotopic generalizations of the Galilei's and Einstein's Relativities, Vol. II: Classical Isotopies, Hadronic Press, 1991.
124. R. M. Santilli, Isotopies of contemporary mathematical structures, II: Isotopies of symplectic geometry, affine geometry, Riemannian geometry and Einstein gravitation, *Algebras, Groups and Geometries* **8** (1991), 275-390.
125. R. M. Santilli, Isotopic generalizations of Galilei's and Einstein's Relativities, vol I, *Mathematical Foundations* Hadronic Press, 1991.
126. R. M. Santilli, Nonlocal formulation of the Bose-Einstein correlation within the context of hadronic mechanics, *Hadronic J.* **15** (1992), 1-50 and 81-133.
127. R. M. Santilli, Elements of Hadronic Mechanics, Vol. I: Mathematical Foundations, Ukraine Academy of Sciences. Kiev. 1993.
128. R. M. Santilli, Isonumbers and genonumbers of dimension 1,2,4,8, their isoduals and pseudoisoduals, and hidden numbers of dimension 3, 5, 6, 7, *Algebras, Groups and Geometries* (1993), 273-322.

129. R. M. Santilli, Nonlinear, nonlocal, noncanonical, axiom-preserving isotopies of the Poincaré symmetry, *J. Moscow Phys. Soc.* **3** (1993), 255-297.
130. R. M. Santilli, Isotopic lifting of SU(2) symmetry with application to nuclear physics, *JINR Rapid Comm.* **6** (1993), 24-38.
131. R. M. Santilli, Isodual spaces and antiparticles, *Comm. Theor. Phys.* **3** (1993), 1-12.
132. R. M. Santilli, Antigravity, *Hadronic J.* **17** (1994), 257-284.
133. R. M. Santilli, A quantitative isotopic representation of the Deuteron Magnetic moment, *Procedings of the International Symposium (Deuteron 1993)* (1994), JINR, Dubna, Rusia.
134. R. M. Santilli, Elements of Hadronic Mechanics, Vol. II: *Theoretical Foundations* (1994), Ukraine Academy of Sciences, Kiev.
135. R. M. Santilli, Representation of antiparticles via isodual numbers, spaces and geometries, *Comm. Theor. Phys.* **3** (1994), 153-181.
136. R. M. Santilli, Space-time machine, *Hadronic J.* **17** (1994), 285-310.
137. R. M. Santilli, Isominkowskian representation of the cosmological redshift and of the internal red-blue shift of quasars, *Frontiers of Fundamental Physics,* [M. Barone and F. Selleri, Editors], Plenum, 1994.
138. R. M. Santilli, Isotopic, Genotopic and Hyperstructural Methods in Theoretical Biology, Ukraine Academy of Sciences, Kiev, 1994.
139. R. M. Santilli, Recent Theoretical and experimental evidence on the apparent synthesis of the neutron from protons and electrons, *Chine J. Syst. Eng. Electr.* **6** (1995), 177-199.
140. R. M. Santilli, Geometrization of Locally varying speeds of light via the isoriemannian geometry, *Proceedings of the 25-International Conference on Geometry and Topology*, Iasi Romania, 1995.
141. R. M. Santilli, Isotopic lifting of quark theories with exact confinement, *Comm. Theor. Phys.* bf 4 (1995), 123-153.
142. R. M. Santilli, Elements of Hadronic Mechanics, Vol. I, *Mathematical Foundations* Second Edition, Kiev, 1995.
143. R. M. Santilli, An introduction to isotopic, genotopic, hyperestructural methods for theoretical biology, *New Frontiers in Theoretical Biology* [C. A. C. Dreismann, Editor], Hadronic Press (1996), 382-395.
144. R. M. Santilli, T. Vougiouklis, Isotopies, genotopies and hiperestructures, *New Frontiers in Hyperestructures* [T. Vougiouklis, Editor], Hadronic Press (1996), 1-48.
145. R. M. Santilli, Nonlocal-integral isotopies of differential calculus, mechanics and geometries, *Rendicoti del Circolo Matematico di Palermo* Serie II, Supl. 42 (1996), 7-82.
146. R. M. Santilli, Isotopic unification of gravitation and relativistic quantum mechanics and its universal isopoincare's symmetry, *Gravitation, Particles and*

Space-Time-Ivanenko Memorial Volume [P. I. Pronin and J. V. Sardanashvily, Editors], World Scientific, Singapore, 1996.

147. R. M. Santilli, Representation of nonhamiltonian vector fields in the coordinates of the observer via the isosymplectic geometry, *J. Balkan Geom. Soc.* **1** (1996), in press.
148. R. M. Santilli, Isotopic quantization of gravity and its universal isopoincare's symmetry, *Proceedings of the VII M. Grossmann Meeting on Gravitation* [M. Keiser and R. Jantzen, Editors], World Scientific, Singapore, 1996.
149. R. M. Santilli, Does matter emit a new light?, *Hyperfine Interactions* **109** (1997), 63-81.
150. R. M. Santilli, Invariant Lie-admissible Formulation of Quantum Deformations, *Found. Phys.* **27** (1997), 1159-1177.
151. R. M. Santilli: Isotopic grand unification with the inclusion of gravity, *Found. Phys. Letters* **10** (1997), 307-327.
152. R. M. Santilli, Relativistic Hadronic Mechanics: Nonunitary, Axiom-Preserving Completion of Relativistic Quantum Mechanics, *Found. Phys.* **27:5** (1997), 625-729.
153. R. M. Santilli, Isominkowskian formulation of gravity, *Hadronic J.* **21** (1998), 113-169.
154. R. M. Santilli: Isominkowsian geometry for the gravitational treatment of matter and its isodual for antimatter, *Intern. J. Modern Phys. D* **17** (1998), 351-407.
155. R. M. Santilli: Isorepresentations of the Lie-isotopic $SU(2)$ algebra with applications to Nuclear Physics and to Local Realism, *Acta Appl. Math.* **50** (1998), 177-190.
156. R. M. Santilli, Origin, Problematic aspect and invariant formulation of q-, k- and other quantum deformations, *Modern Physics Letters A* **13:4** (1998), 327-335.
157. R. M. Santilli, Theoretical Prediction and Experimental Verifications of the new chemical species of magnecules, *Hadronic J.* **21** (1998), 789-894.
158. R. M. Santilli, Nuclear realization of hadronic mechanics and the exact representation of nuclear magnetic moments, *Intern. J. Phys.* **4** (1998), 1-70.
159. R. M. Santilli, A classical isodual theory of antimatter and its predicction of antigravity, *International Journal of Modern Physics A* **14** (1999), 2205-2238.
160. R. M. Santilli, Origin, Problematic aspect and invariant formulation of classical and operator deformations, *Intern. J. Modern Phys. A* **14:0** (1999), 1-50.
161. R. M. Santilli, Physical Laws of new energies as predicted by hadronic mechanics, *Journal New Energies* Papers I, II, III, IV and V (1999), in press.
162. R. M. Santilli and D. D. Shillady, A new isochemical model of the hydrogen molecule, *Intern. J. Hydrogen Energy* **24** (1999), 943-956.
163. R. M. Santilli and D. D. Shillady, A new isochemical model of the water molecule, *Intern. J. Hydrogen Energy* **25** (2000), 173-183.

164. A. Schober, Non-Euclidean and Non-Desarguesian geometries for non-self-adjoint systems, *Hadronic J.* **5** (1982), 1140-1183.
165. D. Schuch, Nonunitary connection between explicitly time-dependent and non-linear approaches for the description of dissipative quantum systems, *Phys. Rev.* **55** (1997), (955-966).
166. F. Schur, Über den analytishen character der eine endliche continuierliche Transformationsgruppe darstellende Funktionen, *Math. Ann.* t. XLI (1893), 509-538.
167. I. Schur, Neue Anwendungen der Integralhechnung auf Probleme der Invariantentheorie, Sitzungsber. Berlín 189-208, 297-321, 346-355 (1924).
168. K. Schwarzschild: Iber das Gravitationesfeld eines. Massenpunktes nach der Einsteinshen Theorie, Sitzber. Akad. Wiss. Berlín, Kl. Math. Phys. Tech., 189-196 (1916).
169. K. Schwarzschild, Über as Gravitationensfeld einer Kugel aus inkompresassibler Flussigtet nach der Einsteinschen Theorie, Sitzber. Akad. Wiss. Berlín, Kl. Math. Phys. Tech., 424-434 (1916).
170. M. L. Tomber, A short history of nonassociative algebras, *Hadronic J.* **2** (1979), 1252-1387.
171. E. Trell, Isotopic proof of Fermat's last theorem verifying Beal's conjecture, *Algebras, Groups and Geometries* **15** (1998), 299-318.
172. R. Trostel, The Lie-admissible formulation of differential systems of even order, *Hadronic J.* **5** (1982), 1893-1900.
173. G. T. Tsagas, Isoaffine connections and Santilli's isoriemannian metrics on a isomanifold, *Algebras, Groups and Geometries* **13** (1996).
174. G. T. Tsagas, Studies on the classification of Lie-Santilli Algebras, *Algebras, Groups and Geometries* **13** (1996).
175. G. T. Tsagas and D. S. Sourlas, Mathematical Foundations of the Lie-Santilli Theory, Hadronic Press (1993).
176. G. T. Tsagas and D. S. Sourlas, Isomanifolds, *Algebras, Groups and Geometries* **12** (1995), 1-65.
177. G. T. Tsagas and D. S. Sourlas, Isomappings between isomanifolds, *Algebras, Groups and Geometries* **12** (1995), 67-88.
178. S. Vacaru, Interactions, Strings and Isotopies in Higher Order Anisotropic Superspaces. Hadronic Press (1999).
179. T. Vougiouklis, Hyperestructures and Their Representations, Hadronic Press (1994).
180. A. Weil, Sur les fonctions elliptiques p-adiques, *C. R. Acad. Sci.* t. CCIII (1936), p. 22.
181. G. P. Wene, A generalization of bonded algebras, *Hadronic J.* **3** (1979), 320-326.

182. A. de Wet, Nuclei as bound states of protons and electrons, *Hadronic J.* **6** (1982), 1742-1770.

183. H. Weyl, Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transfomationen I, *Math. Zeitschr.*, t. XXIII (1925), 271-309.

184. J. H. C. Whitehead, On the decomposition of an infinitesimal group, *Proc. Camb. Phil. Soc.* t. XXXII (1936), 229-237. (= *Mathematical Works* I (1936), 281-289).

185. J. H. C. Whitehead, Certain equations in the algebra of a semi-simple infinitesimal group, *Quart. Journ. of Math.* **2** t. VIII (1937), 220-237 (= *Math. works* I (1937), 291-308).

186. E. Witt, Treue Darstellung Lieschen Ringe, *J. Crelle* t. CLXXVII (1937), 152-160.