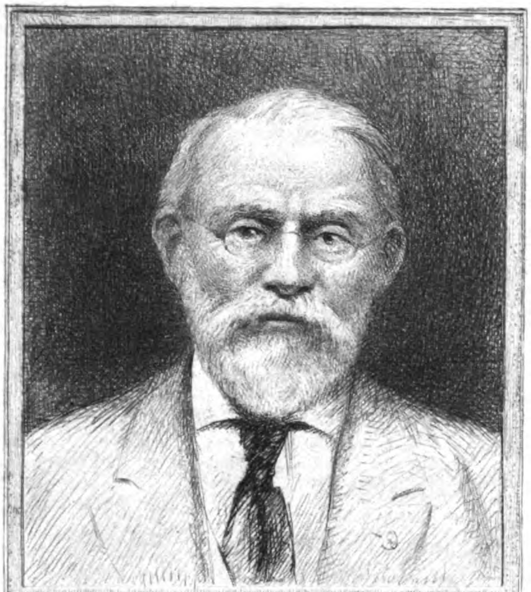
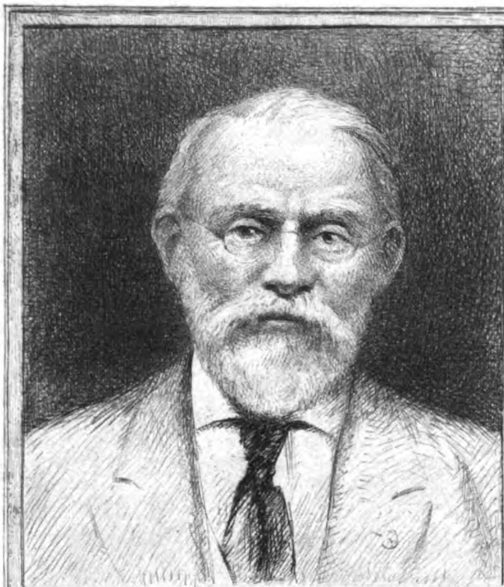


2/0 14/11 23/7 7/12 17/8



MÉMOIRE

CONTENANT

L'APPLICATION DE LA THÉORIE

EXPOSÉE

DANS LE XVII.e CAHIER DU JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

A L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS

AUX DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES

DU PREMIER ET DU SECOND ORDRE;

PAR M. AMPÈRE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET PROFESSEUR D'ANALYSE
À L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE.

[redacted]

A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

1819.

MÉMOIRE

Contenant l'Application de la Théorie exposée dans le XVII.^{e} CAHIER DU JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, *à l'Intégration des Équations aux Différentielles partielles du premier et du second ordre ;*

PAR M. A. AMPÈRE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET PROFESSEUR D'ANALYSE À L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE.

§. I.^{er}

APPLICATION AU PREMIER ORDRE.

L'INTÉGRALE des équations aux différentielles partielles du premier ordre ne contenant qu'une seule fonction arbitraire, il est inutile d'examiner en particulier le cas où cette fonction est composée d'une seule de ces deux variables, x ou y, puisque, si cela arrivait, la dérivée de z relative à cette variable manquant nécessairement dans l'équation donnée d'après ce qui a été dit dans le §. III, on n'aurait qu'à intégrer cette équation comme si elle était aux différentielles ordinaires entre les deux autres variables, et remplacer la constante arbitraire par une fonction arbitraire de la variable considérée comme constante dans cette intégration. Il ne reste donc que deux cas à examiner : celui où les dérivées p, q, sont hétérogènes à l'intégrale, et celui où elles lui sont homogènes.

On reconnaîtra le premier cas en formant les équations $P=0$, $Q=0$, $R=0$, &c., en tirant la valeur de $\frac{dy}{dx(\alpha}$ de l'une d'elles, et en substituant dans toutes les autres, pour voir si cette substitution les rend identiques à la proposée. Lorsque cela arrive, on a deux valeurs de $\frac{dy}{dx(\alpha}$, égales entre elles en vertu de cette équation.

Ces valeurs étant données par les équations $P=0$, $Q=0$, $R=0$, &c., qui ne peuvent contenir que x, y, z, $\frac{dy}{dx(\alpha}$, $\frac{dz}{dx(\alpha}$, avant que $\frac{dz}{dx(\alpha}$ y ait été remplacé par $p+q\frac{dy}{dx(\alpha}$, on aura deux équations entre ces cinq quantités, qu'on pourra considérer comme aux différentielles ordinaires entre les trois variables x, y, z, pourvu que, dans le système de deux équations avec deux constantes arbitraires, qui en représente l'intégrale, on remplace ces deux constantes, l'une par α, et l'autre par $\phi\,\alpha$. Ainsi écrit, ce système sera l'intégrale complète de l'équation proposée.

Si l'on représente ces deux équations par $V=0$ et par $V'=0$, V et V' étant des fonctions de x, y, z, α, $\phi\,\alpha$, et qu'on suppose

$$dV = H\,dx + K\,dy + L\,dz + M\,d\alpha + N\,d\phi,$$
$$dV' = H'\,dx + K'\,dy + L'\,dz + M'\,d\alpha + N'\,d\phi,$$

on aura, en différenciant ces quatre équations,

$$H + Lp + (M + N\varphi'\alpha)\frac{d\alpha}{dx(y} = 0,$$

$$K + Lq + (M + N\varphi'\alpha)\frac{d\alpha}{dy(x} = 0,$$

$$H' + L'p + (M' + N'\varphi'\alpha)\frac{d\alpha}{dx(y} = 0,$$

$$K' + L'q + (M' + N'\varphi'\alpha)\frac{d\alpha}{dy(x} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{H + Lp}{K + Lq} = \frac{\frac{d\alpha}{dx(y}}{\frac{d\alpha}{dy(x}} = \frac{H' + L'p}{K' + L'q},$$

c'est-à-dire

$$HK' - H'K + (K'L - KL')p + (HL' - H'L)q = 0,$$

d'où il reste à éliminer α et $\varphi\,\alpha$ au moyen des deux équations $V = 0$ et $V' = 0$: les valeurs de α et de $\varphi\,\alpha$ données par ces équations ne pouvant contenir que x, y, z, on aura pour chacune de ces valeurs une équation de la forme $Pp + Qq + R = 0$, où p et q n'entreront qu'au premier degré ; et l'équation donnée, supposée délivrée de fractions et de radicaux, sera le produit de toutes ces équations. Les valeurs de p et de q ne peuvent donc être hétérogènes à l'intégrale qu'autant que l'équation donnée est décomposable en facteurs de cette forme ; mais on n'a aucun moyen général de faire cette décomposition, dès que l'équation algébrique qu'il faudrait résoudre pour cela est d'un degré plus élevé que le quatrième ; et cependant la méthode qu'on donne ordinairement suppose cette décomposition. Celle que je viens d'exposer n'a pas le même inconvénient, puisqu'un calcul de simple élimination fait connaître si les valeurs de p et de q sont hétérogènes à l'intégrale, et donne en même temps les deux équations aux différentielles ordinaires délivrées de fractions et de radicaux ; équations qu'on pourra, le plus souvent, intégrer sans les résoudre, soit par la différenciation, soit par d'autres moyens.

Il est à remarquer que les solutions particulières de ces équations donneront des solutions particulières de l'équation qu'on se propose d'intégrer : le moyen le plus simple pour distinguer ces solutions des intégrales particulières de l'équation, lorsque l'on connaît l'intégrale générale, consiste à tirer de l'équation ainsi obtenue et de l'intégrale générale les valeurs de $\frac{\frac{d\alpha}{dx(y}}{\frac{d\alpha}{dy(x}}$ et de $\frac{\frac{d\varphi\alpha}{dx(y}}{\frac{d\varphi\alpha}{dy(x}}$. Si ces valeurs sont égales, on n'aura qu'une intégrale particulière; si elles ne le sont pas, $\varphi\alpha$ ne sera plus dans ce cas une fonction de α, et l'équation trouvée sera une solution particulière. Soit, par exemple, l'équation

$$(p+1)(q+1)z=(p+1)^2x+(q+1)^2y,$$

Comme elle n'est que du second degré relativement à p et à q, et qu'on peut la décomposer, en la résolvant par rapport à $\frac{p+1}{q+1}$, en deux facteurs de la forme

$$Pp+Qq+R=0,$$

il suffirait d'intégrer un de ces facteurs et de le délivrer de radicaux pour avoir l'intégrale cherchée. Mais on pourra la trouver, sans résoudre l'équation donnée, de la manière suivante. La substitution des valeurs de p et de q donne, après qu'on a égalé à zéro les coefficiens de chaque puissance de $\frac{\frac{dz}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}$, ces trois équations :

$$z\frac{dz}{dx(\alpha}+z-x\left(\frac{dz}{dx(\alpha}\right)^2-2x\frac{dz}{dx(\alpha}-x-y=0,$$

$$z\frac{dz}{dx(\alpha}-z\frac{dy}{dx(\alpha}+z+2x\frac{dz}{dx(\alpha}\frac{dy}{dx(\alpha}+2x\frac{dy}{dx(\alpha}-2y=0,$$

$$z\frac{dy}{dx(\alpha}+x\left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^2+y=0,$$

qu'on peut écrire ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} z\left(\frac{dz}{dx\,(\alpha}+1\right)-x\left(\frac{dz}{dx\,(\alpha}+1\right)^2-y=0; \\ z\left(\frac{dz}{dx\,(\alpha}+1\right)-z\frac{dy}{dx\,(\alpha}+2x\frac{dy}{dx\,(\alpha}\left(\frac{dz}{dx\,(\alpha}+1\right)-2y=0, \\ z\frac{dy}{dx\,(\alpha}+x\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^2+y=0, \end{array}\right\}[\mathrm{A}]$$

En retranchant la première de la somme des deux autres, on a

$$x\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}+\frac{dz}{dx\,(\alpha}+1\right)^2=0,$$

qui ne peut être satisfaite qu'autant que

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha}+\frac{dz}{dx\,(\alpha}+1=0:$$

on en tire

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha}=-\frac{p+1}{q+1};$$

et, par conséquent,

$$\frac{dz}{dx\,(\alpha}+1=p+q\frac{dy}{dx\,(\alpha}+1=\frac{p+1}{q+1},$$

ces valeurs, substituées dans les équations [A], les rendent toutes trois identiques à la proposée : il ne s'agit donc plus que d'intégrer

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha}+\frac{dz}{dx\,(\alpha}+1=0,$$

et

$$z\frac{dy}{dx\,(\alpha}+x\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^2+y=0.$$

En différenciant la seconde équation, après l'avoir divisée par $\frac{dy}{dx\,(\alpha}$, on obtient

$$\frac{dz}{dx\,(\alpha}+\frac{dy}{dx\,(\alpha}+x\frac{d^2y}{dx^2\,(\alpha}+1-\frac{y\frac{d^2y}{dx^2\,(\alpha}}{\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^2}=0,$$

cette équation se réduit, à cause de

$$\frac{dz}{dx\,(\alpha} + \frac{dy}{dx\,(\alpha} + 1 = 0, \quad \text{à} \quad \left[x\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^2 - y\right]\frac{d^2y}{dx^2\,(\alpha} = 0.$$

le second facteur donne

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha} + \alpha = 0,$$

ou

$$y + \alpha x = \phi\,\alpha;$$

mais nous avons trouvé

$$\frac{p+1}{q+1} = -\frac{dy}{dx\,(\alpha} = \alpha,$$

et on tire de l'équation donnée

$$z = \frac{p+1}{q+1}\,x + \frac{q+1}{p+1}\,y:$$

l'intégrale générale est donc représentée par le système des deux équations

$$y + \alpha x = \phi\,\alpha,$$

$$z = \alpha x + \frac{y}{\alpha}.$$

Il serait aisé d'éliminer α en laissant à la fonction arbitraire toute sa généralité ; mais on introduirait des radicaux dans l'intégrale ; et cette opération, qui n'est possible dans cet exemple que parce que α n'entre qu'au second degré dans

$$\alpha^2 - \frac{z}{x}\,\alpha + \frac{y}{x} = 0,$$

ne peut s'effectuer en général. La seule forme qu'on puisse regarder comme commune à toutes les intégrales des équations aux différentielles partielles du premier ordre, lors même qu'elles peuvent être décomposées en facteurs tels que $Pp + Qq + R = 0$, est celle d'un système de deux équations entre $x, y, z, \alpha, \phi\,\alpha$. La seule différence qu'il y ait entre les intégrales de ces équations et celles des équations qui ne sont pas décomposables en facteurs de cette forme, consiste en ce que les premières étant données par l'intégration de deux équations du premier ordre aux différentielles ordinaires, elles ne peuvent contenir que α et $\phi\,\alpha$, parce que cette intégration n'introduit dans le calcul que deux constantes arbitraires, tandis que les secondes sont données par l'intégration de trois équations du premier ordre dont l'intégration introduit dans le calcul trois constantes arbitraires, ainsi que nous le verrons tout-à-l'heure. Ces intégrales doivent être remplacées par α, $\phi\,\alpha$ et une fonction de α dérivée de $\phi\,\alpha$, telle que $\phi'\,\alpha$, ou une combinaison quelconque de α, $\phi\,\alpha$ et $\phi'\,\alpha$; c'est pourquoi l'intégrale de l'équation cherchée contient $\phi'\,\alpha$ dans ce dernier cas.

L'autre facteur de l'équation

$$\left[x\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^2 - y\right]\frac{d^2y}{dx^2(\alpha} = 0,$$

donne

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha} = \pm\sqrt{\frac{y}{x}},$$

d'où il suit que

$$\frac{p+1}{q+1} = \mp\sqrt{\frac{y}{x}},$$

et que

$$z = \mp 2\sqrt{xy}.$$

Il est aisé de voir que les valeurs

$$p = \mp\sqrt{\frac{y}{x}}, \qquad q = \mp\sqrt{\frac{x}{y}},$$

résultant de cette équation, donnent

$$\frac{p+1}{q+1} = \mp\sqrt{\frac{y}{x}};$$

et satisfont, par conséquent, à l'équation donnée.

Pour savoir si cette valeur de z est une intégrale particulière ou une solution particulière, on la substituera dans

$$z = \alpha x + \frac{y}{\alpha},$$

ce qui donnera

$$\alpha x + \frac{y}{\alpha} = \mp 2\sqrt{xy},$$

ou

$$\alpha^2 \pm 2\alpha\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} = 0,$$

ainsi

$$\alpha = \mp\sqrt{\frac{y}{x}}, \quad \text{et} \quad \phi\,\alpha = y + \alpha x = y \mp \sqrt{xy},$$

on tire de la valeur de α

$$\frac{\frac{d\alpha}{dx\,(y}}{\frac{d\alpha}{dy\,(x}} = -\frac{y}{x};$$

et de celle de $\phi\,\alpha$

$$\frac{\frac{d\phi\alpha}{dx\,(y}}{\frac{d\phi\alpha}{dy\,(x}} = \frac{\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}}{1\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}} = \frac{y}{x\mp 2\sqrt{xy}},$$

Ces deux valeurs n'étant pas égales, la valeur de $\phi\,\alpha$ ne saurait être une fonction de celle de α, et l'équation $z = \mp 2\sqrt{xy}$ est une solution particulière.

Lorsque, après avoir formé les équations $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, &c. il il arrive que la valeur $\frac{dy}{dx(\alpha}$ tirée d'une de ces équations et substituée dans les autres ne les rend pas identiques à la proposée, il s'ensuit qu'il faut que les valeurs de p et de q, tirées de l'intégrale, soient homogènes à cette intégrale pour qu'elle puisse être générale, et les équations $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, &c., n'ont plus lieu séparément. Il faut, dans ce cas, différencier par rapport à y l'équation donnée que je suppose représentée par $V = 0$, ce qui donne

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) + \left(\frac{dV}{dz}\right) q + \left(\frac{dV}{dp}\right) s + \left(\frac{dV}{dq}\right) t = 0;$$

et après avoir substitué

$$\frac{dq}{dx(\alpha} - \frac{dy}{dx(\alpha} \frac{\frac{dq}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}$$

à la place de s, et $\frac{\frac{dq}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}$ à la place de t, on formera les deux équations

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) + \left(\frac{dV}{dz}\right) q + \left(\frac{dV}{dp}\right) \frac{dq}{dx(\alpha} = 0,$$

et

$$\left(\frac{dV}{dp}\right) \frac{dy}{dx(\alpha} - \left(\frac{dV}{dq}\right) = 0.$$

Ces formules sont celles dont on se sert pour intégrer les équations aux différentielles partielles du premier ordre. Je ne les rappelle ici que pour montrer comment elles résultent des considérations précédentes, et pour ajouter à la théorie de cette intégration quelques observations.

1.° Si on remet dans la première de ces équations à la place de

$\frac{dq}{dx(\alpha}$ sa valeur $s + t\frac{dy}{dx(\alpha}$ et qu'on y remplace ensuite $\frac{dy}{dx(\alpha}$ par sa valeur tirée de la seconde, on aura précisément l'équation

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) + \left(\frac{dV}{dz}\right)q + \left(\frac{dV}{dp}\right)s + \left(\frac{dV}{dq}\right)t = 0$$

obtenue en différenciant l'équation donnée par rapport à y; cette identité prouve que les valeurs de r, s, t, tirées de l'intégrale, peuvent être hétérogènes à cette intégrale sans qu'elle cesse d'être générale, et montre en même temps qu'un système d'équation primitive qui satisfera aux deux équations entre lesquelles nous avons éliminé $\frac{dy}{dx(\alpha}$, satisfera aussi à la dérivée par rapport à y de l'équation donnée, et en serait l'intégrale générale, si elle ne donnait d'ailleurs aucune autre relation entre x, y, z, p, q, r, s, t; mais ce n'est pas cette intégrale générale qu'on cherche, c'est un de ces cas particuliers qui donnent en même temps, entre x, y, z, p, q, l'équation $V = 0$; il faut donc restreindre la généralité de ces deux équations de manière à satisfaire à cette condition, et c'est ce qu'on fait dans le procédé qu'on suit ordinairement en les combinant avec l'équation $V = 0$ et avec l'équation $\frac{dz}{dx(\alpha} = p + q\frac{dy}{dx(\alpha}$; par ce moyen on a quatre équations entre les six quantités α, x, y, z, p, q, et des dérivées du premier ordre. Comme ces dérivées sont toutes relatives à x, α étant considéré comme constant, on peut les intégrer comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, en remplaçant par α et des fonctions de α les constantes introduites par l'intégration.

2.° Comme, parmi ces quatre équations, en vertu desquelles y, z, p, q sont fonctions de x et de α, il y en a trois qui contiennent des différentielles du premier ordre, l'intégrale qui se réduira à un système de deux équations après qu'on aura éliminé p et q, contiendra trois constantes arbitraires, dont une devra être remplacée par α, et les deux autres par des fonctions de α; mais ces deux fonctions devront dépendre l'une de l'autre, quoique les quatre équations d'où l'on part soient satisfaites en les laissant indépendantes, puisque les différentiations par lesquelles on pourrait les vérifier ne sont relatives qu'à x, et qu'ainsi α et ses fonctions sont considérées comme des constantes dans ces différentiations. Ces quatre équations ne contiennent donc pas toutes les conditions de la question, et, tant qu'on les considère seules, on arrive nécessairement à un résultat trop général. On sait que M. *Delagrange*, en donnant la théorie générale des équations aux différentielles partielles du premier ordre, a résolu cette difficulté par des considérations qui établissent une relation entre les deux fonctions de α, et qu'on l'évite dans la pratique en ne calculant qu'une des deux équations dont l'intégrale doit être composée, et en y joignant la dérivée de cette intégrale prise par rapport à α seul. Mais ce dernier procédé ne réussit que dans le cas où l'équation qu'on calcule satisfait seule à l'équation proposée, lorsqu'on y laisse des constantes à la place de α et de ses fonctions, ce qui n'arrive pas toujours; en sorte que l'on n'est sûr d'avoir une intégrale en l'employant, qu'autant qu'on a vérifié cette intégrale. Cette méthode n'est donc qu'une sorte de tâtonnement; au lieu que tirant des quatre équations sur lesquelles on opère, les deux équations entre x, y, z, α et les fonctions de α qui résultent de l'élimination de p et de q, on a toujours une intégrale complète de la proposée, pourvu qu'on établisse entre les deux fonctions de α la relation qui doit exister entre elles, pour qu'on ait non-seulement les quatre équations d'où l'on est parti et qui ont lieu entre les dérivées relatives à x seul, mais encore les équations qu'on trouve en même temps, et qui contiennent aussi des dérivées relatives à α. Ces dernières sont:

$$p\,\frac{dy}{d\alpha(x} = \frac{dz}{dx(\alpha}\,\frac{dy}{d\alpha(x} - \frac{dy}{dx(\alpha}\,\frac{dz}{d\alpha(x},$$

$$q\,\frac{dy}{d\alpha(x} = \frac{dz}{d\alpha(x}.$$

$$\frac{dp}{d\alpha\,(x} = \frac{dq}{dx\,(\alpha} \cdot \frac{dy}{d\alpha\,(x} - \frac{dy}{dx\,(\alpha} \cdot \frac{dq}{d\alpha\,(x}.$$

Ces équations étant au nombre de trois, il semble d'abord qu'on en ait deux de trop, puisqu'il n'en faut qu'une pour déterminer la relation entre les deux fonctions de α par lesquelles on a remplacé deux des constantes arbitraires. Mais il est aisé de voir que ces trois équations se réduisent à une seule en vertu de l'équation
$\frac{dz}{dx\,(\alpha} = p + q\,\frac{dy}{dx\,(\alpha}$, qui est une des quatre qu'on a intégrées en les considérant comme étant aux différentielles ordinaires, en sorte qu'elles donneraient nécessairement la même relation entre les deux fonctions de α contenues dans les intégrales, deux d'entre elles ne faisant qu'exprimer autrement que la troisième cette même relation. On pourra donc se servir de celle qu'on voudra des trois pour l'établir, et on sera sûr que les deux autres sont par-là même satisfaites.

Il suffit en effet de combiner l'équation

$$\frac{dz}{dx\,(\alpha} = p + q\,\frac{dy}{dx\,(\alpha},$$

avec l'une de ces deux-ci :

$$p\,\frac{dy}{d\alpha\,(x} = \frac{dz}{dx\,(\alpha}\,\frac{dy}{d\alpha\,(x} - \frac{dy}{dx\,(\alpha}\,\frac{dz}{d\alpha\,(x},$$

$$q\,\frac{dy}{d\alpha\,(x} = \frac{dz}{d\alpha\,(x},$$

pour trouver l'autre ; et lorsqu'on la différencie par rapport à α, ce qui donne

$$\frac{d^2 z}{dx\,d\alpha} = \frac{dp}{d\alpha\,(x} + \frac{dq}{d\alpha\,(x}\,\frac{dy}{dx\,(\alpha} + q\,\frac{d^2 y}{dx\,d\alpha}$$

et qu'on égale cette valeur à celle de $\frac{d^2 z}{dx\,d\alpha}$ tirée de

$\frac{dz}{d\alpha\,(x} = q\,\frac{dy}{d\alpha\,(x}$, qui est $\frac{d^2 z}{dx\,d\alpha} = \frac{dq}{dx\,(\alpha}\,\frac{dy}{d\alpha\,(x} + q\,\frac{d^2 y}{dx\,d\alpha}$.

on trouve la troisième équation

$$\frac{dp}{d\alpha(x} = \frac{dq}{dx(\alpha} \frac{dy}{d\alpha(x} - \frac{dy}{dx(\alpha} \frac{dq}{d\alpha(x}:$$

Après avoir déterminé la relation entre les deux fonctions de α au moyen de celle de ces trois équations qu'on jugera devoir la donner plus aisément dans chaque cas particulier, on aura toujours une intégrale de la proposée exprimée par un système de deux équations, de quelque manière qu'on élimine p et q, des quatre équations obtenues avec les trois constantes arbitraires, qu'on a remplacées par α et deux fonctions de α, et il n'y aura plus lieu à établir la distinction que fait le célèbre auteur des Leçons sur le calcul des fonctions, à la *page 395* de cet ouvrage, entre les équations résultant de l'élimination de p et de q qui satisfont à la proposée en y supposant toutes les arbitraires constantes, et celles qui n'y satisfont pas dans la même supposition, puisque les unes et les autres expriment également, combinées deux à deux, des intégrales de la proposée, après qu'on y a remplacé ces arbitraires par leurs valeurs en α et $\phi\ \alpha$.

Pour ne laisser aucun doute sur ce sujet, il suffit de discuter d'après les considérations précédentes le système d'équation donné dans l'ouvrage que je viens de citer, pour représenter les relations entre x, y, z, p, q et trois constantes arbitraires dont on doit tirer l'intégrale de l'équation que l'auteur a choisie pour exemple.

Ce système se compose des quatre équations

$$\begin{aligned} z &= p\,q, \\ y &= p + a, \\ z &= b\,p^2, \\ x &= b\,p + c, \end{aligned}$$

où a, b, c sont les trois constantes arbitraires, en les remplaçant par

$\varphi\,\alpha$, $\psi\,\alpha$, et $-\alpha$, on a

$$\begin{aligned} z &= p\,q, \\ y &= p + \varphi\,\alpha, \\ z &= p^2\,\psi\,\alpha, \\ x + \alpha &= p\quad \psi\,\alpha. \end{aligned}$$

comme q n'entre que dans la première de ces quatre équations, p reste seul à éliminer entre les trois autres; et il faut faire voir que, de quelque manière qu'on fasse cette élimination, les deux équations délivrées de p et de q qui en résultent expriment toujours l'intégrale de la proposée. Commençons par établir la relation entre $\varphi\,\alpha$ et $\psi\,\alpha$, déduite d'une des trois équations données ci-dessus pour cette détermination,

$$\frac{dz}{d\alpha\,(x} = q\,\frac{dy}{d\alpha\,(x},$$

par exemple. Pour cela on prendra d'abord les valeurs de z, q et y en x, α, $\varphi\,\alpha$, $\psi\,\alpha$; savoir :

$$\begin{aligned} z &= \frac{(x+\alpha)^2}{\psi\,\alpha}, \\ q &= x + \alpha \\ y &= \frac{x+\alpha}{\psi\,\alpha} + \varphi\,\alpha, \end{aligned}$$

et en les substituant dans

$$\frac{dz}{d\alpha\,(x} = q\,\frac{dy}{d\alpha\,(x},$$

il viendra

$$2(x+\alpha)\,\psi\,\alpha - (x+\alpha)^2\,\psi'\,\alpha = (x+\alpha)\,[\psi\,\alpha - (x+\alpha)\,\psi'\,\alpha + \varphi'\,\alpha\,\psi\,\alpha^2]$$

ou

$$(x+\alpha)\,\psi\,\alpha = (x+\alpha)\,\varphi'\,\alpha\,\psi\,\alpha^2,$$

ainsi

$$\psi\,\alpha = \frac{1}{\varphi'\alpha},$$

et les trois équations entre lesquelles il faut éliminer p deviennent

$$y = p + \varphi\,\alpha,$$

$$z = \frac{p^2}{\varphi'\alpha},$$

$$x + \alpha = \frac{p}{\varphi'\alpha};$$

en éliminant p entre les deux premières, on a

$$z = \frac{(y - \varphi\,\alpha)^2}{\varphi'\alpha},$$

qui, en effet, ne satisferait pas à la proposée en y faisant α constant, mais qui y satisfait en laissant α variable, comme il l'est effectivement, et la combinant avec la troisième équation, qui devient alors

$$x + \alpha = \frac{y - \varphi\,\alpha}{\varphi'\alpha};$$

car il est aisé de vérifier que le système de ces deux équations donne $z = p\,q$, équation dont il exprime par conséquent l'intégrale primitive.

Si l'on élimine p entre la seconde et la troisième équation, on a

$$z = (x + \alpha)^2\,\varphi'\alpha$$

qui ne vérifie pas l'équation $z = p\,q$, quand on n'y fait pas varier α, mais qui n'en compose pas moins avec la première équation changée, par la même valeur de p, en

$$y = (x + \alpha)\,\varphi'\alpha + \varphi\,\alpha$$

l'intégrale primitive de $z = p\,q$, puisqu'il est aisé de vérifier que le système de ces deux valeurs de z et de y, donne en effet cette dernière équation. L'élimination de p entre la première et la troisième équation conduit au même résultat, car on a d'abord

$$y = (x + \alpha)\,\varphi'\alpha + \varphi\alpha,$$

qu'il faut combiner avec la seconde équation, qui devient

$$z = (x + \alpha)^2\,\varphi'\alpha,$$

en vertu de la valeur de p tirée de la troisième.

La circonstance particulière d'une équation résultant de l'élimination de p, qui satisfasse à la proposée en y supposant α constant, ne fait rien à la nature de l'intégrale; c'est un résultat en quelque sorte accidentel, quoiqu'on puisse y parvenir dans toutes les intégrales, ainsi que je le démontrerai ci-après, en combinant d'une certaine manière les trois équations entre lesquelles p doit être éliminé, et, en effet, α, $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$, ne sont pas réellement des constantes, parce qu'elles sont introduites dans le calcul par l'intégration d'équations qui ne sont pas réellement aux différentielles ordinaires, mais qui seulement sont susceptibles d'être traitées comme telles à cause qu'étant aux différentielles partielles par rapport aux deux variables indépendantes x et α, elles ne contiennent que des dérivées relatives à x. Dans l'exemple que nous discutons, il faut, pour trouver un résultat de ce genre, changer d'abord, comme on le voit dans les Leçons sur la théorie des fonctions, la troisième équation en $x + \alpha = \frac{z}{p}$, et y substituer la valeur de p tirée de la première, ce qui donne

$$z = (x + \alpha)(y - \varphi\alpha),$$

qui doit être combiné avec le résultat de l'élimination de p entre la première et la troisième, savoir :

$$y = (x + \alpha)\,\varphi'\alpha + \varphi\alpha.$$

On voit que si, dans ce cas, la valeur de z satisfait à la proposée en y regardant α et $\varphi\alpha$ comme deux constantes, c'est uniquement parce que cette dernière équation, qu'on peut écrire ainsi,

$$y - \Phi\,\alpha - (x + \alpha)\,\Phi'\,\alpha = 0;$$

est la dérivée partielle de l'équation

$$z = (x + \alpha)\,(y - \Phi\,\alpha),$$

en n'y faisant varier que α, ce qui fait disparaître

$$\frac{d\,\alpha}{d\,x\,(y} \text{ et } \frac{d\,\alpha}{d\,y\,(x}$$

des valeurs de p et de q, qu'on en tirerait en la différençiant successivement par rapport à x et par rapport à y, précisément comme si α et $\Phi\,\alpha$ étaient remplacées par deux constantes.

Mais lorsque cette circonstance n'a pas lieu, l'équation donnée n'est plus vérifiée par la supposition de α constant, parce qu'elle doit résulter non de la suppression des termes en $\frac{d\,\alpha}{d\,x\,(y}$ et $\frac{d\,\alpha}{d\,y\,(x}$, qui ne s'en vont point alors, mais de l'élimination de ces deux dernières quantités de α et de ses fonctions, entre les deux équations dont se compose l'intégrale, et les quatre équations qu'on en tire en les différenciant successivement par rapport à x et à y. Ainsi les deux équations

$$y = (x + \alpha)\,\Phi'\,\alpha + \Phi\,\alpha,$$
$$z = (x + \alpha)^2\,\Phi'\,\alpha,$$

donnent d'abord

$$0 = \Phi'\,\alpha + \frac{d\,\alpha}{d\,x\,(y}\,[2\,\Phi'\,\alpha + (x + \alpha)\,\Phi''\,\alpha],$$
$$1 = \frac{d\,\alpha}{d\,y\,(x}\,[2\,\Phi'\,\alpha + (x + \alpha)\,\Phi''\,\alpha],$$

d'où

$$\frac{d\,\alpha}{d\,x\,(y} = -\frac{\varphi'\,\alpha}{2\,\varphi'\,\alpha + (x + \alpha)\,\varphi''\,\alpha},$$
$$\frac{d\,\alpha}{d\,y\,(x} = \frac{1}{2\,\varphi'\,\alpha + (x + \alpha)\,\varphi''\,\alpha},$$

et ensuite

$$p = 2(x+\alpha)\varphi'\alpha + \frac{d\alpha}{dx\,(y}\left[2(x+\alpha)\varphi'\alpha + (x+\alpha)^2\varphi''\alpha\right] = (x+\alpha)\varphi'\alpha,$$

$$q = \frac{d\alpha}{dy\,(x}\left[2(x+\alpha)\varphi'\alpha + (x+\alpha)^2\varphi''\alpha\right] = x+\alpha,$$

En tirant de ces deux équations les valeurs de $x+\alpha$ et de $\varphi'\alpha$, savoir :

$$x + \alpha = q,$$
$$\varphi'\alpha = \frac{p}{q},$$

et les substituant dans $z = (x+\alpha)^2\,\varphi'\alpha$, on trouve précisément l'équation à vérifier $z = pq$.

Au lieu d'employer l'équation

$$\frac{dz}{d\alpha\,(x} = q\,\frac{dy}{d\alpha\,(x},$$

pour trouver la relation qui fait dépendre l'une des deux fonctions de α de l'autre, on aurait pu se servir de

$$p\,\frac{dy}{d\alpha\,(x} = \frac{dz}{dx\,(\alpha}\,\frac{dy}{d\alpha\,(x} - \frac{dy}{dx\,(\alpha}\,\frac{dz}{d\alpha\,(x},$$

ou de

$$\frac{dp}{d\alpha\,(x} = \frac{dq}{dx\,(\alpha}\,\frac{dy}{d\alpha\,(x} - \frac{dy}{dx\,(\alpha}\,\frac{dq}{d\alpha\,(x};$$

il est aisé de vérifier qu'on aurait trouvé de même

$$\psi\alpha = \frac{1}{\varphi'\alpha};$$

c'est même en partant de

$$\frac{dp}{d\alpha\,(x} = \frac{dq}{dx\,(\alpha}\,\frac{dy}{d\alpha\,(x} - \frac{dy}{dx\,(\alpha}\,\frac{dq}{d\alpha\,(x};$$

qu'on aurait trouvé cette relation de la manière la plus simple dans l'exemple actuel, où

$$y = \frac{x + \alpha}{\psi \alpha} + \phi \alpha;$$

$$p = \frac{x + \alpha}{\psi \alpha},$$

$$q = x + \alpha,$$

C'est d'ailleurs cette dernière formule qu'il convient toujours d'employer quand z n'entre pas dans l'équation donnée, parce qu'alors on ne doit opérer que sur les trois équations

$$V = 0,$$

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) + \left(\frac{dV}{dz}\right) q + \left(\frac{dV}{dp}\right) \frac{dq}{dx\,(\alpha} = 0,$$

$$\left(\frac{dV}{dp}\right) \frac{dy}{dx\,(\alpha} - \left(\frac{dV}{dq}\right) = 0,$$

qui donnent y, p, et q en fonctions de x, α, $\phi\,\alpha$, $\psi\,\alpha$; et la valeur de $\psi\,\alpha$ se déterminera immédiatement en employant celle des trois formules d'où l'on peut le déduire, qui ne contient pas z.

y, p et q étant alors connus en fonctions de x, α, $\phi\,\alpha$ et $\phi'\,\alpha$, on aura z en intégrant

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

relativement à x et à α considérés à-la-fois comme variables, afin que cette intégration n'introduise aucune nouvelle fonction arbitraire. Cette intégration pourra d'ailleurs toujours s'exécuter, puisque l'équation

$$\frac{dp}{d\alpha\,(x} = \frac{dq}{dx\,(\alpha} \; \frac{dy}{d\alpha\,(x} - \frac{dy}{dx\,(\alpha} \; \frac{dq}{d\alpha\,(x},$$

d'où l'on a tiré la valeur de α, exprime, comme nous l'avons vu, la condition d'intégrabilité de cette valeur de dz, en y considérant x et α comme les deux variables indépendantes.

Au contraire, quand l'équation donnée contient z, il faut employer simultanément les quatre équations qui donnent y, z, p, q en fonctions de x, α, $\phi\,\alpha$, $\psi\,\alpha$, déterminer ensuite $\psi\,\alpha$ avec l'une quelconque des trois formules dont on peut tirer la relation entre cette fonction et $\phi\,\alpha$, et éliminer p et q pour avoir les deux équations dont se compose l'intégrale, sans qu'il soit nécessaire de recourir à l'intégration de la valeur de $d\,z$ pour trouver z.

Il est bien évident qu'une des deux équations de l'intégrale ne peut satisfaire à l'équation donnée, lorsqu'on y remplace α et $\phi\,\alpha$ par des constantes, que dans le cas particulier où cette équation étant représentée par $U = 0$, l'autre l'est par $\left(\frac{d\,U}{d\,\alpha}\right) = 0$. Cette circonstance n'est nullement nécessaire pour que l'intégrale vérifie l'équation ; et, parmi un grand nombre de formes qu'on peut donner à l'intégrale en faisant l'élimination de différentes manières, elle ne peut avoir lieu que dans quelques-unes de ces formes arrangées exprès : mais est-elle toujours possible ainsi que je l'ai avancé ? La solution de cette question est d'ailleurs intéressante sous le point de vue de la simplicité des intégrales et de leur application aux problèmes de la géométrie des surfaces courbes. C'est la seule chose qui me reste à faire pour compléter la théorie de l'intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre.

Lorsque l'intégrale d'une de ces équations est représentée par deux équations entre x, y, z et α, et des fonctions de α, on peut exprimer la même intégrale par deux autres équations obtenues en les combinant de manière que les deux nouvelles équations soient une suite des deux premières, et réciproquement. Si l'on tire de celles-ci la valeur de

$$\frac{\frac{d\,z}{d\,\alpha\,(x}}{\frac{d\,y}{d\,\alpha\,(x}},$$

qui est celle de q en fonction de x, α et des fonctions de α, et qu'on représente cette valeur par Q, qu'on fasse ensuite $z - Qy = u$, qu'on substitue, par conséquent, $u + Qy$ au lieu de z, dans ces deux équations; qu'on élimine y, et que, dans l'équation résultant de cette opération, on écrive $z - Qy$ à la place de u, on aura une équation qui pourra représenter l'intégrale de la proposée, en la réunissant à une autre combinaison des deux équations dont se composait cette intégrale sous la première forme. Le système de ces deux équations donnera, par conséquent,

$$\frac{\frac{dz}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}} = Q,$$

comme les deux premières.

Mais en représentant l'équation obtenue de la manière qui vient d'être expliquée, par

$$F(x, u, \alpha) = 0,$$

on trouve, en la différenciant par rapport à α,

$$\left(\frac{dz}{d\alpha(x} - Q\frac{dy}{d\alpha(x} - y\frac{dQ}{d\alpha(x}\right) F'(u) + F'(\alpha) = 0,$$

ou

$$\frac{\frac{dz}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}} = Q - \frac{F'(\alpha) - y\frac{dQ}{d\alpha(x}F'(u)}{\frac{dy}{d\alpha(x}};$$

il faudra donc, pour que cette valeur se réduise à Q, que l'autre équation de ce système soit équivalente à

$$F'(\alpha) - y\frac{dQ}{d\alpha(x}F'(u) = 0,$$

et l'intégrale pourra, par conséquent, être représentée par le système des deux équations

$$F(x, z - Qy, \alpha) = 0,$$

et

$$F'(\alpha) - y \frac{dQ}{d\alpha(x} F'(z - Qy) = 0;$$

dont la seconde est la dérivée partielle de la première, relativement à α seul. Non-seulement cette observation prouve que cette transformation est toujours possible, mais elle donne le moyen de l'exécuter par un simple calcul d'élimination ; puisque après avoir chassé y des deux équations où l'on a remplacé z par $u + Qy$, il suffit d'écrire dans le résultat $z - Qy$ au lieu de u, et de joindre à l'équation qui en résulte, sa dérivée partielle relative à α seul. Il est à remarquer que ce procédé s'applique également à toutes les intégrales représentées par un système de deux équations entre x, y, z, α et des fonctions de α, soit que, p et q pouvant être hétérogènes à l'intégrale, on l'obtienne au moyen de deux équations différentielles du premier ordre, et qu'elle ne puisse contenir, par conséquent, que deux constantes arbitraires remplacées par α et $\phi\,\alpha$; soit que, p et q étant nécessairement homogènes à l'intégrale, ces deux équations aient été obtenues en intégrant trois équations aux différentielles partielles, et contiennent, par conséquent, trois constantes arbitraires auxquelles on ait substitué α, $\phi\,\alpha$, et la valeur de $\psi\,\alpha$ en α et $\phi\,\alpha$, tirée de la relation existant entre $\psi\,\alpha$ et $\phi\,\alpha$. Mais, dans le premier cas, q n'étant pas homogène à l'intégrale, cette transformation introduit dans le calcul une fonction de α qui n'entrait pas dans les deux équations dont était composée l'intégrale, sous sa première forme; en sorte qu'on trouve, en général, par ce procédé, une intégrale plus compliquée que celle qu'on avait d'abord; tandis que, dans le second cas, il suit de ce qui a été démontré précédement, que la valeur de q ne contient que les mêmes fonctions qui entrent nécessairement dans l'intégrale; en sorte que, dans ce cas, on obtient en général une intégrale dont la forme est plus simple que celle de l'intégrale dont on est parti. Nous avons vu, par exemple, que ce système de deux équations

$$y + \alpha x = \phi\,\alpha,$$
$$z = \alpha x + \frac{y}{\alpha},$$

est l'intégrale de l'équation

$$(p + 1)(q + 1)\,z = x\,(p + 1)^2 + y\,(q + 1)^2.$$

On peut faire, pour simplifier le calcul, $\phi\,\alpha = \alpha\,\psi\,\alpha$, et l'intégrale devient alors

$$y = \alpha\,(\psi\,\alpha - x),$$
$$z = \alpha x + \frac{y}{\alpha} = \alpha x + \psi\,\alpha - x,$$

on en tire

$$q = \frac{\frac{d z}{d \alpha (x}}{\frac{d y}{d \alpha (x}} = \frac{x + \psi'\alpha}{\psi\,\alpha - x + \alpha\,\psi'\alpha};$$

valeur que nous avons représentée par Q; ainsi

$$u + \frac{(x + \psi'\alpha)\,y}{\psi\,\alpha - x + \alpha\,\psi'\alpha} = \alpha x + \psi\,\alpha - x,$$

et en éliminant y, et réduisant

$$u = \frac{(\psi\,\alpha - x)^2 + \alpha^2 x\,\psi'\alpha}{\psi\,\alpha - x + \alpha\,\psi'\alpha},$$

ce qui donne

$$z = u + Q\,y = \frac{(x + \psi'\alpha)\,y + (\psi\,\alpha - x)^2 + \alpha^2 x\,\psi'\alpha}{\psi\,\alpha - x + \alpha\,\psi'\alpha};$$

qu'il suffit de combiner avec sa dérivée relative à α seul; savoir :

$$\left(\frac{d\left[\frac{(x + \psi'\alpha)\,y + (\psi\,\alpha - x)^2 + \alpha^2 x\,\psi''\alpha}{\psi\,\alpha - x + \alpha\,\psi'\alpha}\right]}{d\alpha}\right) = 0;$$

pour avoir l'intégrale sous la forme

$$U = 0,$$
$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = 0.$$

Il est aisé de vérifier * que le système de ces deux équations satis-

---

* Pour faire cette vérification de la manière la plus simple, on tire d'abord de ces deux équations

$$q = \frac{x + \varphi'\alpha}{\varphi\alpha - x + \alpha\varphi'\alpha},$$

$$p = \frac{y - 2(\varphi\alpha - x) + \alpha^2\varphi'\alpha}{\varphi\alpha - x + \alpha\varphi'\alpha} + \frac{(x + \varphi'\alpha)y + (\varphi\alpha - x)^2 + \alpha^2 x\varphi'\alpha}{\varphi\alpha - x + \alpha\varphi'\alpha}$$

ou

$$p = \frac{y + z - 2(\varphi\alpha - x) + \alpha^2\varphi'\alpha}{\varphi\alpha - x + \alpha\varphi'\alpha}.$$

Mais on obtient, en développant la seconde des deux équations dont se compose l'intégrale,

$$y\varphi''\alpha + 2(\varphi\alpha - x)\varphi'\alpha + \alpha x(2\varphi'\alpha + \alpha\varphi''\alpha) - z(2\varphi'\alpha + \alpha\varphi''\alpha) = 0,$$

ou

$$[y - \alpha(\varphi\alpha - x)]\varphi''\alpha + (\varphi\alpha - x + \alpha x - z)(2\varphi'\alpha + \alpha\varphi''\alpha) = 0,$$

et on déduit de la valeur de z tirée de la première,

$$\varphi\alpha - x + \alpha x - z = \frac{(x + \varphi'\alpha)[\alpha(\varphi\alpha - x) - y]}{\varphi\alpha - x + \alpha\varphi'\alpha},$$

On a donc

$$[y - \alpha(\varphi\alpha - x)]\left(\varphi''\alpha - \frac{(x + \varphi'\alpha)(2\varphi'\alpha + \alpha\varphi''\alpha)}{\varphi\alpha - x + \alpha\varphi'\alpha}\right) = 0,$$

dont le premier facteur seul peut être nul; parce que le second, égalé à zéro, donnerait une relation entre x et α; et que ces deux quantités doivent être indépendantes pour qu'il y ait deux variables qui le soient dans l'intégrale, ainsi

$$y = \alpha(\varphi\alpha - x),$$

fait

fait en effet à la proposée; mais cette forme est évidemment plus compliquée que celle d'où l'on est parti, puisqu'il n'y entrait que x, y, z, α et $\phi\,\alpha$, et qu'on a actuellement deux équations entre x, y, z, α, $\gamma\,\alpha$, $\gamma'\,\alpha$ et $\gamma''\,\alpha$.

Au contraire, dans le cas où p et q sont nécessairement homogènes à l'intégrale, Q ne peut contenir que les mêmes fonctions de α que contiennent les deux équations dont se compose cette intégrale, et on peut toujours, par la méthode que je viens d'exposer, la mettre sous la forme

$$U = 0,$$
$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = 0,$$

sans y introduire aucune nouvelle arbitraire. Pour achever d'éclaircir cette méthode, je l'appliquerai à l'exemple suivant.

Soit l'équation donnée $z = p + q^n$; en la différenciant par rapport

---

ce qui donne aussi

$$z = \alpha x + \gamma\alpha - x$$
$$z + y = \alpha\gamma\alpha + \gamma\alpha - x,$$
$$p = \frac{\alpha(\gamma\alpha + \alpha\gamma'\alpha) - \gamma\alpha + x}{\gamma\alpha - x + \alpha\gamma'\alpha},$$
$$p + 1 = \frac{\alpha(\gamma\alpha + \gamma'\alpha + \alpha\gamma'\alpha)}{\gamma\alpha - x + \alpha\gamma'\alpha}.$$

Et comme

$$q + 1 = \frac{\gamma\alpha + \gamma'\alpha + \alpha\gamma'\alpha}{\gamma\alpha - x + \alpha\gamma'\alpha},$$

on a

$$\alpha = \frac{p+1}{q+1},\ \gamma\alpha - x = \frac{y}{\alpha} = \frac{q+1}{p+1}\,y,$$

ce qui change la valeur de z en

$$z = \frac{p+1}{q+1}\,x + \frac{q+1}{p+1}\,y.$$

qui satisfait évidemment à l'équation proposée.

à y, et formant ensuite les équations $P=0$ et $Q=0$, &c., comme nous l'avons dit, on aura

$$q=\frac{dq}{dx(\alpha},\quad \frac{dy}{dx(\alpha}=nq^{n-1},$$

d'où

$$q=\alpha e^{x},\ y=\frac{n}{n-1}\alpha^{n-1}e^{(n-1)x}+\varphi'\alpha,$$

et

$$p=\frac{dz}{dx(\alpha}-n\alpha^{n}e^{nx}.$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation proposée, on aura

$$\frac{dz}{dx(\alpha}-z=(n-1)\alpha^{n}e^{nx},$$

et par conséquent

$$z=\alpha^{n}e^{nx}+e^{x}\psi\alpha.$$

Au moyen de ces valeurs de y, de z et de q, l'équation

$$\frac{dz}{d\alpha(x}=q\frac{dy}{d\alpha(x}$$

donnera successivement

$$\psi'\alpha=\alpha\varphi''\alpha\ ,\quad \psi\alpha=\alpha\varphi'\alpha-\varphi\alpha;$$

l'intégrale de l'équation donnée sera donc représentée par le système des deux équations

$$z=\alpha^{n}e^{nx}+e^{x}(\alpha\varphi'\alpha-\varphi\alpha),$$

$$y=\frac{n}{n-1}\alpha^{n-1}e^{(n-1)x}+\varphi'\alpha.$$

Si l'on veut transformer cette intégrale de manière qu'une des deux équations soit la dérivée partielle de l'autre relativement à α, il faudra en déduire la valeur de

$$u = z - \frac{\frac{dz}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}} y,$$

on trouvera

$$u = -\frac{1}{n-1}\alpha^n e^{nx} - e^x \phi \alpha,$$

et par conséquent

$$z = Qy + u = \alpha e^x y - \frac{1}{n-1}\alpha^n e^{nx} - e^x \phi\alpha;$$

cette équation, combinée avec sa dérivée partielle relative à α, qui se réduit à

$$y - \frac{n}{n-1}\alpha^{n-1} e^{(n-1)x} - \phi'\alpha = 0,$$

représente l'intégrale de l'équation donnée sous la forme demandée.

Cette méthode donne toujours l'intégrale sous cette forme, mais elle peut être plus ou moins simple, suivant la nature de l'équation donnée. Pour l'avoir sous la forme la moins compliquée, il faut l'obtenir successivement de la manière que nous venons de dire, d'abord en faisant $u = z - Qy$, Q étant la valeur de q en fonction de x de α, puis en prenant x au lieu de y et y au lieu de x, et faisant par conséquent $v = z - Px$, P étant la valeur de p en fonctions de y et de α; on choisira ensuite entre ces deux résultats celui qui paraîtra le plus simple.

Ce procédé réussit toujours quand l'élimination est possible; mais il peut arriver qu'il conduise à une intégrale très-compliquée, tandis qu'on en pourrait trouver une plus simple en faisant usage d'un moyen de transformation dont ce procédé n'est qu'un cas particulier, et dont je vais expliquer le principe en général.

En représentant l'une des deux équations de l'intégrale par

$$F(x, u, \alpha) = 0,$$

où z et y n'entrent que dans u, pour que l'autre équation en soit la dérivée partielle relative à α, savoir,

$$F'(\alpha) + \left(\frac{du}{d\alpha}\right) F'(u) = 0,$$

il faut que cette dernière équation, combinée avec la dérivée de la première prise en regardant x comme constant, donne

$$\frac{dz}{d\alpha(x} = q\,\frac{dy}{d\alpha(x};$$

or cette dérivée est

$$F'(\alpha) + \left[\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{d\alpha(x} + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{d\alpha(x} + \left(\frac{du}{d\alpha}\right)\right] F'(u) = 0;$$

il faut donc prendre u tel que

$$\frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{\left(\frac{du}{dz}\right)} \text{ soit égal à } -q.$$

Quand on a la valeur Q de q qui ne contient que x et α, on satisfait à cette condition en prenant $u = z - Qy$, comme nous venons de le faire; et comme il est toujours censé qu'on peut tirer de deux équations entre x, y, z, α et des fonctions de α qui satisfont à la proposée, une valeur Q de q, qui ne contienne en effet ni y ni z, on peut regarder cette méthode comme générale; mais il sera souvent plus simple, et quelquefois nécessaire faute de pouvoir éliminer y, d'éliminer seulement z de la valeur de q, en sorte qu'il y reste x, y et α : alors en représentant cette valeur par Q', on satisferait à

$$\frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{\left(\frac{du}{dz}\right)} = -q,$$

en faisant $$u = z - \int Q'\,dy,$$

l'intégrale $\int Q'\,dy$ étant prise partiellement en faisant varier y seul. En opérant sur cette valeur de u précisément comme nous venons d'opérer sur

$$u = z - Qy,$$

qui en est un cas particulier, on obtient une autre intégrale de l'équation donnée, dont la forme est également

$$U = 0,$$
$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = 0,$$

et qui peut être plus simple que celle qu'on déduirait de

$$u = z - Qy.$$

Il est aisé de voir que si la valeur de q devenait trop compliquée par l'élimination de z, ou que cette élimination fût impossible, et qu'on se bornât à exprimer en x, y, z, α et des fonctions de α cette valeur de q, que je représenterai par Q'', on arriverait encore à une intégrale de la même forme, en prenant pour u une valeur particulière satisfaisant à l'équation du premier ordre

$$\left(\frac{du}{dz}\right) + Q''\left(\frac{du}{dy}\right) = 0,$$

entre u et les deux variables indépendantes y et z, parce que x et α doivent y être considérées comme constantes. Pour achever d'éclaircir cette partie de la théorie de l'intégration des équations aux différentielles partielles, je prendrai pour exemple l'équation

$$(z - q)^2 + p = 0;$$

je l'intégrerai d'abord en faisant usage des formules connues, et comme cette intégrale ne se trouvera pas sous la forme

$$U = 0,$$
$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = 0,$$

je l'y ramenerai en me servant successivement des deux transformations $u = z - Qy$ et $u = z - \int Q'\,dy$, afin qu'on puisse comparer les résultats auxquels elles conduisent. Les valeurs de y, z, p, q en fonctions de x et de α, doivent être déduites dans cet exemple des quatre équations

$$(z-q)^2+p=0,$$

$$2(z-q)q+\frac{dq}{dx\,(\alpha}=0,$$

$$2(z-q)+\frac{dy}{dx\,(\alpha}=0,$$

$$p+q\frac{dy}{dx\,(\alpha}=\frac{dz}{dx\,(\alpha}=\frac{dq}{dx\,(\alpha}-\frac{1}{2}\,\frac{d^2y}{dx^2\,(\alpha},$$

dont la dernière s'obtient en différenciant la valeur de z tirée de la troisième. La seconde et la troisième donnent

$$\frac{dq}{dx\,(\alpha}=q\frac{dy}{dx\,(\alpha},$$

ce qui réduit la quatrième à

$$p=-\frac{1}{2}\,\frac{d^2y}{dx^2\,(\alpha};$$

et comme on en tire aussi

$$z-q=-\frac{1}{2}\,\frac{dy}{dx\,(\alpha},$$

la première devient

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^2-\frac{d^2y}{dx^2\,(\alpha}=0;$$

cette équation donne

$$\frac{y}{2}+l(-2\,\phi\,\alpha)^{*}=l\frac{dy}{dx\,(\alpha},$$

ou

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha}=-2\,\phi\,\alpha\,e^{\frac{y}{2}},$$

$$e^{-\frac{y}{2}}=(x+\alpha)\,\phi\,\alpha.$$

---

* Je donne cette forme à cette fonction arbitraire de α, pour rendre plus simples les calculs qui vont suivre.

On tire d'ailleurs de l'équation trouvée plus haut entre y et q,

$$q = e^y \psi \alpha = \frac{\psi \alpha}{(x+\alpha)^2 \varphi \alpha^2}:$$

ces valeurs changent

$$z = q - \frac{1}{2} \frac{dy}{dx(\alpha},$$

en

$$z = \frac{\psi \alpha}{(x+\alpha)^2 \varphi \alpha^2} + \frac{1}{x+\alpha},$$

qu'il faut réunir avec

$$y + 2l[(x+\alpha)\varphi \alpha] = 0,$$

pour avoir l'intégrale, après qu'on aura déterminé la relation entre $\psi \alpha$ et $\varphi \alpha$.

On peut le faire au moyen de la formule

$$\frac{dz}{d\alpha(x} = q \frac{dy}{d\alpha(x}:$$

on a d'abord

$$\frac{dz}{d\alpha(x} = \frac{\psi' \alpha}{(x+\alpha)^2 \varphi \alpha^2} - \frac{2\psi \alpha(\varphi \alpha + (x+\alpha)\varphi' \alpha)}{(x+\alpha)^3 \varphi \alpha^3} - \frac{1}{(x+\alpha)^2};$$

on trouve ensuite

$$q \frac{dy}{d\alpha(x} = - \frac{2\psi \alpha(\varphi \alpha + (x+\alpha)\varphi' \alpha)}{(x+\alpha)^3 \varphi \alpha^3},$$

et il en résulte

$$\varphi \alpha^2 = \psi' \alpha,$$

ce qui change l'intégrale précédente en

$$z = \frac{\psi \alpha}{(x+\alpha)^2 \psi' \alpha} + \frac{1}{x+\alpha},$$

$$y + l[(x+\alpha)^2 \psi' \alpha] = 0.$$

Il est aisé de vérifier cette intégrale, qui n'est pas d'ailleurs de la forme

$$U = 0,$$

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = 0,$$

en tirant de la seconde équation

$$\frac{d\alpha}{dx\,(y} = -\frac{2\psi'\alpha}{2\psi'\alpha+(x+\alpha)\psi''\alpha},$$

$$\frac{d\alpha}{dy\,(x} = -\frac{(x+\alpha)\psi'\alpha}{2\psi'\alpha+(x+\alpha)\psi''\alpha},$$

et de la première

$$p = -\frac{2\psi\alpha}{(x+\alpha)^3\psi'\alpha} - \frac{1}{(x+\alpha)^2} - \frac{\psi\alpha\,(2\psi'\alpha+(x+\alpha)\psi''\alpha)}{(x+\alpha)^3\psi'\alpha^2}\,\frac{d\alpha}{dx\,(y} = -\frac{1}{(x+\alpha)^2},$$

$$q = -\frac{\psi\alpha\,(2\psi'\alpha+(x+\alpha)\psi''\alpha)}{(x+\alpha)^3\psi'\alpha^2}\,\frac{d\alpha}{dy\,(x} = \frac{\psi\alpha}{(x+\alpha)^2\psi'\alpha},$$

valeurs qui donnent en effet

$$(z-q)^2 = \frac{1}{(x+\alpha)^2} = -p.$$

La valeur de q que nous venons d'obtenir ne contenant que x et α, elle pourra être présentée par Q, et l'on aura

$$u = z - Qy = \psi\alpha\,\frac{1+l[(x+\alpha)^2\psi'\alpha]}{(x+\alpha)^2\psi'\alpha} + \frac{1}{x+\alpha},$$

et par conséquent,

$$z = \psi\alpha\,\frac{y+1+l[(x+\alpha)^2\psi'\alpha]}{(x+\alpha)^2\psi'\alpha} + \frac{1}{x+\alpha},$$

cette équation, combinée avec sa dérivée partielle relative à α,

$$\frac{d\left[\psi\alpha\,\frac{y+1+l[(x+\alpha)^2\psi'\alpha]}{(x+\alpha)^2\psi'\alpha} + \frac{1}{x+\alpha}\right]}{d\alpha} = 0,$$

donne une intégrale de l'équation proposée sous la forme demandée; car en faisant attention que v étant une fonction quelconque de x et de α, on a

$$\frac{d\,\frac{y+1+lv}{v}}{d\alpha\,(x} = \left(\frac{1}{v^2} - \frac{y+1+lv}{v^2}\right)\frac{dv}{d\alpha\,(x} = -\frac{y+lv}{v^2}\,\frac{dv}{d\alpha\,(x},$$

et que, par la même raison,

d

$$\frac{d\,\frac{y+1+lv}{v}}{dx\,(\alpha} = -\frac{y+lv}{v^2}\,\frac{dv}{dx\,(\alpha},$$

on verra que la seconde équation se réduit à

$$\frac{y+l[(x+\alpha)^2\psi'\alpha]}{(x+\alpha)^2}\left(1-\psi\alpha\,\frac{2\psi'\alpha+(x+\alpha)\psi''\alpha}{(x+\alpha)\psi'\alpha^2}\right)=0,$$

qui ne peut avoir lieu sans que α ne devienne une fonction de x, à moins que

$$y+l[(x+\alpha)^2\psi'\alpha]=0,$$

et que la première donne

$$p=-2\psi\alpha\,\frac{y+l[(x+\alpha)^2\psi'\alpha]}{(x+\alpha)^3\psi'\alpha}-\frac{1}{(x+\alpha)^2}=-\frac{1}{(x+\alpha)^2},$$

$$q=\frac{\psi\alpha}{(x+\alpha)^2\psi'\alpha},$$

c'est-à-dire, les mêmes valeurs que nous avons déjà trouvées pour satisfaire à l'équation

$$(z-q)^2+p=0.$$

Mais comme

$$y+l[(x+\alpha)^2\psi'\alpha]=0,$$

donne

$$e^y=\frac{1}{(x+\alpha)^2\psi'\alpha};$$

la valeur de q en fonctions de x et de α, que nous avons prise pour Q, peut être changée en celle-ci :

$$Q'=e^y\psi\alpha:$$

alors

$$u=z-\int Q'\,dy=z-e^y\psi\alpha=\frac{1}{x+\alpha},$$

d'où

$$z = u + \int Q' dy = \frac{1}{x+\alpha} + e^y \psi \alpha,$$

qui, avec sa dérivée partielle relative à α seul,

$$e^y \psi' \alpha - \frac{1}{(x+\alpha)^2} = 0,$$

donne l'intégrale de la proposée sous une nouvelle forme, la plus simple de toutes, puisqu'on en tire immédiatement

$$p = -\frac{1}{(x+\alpha)^2},$$

$$q = e^y \psi \alpha,$$

et, par conséquent,

$$(z-q)^2 + p = 0.$$

---

§. II.

Application au second Ordre.

On doit d'abord distinguer deux classes d'équations aux différentielles partielles du second ordre : celles qui peuvent avoir une intégrale intermédiaire du premier ordre, et celles qui n'en sont pas susceptibles. Les premières peuvent, en général, s'intégrer par des méthodes analogues à celles qu'on emploie pour les équations du premier ordre; cette considération a empêché la plupart des géomètres qui se sont occupés de l'intégration des équations aux différentielles partielles, de faire de la détermination de leur intégrale primitive l'objet d'une étude particulière. On s'est borné presque généralement à montrer comment on en peut trouver l'intégrale intermédiaire, et l'on a supposé qu'il ne restait plus alors, pour obtenir l'intégrale primitive, qu'à l'intégrer de nouveau comme une équation ordinaire du premier ordre. Mais ce procédé, qui peut réussir dans beaucoup de cas, n'est ni le plus général, ni celui qui conduit le plus directement à l'intégrale primitive ; la présence d'une fonction arbitraire dans l'intégrale intermédiaire s'oppose souvent à ce que les méthodes pour l'intégration des équations du premier ordre puissent y être appliquées immédiatement, sur-tout quand elle est représentée par un système de deux équations ; et, lors même que cette circonstance n'a pas lieu, on est obligé de calculer de nouveau des équations qui se trouvent comprises parmi celles qu'on a dû tirer de l'équation donnée lorsqu'on a cherché son intégrale du premier ordre ; ce qui complique inutilement le calcul. J'ai donc cru faire une chose utile en donnant une méthode pour arriver directement à l'intégrale primitive, qui ne fût point exposée à cet inconvénient, et fît en même temps connaître les différentes formes dont cette intégrale est susceptible dans les divers cas qui peuvent se présenter. Lorsqu'il ne peut point y avoir d'intégrale intermédiaire, les méthodes d'intégration qui réussissent pour les équations qui en sont susceptibles ne peuvent plus être employées. Alors les équations intégrables comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, qui conduiraient à l'intégrale du premier ordre si elles satisfaisaient aux conditions d'intégrabilité, cessent de satisfaire à ces conditions, et jusqu'à présent on n'en a tiré aucun parti pour la recherche de l'intégrale primitive. Les méthodes d'intégration auxquelles on a eu jusqu'à présent recours dans ce cas, consistent en général à transformer, lorsque cela est possible, l'équation donnée, par le changement des variables indépendantes et de la fonction qui en dépend, en une autre équation dont l'intégrale soit connue, ou bien à supposer une forme à cette intégrale, et à tâcher de la particulariser de manière à satisfaire à l'équation donnée. C'est ainsi qu'on est parvenu à intégrer dans un grand nombre de cas les équations linéaires du second ordre : on n'a pas obtenu le même succès à l'égard des équations du même ordre qui ne sont pas linéaires. Je me suis proposé de donner pour les unes et les autres une nouvelle méthode fondée sur la considération des équations déduites de la proposée qui semblent devoir être considérées comme aux différentielles ordinaires, mais qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, et dont on ne peut faire aucun usage tant qu'on les considère uniquement sous ce point de vue. Il n'en est pas de même lorsqu'on fait attention que ce sont de véritables équations aux différentielles partielles. La méthode que j'emploie pour en déduire les intégrales primitives d'un grand nombre d'équations privées d'intégrales intermédiaires, est loin encore d'être aussi générale qu'on pourrait le desirer; mais c'est du moins un premier pas dans un genre de recherches que je ne crois pas avoir été tenté, et qui me paraît promettre de conduire un jour à des résultats d'une toute autre importance que ceux que j'en ai déduits jusqu'à présent.

Pour mettre de l'ordre dans l'exposition de ces recherches, je m'occuperai successivement des équations aux différentielles partielles du second ordre dans les quatre cas suivans :

1.° Celui où l'intégrale primitive ne contient que des fonctions arbitraires de x ou de y.

2.° Celui où elle contient des fonctions arbitraires composées de quantités qui varient au contraire à-la-fois avec x et y, mais relativement auxquelles les dérivées de z contenues dans l'équation peuvent être hétérogènes à l'intégrale.

3.° Le cas où cette dernière circonstance a lieu à l'égard d'une des deux fonctions arbitraires de l'intégrale primitive, tandis que les mêmes dérivées sont nécessairement homogènes à l'intégrale relativement à l'autre fonction arbitraire.

4.° Le cas où ces dérivées sont nécessairement homogènes à l'intégrale relativement aux deux fonctions arbitraires. Je donnerai, dans chacun de ces cas, les formules qui doivent conduire à l'intégrale; mais je n'appliquerai d'abord ces formules qu'aux équations du second ordre susceptibles d'une intégrale intermédiaire.

Je considérerai ensuite, en reprenant les quatre cas que je viens d'indiquer, les équations du second ordre qui ne peuvent point avoir d'intégrales du premier ordre d'après la forme de l'équation donnée, et j'appliquerai les mêmes formules à chacun d'eux.

Lorsque l'intégrale primitive d'une équation du second ordre ne contient que des fonctions arbitraires de x ou de y, il peut arriver que les deux fonctions soient composées de la même variable indépendante, ou que l'une le soit de x et l'autre de y: dans le premier cas, les différenciations relatives à la variable qui n'entrent pas dans la composition des fonctions arbitraires n'introduisent dans le calcul aucune nouvelle quantité à éliminer; et les autres, en introduisant nécessairement un nombre au moins égal et souvent plus grand que celui des équations qu'elles fournissent, l'élimination des arbitraires ne peut donc avoir lieu qu'entre les premières; d'où il suit que l'équation du second ordre qui en résulte ne doit contenir que des dérivées de z relatives à une seule variable. Cette forme d'intégrale ne peut donc convenir qu'à des équations du second ordre qui se trouvent dans ce cas, et qui peuvent, par conséquent, être intégrées comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, en remplaçant les constantes par des fonctions arbitraires de la variable qui est regardée comme constante dans ces intégrations.

Les équations du second ordre dont les intégrales renferment une fonction arbitraire de x et une de y, doivent être l'objet d'un examen plus approfondi. Suivant ce qui a été démontré dans un des paragraphes du mémoire inséré dans le XVII.e cahier du Journal de l'École royale polytechnique, elles ne peuvent alors contenir ni

$$r = \frac{d^2 z}{dx^2 (y},$$

ni

$$t = \frac{d^2 z}{dy^2 (x}:$$

on peut donc les représenter par la formule

$$F(x, y, z, p, q, s) = 0,$$

ou, en supposant qu'on en ait tiré la valeur de s,

$$s = f(x, y, z, p, q).$$

En y remplaçant s par sa valeur

$$\frac{dq}{dx(\alpha} - \frac{\frac{dq}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}} \frac{dy}{dx(\alpha},$$

pour former les équations P, Q, &c., on n'en trouve que deux, savoir :

$$\frac{dq}{dx(\alpha} = f(x, y, z, p, q),$$

et

$$\frac{dy}{dx(\alpha} = 0,$$

dont la seconde donne $\alpha = y$; ce qui prouve que, dans toute équation où il n'y a de dérivées du second ordre que s, et dont l'équation primitive ne contient point d'intégrale partielle, une des fonctions arbitraires est nécessairement composée de y seul. On démontrerait de même, en changeant x en y et y en x, que l'autre fonction arbitraire l'est nécessairement de x seul; et cette connaissance une fois acquise, les équations qu'on trouverait en même temps, savoir,

$$\frac{dq}{dx(\alpha} = f(x, y, z, p, q),$$

$$\frac{dp}{dy(\beta} = f(x, y, z, p, q),$$

ne seraient que la proposée même dans laquelle s serait remplacé, tantôt par

$$\frac{dq}{dx(\alpha},$$

parce que $\alpha = y$, tantôt par

$$\frac{dp}{dy(\beta},$$

parce que $\beta = x$; ce qui n'apprendrait rien de nouveau. Il est aisé de voir d'ailleurs que la transformation dont nous parlons, ayant pour but de prendre pour variable indépendante une des quantités dont les fonctions arbitraires sont composées, doit devenir inutile lorsque cette condition est déjà remplie.

Si l'on remplace dans l'équation

$$F(x, y, z, p, q, s) = 0,$$

s par $\frac{dq}{dx(y}$ et p par $\frac{dz}{dx(y}$, ou bien s par $\frac{dp}{dy(x}$ et q par $\frac{dz}{dy(x}$, on aura

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx(y}, q, \frac{dq}{dx(y}\right) = 0,$$

ou

$$F\left(x, y, z, p, \frac{dz}{dy(x}, \frac{dp}{dy(x}\right) = 0,$$

dont la première peut être considérée comme aux différentielles ordinaires entre les trois variables x; z, q, en y regardant y comme constant, et la seconde comme une équation de la même nature entre les trois variables y, z, p, dans laquelle x est constant.

Si l'équation donnée a une intégrale intermédiaire et que cette intégrale résulte de l'élimination de la fonction de x entre l'intégrale primitive et sa dérivée relative à y, cette intégrale ne pourra renfermer que x, y, z, q, et deux fonctions arbitraires de y dérivées l'une de l'autre; il est évident qu'en différenciant alors par rapport à x, et éliminant des fonctions de y comme si c'étaient des constantes, on aura une équation entre

$$x, y, z, \frac{dz}{dx(y}, q, \frac{dq}{dx(y},$$

identique à

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx(y}, q, \frac{dq}{dx(y}\right) = 0,$$

d'où il suit que cette dernière équation satisfera à la condition d'intégrabilité, c'est-à-dire qu'elle sera décomposable en facteurs de la forme

$$G\frac{dq}{dx\,(y}+H\frac{dz}{dx\,(y}+K=0,$$

G, H et K étant des fonctions de x, y, z, q entre lesquels on ait cette relation,

$$G\left[\left(\frac{dH}{dx}\right)-\left(\frac{dK}{dz}\right)\right]+H\left[\left(\frac{dK}{dq}\right)-\left(\frac{dG}{dx}\right)\right]+K\left[\left(\frac{dG}{dz}\right)-\left(\frac{dH}{dq}\right)\right]=0.$$

Lorsque ces deux conditions ne seront pas remplies, on sera sûr que l'équation donnée ne peut avoir une intégrale du premier ordre contenant seulement des fonctions arbitraires de y. On trouvera de même, en partant de

$$F\left(x,y,z,p,\frac{dz}{dy},\frac{dp}{dy}\right)=0,$$

les conditions qui doivent être satisfaites pour que l'équation donnée ait une intégrale du premier ordre où entrent seulement des fonctions de x.

Au reste, quand je dis que ces intégrales intermédiaires contiennent l'une des fonctions de y, l'autre des fonctions de x, c'est parce que si on les tire de l'intégrale primitive où se trouvent, par exemple, $\varphi\, x$ et $\psi\, y$, la première contiendra $\psi\, y$ et $\psi'\, y$, et la seconde $\varphi\, x$ et $\varphi'\, x$; mais comme l'intégrale d'une équation aux différentielles ordinaires entre trois variables, qui satisfait à la condition d'intégrabilité, ne peut contenir qu'une seule constante arbitraire, il s'ensuit que, pour que l'équation donnée puisse être satisfaite par ces intégrales, il faut, dans le premier cas, que $\psi\, y$ et $\psi'\, y$ se réduisent à une seule fonction de y, et dans le second, que $\varphi\, x$ et $\varphi'\, x$ se réduisent à une seule fonction de x. C'est ainsi que

$$z=x^m\,\psi y+y^n\,\varphi x,$$

étant l'intégrale de

x

$$xys - nxp - myq + mnz = 0,$$

les deux intégrales intermédiaires sont

$$mz - xp = my^n \phi x - xy^n \phi' x \; ; \; nz - yq = nx^m \psi y - x^m y \psi' y,$$

qui ne contiennent réellement chacune qu'une fonction arbitraire, puisqu'elles peuvent évidemment être écrites ainsi :

$$mz = xp + y^n \varpi x \quad , \quad nz = yq + x^m \chi y.$$

Lorsque l'équation est linéaire et représentée par

$$s + Pp + Qq + Nz + M = 0,$$

on trouve, en la comparant à

$$Gs + Hp + K = 0,$$

$$G = 1, \quad H = P, \quad K = Qq + Nz + M,$$

et l'équation

$$G\left[\left(\frac{dH}{dx}\right) - \left(\frac{dK}{dz}\right)\right] + H\left[\left(\frac{dK}{dq}\right) - \left(\frac{dG}{dx}\right)\right] + K\left[\left(\frac{dG}{dz}\right) - \left(\frac{dH}{dq}\right)\right] = 0,$$

devient

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) - N + PQ = 0;$$

ce qui s'accorde avec l'équation de condition qui doit être satisfaite pour qu'on obtienne, par la méthode de M. de Laplace, l'intégrale primitive dès la première transformation.

On trouverait de même

$$\left(\frac{dQ}{dy}\right) - N + PQ = 0,$$

pour la condition nécessaire à l'existence d'une intégrale intermédiaire où se trouve une fonction arbitraire de x.

Lorsqu'une des équations

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx(y)}, q, \frac{dq}{dx(y)}\right) = 0,$$

ou

$$F\left(x, y, z, p, \frac{dz}{dy(x}, \frac{dp}{dy(x}\right) = 0,$$

satisfera aux conditions d'intégrabilité, on trouvera immédiatement l'intégrale primitive de

$$F(x, y, z, p, q, s) = 0,$$

dans le premier cas, en intégrant

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx(y}, q, \frac{dq}{dx(y}\right) = 0,$$

relativement aux trois variables x, z, q, et remplaçant la constante arbitraire par une fonction de y ; puis en y écrivant $\frac{dz}{dy(x}$ au lieu de q, et intégrant l'équation résultante par rapport aux deux variables y et z, ce qui n'exige aucune nouvelle condition, puisqu'il n'y a plus que deux quantités variables dans cette équation ; on remplacera ensuite par une fonction de x la constante arbitraire qui résulte de cette dernière intégration. Il faudra faire relativement à y ce que nous venons de faire par rapport à x, lorsque ce sera

$$F\left(x, y, z, p, \frac{dz}{dy(x}, \frac{dp}{dy(x}\right) = 0$$

qui satisfera aux conditions d'intégrabilité.

Si l'on a, par exemple,

$$s + \frac{p+q}{x+y} = 0,$$

on pourra en tirer

$$(x+y)\frac{dp}{dy(x} + p + \frac{dz}{dy(x} = 0,$$

d'où

$$(x+y)\,p + z = \varphi\, x,$$

c'est-à-dire,

$$\frac{dz}{dx(y} + \frac{1}{x+y} z = \frac{\phi x}{x+y},$$

dont l'intégrale est

$$z = e^{-\int \frac{dx}{x+y}} \left(\int e^{\int \frac{dx}{x+y}} \frac{\phi x \, dx}{x+y} + \psi y \right);$$

ou en écrivant ϕx au lieu de $\int \phi x \, dx$,

$$z = \frac{\phi x + \psi y}{x+y}.$$

Les équations aux différentielles partielles du second ordre qui ne contiennent que la dérivée s de cet ordre, doivent être examinées avec d'autant plus de soin, que c'est souvent en y ramenant les autres équations aux différentielles partielles du second ordre qu'on parvient à les intégrer. L'intégration générale des équations comprises dans la formule

$$F(x, y, z, p, q, s) = 0,$$

peut être regardée comme la première question à résoudre pour arriver à celle de toutes les équations du second ordre. Mais ce problème paraît devoir échapper encore long-temps aux méthodes de l'analyse actuelle ; on ne sait encore intégrer ces équations que dans le cas dont nous venons de parler, où elles ont une intégrale intermédiaire, et dans le cas des équations linéaires intégrées par M. de Laplace. Je reviendrai sur ces équations quand je m'occuperai des équations du second ordre qui n'ont pas d'intégrales intermédiaires ; je vais, en suivant l'ordre que je me suis prescrit, examiner les équations du second ordre qui en ont, et dont les intégrales primitives contiennent des fonctions arbitraires composées de quantités qui varient à-la-fois avec x et avec y.

Je ferai précéder cette recherche par quelques considérations générales sur les diverses méthodes d'intégration pour les équations aux différentielles partielles ; elles consistent toutes à remplacer l'équation donnée par plusieurs équations dans lesquelles les quantités dont les fonctions arbitraires de l'intégrale primitive sont composées, se trouvent mêlées avec les variables de l'équation donnée. Dans la méthode connue pour l'intégration des équations linéaires du second ordre, on prend deux nouvelles variables indépendantes qu'on détermine de manière que les deux dérivées extrêmes du second ordre disparaissent de l'équation transformée; ces deux nouvelles variables indépendantes sont précisément les quantités que j'ai nommées α et β, et l'équation donnée se trouve remplacée par trois équations entre x, y, z, α et β; savoir : deux entre x, y, et une des nouvelles variables, qui sont aux différentielles partielles du premier ordre, mais qu'on peut traiter comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, et la troisième qui doit donner la valeur de z et qui est aux différentielles partielles du second ordre, mais ne contenant de dérivées de cet ordre que celle qu'on obtient en faisant varier alternativement les deux variables indépendantes. Dans l'intégration des équations aux différentielles du premier ordre, on remplace l'équation donnée par deux équations entre x, y, z, α, soit immédiatement quand les dérivées du premier ordre sont hétérogènes à l'intégrale, soit dans le cas contraire, en partant de quatre équations entre x, y, z, p, q, α, d'où l'on élimine p et q. Ces équations, quoiqu'aux différentielles partielles, peuvent toujours s'intégrer comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, parce que x et α y étant pris pour les deux variables indépendantes, elles ne contiennent que des dérivées relatives à x.

Dans les équations du second ordre considérées en général, on doit se proposer de trouver trois équations entre x, y, z, α, β, par l'élimination, lorsqu'elle est possible, des dérivées de z; mais de quelque manière qu'on s'y prenne, deux, tout au plus de ces trois équations, peuvent être intégrées comme si elles étaient aux différentielles ordinaires; la troisième contient nécessairement des dérivées relatives aux deux variables qn'on y considère comme indépendantes; mais cela n'empêche pas qu'elles ne conduisent à l'intégrale primitive dans beaucoup d'autres cas que celui des équations linéaires, où l'emploi d'une transformation de ce genre a été suivi d'un plein succès.

J'expliquerai bientôt comment on doit déterminer les équations par lesquelles il convient de remplacer l'équation donnée, lorsqu'elle ne tombe pas dans ce dernier cas. Je remarquerai auparavant qu'on peut, dans le calcul de ces équations, prendre une des variables x ou y, et une des deux quantités α et β pour les deux variables indépendantes, par exemple, x et α, comme on le fait lorsqu'il s'agit d'intégrer les équations du premier ordre ; alors les trois équations doivent déterminer y, z et β en fonctions de x et de α : ou bien prendre pour variables indépendantes, de même que dans l'intégration des équations linéaires du second ordre par la méthode ordinaire, les deux quantités α et β. Chacun de ces procédés présente des avantages qui lui appartiennent exclusivement : c'est pourquoi je les examinerai successivement, et je donnerai les mêmes formules sous les deux formes différentes qu'elles prennent dans ces deux hypothèses de variabilité. La première de ces hypothèses, où l'on conserve pour variable indépendante une de celles qui l'étaient dans l'équation donnée, est la seule qu'on puisse admettre lorsque les deux fonctions arbitraires de l'intégrale primitive doivent, d'après la forme de l'équation donnée, être composées de la même quantité. On reconnaît ce cas en cherchant la valeur de β lorsque x et α sont pris pour variables indépendantes, parce qu'on trouve alors $\frac{d\beta}{dx(\alpha} = 0$ *.

C'est en général celle qui conduit à l'intégrale primitive par un calcul moins compliqué, et la donne sous une forme plus simple. C'est cependant la seconde hypothèse de variabilité où α et β sont pris

* Voyez ci-après la valeur générale de $\dfrac{\frac{d\beta}{dx(\alpha}}{\frac{d\beta}{d\alpha(x}}$, dans les équations dont les dérivées du second ordre peuvent être hétérogènes à l'intégrale relativement aux deux fonctions arbitraires.

pour les deux variables indépendantes qui doit être préférée dans certains cas, dont je parlerai ci-après.

Pour qu'il puisse y avoir une intégrale intermédiaire, il faut en général que l'une des fonctions arbitraires de l'intégrale primitive y entre sans y être accompagnée d'autres fonctions qui en soient dérivées par voie de différenciation ou d'intégration, afin qu'elle puisse être éliminée par une seule différenciation : supposons que β désigne la quantité dont cette fonction arbitraire est composée, que l'intégrale soit composée de trois équations primitives entre x, y, z, α et β, et qu'en combinant de quelque manière que ce soit ces trois équations, on puisse éliminer $\varphi\,\beta$ et en tirer la valeur de β, en mettant cette valeur dans deux de ces trois équations et sous le signe φ, on aura deux équations entre x, y, z, α, qui représenteront la même intégrale d'une manière plus simple, et il est évident qu'en prenant x et α pour les deux variables indépendantes, et cherchant β en même temps que y et z en fonctions de ces deux variables, on trouvera directement la valeur de β qui résulterait de cette élimination, et par conséquent l'intégrale elle-même sous la forme de deux équations au lieu de trois.

Quand je dis que cette valeur de β serait la même que celle qu'on tirerait par l'élimination de l'intégrale représentée par un système de trois équations primitives entre x, y, z, α, β, j'entends que ce pourrait être également celle de $\varphi\,\beta$ tirée de la même intégrale ; car tant que $\varphi\,\beta$ n'y est accompagné d'aucune autre fonction qui en soit dérivée, il est toujours permis d'écrire β au lieu de $\psi\,\beta$, et $\chi\,\beta$ au lieu de β, χ désignant la fonction inverse de ψ.

Pour éclaircir ces considérations par un exemple, je prendrai l'équation

$$(r - pt)^2 = q^2 rt.$$

Pour savoir si les dérivées de l'ordre le plus élevé contenues dans cette équation peuvent être hétérogènes à l'intégrale, il faut, d'après ce qui a été dit dans un des paragraphes précédens, former les équations

$P=0$, $Q=0$, $R=0$, &c., en substituant à ces dérivées leurs valeurs dans le cas où x et α sont pris pour variables indépendantes, et en égalant séparément à o les termes où $\frac{\frac{dq}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}$ n'entre pas, et ceux qui multiplient chacune des puissances de cette quantité, et voir si toutes les équations se réduisent à deux d'où l'on puisse tirer plus d'une valeur de $\frac{dy}{dx(\alpha}$, en faisant cette substitution et laissant pour abréger t à la place de $\frac{\frac{dq}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}$; ce qui conduit aux mêmes résultats, puisque cette quantité n'entre point dans les équations $P=0$, $Q=0$, $R=0$, &c., on trouve, en passant tous les termes dans le premier membre, et ordonnant par rapport à t,

$$\left(\frac{dp}{dx(\alpha}-\frac{dq}{dx(\alpha}\frac{dy}{dx(\alpha)}\right)^2+2\left(\frac{dp}{dx(\alpha}-\frac{dq}{dx(\alpha}\frac{dy}{dx(\alpha)}\right)\left[\left(\frac{dy}{dx(\alpha)}\right)^2-p-\frac{q^2}{2}\right]t+$$
$$\left[\left(\left(\frac{dy}{dx(\alpha)}\right)^2-p\right)^2-q^2\left(\frac{dy}{dx(\alpha)}\right)^2\right]t^2=0,$$

d'où il est aisé de voir que les dérivées du second ordre peuvent, dans cet exemple, être hétérogènes à l'intégrale, puisque l'on satisfait à la condition que cette équation ait lieu, quelle que soit la valeur de t, au moyen de deux équations seulement, savoir :

$$\frac{dp}{dx(\alpha}-\frac{dq}{dx(\alpha}\;\frac{dy}{dx(\alpha}=0,$$

$$\left[\left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^2-p\right]^2-q^2\left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^2=0,$$

dont la dernière donne quatre valeurs pour $\frac{dy}{dx(\alpha}$, d'abord les deux racines de l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^2-q\,\frac{dy}{dx(\alpha}-p=0,\quad [A],$$

et ensuite les deux racines de

$$\left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^2 + q\frac{dy}{dx(\alpha} - p = 0, \quad [B];$$

il est aisé de voir qu'en combinant l'équation [B] avec

$$\frac{dp}{dx(\alpha} - \frac{dq}{dx(\alpha}\frac{dy}{dx^2(\alpha} = 0,$$

on obtient une équation intégrable ; car, en vertu de cette dernière, sa différentielle se réduit à

$$\left[2\frac{dy}{dx(\alpha} + q\right]\frac{d^2y}{dx(\alpha} = 0, \quad [C],$$

dont le second facteur donne

$$\frac{dy}{dx(\alpha} = \alpha;$$

en intégrant cette valeur de $\frac{dy}{dx^2(\alpha}$, on a

$$y = \alpha x + \varphi\alpha,$$

et en la substituant dans l'équation [B],

$$\alpha^2 + q\alpha - p = 0:$$

en sorte que pour avoir l'intégrale du premier ordre, il faudra éliminer α entre ces deux équations ; ce qui donnera

$$2y + qx \pm x\sqrt{q^2 + 4p} = \varphi(q \pm \sqrt{q^2 + 4p}).$$

On se tromperait beaucoup si l'on pensait qu'en prenant alternativement les signes supérieurs et les signes inférieurs dans cette équation, on aurait deux intégrales intermédiaires de la proposée. Pour reconnaître l'origine de ce double signe, et par conséquent de la duplication des valeurs de $\frac{dy}{dx(\alpha}$ dans l'équation [B], il faut faire attention que la proposée

$$(r - pt)^2 = q^2rt,$$

en

en même temps qu'elle est du second ordre, est du second degré relativement aux dérivées de cet ordre, c'est-à-dire que ces dérivées y sont élevées au second degré tant que l'équation est sous forme rationnelle; en la résolvant par rapport à ces mêmes dérivées, on trouve que l'équation

$$(r-pt)^2-q^2rt=0,$$

peut être considérée comme le produit des deux suivantes :

$$2r-t(q^2+2p+q\sqrt{q^2+4p})=0,$$

$$2r-t(q^2+2p-q\sqrt{q^2+4p})=0,$$

qui ont lieu séparément sur les deux nappes de la surface qu'exprime cette équation, de même que les différentes valeurs de y dans une équation algébrique se rapportent aux différentes branches de la courbe qu'elle représente. Or il est aisé de vérifier que

$$2y+qx+x\sqrt{q^2+4p}=\varphi(q+\sqrt{q^2+4p})$$

donne

$$2r-t(q^2+2p+q\sqrt{q^2+4p})=0,$$

et que

$$2y+qx-x\sqrt{q^2+4p}=\varphi(q-\sqrt{q^2+4p}),$$

donne

$$2r-t(q^2+2p-q\sqrt{q^2+4p})=0.$$

Ce ne sont point là deux intégrales du premier ordre d'une même équation du second, mais les deux parties d'une seule intégrale du premier ordre, qu'il faut réunir pour exprimer toutes les nappes de la surface représentée par l'équation donnée.

On voit maintenant pourquoi l'équation en $\frac{dy}{dx\,(\alpha}$ montait au quatrième degré. Elle devait donner les valeurs correspondantes à ces deux portions d'intégrale première, quand on prend pour variables indépendantes x et la quantité dont se compose la fonction arbitraire qui reste dans cette intégrale première, et les deux valeurs de $\frac{dy}{dx(\alpha}$, quand on prend pour variables indépendantes x et la quantité dont se compose l'autre fonction arbitraire de l'intégrale primitive.

Puisque nous avons tiré $\frac{dy}{dx(\alpha}$ de l'équation [B] pour arriver à

$$y = \alpha x + \gamma\alpha,$$

et

$$\alpha^2 + \alpha q - p = 0,$$

il est clair qu'en nommant β la quantité dont l'autre fonction arbitraire est composée, $\frac{dy}{dx(\alpha}$ doit être tiré de l'équation [A], qu'on doit, par conséquent, écrire ainsi :

$$\left(\frac{dy}{dx(\beta}\right)^2 - q\frac{dy}{dx(\beta} - p = 0.$$

En général, lorsqu'une équation de l'ordre m est du degré n relativement aux dérivées de cet ordre, c'est-à-dire, lorsque ces dérivées montent au degré n dans cette équation délivrée de fractions et de radicaux, on doit tirer des équations $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, &c. la valeur de $\frac{dy}{dx(\alpha}$ par une équation du degré mn, lorsque les dérivées de l'ordre le plus élevé sont toutes hétérogènes à l'intégrale. Mais cette proposition est sujette à trop d'exceptions pour la discuter ici. Je parlerai bientôt de celle qui a lieu quand il n'y a de termes du second degré dans une équation du second ordre, que $rt - s^2$.

Nous avons été conduits à l'intégrale intermédiaire

$$2y + qx \pm x\sqrt{q^2 + 4p} = \varpi(q \pm \sqrt{q^2 + 4p}),$$

en égalant à o le premier facteur de l'équation [C]; à l'égard du second,

$$2\,\frac{dy}{dx\,(\alpha}+q=0,$$

lorsqu'on le combine avec l'équation [B], on obtient

$$p+\frac{q^2}{4}=0,$$

qui est une solution particulière de l'équation donnée, ainsi qu'il est aisé de le vérifier.

Si l'on appliquait à l'intégrale intermédiaire

$$2y+qx\pm x\sqrt{q^2+4p}=\gamma\,(q\pm\sqrt{q^2+4p}),$$

les méthodes connues pour l'intégration des équations du premier ordre, on considérerait comme variables indépendantes x et la quantité dont se compose la fonction arbitraire de l'intégrale primitive qui ne se trouve pas dans cette intégrale intermédiaire, quantité qui est évidemment celle que nous avons nommée β, ou une de ses fonctions, ce qui revient au même : cette opération ne pourrait donc que conduire de nouveau aux équations que nous avons déjà obtenues en opérant sur l'équation donnée, et en considérant x et β comme les deux variables indépendantes ; savoir :

$$\left(\frac{dy}{dx\,(\beta}\right)^2-q\,\frac{dy}{dx\,(\beta}-p=0,$$

$$\frac{dp}{dx\,(\beta}-\frac{dq}{dx\,(\beta}\,\frac{dy}{dx\,(\beta}=0,$$

qu'il suffit de combiner avec

$$y=\alpha x+\gamma\alpha,$$

$$\alpha^2+\alpha q-p=0,$$

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$

pour avoir toutes les données nécessaires à l'intégration de la proposée. On a ainsi cinq équations qui déterminent y, z, p, q, β, en fonctions de x et de α, en sorte qu'en éliminant p et q on aura trois équations, d'où il faudra tirer y, z et β en fonctions de x et de α.

Nous avons déjà $y = \alpha x + \gamma \alpha$ déterminé de cette manière : reste donc à trouver β et z.

β pouvant être remplacé par $\psi \beta$, cette quantité doit être déterminée en x et α par une équation aux différentielles partielles du premier ordre, qui donne la valeur du rapport $\dfrac{\frac{d\beta}{dx(\alpha}}{\frac{d\beta}{d\alpha(x}}$; valeur qui reste la même quand on met $\psi \beta$ au lieu de β, ainsi qu'on l'a vu dans un des paragraphes du mémoire inséré dans le XVII.e cahier du Journal de l'École royale polytechnique ; mais ce rapport est égal à $-\frac{d\alpha}{dx(\beta}$, et en le considérant sous ce dernier point de vue, cette équation aux différentielles partielles du premier ordre peut être intégrée comme une équation aux différentielles ordinaires dans l'intégrale de laquelle on remplace la constante arbitraire par β. Cherchons donc la valeur de $\frac{d\alpha}{dx(\beta}$ en fonction de x et de α.

A l'égard de z, il faut tâcher d'avoir $\frac{dz}{dx(\beta}$, parce que la valeur de z doit contenir une fonction arbitraire de β, qui s'introduira naturellement dans le calcul en remplaçant la constante arbitraire de la fonction primitive de $\frac{dz}{dx(\beta}$ par cette fonction.

La valeur de p tirée de l'équation

$$\alpha^2 + \alpha q - p = 0,$$

étant substituée dans

$$\left(\frac{dy}{dx(\beta}\right)^2 - q\,\frac{dy}{dx(\beta} - p = 0,$$

et dans

$$\frac{dz}{dx(\beta} = p + q\,\frac{dy}{dx(\beta},$$

donne

$$\left(\frac{dy}{dx(\beta}+\alpha\right)\left(\frac{dy}{dx(\beta}-\alpha-q\right)=0,$$

et

$$\frac{dz}{dx(\beta}=\alpha^2+q\left(\frac{dy}{dx(\beta}+\alpha\right);$$

le premier facteur de la première de ces deux équations réduit la seconde à $\frac{dz}{dx(\beta}=\alpha^2$, en sorte que p et q se trouvent éliminés, et qu'on a pour déterminer β et z deux équations bien simples, savoir :

$$\frac{dy}{dx(\beta}=-\alpha,$$

$$\frac{dz}{dx(\beta}=\alpha^2,$$

qu'il faut combiner avec

$$y=\alpha x+\gamma\alpha.$$

Il est à remarquer qu'on trouve la même valeur pour $\frac{dy}{dx(\beta}$ en opérant sur l'intégrale première comme sur une équation du premier ordre qu'on se proposerait d'intégrer. On voit en effet, en comparant cette intégrale première, qui est représentée par

$$2y+qx\pm x\sqrt{q^2+4p}=\gamma(q\pm\sqrt{q^2+4p}),$$

avec

$$y-\alpha x=\gamma\alpha,$$

que

$$\alpha=-\frac{q\pm\sqrt{q^2+4p}}{2},$$

et en la différenciant par rapport à y, substituant à la place de s sa valeur $\frac{dq}{dx(\beta}-t\frac{dy}{dx(\beta}$ et égalant à o le coefficient de t, on trouve

$$\frac{dy}{dx\,(\beta} = \frac{q \pm \sqrt{q^2 + 4p}}{2}, \text{ ou } \frac{dy}{dx\,(\beta} = -\alpha;$$

mais il est évident que pour obtenir par ce procédé la valeur de $\frac{dy}{dx\,(\beta}$ sous cette dernière forme, il faut savoir d'avance que

$$y - \alpha x = \gamma\alpha$$

doit être une des équations de l'intégrale.

Cette observation conduit à voir d'où vient le second facteur de l'équation qui nous a donné $\frac{dy}{dx\,(\beta} = -\alpha$. Ce second facteur donne en effet

$$\frac{dy}{dx\,(\beta} = q + \alpha = \frac{q \mp \sqrt{q^2 + 4p}}{2},$$

qui ne diffère de l'autre valeur

$$\frac{dy}{dx\,(\beta} = -\alpha = \frac{q \pm \sqrt{q^2 + 4p}}{2},$$

que parce que le radical y est pris avec un signe contraire; en sorte que, quand $y = \alpha x + \gamma\alpha$ représente une des deux portions de l'intégrale du premier ordre, on a $\frac{dy}{dx\,(\beta} = -\alpha$ pour la valeur correspondante de $\frac{dy}{dx\,(\beta}$, tandis que l'autre valeur $\frac{dy}{dx\,(\beta} = q + \alpha$ correspond à l'autre portion de la même intégrale. C'est donc la première seule qu'il faut combiner avec $y = \alpha x + \gamma\alpha$, pour obtenir l'intégrale primitive. On en rend le calcul plus simple en écrivant α^2 au lieu de α, et $\alpha^2\,\phi'\alpha$ à la place de $\gamma\alpha$: on a alors

$$y = \alpha^2(x + \phi'\alpha),$$

$$\frac{dy}{dx\,(\beta} = -\alpha^2,$$

$$\frac{dz}{dx\,(\beta} = \alpha^4.$$

La première donne

$$\frac{dy}{dx\,(\beta} = \alpha^2 + (2\alpha x + 2\alpha\phi'\alpha + \alpha^2\phi''\alpha)\frac{d\alpha}{dx\,(\beta},$$

et, en combinant cette équation avec la seconde, on a

$$\frac{d\alpha}{dx\,(\beta} = -\frac{2\alpha^2}{2\alpha x + 2\alpha\phi'\alpha + \alpha^2\phi''\alpha},$$

dont l'intégrale est ce que devient celle de l'équation

$$2x\,d\alpha + 2\alpha\,dx + 2\phi'\alpha\,d\alpha + \alpha\phi''\alpha\,d\alpha = 0,$$

lorsqu'on y remplace la constante arbitraire par β; on a donc

$$\beta = 2\alpha x + \phi\alpha + \alpha\phi'\alpha.$$

Il ne nous reste plus qu'à exprimer aussi z en fonction de x et de α: pour cela on divisera la valeur de $\frac{dz}{dx\,(\beta}$ par celle de $\frac{d\alpha}{dx\,(\beta}$, après avoir écrit cette dernière ainsi :

$$\frac{d\alpha}{dx\,(\beta} = -\frac{2\alpha^2}{\beta - \phi\alpha + \alpha\phi'\alpha + \alpha^2\phi''\alpha},$$

et on aura

$$\frac{dz}{d\alpha\,(\beta} = -\frac{\alpha^2}{2}(\beta - \phi\alpha + \alpha\phi'\alpha + \alpha^2\phi''\alpha);$$

d'où

$$z = -\frac{\alpha^3\beta}{6} + \frac{1}{2}\int(\alpha^2\phi\alpha - \alpha^3\phi'\alpha - \alpha^4\phi''\alpha)\,d\alpha + \psi\beta.$$

Or

$$\int\alpha^4\phi''\alpha\,d\alpha = \alpha^4\phi'\alpha - 4\int\alpha^3\phi'\alpha\,d\alpha = \alpha^4\phi'\alpha - 4\alpha^3\phi\alpha + 12\int\alpha^2\phi\alpha\,d\alpha,$$

et

$$\int\alpha^3\phi'\alpha\,d\alpha = \alpha^3\phi\alpha - 3\int\alpha^2\phi\alpha\,d\alpha:$$

ainsi

$$z = -\frac{\alpha^3\beta}{6} + \frac{3}{2}\alpha^3\phi\alpha - \frac{1}{2}\alpha^4\phi'\alpha - 4\int\alpha^2\phi\alpha\,d\alpha + \psi\beta,$$

ou en substituant à β sa valeur,

$$z = \frac{4\alpha^3\varphi\alpha - 2\alpha^4\varphi'\alpha - \alpha^4 x}{3} - 4\int\alpha^2\varphi\alpha d\alpha + \psi(2\alpha x + \varphi\alpha + \alpha\varphi'\alpha),$$

en sorte que l'intégrale primitive de $(r - pt)^2 = q^2 rt$ est représentée par le système des deux équations

$$z + \frac{\alpha^4 x - 4\alpha^3\varphi\alpha + 2\alpha^4\varphi'\alpha}{3} + 4\int\alpha^2\varphi\alpha d\alpha = \psi(2\alpha x + \varphi\alpha + \alpha\varphi'\alpha),$$
$$y = \alpha^2 x + \alpha^2\varphi'\alpha.$$

Je ferai sur cette intégrale quelques observations qui s'appliquent en général aux équations aux différentielles partielles du second ordre qui s'intègrent de la même manière.

La première est relative à l'équation

$$\frac{dz}{dx\,(\beta} = \left(\frac{dy}{dx\,(\beta}\right)^2,$$

qu'on obtient en éliminant α entre les deux équations qui donnent les valeurs de $\frac{dz}{dx\,(\beta}$ et de $\frac{dy}{dx\,(\beta}$. Cette équation, en y considérant β comme une constante, est aux différentielles entre les trois variables x, y, z, sans aucune des dérivées p, q, r, &c. de z; mais elle ne satisfait pas aux conditions d'intégrabilité. M. Monge a donné une méthode pour transformer une équation de ce genre en une équation aux différentielles partielles du premier ordre. On pourrait croire que quand cette circonstance se présente dans l'intégration d'une équation du second ordre, celle du premier qui résulte de cette transformation peut être de quelque utilité pour trouver l'intégrale de l'équation donnée; mais je me suis assuré par des considérations qu'il serait trop long de développer ici, qu'elle ne peut conduire qu'à une solution particulière : je me bornerai à le vérifier sur l'équation que j'ai prise ici pour exemple.

En faisant $\frac{dz}{dx\,(\beta} = p + q\frac{dy}{dx\,(\beta}$, et $\frac{dy}{dx\,(\beta} = u$, on a

$$p + q u = u^2,$$

et il faut, suivant le procédé donné par M. Monge, éliminer u entre cette équation et sa dérivée prise en ne faisant varier que u; savoir :

$$q = 2 u :$$

or cette opération donne

$$p + \frac{q^2}{4} = 0,$$

qui est précisément la solution particulière de $(r - p t)^2 = q^2 r t$, que nous avons déjà trouvée.

La seconde observation est relative à la forme des quantités composées de x et de α, qui entrent dans cette intégrale. Deux de ces quantités se trouvent dans la première équation, l'une hors du signe ψ, et l'autre sous ce signe ; la troisième forme le second membre de la seconde équation. Si l'on prend les dérivées relatives à α seul de ces trois quantités, on trouvera qu'elles ont toutes trois un facteur commun où se trouve exclusivement la nouvelle dérivée de $\phi\,\alpha$ que ces différenciations introduisent dans le calcul. Ces trois dérivées se réduisent, en effet, à

$$\frac{2}{3}\alpha^3 (2x + 2\phi'\alpha + \alpha\phi''\alpha),$$

$$(2x + 2\phi'\alpha + \alpha\phi''\alpha)\,\psi'(2\alpha x + \phi\alpha + \alpha\phi'\alpha),$$

$$\alpha(2x + 2\phi'\alpha + \alpha\phi''\alpha),$$

où la nouvelle fonction dérivée de $\phi\,\alpha$, savoir, $\phi''\alpha$, n'entre que dans le facteur commun

$$2x + 2\phi'\alpha + \alpha\phi''\alpha.$$

Il suit de là que si l'on tire de la première de ces équations la valeur de $\frac{d z}{d\alpha\,(x}$, et celle de $\frac{d y}{d\alpha\,(x}$ de la seconde, cette fonction disparaîtra de la fraction $\dfrac{\frac{dz}{d\alpha(x}}{\frac{dy}{d\alpha(x}}$ qui est la valeur de q, en sorte que cette dérivée, et par conséquent aussi l'autre dérivée p *, seront homogènes à l'intégrale relativement aux fonctions de α. Il est aisé de voir que la même chose aura nécessairement lieu quand l'intégrale étant composée de deux équations, où une des fonctions arbitraires entre sans aucune fonction qui en dérive par voie de différenciation ou d'intégration, les valeurs des dérivées du premier ordre devront, d'après la forme de l'équation donnée, être nécessairement homogènes à l'intégrale.

Pour le démontrer d'une manière générale, je remarquerai d'abord que si l'on représente l'intégrale par les deux équations

$$U = 0,$$
$$V = 0,$$

et que l'on y considère x et α comme les deux variables indépendantes, on en tirera, en les différenciant par rapport à α,

$$\frac{dz}{d\alpha(x} = -\frac{\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)\left(\frac{dV}{dy}\right) - \left(\frac{dV}{d\alpha}\right)\left(\frac{dU}{dy}\right)}{\left(\frac{dU}{dz}\right)\left(\frac{dV}{dy}\right) - \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dU}{dy}\right)}$$

---

* *Voyez* le Mémoire sur les intégrales des équations aux différentielles partielles inséré dans le 17.e cahier du journal de l'École royale polytechnique, pag. 574, où j'ai démontré que cette propriété ne peut appartenir à une dérivée de z sans se présenter aussi dans toutes ses autres dérivées du même ordre. Il est d'ailleurs évident qu'on a ici

$$p = -\frac{\alpha^4}{3} - \frac{2\alpha^3}{3}(2x + 2\varphi'\alpha + \alpha\varphi''\alpha)\frac{d\alpha}{dx(y} + \left[2\alpha + (2x + 2\varphi'\alpha + \alpha\varphi''\alpha)\frac{d\alpha}{dx(y}\right]\psi'(2\alpha x + \varphi\alpha + \alpha\varphi'\alpha) =$$
$$\frac{\alpha^4}{3} + \alpha\psi'(2\alpha x + \varphi\alpha + \alpha\varphi'\alpha),$$

parce que la seconde équation de l'intégrale primitive donne

$$(2x + 2\varphi'\alpha + \alpha\varphi''\alpha)\frac{d\alpha}{dx(y} = -\alpha.$$

$$\frac{dy}{d\alpha(x} = -\frac{\left(\frac{dU}{dz}\right)\left(\frac{dV}{d\alpha}\right) - \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)}{\left(\frac{dU}{dz}\right)\left(\frac{dV}{dy}\right) - \left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dU}{dy}\right)},$$

qui ne doivent contenir, d'après ce qui a été démontré dans un des paragraphes précédens, la nouvelle fonction dérivée de α, produite par ces différenciations, que dans un facteur commun à ces deux valeurs $\frac{dz}{dx(\alpha}$ et $\frac{dy}{dx(\alpha}$, pour que p et q soient homogènes à l'intégrale. Or cette nouvelle dérivée ne peut évidemment se trouver dans $\left(\frac{dU}{dz}\right)$, $\left(\frac{dV}{dz}\right)$, $\left(\frac{dU}{dy}\right)$, $\left(\frac{dV}{dy}\right)$, mais seulement dans $\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)$, $\left(\frac{dV}{d\alpha}\right)$, qui n'entrent qu'au numérateur dans les valeurs de $\frac{dz}{dx(\alpha}$, $\frac{dy}{dx(\alpha}$; il faudra donc que les deux quantités

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)\left(\frac{dV}{dy}\right) - \left(\frac{dV}{d\alpha}\right)\left(\frac{dU}{dy}\right),$$

et

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)\left(\frac{dV}{dz}\right) - \left(\frac{dV}{d\alpha}\right)\left(\frac{dU}{dz}\right),$$

soient divisibles par ce facteur; d'où il est aisé de conclure que

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)$$

et

$$\left(\frac{dV}{d\alpha}\right),$$

doivent l'être séparément. Telle est la condition nécessaire pour que les valeurs de p et de q puissent être homogènes à l'intégrale. Il est nécessaire, de plus, que l'une des deux quantités U et V contienne une fonction arbitraire. Supposons que ce soit U, et représentons cette fonction par $\psi\,\beta$, β étant donné en fonction de $x, y, z, \alpha, \phi\,\alpha$ et des fonctions de α dérivées de $\phi\,\alpha$, soit par voie de différenciation, soit par voie d'intégration, nous aurons

$$U = F(x, y, z, \alpha, \phi\alpha, \phi'\alpha \text{ \&c.} \int A\,\phi\,\alpha\, d\alpha \text{ \&c. } \psi\beta);$$

d'où il suit qu'en désignant par $\left[\frac{dU}{d\alpha}\right]$ ce que deviendrait $\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)$ si l'on en effaçait les termes qui proviennent des termes en α contenus dans β, la valeur de $\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)$ sera $\left[\frac{dU}{d\alpha}\right] + \left(\frac{dU}{d\psi}\right)\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\psi'\beta$, où la nouvelle fonction dérivée de $\phi\,\alpha$ produite par cette différenciation, ne peut se trouver que dans $\left[\frac{dU}{d\alpha}\right]$ et $\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)$, puisqu'elle ne peut s'introduire dans $\left(\frac{dU}{d\psi}\right)$, qui résulte d'une différenciation étrangère à α; mais $\psi'\beta$ doit rester absolument arbitraire : d'où il suit que cette nouvelle fonction ne peut être contenue exclusivement dans un facteur commun à tous les termes de $\left(\frac{dV}{d\alpha}\right)$, sans que ce facteur ne divise séparément $\left[\frac{dV}{d\alpha}\right]$ et $\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)$. Si l'autre équation $V = 0$ contenait aussi $\psi\beta$, la même démonstration prouverait que $\left(\frac{dV}{d\alpha}\right)$ ne peut pas être divisible par ce facteur, si $\left[\frac{dV}{d\alpha}\right]$ ne l'est pas aussi en même temps que $\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)$.

Il faut donc, pour que p et q puissent être homogènes à l'intégrale, qu'ils divisent exactement trois quantités, savoir :

$$\left[\frac{dU}{d\alpha}\right], \left[\frac{dV}{d\alpha}\right], \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right),$$

quand $\psi\beta$ entre dans les deux équations, et

$$\left[\frac{dU}{d\alpha}\right], \left(\frac{dV}{d\alpha}\right), \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right),$$

quand $\psi\beta$ n'entre que dans l'équation $U = 0$, ce qui donne

$$\left(\frac{dV}{d\alpha}\right) = \left[\frac{dV}{d\alpha}\right],$$

comme il arrive dans l'exemple que nous venons d'examiner.

Je remarquerai, en troisième lieu, que lorsqu'il arrive, comme dans l'exemple précédent, qu'une des équations de l'intégrale donne la valeur de y en fonctions de x et de α, et qu'on a d'ailleurs celle de β exprimée de la même manière, on peut :

1.° Changer la valeur de β en une fonction de x, y et α, dont la dérivée relative à α seul soit nulle en vertu de cette équation; il suffit pour cela de prendre la valeur de $\dfrac{\frac{d\beta}{d\alpha\,(x}}{\frac{dy}{d\alpha\,(x}}$, qui se réduira à une fonction de x et de α homogène à l'intégrale par la suppression du facteur commun à son numérateur et à son dénominateur. En représentant cette valeur par M, et celle de y par N, M et N ne contenant que x, α et les fonctions de α qui se trouvent dans l'intégrale, on n'aura qu'à remplacer β par $\beta + My - MN$; car la dérivée par rapport à α de cette quantité, sera $\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right) - M\left(\frac{dN}{d\alpha}\right) + (y-N)\left(\frac{dM}{d\alpha}\right)$, qui est égal à o, puisque $M = \dfrac{\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)}{\left(\frac{dN}{d\alpha}\right)}$, et que $y = N$.

Dans l'exemple précédent,

$$\beta = 2\alpha x + \phi\alpha + \alpha\phi'\alpha \quad , \quad y = \alpha^2 x + \alpha^2\phi'\alpha :$$

ainsi

$$M = \frac{2x + 2\phi'\alpha + \alpha\phi''\alpha}{2\alpha x + 2\alpha\phi'\alpha + \alpha^2\phi''\alpha} = \frac{1}{\alpha},$$

$$N = \alpha^2 x + \alpha^2\phi'\alpha.$$

Il faudra donc remplacer la valeur

$$2\alpha x + \phi\alpha + \alpha\phi'\alpha$$

de β par

$$2\alpha x + \phi\alpha + \alpha\phi'\alpha + \frac{y}{\alpha} - \alpha x - \alpha\phi'\alpha = \frac{y}{\alpha} + \alpha x + \phi\alpha;$$

2.° Opérer sur l'autre équation de l'intégrale, après y avoir remplacé la valeur de β par celle qu'on aura ainsi obtenue, précisément comme nous l'avons fait à la fin du paragraphe précédent sur les intégrales des équations du premier ordre, pour les changer en deux équations dont l'une soit la dérivée de l'autre par rapport à α. La quantité $\psi\,\beta$ qui se trouve dans cette équation, n'empêchera pas le succès de cette transformation, puisqu'au moyen du changement que nous venons de faire dans β, $\frac{d\beta}{d\alpha\,(x} = 0$; on aura ainsi l'intégrale sous la forme d'un système de deux équations dont la seconde sera la dérivée de la première relativement à α seul, et réduira en même temps à o la dérivée prise par rapport à α seul de la fonction arbitraire qui n'est pas composée de α.

Par exemple, la valeur que nous venons de trouver pour β change l'intégrale de l'équation $(r - pt)^2 = q^2 rt$, en

$$z = \frac{4\alpha^3\phi\alpha - 2\alpha^4\phi'\alpha - \alpha^4 x}{3} - 4\int\alpha^2\phi\alpha d\alpha + \psi\left(\frac{y}{\alpha} + \alpha x + \phi\alpha\right),$$

on en tire, à cause que

$$-\frac{y}{\alpha^2} + x + \phi'\alpha = 0,$$

en vertu de la valeur de y,

$$\frac{dz}{d\alpha\,(x} = -\frac{4\alpha^3\phi'\alpha + 2\alpha^4\phi''\alpha + 4\alpha^3 x}{3},$$

et comme cette valeur de y donne

$$\frac{dy}{d\alpha\,(x} = 2\alpha\phi'\alpha + \alpha^2\phi''\alpha + 2\alpha x,$$

on a

$$Q = \frac{\frac{dz}{d\alpha\,(x}}{\frac{dy}{d\alpha\,(x}} = -\frac{2\alpha^2}{3},$$

d'où

$$u = z - Q(\alpha^2 x + \alpha^2 \varphi' \alpha) = \frac{4\alpha^3 \varphi \alpha + \alpha^4 x}{3} -$$

$$4\int \alpha^2 \varphi \alpha \, d\alpha + \psi\left(\frac{y}{\alpha} + \alpha x + \varphi \alpha\right),$$

ce qui donne pour $z = u + Qy$, cette valeur

$$z = \frac{\alpha^4 x - 2\alpha^2 y + 4\alpha^3 \varphi \alpha}{3} - 4\int \alpha^2 \varphi \alpha \, d\alpha + \psi\left(\frac{y}{\alpha} + \alpha x + \varphi \alpha\right),$$

qui réunie à

$$y = \alpha^2 x + \alpha^2 \varphi' \alpha,$$

représente l'intégrale de

$$(r - pt)^2 = q^2 rt$$

sous la forme la plus simple.

Cette intégrale se vérifie par un calcul bien simple, parce que la seconde équation fait disparaître $\frac{d\alpha}{dx(y}$ et $\frac{d\alpha}{dy(x}$ de ses dérivées du premier ordre relatives à x et à y, en sorte qu'on a sur-le-champ

$$p = \frac{\alpha^4}{3} + \alpha \psi'\left(\frac{y}{\alpha} + \alpha x + \varphi \alpha\right),$$

$$q = -\frac{2\alpha^2}{3} + \frac{1}{\alpha} \psi'\left(\frac{y}{\alpha} + \alpha x + \varphi \alpha\right),$$

et en éliminant la fonction désignée par le signe ψ',

$$p - \alpha^2 q = \alpha^4,$$

on en tire

$$r - \alpha^2 s = (4\alpha^3 + 2\alpha q) \frac{d\alpha}{dx(y},$$

$$s - \alpha^2 t = (4\alpha^3 + 2\alpha q) \frac{d\alpha}{dy(x},$$

d'où

$$\frac{r-\alpha^2 s}{s-\alpha^2 t}=\frac{\frac{d\alpha}{dx\,(y}}{\frac{d\alpha}{dy\,(\alpha}}=-\alpha^2,$$

parce que la seconde équation de l'intégrale

$$y=\alpha^2 x+\alpha^2\phi'\alpha$$

donne

$$\frac{\frac{d\alpha}{dx\,(y}}{\frac{d\alpha}{dy\,(x}}=-\alpha^2,$$

on a donc

$$r=\alpha^4 t,$$

d'où l'on tire

$$p-q\sqrt{\frac{r}{t}}=\frac{r}{t},$$

et par conséquent

$$(r-pt)^2-q^2rt=0.$$

Parmi les équations du second ordre dans lesquelles les dérivées de cet ordre peuvent être hétérogènes à l'intégrale, se trouvent d'abord comprises toutes celles dans lesquelles ces dérivées ne sont élevées qu'à la première puissance, parce qu'alors il est évident que t n'entrant aussi qu'à la première puissance dans la transformée, on n'en déduit que deux équations en égalant séparément à o les termes indépendans de t et ceux qui sont multipliés par t. Il en est de même des équations qui contiennent en outre un terme où $rt-s^2$ est multiplié par une fonction de x, y, z, p, q, parce qu'en substituant à la place de r et de s leurs valeurs

$$\frac{dp}{dx\,(\alpha}-\frac{dq}{dx\,(\alpha}\,\frac{dy}{dx\,(\alpha}+t\left(\frac{dy}{dx\,(\alpha}\right)^2$$

et

et

$$\frac{dq}{dx(\alpha} = s + t\,\frac{dy}{dx(\alpha};$$

on trouve

$$rt - s^2 = -\left(\frac{dq}{dx(\alpha}\right)^2 + t\left(\frac{dp}{dx(\alpha} + \frac{dq}{dx(\alpha}\,\frac{dy}{dx(\alpha}\right),$$

qui ne contient aussi t qu'à la première puissance. Pour traiter ces équations d'une manière générale, je les représenterai par la formule

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

où H, K, L, M, N sont des fonctions quelconques de x, y, z, p, q, et j'en tirerai les deux équations que j'ai représentées par $P = 0$ et $Q = 0$, savoir :

$$H\left(\frac{dp}{dx} - \frac{dq}{dx(\alpha}\,\frac{dy}{dx(\alpha}\right) + 2K\,\frac{dq}{dx(\alpha} + M - N\left(\frac{dq}{dx(\alpha}\right)^2 = 0,$$

et

$$H\left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^2 - 2K\,\frac{dy}{dx(\alpha} + L + N\left(\frac{dp}{dx(\alpha} + \frac{dq}{dx(\alpha}\,\frac{dy}{dx(\alpha}\right) = 0;$$

dont la seconde peut s'écrire ainsi :

$$(H+Nt)\left(\frac{dy}{dx(\alpha}\right)^2 - 2(K - Ns)\frac{dy}{dx(\alpha} + L + Nr = 0,$$

et donne, lorsqu'on la résout par rapport à $\frac{dy}{dx(\alpha}$,

$$\frac{dy}{dx(\alpha} = \frac{K - Ns \pm \sqrt{K^2 - HL - N[Hr + 2Ks + Lt + N(rt - s^2)]}}{H + Nt}$$

ou

$$\frac{dy}{dx(\alpha} = \frac{K - Ns \pm \sqrt{K^2 - HL + MN}}{H + Nt},$$

d'où l'on tire, à cause que

$$\frac{dq}{dx\,(\alpha} = s + t\,\frac{dy}{dx\,(\alpha};$$

cette équation

$$H\,\frac{dy}{dx\,(\alpha} + N\,\frac{dq}{dx\,(\alpha} = K \pm \sqrt{K^2 - HL + MN}.$$

La première équation, qui peut s'écrire ainsi,

$$H\,\frac{dp}{dx\,(\alpha} + \left(2K - H\,\frac{dy}{dx\,(\alpha} - N\,\frac{dq}{dx\,(\alpha}\right)\frac{dq}{dx\,(\alpha} + M = 0,$$

se réduit, par conséquent, à

$$H\,\frac{dp}{dx\,(\alpha} + (K \mp \sqrt{K^2 - HL + MN})\,\frac{dq}{dx\,(\alpha} + M = 0.$$

Telles sont les deux équations entre x, y, z, p, q, qui ne contiennent que des dérivées relatives à x, et dont on doit tirer, quand cela est possible, l'intégration de l'équation donnée.

Il est aisé de vérifier qu'en remettant, dans ces deux équations, à la place de $\frac{dp}{dx\,(\alpha}$ et de $\frac{dq}{dx\,(\alpha}$ leurs valeurs $r + s\,\frac{dy}{dx\,(\alpha}$, $s + t\,\frac{dy}{dx\,(\alpha}$, et en éliminant $\frac{dy}{dx\,(\alpha}$, on retrouve l'équation

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0.$$

Dans ces deux équations, le double signe vient de ce qu'on y peut prendre alternativement pour α les deux quantités dont se composent les fonctions arbitraires de l'intégrale; en sorte que, si l'on représente ces deux quantités par α et β, et qu'on fasse pour abréger $K^2 - HL + MN = G$, on en aura quatre, savoir :

$$N\,\frac{dq}{dx\,(\alpha} + H\,\frac{dy}{dx\,(\alpha} - K - \sqrt{G} = 0,$$

$$H\,\frac{dp}{dx\,(\alpha} + (K - \sqrt{G})\,\frac{dq}{dx\,(\alpha} + M = 0,$$

$$N\frac{dq}{dx(\beta}+H\frac{dy}{dx(\beta}-K+\sqrt{G}=0,$$

$$H\frac{dp}{dx(\beta}+(K+\sqrt{G})\frac{dq}{dx(\beta}+M=0.$$

Dans deux de ces équations, les variables indépendantes sont x et α; et dans les deux autres, x et β; on peut en tirer quatre équations où ces variables soient les mêmes dans toutes, soit en conservant x avec une des deux quantités α et β, soit en prenant ces dernières quantités pour les deux variables indépendantes. La première forme est celle sous laquelle on doit employer ces équations, lorsque β peut être exprimé dans l'intégrale primitive par une fonction déterminée de x, de α, et des fonctions de α, comme il arrive dans l'intégrale de $(r-pt)^2=q^2rt$, et dans une classe entière d'équations du second ordre, où sont comprises, ainsi qu'il a été dit plus haut, toutes celles qui sont susceptibles d'une intégrale intermédiaire. Quand cette circonstance n'a pas lieu, il faut prendre α et β pour les deux variables indépendantes dans l'un et l'autre cas; en réunissant ces quatre équations à

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$

on en aura cinq entre les sept quantités x, y, z, p, q, α, β, d'où il s'agira d'éliminer p et q, et d'arriver, dans le premier cas, aux valeurs de y, z, β, en fonctions de x et de α, et dans le second aux valeurs de x, y, z en fonctions de α et de β. Considérons d'abord ce qui arrive lorsqu'on prend x et α pour variables indépendantes. Alors parmi les cinq équations, il y en a trois, savoir :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dz}{dx(\alpha}=p+q\frac{dy}{dx(\alpha},\\&N\frac{dq}{dx(\alpha}+H\frac{dy}{dx(\alpha}-K-\sqrt{G}=0,\\&H\frac{dp}{dx(\alpha}+(K-\sqrt{G})\frac{dq}{dx(\alpha}+M=0,\end{aligned}\right\}[A]$$

qui se trouvent rapportées aux variables indépendantes x et α, et qui ne contiennent que des dérivées relatives à la seule variable x : à l'égard des deux autres, on les ramène aisément aux mêmes variables indépendantes, mais elles renferment alors des dérivées relatives à l'une et l'autre. Pour cela on observe que u étant une variable quelconque,

$$\frac{du}{dx(\beta} = \frac{du}{dx(\alpha} + \frac{du}{d\alpha(x} \; \frac{d\alpha}{dx(\beta},$$

et en faisant successivement u égal à y, p, q, on en conclut

$$N \frac{dq}{dx(\alpha} + H \frac{dy}{dx(\alpha} +$$
$$\left(N \frac{dq}{d\alpha(x} + H \frac{dy}{d\alpha(x}\right) \frac{d\alpha}{dx(\beta} - K + \sqrt{G} = 0,$$

$$H \frac{dp}{dx(\alpha} + (K + \sqrt{G}) \frac{dq}{dx(\alpha} +$$
$$\left(H \frac{dp}{d\alpha(x} + (K + \sqrt{G}) \frac{dq}{d\alpha(x}\right) \frac{d\alpha}{dx(\beta} + M = 0,$$

qui se réduisent, en vertu des précédentes, à

$$\left(N \frac{dq}{d\alpha(x} + H \frac{dy}{d\alpha(x}\right) \frac{d\alpha}{dx(\beta} + 2\sqrt{G} = 0,$$

et

$$\left(H \frac{dp}{d\alpha(x} + (K + \sqrt{G}) \frac{dq}{d\alpha(x}\right) \frac{d\alpha}{dx(\alpha} + 2\sqrt{G}. \frac{dq}{dx(\alpha} = 0.$$

Ces deux dernières donnent chacune une valeur de $\frac{d\alpha}{dx(\beta}$ ou de

$-\dfrac{\frac{d\beta}{dx(\alpha}}{\frac{d\beta}{d\alpha(x}}$ qui, lorsqu'on peut les ramener à ne contenir que x et α, donnent la valeur de β par une équation aux différentielles partielles du premier ordre, où cette quantité est déterminée par le rapport de ses deux dérivées, et qui peut, par conséquent, s'intégrer immédiatement comme une équation aux différentielles ordinaires. Nous avons vu qu'en effet β ne pouvait être déterminé que par une équation de cette forme, pour qu'une fonction quelconque de β y satisfît en même temps que β.

J'observerai,

1.° Qu'en mettant

$$-\frac{\frac{d\beta}{dx(\alpha}}{\frac{d\beta}{d\alpha(x}}$$

à la place de

$$\frac{d\alpha}{dx(\beta},$$

les deux dernières équations deviennent

$$\left.\begin{aligned}\left(N\frac{dq}{d\alpha(x}+H\frac{dy}{d\alpha(x)}\right)\frac{d\beta}{dx(\alpha}-2\sqrt{G}\,.\,\frac{d\beta}{d\alpha(x}=0,\\ \left(H\frac{dp}{d\alpha(x}+(K+\sqrt{G})\frac{dq}{d\alpha(x)}\right)\frac{d\beta}{dx(\alpha}-2\sqrt{G}\,.\,\frac{dq}{dx(\alpha}\,\frac{d\beta}{d\alpha(x}=0,\end{aligned}\right\}[\mathrm{B}]$$

qui ne contiennent plus que des dérivées relatives à x et α comme les trois autres équations, en sorte qu'on peut les combiner immédiatement avec elles;

2.° Que, dans le cas où il y a une intégrale intermédiaire, en désignant par β la quantité dont se compose la fonction arbitraire de cette intégrale, les deux équations

$$N\frac{dq}{dx(\beta}+H\frac{dy}{dx(\beta}-K+\sqrt{G}=0,$$

$$H\frac{dp}{dx(\beta}+(K+\sqrt{G})\frac{dq}{dx(\beta}+M=0,$$

qui fournissent les deux équations intégrables comme si elles étaient aux différentielles ordinaires dont cette intégrale résulte, se trouvent remplacées, après l'intégration, par deux autres de cette forme :

$$f(x, y, z, p, q) = \beta$$

$$F(x, y, z, p, q) = \psi\beta$$

qui serviront à éliminer p et q, ainsi que leurs dérivées $\frac{dp}{dx(\alpha}$, $\frac{dq}{dx(\alpha}$ des trois équations [A]; en sorte que l'on aura trois équations entre x, y, z, α et β, qui donneront y, z, β en fonctions de x et de α, et qui pourront être traitées comme des équations à une seule variable indépendante, puisque α pourra y être considéré comme constant, et qu'alors on n'aura que quatre variables dans ces trois équations, il faudra seulement avoir soin de remplacer dans leurs intégrales les constantes arbitraires par des fonctions de α;

3.° Que cette réduction des équations qui doivent conduire à l'intégrale primitive, à des équations qu'on peut intégrer comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, dont le nombre n'est inférieur que d'une unité à celui des variables, n'a pas lieu seulement lorsque l'équation donnée est de la forme

$$Hr + 2KS + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

mais qu'elle a lieu de la même manière pour toutes les équations aux différentielles partielles du second ordre susceptibles d'une intégrale intermédiaire. On trouve aussi dans ce cas, par le procédé expliqué dans un des paragraphes précédens, deux équations relatives à x et α, qui, par le changement du signe du radical de la valeur de $\frac{dy}{dx(\alpha}$, donnent deux autres équations où ce sont x et β qui sont considérés comme variables indépendantes : la seule différence est que quand les dérivées du second ordre doivent être homogènes à l'intégrale, parce que l'équation donnée contient d'autres puissances ou d'autres produits de ces dérivées que $rt - s^2$, on a nécessairement dans le calcul dix quantités, x, y, z, p, q, r, s, t, α et β, entre lesquelles, outre les quatre équations dont nous venons de parler, on a l'équation même donnée et les trois suivantes :

$$\frac{dz}{dx\,(\alpha} = p + q\frac{dy}{dx\,(\alpha},$$

$$\frac{dp}{dx\,(\alpha} = r + s\,\frac{dy}{dx\,(\alpha},$$

$$\frac{dq}{dx\,(\alpha} = s + t\frac{dy}{dx\,(\alpha}.$$

Parmi ces huit équations, il y en a une qui ne contient que les quantités mêmes, x, y, z, p, q, r, s, t, et cinq où il entre seulement de plus leurs dérivées relatives à x prises en regardant x et α comme les deux variables indépendantes. Les deux autres seront relatives à x et à β; mais on pourra les ramener à avoir x et α pour variables indépendantes, comme dans le cas précédent, en y introduisant des dérivées relatives à α. S'il y a une intégrale intermédiaire, elles fourniront deux équations de la forme

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = \beta,$$
$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = \psi\beta,$$

qui serviront, conjointement avec l'équation donnée, à éliminer r, s, t et leurs dérivées relatives à x des cinq autres, en sorte qu'on aura dans ce cas cinq équations du premier ordre, entre les sept variables x, y, z, p, q, α et β, qu'on pourra toujours intégrer comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, parce qu'elles ne contiendront point de dérivées relatives à α, ce qui réduira à six le nombre des quantités considérées comme variables dans cette intégration;

4.° Que, quand $G = K^2 - HL + NM$ est nul, les deux équations [B] se réduisent à

$$\frac{d\beta}{dx\,(\alpha} = 0,$$

ou

$$\beta = \chi\alpha,$$

d'où il suit que les deux fonctions arbitraires sont alors composées de la même quantité, comme on pouvait aussi le conclure de ce que les deux valeurs trouvées d'abord pour $\frac{dy}{dx(\alpha}$ et dont on doit prendre une pour $\frac{dy}{dx(\alpha}$, et l'autre pour $\frac{dy}{dx(\beta}$, deviennent égales dans ce cas;

5.° Que, si l'on écrit les équations [B] sous cette forme

$$N\frac{dq}{d\alpha(x}+H\frac{dy}{d\alpha(x}=2\sqrt{G}.\frac{\frac{d\beta}{d\alpha(x}}{\frac{d\beta}{dx(\alpha}}$$

$$H\frac{dp}{d\alpha(x}+(K+\sqrt{G})\frac{dq}{d\alpha(x}=2\sqrt{G}.\frac{\frac{d\beta}{d\alpha(x}}{\frac{d\beta}{dx(\alpha}}\frac{dq}{dx(\alpha},$$

et qu'on élimine ensuite N de la première, au moyen de l'équation

$$N\frac{dq}{dx(\alpha}+H\frac{dy}{dx(\alpha}=K+\sqrt{G},$$

on obtient

$$H\left(\frac{dq}{dx(\alpha}\frac{dy}{d\alpha(x}-\frac{dq}{d\alpha(x}\frac{dy}{dx(\alpha}\right)=$$

$$2\sqrt{G}.\frac{\frac{d\beta}{d\alpha(x}}{\frac{d\beta}{dx(\alpha}}\frac{dq}{dx(\alpha}-(K+\sqrt{G})\frac{dq}{d\alpha(x}=H\frac{dp}{d\alpha(x},$$

c'est-à-dire,

$$\frac{dp}{d\alpha(\alpha}=\frac{dq}{dx(\alpha}\frac{dy}{d\alpha(x}-\frac{dq}{d\alpha(x}\frac{dy}{dx(\alpha}:$$

Nous avons vu que cette équation n'était autre chose que ce que devient

$$\frac{dp}{dy(x}=\frac{dq}{dx(y};$$

quand

quand on prend x et α pour les deux variables indépendantes ; et puisqu'elles résultent des équations dont nous avons fait dépendre l'intégrale de l'équation donnée, il s'ensuit que, si l'on en peut tirer des valeurs de p et de q, ces valeurs seront toujours telles que $p\,dx + q\,dy$ sera une différentielle exacte, en sorte qu'en les substituant ainsi que la valeur de dy dans cette expression, on aura une valeur de dz intégrable exactement, qui conduira immédiatement à celle de z ;

6.° Qu'outre les équations trouvées, l'une entre les différentielles de x, y, z, l'autre entre celles de x, p, q, on en peut former de semblables dont l'une contienne les différentielles de x, y, p, et l'autre celles de y, p, q. Il suffit pour cela d'éliminer alternativement $\frac{dq}{dx\,(\alpha}$ et le terme qui, ne contenant pas de dérivée, doit être regardé comme le coefficient de dx ; on trouve ainsi

$$HN\frac{dp}{dx\,(\alpha} - H(K - \sqrt{G})\frac{dy}{dx\,(\alpha} + MN + K^2 - G = 0,$$

qui se réduit à

$$N\frac{dp}{dx\,(\alpha} - (K - \sqrt{G})\frac{dy}{dx\,(\alpha} + L = 0,$$

lorsqu'on y met

$$K^2 - HL + MN$$

au lieu de G, et

$$H(K + \sqrt{G})\frac{dp}{dx\,(\alpha} + (K^2 - G + MN)\frac{dq}{dx\,(\alpha} + HM\frac{dy}{dx\,(\alpha} = 0,$$

qui se réduit de même à

$$(K + \sqrt{G})\frac{dp}{dx\,(\alpha} + L\frac{dq}{dx\,(\alpha} + M\frac{dy}{dx\,(\alpha} = 0.$$

Ces équations ont aussi leurs correspondantes en dérivées relatives à la-fois à x et à α, qu'on obtient en y changeant le signe de $\sqrt{G}$, rapportant alors ces équations aux variables indépendantes x et β, et ramenant les dérivées relatives à ces deux variables à être exprimées en dérivées relatives à x et à α.

On trouve, en faisant le calcul comme pour les équations que nous avions d'abord obtenues, que

$$\left(N\frac{dp}{d\alpha\,(x} - (K+\sqrt{G})\frac{dy}{d\alpha\,(x}\right)\frac{d\beta}{dx\,(\alpha} + 2\sqrt{G}\,.\,\frac{dy}{dx\,(\alpha}\,\frac{d\beta}{d\alpha\,(x} = 0,$$

et que

$$\left((K-\sqrt{G})\frac{dp}{d\alpha\,(x} + L\frac{dq}{d\alpha\,(x} + M\frac{dy}{d\alpha\,(x}\right)\frac{d\beta}{dx\,(\alpha} + 2\sqrt{G}\,.\,\frac{dp}{dx\,(\alpha}\,\frac{d\beta}{d\alpha\,(x} = 0.$$

Ces quatre dernières équations n'expriment, au reste, que les mêmes relations données par les équations [A] et [B], et ne peuvent par conséquent conduire à aucun résultat qu'il ne soit possible de tirer de celles-ci; elles peuvent seulement être utiles en présentant, suivant les valeurs de H, K, L, M, N, des équations plus simples et où il soit plus facile d'apercevoir si les équations qui peuvent être intégrées comme si elles étaient aux différentielles ordinaires satisfont à la condition d'intégrabilité.

Les quatre équations

$$\left(N\frac{dq}{d\alpha\,(x} + H\frac{dy}{d\alpha\,(x}\right)\frac{d\alpha}{dx\,(\beta} + 2\sqrt{G} = 0,$$

$$\left(H\frac{dp}{d\alpha\,(x} + (K+\sqrt{G})\frac{dq}{d\alpha\,(x}\right)\frac{d\alpha}{dx\,(\beta} + 2\sqrt{G}\,.\,\frac{dq}{dx\,(\alpha} = 0,$$

$$\left(N\frac{dp}{d\alpha\,(x} - (K+\sqrt{G})\frac{dy}{d\alpha\,(x}\right)\frac{d\alpha}{dx\,(\beta} - 2\sqrt{G}\,.\,\frac{dy}{dx\,(\alpha} = 0,$$

$$\left((K-\sqrt{G})\frac{dp}{d\alpha\,(x} + L\frac{dq}{d\alpha\,(x} + M\frac{dy}{d\alpha\,(x}\right)\frac{d\alpha}{dx\,(\beta} - 2\sqrt{G}\,.\,\frac{dp}{dx\,(\alpha} = 0,$$

conduisent à des résultats remarquables, quand l'équation

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0$$

manque de quelques-uns de ses termes,

1.° Quand elle ne contient pas une des dérivées extrêmes du second ordre r ou t, on peut supposer qu'on a pris pour x la variable indépendante par rapport à laquelle z est deux fois différenciée dans cette dérivée, qui est alors représentée par r. Pour que r manque dans l'équation donnée, il faut qu'elle se réduise à $2Ks + Lt + M = 0$, et qu'on ait $H = 0$ et $N = 0$; d'où il suit que la première des quatre équations précédentes se réduit à

$$\frac{d\alpha}{dx(\beta} = -\frac{2\sqrt{G}}{0},$$

ou

$$\frac{dx}{d\alpha(\beta} = 0,$$

et par conséquent on tire $\beta = \gamma x$; en sorte que, dans ce cas, une des deux fonctions arbitraires de l'intégrale primitive doit être composée de la variable indépendante relativement à laquelle il faudrait différencier z deux fois pour avoir la dérivée qui manque à l'équation du second ordre, ce qui s'accorde avec ce qui a été démontré dans le troisième paragraphe.

2.° Pour que ce soit la dérivée s qu'on obtient en différenciant z alternativement par rapport à x et à y, qui manque dans l'équation donnée, il faut que cette équation soit représentée par

$$Hr + Lt + M = 0,$$

et qu'on ait par conséquent $K = 0$ et $N = 0$; alors tous les termes de la troisième des quatre équations précédentes où $\sqrt{G}$ n'entre pas s'évanouissent, en sorte qu'en supprimant ce facteur commun à tous les termes restans, on a

$$\frac{d\alpha}{dx(\beta} = -2\frac{\frac{dy}{dx(\alpha}}{\frac{dy}{d\alpha(x}} = 2\frac{d\alpha}{dx(y};$$

relation très-singulière entre β et y, qui a lieu dans toutes les équations du second ordre qui ne contiennent de dérivées de cet ordre que les deux extrêmes r et t à la première dimension seulement; cette relation donne sur-le-champ β, quand on connaît y en fonctions de x et de α.

Cette circonstance se rencontre dans l'équation $(r-pt)^2 = q^2 rt$, que nous avons prise pour exemple; en la résolvant par rapport à r, elle devient

$$r = \frac{q^2 + 2p \pm q\sqrt{q^2+4p}}{2}\, t = \left(\frac{q \pm \sqrt{q^2+4p}}{2}\right)^2 t,$$

et donne par conséquent

$$H = 1, \quad K = 0, \quad L = -\left(\frac{q \pm \sqrt{q^2+4p}}{2}\right)^2, \quad M = 0,$$
$$N = 0, \quad G = \sqrt{-HL} = \frac{q \pm \sqrt{q^2+4p}}{2}.$$

Après avoir trouvé $y = \alpha x + \aleph \alpha$, il s'agissait d'obtenir β et ζ en fonctions de x et de α; nous avons été obligés, pour trouver $\frac{dy}{dx(\beta}$ qui devait servir à déterminer β, d'avoir recours à une équation du second degré dont un seul facteur devait être employé, parce que l'autre correspondait à une autre portion de l'intégrale intermédiaire que celle qui correspondait à

$$y = \alpha x + \aleph \alpha;$$

nous aurions évité cette difficulté et trouvé immédiatement la valeur de β, en nous servant de la formule que nous avons démontré avoir toujours lieu quand l'équation donnée est de la forme

$$Hr + Lt + M = 0,$$

dans laquelle rentre l'équation

$$(r - pt)^2 - q^2 rt = 0,$$

lorsqu'on la résout par rapport à $\frac{r}{t}$; on n'a, en effet, lorsqu'il s'agit de cette dernière, qu'à tirer de l'équation

$$y = \alpha x + \aleph \alpha,$$

cette valeur

$$\frac{d\alpha}{dx(y} = -\frac{\alpha}{x + \aleph'\alpha},$$

et on en conclut, en vertu de cette formule,

$$\frac{d\alpha}{dx\,(\beta} = 2\,\frac{d\alpha}{dx\,(y} = -\,2\,\frac{\alpha}{x + \psi'\alpha},$$

en sorte que β ou une fonction quelconque de β est la constante arbitraire de l'équation

$$x\,d\alpha + 2\,\alpha\,dx + \psi'\alpha\,d\alpha = 0,$$

considérée comme aux différentielles ordinaires. Le facteur propre à rendre cette équation intégrable étant $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, introduirait des radicaux dans le calcul; mais on les évite, comme nous l'avons vu, en écrivant α^2 au lieu de α, $\alpha^2\,\phi'\,\alpha$ à la place de $\psi\,\alpha$, et en partant de la valeur de y qui en résulte,

$$y = \alpha^2\,x + \alpha^2\,\phi'\,\alpha,$$

cette valeur donne

$$\frac{d\alpha}{dx\,(y} = -\,\frac{\alpha}{2x + 2\,\phi'\alpha + \alpha\,\phi''\alpha}:$$

on a donc

$$\frac{d\alpha}{dx\,(\beta} = -\,\frac{2\,\alpha}{2x + 2\,\phi'\alpha + \alpha\,\phi''\alpha};$$

et par conséquent

$$\beta = \int (2x\,d\alpha + 2\alpha\,dx + 2\phi'\alpha\,d\alpha + \alpha\phi''\alpha\,d\alpha) = 2\alpha x + \phi\alpha + \alpha\phi'\alpha,$$

comme nous l'avions trouvé.

Nous n'avons pas eu besoin de multiplier cette quantité par un facteur, parce qu'elle est évidemment une différentielle exacte par rapport à x et à α.

A l'égard de la valeur de

$$\frac{dz}{dx\,(\beta},$$

on doit la calculer ainsi : l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx\,(\beta}\right)^2 - q\,\frac{dy}{dx\,(\beta} - p = 0,$$

donne immédiatement

$$\frac{dz}{dx\,(\beta} = \left(\frac{dy}{dx\,(\beta}\right)^2;$$

mais de

$$\beta = 2\alpha x + \phi\alpha + \alpha\phi'\alpha \quad , \quad y = \alpha^2 x + \alpha^2\phi'\alpha,$$

on tire

$$\frac{d\alpha}{dx\,(\beta} = -\frac{2\alpha}{2x + 2\phi'\alpha + \alpha\phi''\alpha},$$

et

$$\frac{dy}{dx\,(\beta} = \alpha^2 + (2\alpha x + 2\alpha\phi'\alpha + \alpha^2\phi''\alpha)\frac{d\alpha}{dx\,(\beta} = \alpha^2 - 2\alpha^2 = -\alpha^2,$$

d'où

$$\frac{dz}{dx\,(\beta} = \alpha^4.$$

3.° Si l'on avait une équation qui contînt $rt - s^2$ avec une seule des dérivées extrêmes du second ordre, en supposant que t représente cette dérivée, l'équation donnée serait de la forme

$$Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

on aurait $H = 0$, $K = 0$; et la seconde des quatre équations dont nous examinons les différentes réductions serait à son tour divisible par $\sqrt{G}$, après avoir supprimé ce facteur, on en conclurait

$$\frac{d\alpha}{dx\,(\beta} = -2\,\frac{\dfrac{dq}{dx\,(\alpha}}{\dfrac{dq}{d\alpha\,(x}} = 2\,\frac{d\alpha}{dx\,(q},$$

relation aussi remarquable que la précédente, et qui donnerait de même sur-le-champ la valeur de β en x et en α, si l'on avait q exprimé par une fonction de ces deux quantités. Comme on peut prendre y au lieu de x, et x au lieu de y, pourvu qu'on transpose aussi les lettres p et q, r et t, il s'ensuit que si l'on a une équation de cette forme

$$Hr + M + N(rt - s^2) = 0,$$

on aura

$$\frac{d\alpha}{dy\,(\beta} = 2\,\frac{d\alpha}{dy\,(p}.$$

Il faut, pour que ces diverses relations soient démontrées, que

$$G = K^2 - HL + MN$$

ne soit pas nul; car alors les équations dont nous les avons tirées s'évanouiraient par l'anéantissement de tous leurs termes, à cause qu'on a toujours dans ce cas $\beta = \alpha$: c'est pourquoi on ne pourrait plus déduire de ces équations les conséquences que je viens d'exposer. Elles n'auront donc nécessairement lieu qu'autant que le terme $2Ks$ ne manque pas dans l'équation $2Ks + Lt + M = 0$, ni l'un des deux termes Hr ou Lt, dans l'équation $Hr + Lt + M = 0$, ni l'un des deux termes M ou $N(rt - s^2)$, soit dans $Lt + M + N(rt - s^2) = 0$; soit dans $Hr + M + N(rt - s^2) = 0$, conditions nécessaires pour que G ne soit pas nul, et que les deux fonctions arbitraires de l'intégrale primitive soient par conséquent composées de deux quantités différentes.

Voyons maintenant quelle est la marche qu'on doit suivre pour déduire l'intégrale primitive des cinq équations que nous venons de trouver. On commencera par examiner quelles sont, parmi les équations qui résultent, les unes de la supposition qu'on prend pour variable indépendante x et une des quantités dont se composent les fonctions arbitraires ; les autres de la supposition qu'on prend x, et l'autre de ces deux quantités, celles qui peuvent fournir plus de combinaisons satisfaisant aux conditions d'intégrabilité, et l'on prendra pour ces équations celles des formules précédentes où x et β sont les deux variables indépendantes; en sorte que, si l'équation donnée est susceptible d'une intégrale intermédiaire, on pourra tirer des deux équations relatives à x et à β qui donnent cette intégrale, deux combinaisons qui satisfassent aux conditions d'intégrabilité, et que, dans le cas contraire, on n'en pourra tirer qu'une seule ou aucune. Dans le premier cas, il sera inutile d'appliquer à ces équations la transformation par laquelle je les ai changées dans les équations que j'ai désignées par [B]; dans le second cas, il ne faudra appliquer cette transformation qu'à celle qui ne satisfait pas aux conditions d'intégrabilité; dans le troisième, il faudra l'appliquer à toutes deux, parce que le but de cette transformation est de ramener ces équations à ne contenir, comme celles que j'ai désignées par [A], que des dérivées relatives à x et à α, et que, quand on peut les intégrer, l'intégration en fait disparaître les dérivées relatives à x et à β; de sorte qu'en remplaçant ces équations par leurs intégrales, on n'a dans le calcul que des dérivées relatives à x et à α d'une manière plus simple que par la transformation.

Dans le premier cas, on aura deux équations intégrales dont les deux constantes arbitraires seront remplacées par β et $\psi . \beta$, et qui serviront à éliminer p, q des trois équations [A], ce qui donnera trois équations entre les quatre variables x, y, z, β, qu'on pourra par conséquent toujours intégrer comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, pourvu qu'on remplace dans leurs intégrales les constantes arbitraires par des fonctions de α. Lorsque ces constantes seront au nombre de plus de deux, l'une d'elles pourra être remplacée par α, une seconde par $\phi\ \alpha$, et les autres devront l'être par des fonctions dérivées de $\phi\ \alpha$ par voie d'intégration ou de différenciation. La manière dont elles en dépendront sera, comme dans les équations du premier ordre, déterminées par des relations qu'on déduira facilement de celles qui doivent exister entre z et ses dérivées, telles que

$$\frac{dz}{d\alpha\,(x} = q\,\frac{dy}{d\alpha\,(x},$$

&c. Il faut observer que ces fonctions arbitraires ne se présentent d'abord que comme indépendantes de $\phi\ \alpha$, et n'obligent pas par conséquent d'avoir d'avoir recours à ces relations dans le cas où l'on détermine z par une seule de ses dérivées du premier ordre ; car quand on peut avoir à-la-fois les valeurs en x et α de

$$\frac{dz}{dx\,(\alpha} \text{ et de } \frac{dz}{d\alpha\,(x}$$

on obtient la valeur de z en intégrant

$$\frac{dz}{dx\,(\alpha}\,dx + \frac{dz}{d\alpha\,(x}\,d\alpha,$$

qui est nécessairement alors une différentielle exacte, sans que cette opération introduise dans le calcul de nouvelles fonctions arbitraires qu'il faille ensuite faire dépendre de $\varphi\,\alpha$ par les relations dont je viens de parler. Cette remarque, que j'aurais déjà dû faire à l'égard des équations du premier ordre lorsque je me suis occupé de leur intégration, s'applique également à la détermination de la valeur de y, lorsqu'on peut avoir à-la-fois

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha} \text{ et } \frac{dy}{d\alpha\,(x};$$

ce n'est, au reste, qu'en l'appliquant à différens exemples qu'on peut en apprécier l'étendue et voir de quelle utilité elle peut être pour faciliter l'intégration des équations aux différentielles partielles.

Dans ce premier cas, on n'a jamais à intégrer que des équations aux différentielles ordinaires ; mais il était aisé de s'y attendre, puisque ce cas est celui où la proposée est susceptible d'une intégrale intermédiaire. Un autre résultat de la théorie que j'expose ici, et qui me paraît beaucoup plus important, consiste en ce qu'on peut très-souvent ramener l'intégration de l'équation donnée à ne dépendre que d'équations aux différentielles ordinaires, dans le second cas, où les équations [B] ne peuvent fournir qu'une seule combinaison intégrable, et où par conséquent il ne peut point y avoir d'intégrale intermédiaire. Cette circonstance se présente sur-tout dans le cas où l'on peut aussi former avec les équations [A] une combinaison qui satisfasse aux conditions d'intégrabilité. On a alors deux équations intégrées : l'une est déduite d'une équation différentielle où les variables indépendantes étaient x et β, et elle donne par conséquent la valeur de β, parce qu'il n'y avait dans cette équation différentielle que des dérivées relatives à x ; l'autre est déduite d'une équation différentielle relative à x et α, et elle donne par conséquent, pour la même raison, la valeur de α. On a, en outre, trois équations, dont deux peuvent être considérées comme aux différentielles ordinaires, et la troisième, qui est produite par la transformation expliquée ci-dessus, contient la quantité

$$\frac{d\alpha}{dx\,(\beta}\,,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$-\frac{\dfrac{d\beta}{dx\,(\alpha}}{\dfrac{d\beta}{d\alpha\,(x}}\,;$$

mais cette circonstance n'empêche pas d'en déduire souvent l'intégrale, après qu'on a éliminé p et q au moyen des deux équations qui donnent les valeurs de α et de β.

Je choisirai, pour exemple de ce cas, l'équation de la surface *minimum*,

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0,$$

qui me fournira l'occasion de faire quelques remarques sur la manière dont on doit traiter les équations dont nous avons fait dépendre l'intégration des équations aux différentielles partielles du second ordre de la forme

$$Hr+2Ks+Lt+M+N(rt-s^2)=0:$$

on a dans cet exemple

$$H=1+q^2,\quad K=-pq,\quad L=1+p^2,\quad M=0,\quad N=0,$$

$$G = -1 - p^2 - q^2;$$

et les quatre équations que nous avons obtenues en faisant pour abréger

$$K^2 - HL + MN = G,$$

deviennent, après les avoir divisées par $1 + q^2$,

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha} + \frac{pq - \sqrt{-1 - p^2 - q^2}}{1 + q^2} = 0,$$

$$\frac{dp}{dx\,(\alpha} - \frac{pq + \sqrt{-1 - p^2 - q^2}}{1 + q^2}\,\frac{dq}{dx\,(\alpha} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx\,(\beta} + \frac{pq + \sqrt{-1 - p^2 - q^2}}{1 + q^2} = 0,$$

$$\frac{dp}{dx\,(\beta} - \frac{pq - \sqrt{-1 - p^2 - q^2}}{1 + q^2}\,\frac{dq}{dx\,(\beta} = 0.$$

En joignant les deux premières à $\frac{dz}{dx\,(\alpha} = p + q\,\frac{dy}{dx\,(\alpha}$, on aura trois équations où x et α seront les variables indépendantes. Il faudra ramener les deux autres à ne contenir que des dérivées relatives à x et à α, et l'on pourrait le faire au moyen de la transformation générale qui nous a donné les équations [B]; mais comme la dernière peut être intégrée exactement, on ne devra se servir de cette transformation que pour l'équation précédente, qu'elle changera en

$$\frac{dy}{d\alpha\,(x}\,\frac{d\beta}{dx\,(\alpha} - \frac{2\sqrt{-1 - p^2 - q^2}}{1 + q^2}\,\frac{d\beta}{d\alpha\,(x} = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{dy}{d\alpha\,(x}\,\frac{d\alpha}{dx\,(\beta} + \frac{2\sqrt{-1 - p^2 - q^2}}{1 + q^2} = 0;$$

quant à la dernière, après l'avoir écrite ainsi :

$$\frac{dp}{dq\,(\beta} = \frac{pq - \sqrt{-1 - p^2 - q^2}}{1 + q^2}.$$

on verra qu'on peut l'intégrer comme une équation aux différentielles ordinaires : le moyen le plus simple pour y parvenir consiste à en différencier les deux membres en remplaçant dans le second

$$\frac{dp}{dq(\beta}$$

par sa valeur, ce qui donne

$$\frac{d^2 p}{dq^2(\beta} = \frac{q + \frac{p}{\sqrt{-1-p^2-q^2}}}{1+q^2} \cdot \frac{pq - \sqrt{-1-p^2-q^2}}{1+q^2}$$

$$+ \frac{(1+q^2)\left(p + \frac{q}{\sqrt{-1-p^2-q^2}}\right) - 2q\,(pq - \sqrt{-1-p^2-q^2})}{(1+q^2)^2}$$

$$= \frac{\frac{q(1+p^2+q^2)}{\sqrt{-1-p^2-q2}} + q\sqrt{-1-p^2-q^2}}{(1+q^2)^2} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$\frac{dp}{dq} = \beta,$$

et par conséquent

$$\beta = \frac{pq - \sqrt{-1-p^2-q^2}}{1+q^2}.$$

Cette valeur de β une fois obtenue, on n'aura plus à traiter que les quatre équations

$$\frac{dy}{dx(\alpha} + \frac{pq - \sqrt{-1-p^2-q^2}}{1+q^2} = 0,$$

$$\frac{dp}{dx(\alpha} - \frac{pq + \sqrt{-1-p^2-q^2}}{1+q^2}\,\frac{dq}{dx(\alpha} = 0,$$

$$\frac{dy}{d\alpha(x}\,\frac{d\alpha}{dx(\beta} + \frac{2\sqrt{-1-p^2-q^2}}{1+q^2} = 0,$$

$$\frac{dz}{dx(\alpha} = p + q\,\frac{dy}{dx(\alpha}.$$

La première devient

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha} + \beta = 0,$$

la seconde s'intègre comme celle qui nous a donné la valeur de β, et l'on a

$$\alpha - \beta = \frac{2\sqrt{-1-p^2-q^2}}{1+q^2},$$

ce qui change la troisième en

$$\frac{dy}{d\alpha\,(x}\;\frac{d\alpha}{dx\,(\beta} = \beta - \alpha,$$

d'où il faut éliminer y en y considérant $\frac{d\alpha}{dx\,(\beta}$ comme l'inconnue qui doit être déterminée par l'équation résultant de cette élimination. En représentant cette inconnue par ν, on aura

$$\nu\,\frac{dy}{d\alpha\,(x} = \beta - \alpha,$$

équation d'où l'on tire, lorsqu'on la différencie par rapport à x, en y regardant x et α comme les deux variables indépendantes,

$$\frac{d\nu}{dx\,(\alpha}\;\frac{dy}{d\alpha\,(x} + \nu\,\frac{d^2y}{dx\,d\alpha} = \frac{d\beta}{dx\,(\alpha};$$

mais l'autre équation

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha} + \beta = 0$$

donne

$$\frac{d^2y}{dx\,d\alpha} = -\frac{d\beta}{d\alpha\,(x}:$$

et par conséquent

$$\frac{d\nu}{dx\,(\alpha}\;\frac{dy}{d\alpha\,(x} = \nu\,\frac{d\beta}{d\alpha\,(x} + \frac{d\beta}{dx\,(\alpha} = 0.$$

puisque

$$\nu = \frac{d\alpha}{dx(\beta} = -\frac{\frac{d\beta}{dx(\alpha}}{\frac{d\beta}{d\alpha(x}}:$$

$\frac{dy}{d\alpha(x}$ ne pouvant être nul, il faudra qu'on ait

$$\frac{d\nu}{dx(\alpha} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\alpha}{dx(\beta} = \nu = \gamma\alpha,$$

et par conséquent

$$\frac{dx}{d\alpha(\beta} = \frac{1}{\gamma\alpha}.$$

En représentant cette fonction par $\phi''\alpha$, ce qui donnera $\nu = \frac{1}{\phi''\alpha}$, on aura

$$x = \phi'\alpha + \psi'\beta;$$

ainsi

$$dx = \phi''\alpha\, d\alpha + \psi''\beta\, d\beta;$$

et comme on a d'ailleurs

$$\frac{dy}{dx(\alpha} = -\beta,$$

$$\frac{dy}{d\alpha(x} = \frac{\beta-\alpha}{\nu} = (\beta-\alpha)\phi''\alpha,$$

il viendra en réduisant

$$dy = -\beta\psi''\beta\, d\beta - \alpha\phi''\alpha\, d\alpha,$$

qui donne

$$y = \psi\beta - \beta\psi'\beta + \phi\alpha - \alpha\phi'\alpha.$$

En substituant les valeurs que nous venons de trouver pour dx et dy dans $dz = p\,dx + q\,dy$, on obtient

$$dz = (p - \alpha q)\,\phi''\alpha\,d\alpha + (p - \beta q)\,\psi''\beta\,d\beta,$$

d'où il faut éliminer p et q au moyen des deux équations qui donnent les valeurs de α et de β, on en tire

$$(1 + q^2)\alpha^2 - 2pq\alpha + 1 + p^2 = 0$$
$$(1 + q^2)\beta^2 - 2pq\beta + 1 + p^2 = 0;$$

ainsi

$$p - \alpha q = \pm\sqrt{-1 - \alpha^2}$$
$$p - \beta q = \pm\sqrt{-1 - \beta^2},$$

et par conséquent

$$z = \pm\int\phi''\alpha\,d\alpha\sqrt{-1-\alpha^2} \pm \int\psi''\beta\,d\beta\sqrt{-1-\beta^2},$$

dont la réunion avec les deux équations

$$x = \phi'\alpha + \psi'\beta$$
$$y = \phi\alpha - \alpha\phi'\alpha + \psi\beta - \beta\psi'\beta,$$

exprime, comme on sait, l'intégrale de la proposée. Le double signe de la valeur de z vient de ce qu'on peut toujours changer le signe de z sans qu'elle cesse de satisfaire à l'équation donnée, puisque celle-ci ne contient dans tous ses termes que des dérivées de z en nombre impair, en sorte qu'ils changent tous de signe à-la-fois quand on change celui de z.

§. III.

Sur quelques transformations des équations aux différentielles partielles du second ordre, et sur la manière dont on doit les intégrer dans le cas où les deux systèmes d'équations aux différentielles ordinaires dont leurs intégrales dépendent se réduisent à un seul.

M. Legendre a fait connaître une transformation par laquelle on ramène l'équation du second ordre

$$Rr + Ss + Tt = 0$$

à une équation linéaire du même ordre, où p et q sont les deux variables indépendantes, lorsque R, S, T, ne contiennent que ces deux dernières quantités. J'ai reconnu qu'il existe deux transformations analogues, qu'on obtient, l'une en prenant x et q, et l'autre en prenant y et p pour variables indépendantes, et qui peuvent, comme celle qu'a donnée M. Legendre, être appliquées à l'équation

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0$$

sans que cette équation change de forme. Pour donner une idée claire de ces deux transformations, je commencerai par rappeler la transformation de M. Legendre, en en calculant les formules à l'aide de la notation dont je fais usage dans ce mémoire. On sait qu'en prenant p et q pour les deux variables indépendantes, on doit, pour obtenir ces formules, considérer la quantité $px + qy - z$ comme la fonction qui en dépend en vertu de la transformée qu'il s'agit d'obtenir. Représentons par z' cette quantité, et par p', q', r', s', t', ses dérivées prises en faisant varier alternativement p et q, que nous représenterons par x' et y'; nous aurons d'abord

$$p' = x$$

$$q' = y,$$

à cause que

$$dz' = x\,dp + y\,dq,$$

ensuite

$$r' = \frac{dx}{dp\,(q} = \frac{1}{\frac{dp}{dx\,(q}} = \frac{1}{r + s\,\frac{dy}{dx\,(q}} = \frac{t}{rt - s^2}\,*,$$

$$s' = \frac{dx}{dq\,(p} = \frac{1}{\frac{dq}{dx\,(p}} = \frac{1}{s + t\,\frac{dy}{dx\,(p}} = -\frac{s}{rt - s^2},$$

$$t' = \frac{dy}{dq\,(p} = \frac{1}{\frac{dq}{dy\,(p}} = \frac{1}{s\,\frac{dx}{dy\,(p} + t} = \frac{r}{rt - s^2},$$

on tire de ces valeurs

$$r'\,t' - s'^2 = \frac{1}{rt - s^2}$$

et par conséquent

---

* Parce que, d'après les formules connues,

$$\frac{dy}{dx\,(q} = -\frac{\frac{dq}{dx\,(y}}{\frac{dq}{dy\,(x}} = -\frac{s}{t},$$

$$\frac{dy}{dx\,(p} = -\frac{\frac{dp}{dx\,(y}}{\frac{dp}{dy\,(x}} = -\frac{r}{s},$$

$$\frac{dx}{dy\,(p} = \frac{1}{\frac{dy}{dx\,(p}} = -\frac{s}{r}.$$

$$r = \frac{t'}{r't' - s'^2},$$

$$s = - \frac{s'}{r't' - s'^2},$$

$$t = \frac{r'}{r't' - s'^2},$$

$$rt - s^2 = \frac{1}{r't' - s'^2},$$

en substituant ces formules dans l'équation

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

on aura

$$Lr' - 2Ks' + Ht' + N + M(r't' - s'^2) = 0,$$

où l'on devra remplacer respectivement dans les coefficiens les lettres

$$x,\ y,\ z,\ p,\ q,$$

par

$$p',\ q',\ p'x' + q'y' - z',\ x',\ y'.$$

Cette transformation ne change point la forme de l'équation donnée, et il est à remarquer que la valeur de la quantité $K^2 - HL + MN$ que nous avons nommée G, reste la même, puisque les seuls changemens qu'éprouve cette équation se réduisent à celui du signe de K, et à la permutation de H avec L et de M avec N.

Prenons maintenant x et q, que nous représenterons par x'' et y'' pour les deux variables indépendantes, et $z'' = z - qy$ pour la fonction, en représentant par p'', q'', r'', s'', t'', les dérivées de cette fonction prises en faisant varier alternativement x et q; nous aurons d'abord

$$p'' = p,$$

$$q'' = - y,$$

à cause que $d z'' = p\,dx - y\,dq$; ensuite

$$r'' = \frac{dp}{dx(q} = r + s\,\frac{dy}{dx(q} = r - \frac{s^2}{t},$$

$$s'' = -\frac{dy}{dx(q} = \frac{s}{t},$$

$$t'' = -\frac{dy}{dq(x} = -\frac{1}{\frac{dq}{dy(x}} = -\frac{1}{t},$$

d'où l'on tire

$$t = -\frac{1}{t''},$$

$$s = -\frac{s''}{t''},$$

$$r = r'' + \frac{s^2}{t} = \frac{r''\,t'' - s''^2}{t''},$$

$$r\,t - s^2 = -\frac{r''\,t'' - s''^2}{t''^2} - \frac{s''^2}{t''^2} = -\frac{r''}{t''};$$

ces valeurs substituées dans l'équation

$$H\,r + 2\,K\,s + L\,t + M + N\,(r\,t - s^2) = 0,$$

donnent, en changeant les signes,

$$N\,r'' + 2\,K\,s'' - M\,t'' + L - H\,(r''\,t'' - s''^2) = 0,$$

qui est encore de la même forme, et où la valeur de la quantité que j'ai nommée G n'a point changé, parce qu'en ôtant de K^2 le produit des coefficiens de r'' et de t'' dans l'équation précédente, et en ajoutant au reste celui du coefficient de $r''\,t'' - s''^2$ par le terme qui ne contient point de dérivées du second ordre, on a pour résultat $K^2 + M\,N - H\,L$, qui est égal à la quantité de $K^2 - H\,L + M\,N$, qu'on déduit, par les mêmes opérations, de l'équation donnée

$$H\,r + 2\,K\,s + L\,t + M + N\,(r\,t - s^2) = 0.$$

Il est évident que, dans la transformée que nous venons d'obtenir, il faut remplacer respectivement les lettres

$$x,\ y,\ z,\ p,\ q,$$

par

$$x'',\ -q'',\ z''-q''y'',\ p'',\ y'',$$

en sorte que si les coefficiens de l'équation ne renferment que x et q, ceux de la transformée ne contiendront que les deux variables indépendantes de cette transformée.

En prenant de même p et y pour les deux variables indépendantes, $z-px$ pour la fonction, et en représentant cette fonction par z''' et ses dérivées, relatives à $p=x'''$ et à $y=y'''$, par p''', q''', r''', s''', t''', on trouvera par un calcul absolument semblable au précédent

$$p'''=-x,$$

$$q'''=q,$$

$$r'''=-\frac{1}{r},$$

$$s'''=\frac{s}{r},$$

$$t'''=t-\frac{s^2}{r},$$

ainsi

$$r=-\frac{1}{r'''},$$

$$s=-\frac{s'''}{r'''},$$

$$t=\frac{r'''t'''-s'''^2}{r'''},$$

$$rt-s^2=-\frac{t'''}{r'''};$$

valeurs qui changent l'équation donnée en

$$Mr'''-2Ks'''-Nt'''-H+L(r'''t'''-s'''^2)=0,$$

où il ne s'agit plus que de remplacer respectivement les lettres

$$x, y, z, p, q,$$

par

$$-p''', y''', z'''-p'''x''', x''', q''',$$

pour avoir une équation de même forme que la proposée, dans laquelle p et y seront les deux variables indépendantes, et dont les coefficiens ne renfermeront que ces variables, lorsque ceux de la proposée ne contiendront que p et y.

Il est à remarquer que ces diverses transformations ne peuvent servir qu'à simplifier le calcul, quand on cherche à déduire l'intégrale des formules que j'ai données dans un des paragraphes précédens, savoir :

$$N\frac{dq}{dx(\alpha}+H\frac{dy}{dx(\alpha}-K-\sqrt{G}=0,$$

$$H\frac{dp}{dx(\alpha}+(K-\sqrt{G})\frac{dq}{dx(\alpha}+M=0,$$

$$N\frac{dq}{dx(\beta}+H\frac{dy}{dx(\beta}-K+\sqrt{G}=0,$$

$$H\frac{dp}{dx(\beta}+(K+\sqrt{G})\frac{dq}{dx(\beta}+M=0;$$

car il est aisé de voir qu'en appliquant ces quatre formules aux trois transformées, dans lesquelles nous avons changé l'équation

$$Hr+2Ks+Lt+M+N(rt-s^2)=0,$$

et en remplaçant ensuite dans les équations qui en résultent

$$x', y', z', p', q';$$
$$x'', y'', z'', p'', q'';$$
$$x''', y''', z''', p''', q''';$$

par les valeurs de ces quantités, en x, y, z, p, q, qui correspondent à la transformée d'où l'on est parti, on trouve quatre équations qui rentrent identiquement dans les quatre précédentes ou dans ces quatre-ci, qui, d'après ce qui a été démontré plus haut, en sont une suite nécessaire :

$$N \frac{dp}{dx(\alpha} - (K - \sqrt{G}) \frac{dy}{dx(\alpha} + L = 0,$$

$$(K + \sqrt{G}) \frac{dp}{dx(\alpha} + L \frac{dq}{dx(\alpha} + M \frac{dy}{dx(\alpha} = 0,$$

$$N \frac{dp}{dx(\beta} - (K + \sqrt{G}) \frac{dy}{dx(\beta} + L = 0,$$

$$(K - \sqrt{G}) \frac{dp}{dx(\beta} + L \frac{dq}{dx(\beta} + M \frac{dy}{dx(\beta} = 0.$$

Pour donner un exemple de ce calcul qui ne présente d'ailleurs aucune difficulté, appliquons la formule

$$N \frac{dq}{dx(\alpha} + H \frac{dy}{dx(\alpha} - K - \sqrt{G} = 0$$

à la première transformée ; nous aurons

$$M \frac{dq'}{dx'(\alpha} + L \frac{dy'}{dx'(\alpha} + K - \sqrt{G} = 0,$$

et à cause de $x' = p$, $y' = q$, $q' = y$, il viendra

$$M \frac{dy}{dp(\alpha} + L \frac{dq}{dp(\alpha} + K - \sqrt{G} = 0,$$

qui est évidemment la même chose que

$$(K - \sqrt{G}) \frac{dp}{dx(\beta} + L \frac{dq}{dx(\beta} + M \frac{dy}{dx(\beta} = 0,$$

parce que rien ne détermine quelle est celle des deux quantités dont se composent les deux fonctions arbitraires de l'intégrale primitive qui a été désignée par α, et quelle est celle qui l'a été par β, en sorte qu'on peut toujours écrire β à la place de α et réciproquement.

Mais ces transformations présentent des avantages beaucoup plus importans, quand l'intégrale d'une équation aux différentielles partielles du second ordre ne peut être exprimée qu'en intégrale définie, parce que l'on ne connaît point, dans le plus grand nombre des cas, de procédé qui conduise directement à ces sortes d'intégrales, et qu'on peut par ces transformations ramener une équation qu'on ne sait point intégrer directement à une autre dont l'intégrale soit connue ; pour en donner un exemple bien simple, je prendrai l'équation

$$p\,t + 1 = 0,$$

dont l'intégration présente d'ailleurs des circonstances remarquables, et nous fera connaître une espèce particulière d'intégrales du premier ordre renfermant des intégrales définies, et qui conduisent immédiatement à l'intégrale primitive.

Dans cet exemple, on a

$$H = 0,\quad K = 0,\quad L = p,\quad M = 1,\quad N = 0,$$

d'où il suit que la seconde transformée est

$$- t'' + p'' = 0,$$

ou

$$\frac{d^2 z''}{d q^2 (\,x} = \frac{d z''}{d x (\,q} ;$$

l'intégrale de cette équation est, comme l'a fait voir M. *de Laplace*,

$$z'' = \int e^{-u^2} du\, \phi\,(q + 2u\sqrt{x}),\quad \left[u = -\frac{1}{0},\ u = \frac{1}{0}\right];$$

et comme

$$z'' = z - q\,y,$$

il s'ensuit que

$$z = q\,y + \int e^{-u^2} du\, \phi\,(q + 2u\sqrt{x}),\quad \left[u = -\frac{1}{0},\ u = \frac{1}{0}\right];$$

cette équation contenant x, y, z, q, peut être regardée comme une intégrale du premier ordre de l'équation donnée $pt+1=0$, et on peut la vérifier de la manière suivante.

En différentiant cette équation, en y faisant varier alternativement x et y, on aura

$$p=[y+\int e^{-u^2}du\,\varphi'(q+2u\sqrt{x})]s+\frac{1}{\sqrt{x}}\int e^{-u^2}u\,du\,\varphi'(q+2u\sqrt{x}),$$

et

$$q=q+[y+\int e^{-u^2}du\,\varphi'(q+2u\sqrt{x})]t,$$

ou en réduisant

$$y+\int e^{-u^2}du\,\varphi'(q+2u\sqrt{x})=0,$$

cette équation réduit la valeur de p à

$$p=\frac{1}{\sqrt{x}}\int e^{-u^2}u\,du\,\varphi'(q+2u\sqrt{x})=\int e^{-u^2}du\,\varphi''(q+2u\sqrt{x}),$$

parce que le terme qu'on trouve hors du signe $\int$ en intégrant par partie, savoir,

$$-\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-u^2}\varphi'(q+2u\sqrt{x}),$$

est nul aux deux limites.

La même équation donne en la différentiant par rapport à y seul,

$$1+t\int e^{-u^2}du\,\varphi''(q+2u\sqrt{x})=0,$$

d'où l'on tire immédiatement la proposée

$$pt+1=0,$$

en éliminant

$$\int e^{-u^2}du\,\varphi''(q+2u\sqrt{x}).$$

L'équation que nous venons d'obtenir

$$z = qy + \int e^{-u^2} du\, \varphi(q + 2u\sqrt{x}), \quad [u = -\tfrac{1}{0},\ u = \tfrac{1}{0}],$$

qui satisfait à l'équation proposée comme une intégrale du premier ordre, peut aussi être considérée comme une transformation de l'intégrale primitive, parce que, si on écrit α à la place de q, et qu'on réunisse l'équation résultante

$$z = \alpha y + \int e^{-u^2} du\, \varphi(\alpha + 2u\sqrt{x}), \quad [u = -\tfrac{1}{0},\ u = \tfrac{1}{0}],$$

avec sa dérivée partielle relative à α, savoir,

$$y + \int e^{-u^2} du\, \varphi'(\alpha + 2u\sqrt{x}), \quad [u = -\tfrac{1}{0},\ u = \tfrac{1}{0}],$$

on aura un système de deux équations, qui sera l'intégrale générale de la proposée, qu'on pourra vérifier comme celle que nous venons de trouver entre x, y, z, q, et dont cette dernière résulte immédiatement, lorsqu'on élimine α entre l'intégrale primitive et ses dérivées du premier ordre, qui donnent évidemment $\alpha = q$.

Il est aisé de trouver d'autres exemples de ces équations du premier ordre contenant des intégrales définies avec des dérivées de z du premier ordre, qu'on pourrait considérer comme des intégrales premières des équations différentielles partielles du second ordre, mais qui ont la propriété de conduire à l'intégrale primitive sans nouvelle intégration, et par une simple transformation : soit, par exemple, l'équation

$$r + 2qs + q^2 t = X,$$

où X est une fonction de x seul, on aura

$$H = 1,\quad K = q,\quad L = q^2,\quad M = -X,\quad N = 0,$$

et, par conséquent, $G = 0$, ce qui réduira les formules générales aux trois équations

$$\frac{dz}{dx\,(\alpha} = p + q\,\frac{dy}{dx\,(\alpha},$$

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha} - q = 0,$$

$$\frac{dp}{dx\,(\alpha} + q\,\frac{dq}{dx\,(\alpha} - X = 0,$$

dont la dernière seule est intégrable, et donne

$$p + \frac{q^2}{2} - \int X dx + \alpha = 0.$$

On tire de cette dernière équation

$$\frac{dp}{d\alpha\,(x} + q\,\frac{dq}{d\alpha\,(x} + 1 = 0,$$

et à cause de $q = \frac{dy}{dx\,(\alpha}$,

$$\frac{dp}{d\alpha\,(x} = -1 - \frac{dq}{d\alpha\,(x}\,\frac{dy}{dx\,(\alpha};$$

mais nous avons vu qu'on a toujours

$$\frac{dp}{d\alpha\,(x} = \frac{dq}{dx\,(\alpha}\,\frac{dy}{d\alpha\,(x} - \frac{dq}{d\alpha\,(x}\,\frac{dy}{dx\,(\alpha};$$

ainsi

$$\frac{dq}{dx\,(\alpha}\,\frac{dy}{d\alpha\,(x} = -1,$$

ou

$$\frac{dy}{d\alpha\,(x}\,\frac{d^2y}{dx^2\,(\alpha} + 1 = 0,$$

en comparant cette équation à $pt + 1 = 0$, que nous venons d'intégrer, on verra qu'elle a pour intégrable primitive ce système de deux équations, où j'ai écrit ϕ' au lieu de ϕ, pour rendre plus faciles les calculs suivans :

$$y = \beta x + \int e^{-u^2} du\,\varphi'(\beta + 2u\sqrt{\alpha}) = 0,\ \left[u = -\tfrac{1}{0},\ u = \tfrac{1}{0}\right];$$

$$x + \int e^{-u^2} du\,\varphi''(\beta + 2u\sqrt{\alpha}) = 0;$$

le premier membre de la seconde étant le coefficient de $d\beta$ dans la différentielle de la première, on en tirera

$$q = \frac{dy}{dx\,(\alpha} = \beta,$$

$$p = \int X dx - \frac{q^2}{2} - \alpha = \int X dx - \alpha - \frac{1}{2}\beta\frac{dy}{dx\,(\alpha},$$

$$\frac{dz}{dx\,(\alpha} = p + q\frac{dy}{dx\,(\alpha} = \int X dx - \alpha + \frac{1}{2}\beta\frac{dy}{dx\,(\alpha},$$

et par conséquent

$$z = \iint X dx^2 - \alpha x + \frac{1}{2}\beta y - \frac{1}{2}\int y\,d\beta.$$

Comme, dans l'intégration de $y\,d\beta$, α doit être considéré comme constant, et que les deux équations primitives qu'on vient d'obtenir, donnent

$$y = \int e^{-u^2} du\,\varphi'(\beta + 2u\sqrt{\alpha}) - \beta\int e^{-u^2} du\,\varphi''(\beta + 2u\sqrt{\alpha}),$$

on trouvera aisément,

$$\int y\,d\beta = 2\int e^{-u^2} du\,\varphi(\beta + 2u\sqrt{\alpha}) - \beta\int e^{-u^2} du\,\varphi'(\beta + 2u\sqrt{\alpha}),$$

et, par conséquent,

$$z = \iint X dx - \alpha x + \frac{1}{2}\beta y - \int e^{-u^2} du\,\varphi(\beta + 2\sqrt{\alpha}) + \frac{\beta}{2}\int e^{-u^2} du\,\varphi'(\beta + 2u\sqrt{\alpha});$$

mais on a

$$\int e^{-u^2} du\,\varphi'(\beta + 2u\sqrt{\alpha}) = y - \beta x,$$

ainsi,

$$z=\iint X\,dx-\left(\alpha+\frac{\beta^2}{2}\right)x+\beta y-\int e^{-u^2}du\,\varphi(\beta+2u\sqrt{\alpha}).$$

dont la réunion avec les deux équations

$$y=\beta x+\int e^{-u^2}du\,\varphi'(\beta+2u\sqrt{\alpha}),$$

et

$$x+\int e^{-u^2}du\,\varphi''(\beta+2u\sqrt{\alpha})=0,$$

forme un système de trois équations qui est l'intégrale primitive de la proposée. Il semble d'abord qu'on aurait rendu cette intégrale plus générale, en ajoutant à la valeur de $\int y\,d\beta$ une fonction arbitraire de α, qui se serait aussi trouvée dans celle de z; mais il est aisé de voir que, si on le faisait, et qu'on déterminât cette fonction de manière à satisfaire à l'équation

$$\frac{dz}{d\alpha\,(x}=q\,\frac{dy}{d\alpha\,(x},$$

on trouverait que cette fonction doit être nulle.

Cette intégrale se vérifie par un calcul très-simple, lorsqu'on fait attention que la seconde des trois équations dont elle se compose est la dérivée de la première, prise en ne faisant varier que β, et que la troisième, qui, d'après ce que nous avons vu, est aussi la dérivée par rapport à β seul de la seconde, est en même temps la dérivée de la première, prise en ne faisant varier que α; car on trouve d'abord pour cette dérivée,

$$0=x+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int e^{-u^2}u\,du\,\varphi'(\beta+2u\sqrt{\alpha})$$

qui devient, en intégrant par parties, et en se rappelant qu'aux deux limites $e^{-u^2}=0$,

$$x + \int e^{-u^2} du\, \varphi''(\beta + 2u\sqrt{\alpha}) = 0,$$

c'est-à-dire, précisément la troisième équation. Cela posé, en différenciant les deux premières par rapport à x et à y, on aura

$$p = \int X dx - \alpha - \frac{\beta^2}{2},\ q = \beta,$$

$$0 = \beta + \frac{d\alpha}{dx(y}\ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int e^{-u^2} u\, du\, \varphi''(\beta + 2u\sqrt{\alpha}),$$

$$1 = \frac{d\alpha}{dy(x}\ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int e^{-u^2} u\, du\, \varphi''(\beta + 2u\sqrt{\alpha}),$$

d'où l'on tire

$$\alpha = \int X dx - p - \frac{q^2}{2},$$

$$\frac{\frac{d\alpha}{dx(y}}{\frac{d\alpha}{dy(x}} = -\beta = -q,$$

c'est-à-dire,

$$\frac{X - r - qs}{s + qt} = q,$$

d'où résulte immédiatement l'équation donnée,

$$X = r + 2qs + q^2 t.$$

Outre la propriété remarquable que présente l'intégrale de

$$r + 2qs + q^2 t = X,$$

d'être composée de trois équations, dont deux sont les dérivées partielles de la troisième ; l'une relativement à β, l'autre par rapport à α, et qui sont telles que cette dernière est en même temps la dérivée de la précédente prise en différenciant une seconde fois par rapport à β, elle conduit à une intégrale intermédiaire analogue à celle que nous avons trouvée pour l'équation $pt+1=0$, et qu'on obtient en éliminant β des deux équations de l'intégrale primitive qui donnent les valeurs de y et de z, au moyen des dérivées du premier ordre de cette intégrale.

Nous avons vu, en la vérifiant, qu'on en tire $\beta=q$; nous aurons donc

$$z=qy+\int\!\!\int X\,dx-\left(\frac{q^2}{2}+\alpha\right)x-\int e^{-u^2}du\,\phi(q+2u\sqrt{\alpha}),\ \left[u=-\frac{1}{0},\ =\frac{1}{0}\right],$$

et

$$y=qx+\int e^{-u^2}du\,\phi'(q+2u\sqrt{\alpha}),\ \left[u=-\frac{1}{0},\ u=\frac{1}{0}\right],$$

pour cette intégrale première, qu'il est aisé de vérifier de la manière suivante. Comme la seconde équation est la dérivée partielle de la première, prise en n'y faisant varier que q, on en tire

$$p=\int X\,dx-\frac{q^2}{2}-\alpha-\left[x+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int e^{-u^2}u\,du\,\phi'(q+2u\sqrt{\alpha})\right]\frac{d\alpha}{dx\,(y},$$

$$q=q-\left[x+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int e^{-u^2}u\,du\,\phi'(q+2u\sqrt{\alpha})\right]\frac{d\alpha}{dy\,(x},$$

$$0=q+\left[x+\int e^{-u^2}du\,\phi''(q+2u\sqrt{\alpha})\right]s+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\frac{d\alpha}{dx\,(y}\int e^{-u^2}u\,du\,\phi''(q+2u\sqrt{\alpha}),$$

$$1=\left[x+\int e^{-u^2}du\,\phi''(q+2u\sqrt{\alpha})\right]t+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\frac{d\alpha}{dy\,(x}\int e^{-u^2}u\,du\,\phi''(q+2u\sqrt{\alpha});$$

la seconde de ces quatre équations réduit la première à

$$\alpha=\int X\,dx-p-\frac{q^2}{2},$$

et à cause de

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int e^{-u^2}u\,du\,\phi'(q+2u\sqrt{\alpha})=\int e^{-u^2}du\,\phi''(q+2u\sqrt{\alpha}),$$

elle réduit les autres à

$$q = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\;\frac{d\alpha}{dx\,(y}\int e^{-u^2}u\,du\,\phi''(q + 2u\sqrt{\alpha}),$$

$$1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\;\frac{d\alpha}{dy\,(x}\int e^{-u^2}u\,du\,\phi''(q + 2u\sqrt{\alpha}),$$

ce qui donne

$$q = -\frac{\dfrac{d\alpha}{d\alpha\,(x}}{\dfrac{d\alpha}{d\alpha\,(y}} = \frac{X - r - qs}{s + qt},$$

et par conséquent l'équation proposée

$$r + 2qs + q^2 t = X.$$

Il est évident que la quantité dont se compose la fonction arbitraire peut être écrite ainsi, $\beta + \alpha u$ ou $q + \alpha u$, pourvu qu'on remplace α par $\frac{\alpha^2}{4}$ dans la valeur de z. Les propriétés que nous a offertes l'intégrale précédente, se retrouvent dans une classe entière d'intégrales dont un examen particulier pourrait conduire à des résultats utiles aux progrès du calcul intégral aux différentielles partielles, mais s'écarterait absolument de l'objet de ce paragraphe.

§. IV.

MÉTHODE pour intégrer les Équations aux différentielles partielles du second Ordre dans lesquelles les dérivées de cet Ordre n'entrent qu'à la première puissance, par l'évanouissement des termes qui contiennent ces dérivées.

LA méthode connue pour l'intégration des équations du premier ordre où p et q n'entrent qu'à la première puissance, se réduit à changer une des deux variables indépendantes, de manière qu'il ne reste plus qu'une des deux dérivées du premier ordre dans les équations aux différentielles partielles dont l'intégration doit conduire à celle de la proposée. Ces équations, ne contenant alors que des dérivées relatives à une des deux variables indépendantes, peuvent être intégrées comme si elles étaient aux différentielles ordinaires.

Si l'on compare à cette méthode celle que M. le marquis de Laplace a donnée pour les équations linéaires du second ordre, on verra que la première opération qu'elle suppose consiste aussi à faire évanouir deux des termes où entrent les différentielles de cet ordre ; en sorte qu'il n'en reste qu'une seule dans l'équation du second, qu'il faut ensuite intégrer conjointement avec deux équations du premier ordre. La dérivée du second ordre qui reste dans cette transformée, est, comme on sait, r ou t, c'est-à-dire une des deux extrêmes, quand les coefficiens de r, s, t sont ceux d'un carré parfait, et la dérivée intermédiaire s, quand cette condition n'a pas lieu.

Je me propose, dans ce paragraphe, de ramener, lorsque cela est possible, l'intégration des équations du second ordre où r, s, t, n'entrent qu'à la première puissance, à celle de deux équations du premier ordre qu'on puisse intégrer, comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, et d'une équation du second ordre qui ne contienne qu'une seule dérivée de cet ordre ; savoir, une des dérivées extrêmes,

extrêmes, quand les coefficiens de r, s, t, dans l'équation donnée, sont ceux d'un carré parfait, et la dérivée intermédiaire du second ordre, lorsque ces coefficiens ne satisfont pas à cette condition. Il ne reste plus ensuite qu'à intégrer cette équation, et il peut arriver deux cas :

1.° Celui où l'équation donnée est susceptible d'une intégrale du premier ordre; alors la transformée le sera aussi, et on aura cet avantage de pouvoir le reconnaître immédiatement, parce que la transformée ne contenant qu'une seule dérivée de l'ordre le plus élevé, elle rentrera dans l'une des deux fonctions

$$t = f(x, y, z, p, q),$$

ou

$$s = f(x, y, z, p, q),$$

et qu'il est toujours facile de voir si elles sont susceptibles d'une intégrale du premier ordre, la première n'en pouvant avoir une que quand p n'y entre pas, et la seconde que quand l'équation

$$\frac{dq}{dx} = f\left(x, \; y, \; z, \frac{dz}{dx}, \; q\right)$$

satisfait à la condition d'intégrabilité, en y regardant y comme constant, ou que l'équation

$$\frac{dp}{dy} = f\left(x, y, z, p, \frac{dz}{dy}\right),$$

satisfait à la même condition, en y considérant x comme une constante.

2.° Le cas où l'équation donnée n'est pas susceptible d'une intégrale du premier ordre : la méthode que j'emploie alors, consiste à exprimer la valeur de z par des intégrales définies, soit qu'elle ne puisse être représentée autrement, soit qu'elle puisse l'être par un nombre fini d'intégrales indéfinies, dérivées les unes des autres par voie de différenciation ou d'intégration. Cette dernière forme étant regardée comme plus simple que celle des équations primitives à intégrales définies, cette méthode d'intégration exige, pour être complète, qu'on ait un moyen de transformer les intégrales définies en intégrales de cette espèce, lorsque cela est possible, et de reconnaître celles qui en sont susceptibles. Cette transformation, au reste, ne présente pas de très-grandes difficultés, et je me propose de donner ailleurs un procédé général pour y parvenir : mais l'exposition et la démonstration de ce procédé m'écarteraient trop de l'objet principal de ce mémoire ; c'est pourquoi je me bornerai, quant à présent, à montrer comment on doit s'y prendre pour ramener les équations aux différentielles partielles du second ordre, où les dérivées de cet ordre n'entrent qu'à la première puissance, à l'une des deux formes,

$$t = f(x, y, z, p, q),$$

ou

$$s = f(x, y, z, p, q),$$

suivant que les coefficiens de r, s, t, dans l'équation donnée, sont ou ne sont pas ceux d'un carré parfait. Je vais appliquer la méthode que j'emploie pour cela à l'équation

$$Hr + 2Ks + Lt + M = 0;$$

cette méthode peut aussi être appliquée, avec quelques modifications, à l'équation

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

et servir à la ramener à l'une des deux mêmes formes, suivant que la quantité $K^2 - HL + MN$ est nulle ou ne l'est pas : mais pour rendre plus simple l'exposition de cette méthode et les démonstrations qui y sont relatives, j'ai cru devoir me borner à la formule

$$Hr + 2Ks + Lt + M = 0;$$

où les dérivées du second ordre ne se trouvent qu'à la première puissance. En prenant x pour une des deux variables indépendantes, et représentant l'autre d'abord par α et ensuite par β, on trouvera, en faisant $N = 0$ dans les formules que j'ai données pour l'intégration de l'équation,

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

que celle de

$$Hr + 2Ks + Lt + M = 0,$$

dépend du système des trois équations

$$H\frac{dy}{dx(\alpha} - K - \sqrt{G} = 0,$$

$$H\frac{dp}{dx(\alpha} + (K - \sqrt{G})\frac{dq}{dx(\alpha} + M = 0,$$

$$\frac{dz}{dx(\alpha} = p + q\frac{dy}{dx(\alpha},$$

ou de celui-ci, composé de trois équations semblables,

$$H\frac{dy}{dx(\beta} - K + \sqrt{G} = 0,$$

$$H\frac{dp}{dx(\beta} + (K + \sqrt{G})\frac{dq}{dx(\beta} + M = 0,$$

$$\frac{dz}{dx(\beta} = p + q\frac{dy}{dx(\beta},$$

en faisant pour abréger

$$K^2 - HL = G.$$

Si cette quantité était nulle, ces deux systèmes se réduiraient à un seul ; savoir :

$$H \frac{dy}{dx(\alpha} - K = 0,$$

$$H \frac{dp}{dx(\alpha} + K \frac{dq}{dx(\alpha} + M = 0,$$

$$\frac{dz}{dx(\alpha} = p + q \frac{dy}{dx(\alpha}.$$

Lorsque l'équation est linéaire, H, K, L, et par conséquent G, ne contiennent que x et y; il y a donc dans chaque système une équation où entrent uniquement ces deux variables, et qu'on intègre, par conséquent, comme si elles étaient aux différentielles ordinaires. Cette intégration donne en fonctions de x et y la valeur de α, lorsque $K^2 - HL = 0$, et celles de α et de β, quand cette condition n'a pas lieu. C'est au moyen de ces valeurs, en prenant dans le premier cas x et y, et dans le second cas α et β pour variables indépendantes, qu'on ramène les équations linéaires où $K^2 - HL = 0$, à la forme

$$t = f(x, y, z, p, q),$$

et les autres à la forme

$$s = f(x, y, z, p, q).$$

Pour pouvoir étendre cette transformation à l'équation

$$Hr + 2Ks + Lt + M = 0,$$

lorsque H, K, L, M, sont des fonctions quelconques de x, y, z, p, q, il faut de même que, dans le premier cas, on puisse former dans chaque système une combinaison intégrable, afin de pouvoir déterminer les valeurs de α et β en fonctions de ces quantités, et que dans le second on puisse en former une qui donne la valeur de α aussi en fonctions de x, y, z, p, q. Il semble alors que les équations qu'on se propose d'intégrer pourraient être ramenées à la forme desirée, en prenant de même α ou β ou x, et α pour les deux variables indépendantes; mais il se présente une difficulté qui paraît d'abord insurmontable : au lieu d'une équation aux différentielles partielles entre trois variables dont deux indépendantes, on aurait, en s'y prenant ainsi, plusieurs équations simultanées qu'il est aisé de déduire des formules que j'ai données dans le mémoire déjà cité *, mais qui ne peuvent conduire à une méthode générale d'intégration, parce que la théorie des équations simultanées aux différentielles partielles est encore au berceau. J'ai trouvé le moyen de faire disparaître cette difficulté, en déterminant une fonction dont la valeur soit telle, qu'elle dépende des nouvelles variables indépendantes, par une seule équation du second ordre, qui ne contienne que ces trois quantités et les dérivées de la première prises par rapport aux deux autres, et qui soit de la forme

* Lorsque $K^2 - HL = 0$, ces équations simultanées sont celles dont se compose le système de trois équations où x et α sont les variables indépendantes que nous avons trouvées pour ce cas. Quand cette condition n'a pas lieu, on forme aisément cinq équations simultanées aux différentielles partielles du premier ordre, entre les sept variables

$$x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ \alpha,\ \beta,$$

où α et β sont les deux indépendantes, en multipliant les équations du premier système par $\frac{dx}{d\beta(\alpha}$, et celles du second par $\frac{dx}{d\alpha(\beta}$. Ces cinq équations sont :

$$H\frac{dy}{d\beta(\alpha} - (K+\sqrt{G})\frac{dx}{d\beta(\alpha} = 0,$$

$$H\frac{dy}{d\alpha(\beta} - (K-\sqrt{G})\frac{dx}{d\alpha(\beta} = 0,$$

$$H\frac{dp}{d\beta(\alpha} + (K-\sqrt{G})\frac{dq}{d\beta(\alpha} + M\frac{dx}{d\beta(\alpha} = 0,$$

$$H\frac{dp}{d\alpha(\beta} + (K+\sqrt{G})\frac{dq}{d\alpha(\beta} + M\frac{dx}{d\alpha(\beta} = 0,$$

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

$$t = f(x, y, z, p, q),$$

ou

$$s = f(x, y, z, p, q).$$

Lorsque $K^2 - HL$ n'est pas nul, et qu'il n'y a qu'un des deux systèmes où l'on puisse former une combinaison intégrable, on ne peut, par la même méthode, faire évanouir qu'une des dérivées extrêmes, et l'équation qui donne la valeur de la fonction dont nous venons de parler est de la forme

$$s + tF(x, y, z, p, q) = f(x, y, z, p, q).$$

Cette équation présente plus de difficultés que les deux précédentes; mais elle ne laisse pas, dans beaucoup de cas, de conduire à une équation primitive en intégrales définies, qu'on peut également développer pour reconnaître si elle est susceptible de se transformer en une intégrale sous forme finie où il n'y ait que des intégrales indéfinies.

Lorsque K, H, L sont des fonctions de p et de q seulement, et que $M = 0$, les deux équations

$$H \frac{dp}{dx(\alpha} + (K - \sqrt{G}) \frac{dq}{dx(\alpha} + M = 0,$$

et

$$H \frac{dp}{dx(\beta} + (K + \sqrt{G}) \frac{dq}{dx(\beta} + M = 0,$$

appartenant la première à un système, et la seconde à l'autre, s'intègrent immédiatement, parce qu'elles ne contiennent alors que p, q, dp et dq: elles donnent, par conséquent, les deux quantités α et β, qu'il faut prendre pour variables indépendantes en fonctions de p et de q. Ces valeurs sont précisément celles qu'on obtient, en faisant évanouir les deux dérivées extrêmes du second ordre dans l'équation linéaire qu'on trouve en transformant l'équation par la méthode de M. Legendre; la fonction qui en dépend par une simple équation de second ordre, est alors la valeur de $px + qy - z$, ainsi que l'a fait voir ce célèbre mathématicien : mais on n'a eu jusqu'à présent aucun moyen de déterminer cette fonction dès que M n'est pas nul, ou que x ou y entrent avec p et q dans les coefficiens des dérivées du second ordre.

La première question à résoudre pour atteindre ce but consiste à déterminer, lorsqu'on peut tirer d'un des deux systèmes une combinaison intégrable, une fonction telle que la valeur en soit donnée par une seule équation du second ordre entre cette fonction et deux nouvelles variables indépendantes, dans laquelle il n'y ait que deux dérivées du second ordre, l'intermédiaire et une des deux extrêmes : je ferai voir ensuite que, dans le cas où $K^2 - HL = 0$, la dérivée intermédiaire s disparaît nécessairement dans cette transformation, et que l'équation qui en résulte se trouve ainsi immédiatement sous la forme

$$t = f(x, y, z, p, q),$$

tandis qu'elle se présente sous celle-ci,

$$s + tF(x, y, z, p, q) = f(x, y, z, p, q),$$

quand cette condition n'a pas lieu. La solution générale de cette question sera le premier objet des recherches contenues dans ce paragraphe; je donnerai ensuite le procédé qu'il faut suivre, lorsque $K^2 - HL$ n'est pas nul, et qu'il reste par conséquent deux dérivées du second ordre dans la première transformée, pour ramener par une seconde transformation l'intégration de l'équation donnée à celle d'une équation de la forme

$$s = f(x, y, z, p, q),$$

où il n'y en ait plus qu'une ; et je terminerai ces recherches par l'examen des cas où la solution générale doit être modifiée suivant les diverses circonstances que présentent les équations qu'on obtient en intégrant celles dont se composent les systèmes de trois équations déduits de la proposée.

Démontrons d'abord que si l'on forme avec l'un de ces systèmes de trois équations, une combinaison intégrable, et qu'après l'avoir intégrée comme une équation aux différentielles ordinaires, et y avoir ajouté une constante arbitraire α, on intègre de nouveau cette équation, qui est aux différentielles partielles du premier ordre, par la méthode connue pour les équations de cette sorte, l'intégrale qui en résultera satisfera à la proposée dont elle sera, comme nous le verrons bientôt, une intégrale particulière contenant une constante et une fonction arbitraire; nous examinerons ensuite comment on peut continuer d'y satisfaire, en faisant varier α de manière à convertir cette intégrale particulière en intégrale générale.

La combinaison intégrable que nous considérons, déduite de trois équations où les dérivées ne sont qu'à la première puissance, résulte nécessairement de la somme de trois produits formés chacun d'une de ces équations multipliées par un facteur convenable. En nommant λ, μ, ν, ces trois facteurs, qui sont des fonctions de x, y, z, p, q, la combinaison sera représentée par

$$\lambda\left(H\frac{dy}{dx(\alpha}-K-\sqrt{G}\right)+\mu\left(H\frac{dp}{dx(\alpha}+(K-\sqrt{G})\frac{dq}{dx(\alpha}+M\right)$$
$$+\nu\left(\frac{dz}{dx(\alpha}-p-q\frac{dy}{dx(\alpha}\right);$$

en sorte que si nous désignons par u la valeur de la constante arbitraire α de son intégrale en fonctions des mêmes quantités, cette combinaison sera identique à

$$\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{dx(\alpha}+\left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dx(\alpha}+\left(\frac{du}{dp}\right)\frac{dp}{dx(\alpha}$$
$$+\left(\frac{du}{dq}\right)\frac{dq}{dx(\alpha},$$

et

et on aura:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = -\lambda(K+\sqrt{G}) + \mu M - \nu p,$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \lambda H - \nu q,$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right) = \nu,$$

$$\left(\frac{du}{dp}\right) = \mu H,$$

$$\left(\frac{du}{dq}\right) = \mu(K-\sqrt{G}).$$

La possibilité de satisfaire à-la-fois à ces cinq équations par des valeurs convenables de λ, μ, ν, est la condition nécessaire pour que le système des trois équations

$$H\frac{dy}{dx(\alpha} - K - \sqrt{G} = 0,$$

$$H\frac{dp}{dx(\alpha} + (K-\sqrt{G})\frac{dq}{dx(\alpha} + M = 0,$$

$$\frac{dz}{dx(\alpha} - p - q\frac{dy}{dx(\alpha} = 0,$$

puisse donner une combinaison intégrable; cette condition est donc remplie dans le cas dont nous nous occupons, et il est inutile, pour le but que nous nous proposons, de chercher à quels signes on pourrait, d'après l'équation donnée, reconnaître dans quel cas elle a lieu; contentons-nous de tirer de ces cinq équations la démonstration dont nous avons besoin.

En considérant α comme une constante dans l'équation du premier ordre

$$u = \alpha,$$

on en trouvera l'intégrale par la méthode expliquée dans le premier paragraphe de ce Mémoire, en la différenciant par rapport à y, x étant l'autre variable indépendante, et en introduisant dans l'équation résultant de cette différenciation une nouvelle variable indépendante γ, au moyen des formules qui donnent les valeurs de s et de t en fonctions des dérivées de y et de q, lorsqu'en supposant α constant, on prend x et γ pour les deux variables indépendantes. Afin d'exprimer que α ne varie pas dans ces dérivées, je les représenterai par

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha,\gamma},\quad \frac{dy}{d\gamma\,(\alpha,x},\quad \frac{dq}{dx\,(\alpha,\gamma},\quad \frac{dq}{d\gamma\,(\alpha,x}:$$

alors ces valeurs seront

$$s = \frac{dq}{dx\,(\alpha,\gamma} - \frac{dy}{dx\,(\alpha,\gamma}\,\frac{\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha,x}}{\frac{dy}{d\gamma\,(\alpha,x}}\qquad t = \frac{\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha,x}}{\frac{dy}{d\gamma\,(\alpha,x}};$$

il faudra les substituer dans la dérivée de $u = \alpha$ prise comme nous venons de le dire, et égaler séparément à zéro, après cette substitution, les termes qui seront multipliés par $\dfrac{\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha,x}}{\frac{dy}{d\gamma\,(\alpha,x}}$, et ceux qui ne contiendront pas ce facteur; on aura ainsi les deux équations

$$\left(\frac{du}{dp}\right)\frac{dy}{dx\,(\alpha,\gamma} - \left(\frac{du}{dq}\right) = 0,$$

et

$$\left(\frac{du}{dy}\right) + \left(\frac{du}{dz}\right)q + \left(\frac{du}{dz}\right)\frac{dp}{dx\,(\alpha,\gamma} = 0,$$

qui, jointes à

$$u = \alpha,$$

$$\frac{dz}{dx\,(\alpha,\gamma} - p - q\,\frac{dy}{dx\,(\alpha,\gamma} = 0,$$

et

$$\frac{dz}{d\gamma\,(\alpha,x} = q\,\frac{dy}{d\gamma\,(\alpha,x},$$

donneront toutes les relations nécessaires pour parvenir à l'intégrale cherchée sous la forme

$$V = 0,$$

$$\left[\frac{dV}{d\gamma}\right] = 0,$$

ainsi qu'on l'a vu dans le premier paragraphe de ce Mémoire, en représentant par $\left[\frac{dV}{d\gamma}\right]$ la fonction dérivée de V, lorsqu'on n'y fait varier que γ et $\varphi\gamma$, α étant toujours constant.

En vertu de la seconde de ces deux équations, les dérivées de la première, $V=0$, ne contiendront point de termes provenant de la variabilité de γ, et les valeurs de p et de q tirées de ces dérivées, rendront identique l'équation

$$u = \alpha.$$

Si l'on suppose actuellement α variable dans $V=0$, qu'on y écrive n au lieu de $\varphi\gamma$, n étant une fonction de α et de γ, et qu'on joigne à cette équation ces deux-ci :

$$\left[\frac{dV}{d\gamma\,(\alpha}\right] = 0,$$

$$\left[\frac{dV}{d\alpha\,(\gamma}\right] = 0,$$

en donnant aux parenthèses carrées la signification que nous leur avons attribuée jusqu'ici, il est clair que les deux différentielles de l'équation $V=0$, seront encore les mêmes, et donneront les mêmes valeurs de p et de q, excepté que n y sera écrit à la place de $\varphi\gamma$; en sorte que ces valeurs satisferont toujours à

$$u = \alpha,$$

puisqu'elles rendaient cette équation identique indépendamment de la valeur de $\varphi\gamma$, lorsque α était considéré comme une constante ; on aura donc toujours $u=\alpha$, et il ne restera plus qu'à faire en sorte que cette équation, qui satisfait à la proposée

$$Hr + 2Ks + Lt + M = 0,$$

quand α est constant, y satisfasse encore quand α sera considéré comme une quantité variable, en joignant, pour exprimer cette condition, une quatrième équation aux trois que nous avons déjà obtenues comme devant faire partie de l'intégrale.

Pour cela, voyons d'abord comment $u = \alpha$ satisfait à l'équation proposée quand α est constant. On en tire alors, à cause que u ne contient que x, y, z, p, q,

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dz}\right)p + \left(\frac{du}{dp}\right)r + \left(\frac{du}{dq}\right)s = 0,$$

et

$$\left(\frac{du}{dy}\right) + \left(\frac{du}{dz}\right)q + \left(\frac{du}{dp}\right)s + \left(\frac{du}{dq}\right)t = 0;$$

c'est-à-dire, en y écrivant au lieu de

$$\left(\frac{du}{dx}\right),\ \left(\frac{du}{dy}\right),\ \left(\frac{du}{dz}\right),\ \left(\frac{du}{dp}\right),\ \left(\frac{du}{dq}\right),$$

leurs valeurs trouvées ci-dessus, et en divisant par μ les équations résultant de cette substitution,

$$-\frac{\lambda}{\mu}(K + \sqrt{G}) + M + Hr + (K - \sqrt{G})s = 0,$$

et

$$\frac{\lambda}{\mu}H + Hs + (K - \sqrt{G})t = 0,$$

qui donnent, en tirant de la seconde équation la valeur de $\frac{\lambda}{\mu}$ et la substituant dans la première, et en faisant attention qu'à cause de $G = K^2 - HL$, on a $\frac{K^2 - G}{H} = L$, l'équation même proposée

$$Hr + 2Ks + Lt + M = 0.$$

Si α est variable, on aura, au lieu des deux équations que nous venons d'obtenir, celles-ci

$$-\frac{\lambda}{\mu}(K+\sqrt{G})+M+Hr+(K-\sqrt{G})s=\frac{1}{\mu}\frac{d\alpha}{dx(y},$$

et

$$\frac{\lambda}{\mu}H+Hs+(K-\sqrt{G})t=\frac{1}{\mu}\frac{d\alpha}{dy(x},$$

d'où l'on tire, en éliminant $\frac{\lambda}{\mu}$ de la même manière,

$$Hr+2Ks+Lt+M=\frac{1}{\mu}\left(\frac{d\alpha}{dx(y}+\frac{K+\sqrt{G}}{H}\frac{d\alpha}{dy(x}\right);$$

et comme $\frac{d\alpha}{dx(y}$ est égal à $-\frac{d\alpha}{dy(x}\frac{dy}{dx(\alpha}$, cette équation pourra s'écrire ainsi :

$$Hr+2Ks+Lt+M=-\frac{\lambda}{\mu}\frac{d\alpha}{dy(x}\left(\frac{dy}{dx(\alpha}-\frac{K+\sqrt{G}}{H}\right),$$

d'où il suit que l'équation proposée

$$Hr+2Ks+Lt+M=0$$

sera satisfaite, si l'on joint aux trois équations

$$V=0,$$

$$\left[\frac{dV}{d\gamma(\alpha}\right]=0,$$

$$\left[\frac{dV}{d\alpha(\gamma}\right]=0,$$

celle-ci

$$\frac{dy}{dx(\alpha}=\frac{K+\sqrt{G}}{H}.$$

On tire immédiatement des trois premières,

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)+\left(\frac{dV}{dz}\right)p=0;$$

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) + \left(\frac{dV}{dz}\right) q = 0,$$

ce qui fait cinq équations déterminant z, x, y, p, q, en fonctions de

$$\alpha, \ \gamma, \ n, \ \frac{dn}{d\gamma(\alpha}, \ \frac{dn}{d\alpha(\gamma},$$

qui serviront à les éliminer de H, K, $\sqrt{G}$; et il ne s'agira plus que d'avoir la valeur de $\frac{dy}{dx(\alpha}$ en fonction de α, γ, n, et des dérivées de n, pour que la quatrième équation de l'intégrale ne contienne aussi que ces quantités, et puisse servir à déterminer, en l'intégrant, la valeur de n en fonction de α et de γ, afin qu'en écrivant cette valeur au lieu de n dans les trois premières des quatre équations que nous venons d'obtenir, elles représentent alors à elles seules l'intégrale cherchée sous la forme d'un système de trois équations.

Le problème que nous nous sommes proposé ne se trouvera résolu par cette méthode, qu'autant que l'équation trouvée de cette manière pour déterminer n, ne contiendra au plus que deux des dérivées du second ordre de n, et que ces dérivées n'y entreront qu'à la première puissance; sans quoi, cette équation étant aussi compliquée ou même plus compliquée que la proposée, l'intégration ne serait pas ramenée à celle d'une équation plus simple. Pour trouver la valeur de $\frac{dy}{dx(\alpha}$, je remarque d'abord que si l'on représente, conformément à la notation dont nous avons fait usage jusqu'à présent, par

$$\left[\frac{dp}{d\gamma(\alpha}\right], \ \left[\frac{dp}{d\alpha(\gamma}\right], \ \left[\frac{dq}{d\gamma(\alpha}\right], \ \left[\frac{dq}{d\alpha(\gamma}\right],$$

les dérivées partielles des valeurs de p et de q qui résultent de nos deux dernières équations, savoir :

$$p = -\frac{\left(\frac{dV}{dx}\right)}{\left(\frac{dV}{dz}\right)} \text{ et } q = -\frac{\left(\frac{dV}{dy}\right)}{\left(\frac{dV}{dz}\right)},$$

prises en ne faisant varier dans ces valeurs que α, γ et n considéré comme une fonction de α et de γ, on aura, d'après cette convention, pour déterminer la valeur de $\left[\frac{dp}{d\gamma(\alpha}\right]$, l'équation identique

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)\left[\frac{dp}{d\gamma(\alpha}\right] = -\left[\frac{d\left(\frac{dV}{dx}\right)}{d\gamma(\alpha}\right] - p\,\frac{d\left(\frac{dV}{dz}\right)}{d\gamma(\alpha},$$

ou

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)\left[\frac{dp}{d\gamma(\alpha}\right] = -\left(\frac{d\left[\frac{dV}{d\gamma(\alpha}\right]}{dx}\right) - p\left(\frac{d\left[\frac{dV}{d\gamma(\alpha}\right]}{dz}\right);$$

parce que l'on peut changer l'ordre de deux différenciations partielles faites dans deux systèmes différens de variabilité sans changer la valeur des dérivées qui en résultent; on trouvera de même, pour déterminer les valeurs des trois autres quantités,

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)\left[\frac{dp}{d\alpha(\gamma}\right] = -\left(\frac{d\left[\frac{dV}{d\alpha(\gamma}\right]}{dx}\right) - p\left(\frac{d\left[\frac{dV}{d\alpha(\gamma}\right]}{dz}\right),$$

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)\left[\frac{dq}{d\gamma(\alpha}\right] = -\left(\frac{d\left[\frac{dV}{d\gamma(\alpha}\right]}{dy}\right) - q\left(\frac{d\left[\frac{dV}{d\gamma(\alpha}\right]}{dz}\right),$$

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)\left[\frac{dq}{d\alpha(\gamma}\right] = -\left(\frac{d\left[\frac{dV}{d\alpha(\gamma}\right]}{dy}\right) - q\left(\frac{d\left[\frac{dV}{d\alpha(\gamma}\right]}{dz}\right).$$

En écrivant les premiers membres de ces quatre équations à la place des seconds, dans les dérivées prises par rapport à γ en y regardant α et γ comme les variables indépendantes, des deux équations

$$\left[\frac{dV}{d\gamma(\alpha}\right] = 0,$$

$$\left[\frac{dV}{d\alpha(\gamma}\right] = 0,$$

qui font partie de l'intégrale, on mettra ces dérivées sous une forme plus simple; et comme on n'aura pas fait varier α dans la différenciation qui aura donné ces dérivées, il sera facile d'en déduire la valeur de $\frac{dy}{dx\,(\alpha}$.

On trouve, en faisant cette opération et en transposant,

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)\left[\frac{dp}{d\gamma\,(\alpha}\right]\frac{dx}{d\gamma\,(\alpha}+\left(\frac{dV}{dz}\right)\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]\frac{dy}{d\gamma\,(\alpha}=\left[\frac{d^2V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right].$$

et

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)\left[\frac{dp}{d\alpha\,(\gamma}\right]\frac{dx}{d\alpha\,(\gamma}+\left(\frac{dV}{dz}\right)\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]\frac{dy}{d\alpha\,(\gamma}=\left[\frac{d^2V}{d\alpha\,d\gamma}\right],$$

Résolvant ces deux équations par rapport à $\frac{dx}{d\gamma\,(\alpha}$ et $\frac{dy}{d\gamma\,(\alpha}$, et divisant la seconde valeur par la première pour avoir celle de $\dfrac{\frac{dy}{d\gamma\,(\alpha}}{\frac{dx}{d\gamma\,(\alpha}}$ qui est la même chose que $\frac{dy}{dx\,(\alpha}$, on trouvera

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha}=-\frac{\left[\frac{dp}{d\alpha\,(\gamma}\right]\left[\frac{d^2V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right]-\left[\frac{dp}{d\gamma\,(\alpha}\right]\left[\frac{d^2V}{d\alpha\,d\gamma}\right]}{\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]\left[\frac{d^2V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right]-\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]\left[\frac{d^2V}{d\alpha\,d\gamma}\right]},$$

en supprimant, au numérateur et au dénominateur, le facteur $\left(\frac{dV}{dz}\right)$, et comme cette valeur doit être égale à $\frac{K+\sqrt{G}}{H}$, on aura enfin pour la quatrième équation de l'intégrale dont nous avons déjà trouvé les trois premières équations,

$$\left\{H\left[\frac{dp}{d\alpha\,(\gamma}\right]+(K+\sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]\right\}\left[\frac{d^2V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right]-$$
$$\left\{H\left[\frac{dp}{d\gamma\,(\alpha}\right]+(K+\sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]\right\}\left[\frac{d^2V}{d\alpha\,d\gamma}\right]=0.$$

Cette équation contenant des dérivées du second ordre de n relativement aux deux variables indépendantes α et γ, il faut, pour que l'intégration de l'équation proposée se trouve ainsi ramenée à une question plus

plus simple, qu'il n'y ait dans cette équation que deux des dérivées du second ordre de n, et que ces dérivées n'y entrent qu'au premier degré: or, c'est ce qui est bien évident; car, d'après la manière dont on a obtenu les trois premières équations de l'intégrale,

$$V = 0,$$
$$\left[\frac{dV}{d\gamma\,(\alpha}\right] = 0,$$
$$\left[\frac{dV}{d\alpha\,(\gamma}\right] = 0,$$

les valeurs de x, y, z, qu'on doit en tirer pour les substituer dans la quatrième, ne contiendront que

$$\alpha,\ \gamma,\ n,\ \frac{dn}{d\alpha\,(\gamma} \text{ et } \frac{dn}{d\gamma\,(\alpha};$$

les valeurs de p et de q déduites des deux dérivées de la première de ces trois équations, prises en considérant x et y comme les deux variables indépendantes, et simplifiées en vertu des deux dernières, ne contiendront que

$$x,\ y,\ z,\ \alpha,\ \gamma \text{ et } n;$$

les dérivées de p et de q par rapport à α et à γ qui entrent dans la quatrième équation de l'intégrale, devant être prises, ainsi que l'indiquent les parenthèses carrées, sur ces valeurs, avant d'en éliminer x, y, z, et en y faisant varier seulement les deux quantités α et γ comme indépendantes, et n comme une fonction de α et de γ, il n'y aura dans ces dérivées que

$$x,\ y,\ z,\ \alpha,\ \gamma,\ n,\ \frac{dn}{d\alpha\,(\gamma} \text{ et } \frac{dn}{d\gamma\,(\alpha};$$

d'où il suit qu'après qu'on en aura éliminé x, y, z, il n'y restera que les mêmes quantités qui entrent dans les valeurs de ces dernières variables. Les dérivées du second ordre de n ne se rencontreront donc dans la quatrième équation de l'intégrale qu'autant qu'elles seront comprises dans les quantités

$$\left[\frac{d^2 V}{d\gamma^2 (\alpha}\right] \text{ et } \left[\frac{d^2 V}{d\alpha\, d\gamma}\right],$$

qui ne se trouvent qu'au premier degré dans cette quatrième équation; et comme on doit calculer les valeurs de

$$\left[\frac{d^2 V}{d\gamma^2 (\alpha}\right] \text{ et de } \left[\frac{d^2 V}{d\alpha\, d\gamma}\right],$$

par le même procédé que lorsqu'il s'agit de déterminer celles des dérivées de p et de q renfermées aussi entre des parenthèses carrées, c'est-à-dire, en faisant varier de la même manière α, γ et n dans la valeur de V, avant d'en éliminer x, y, z, il est évident qu'après cette élimination, la quatrième équation de l'intégrale, ainsi transformée, ne contiendra que les cinq quantités α, γ, n, $\frac{dn}{d\alpha (\gamma}$, $\frac{dn}{d\gamma (\alpha}$, et deux dérivées du second ordre de n, savoir :

$$\frac{d^2 n}{d\gamma^2 (\alpha} \text{ et } \frac{d^2 n}{d\alpha\, d\gamma},$$

ainsi que nous nous étions proposé de le démontrer.

La quatrième équation de l'intégrale que nous venons d'obtenir peut être mise sous une forme plus simple dans le cas où l'on peut obtenir une combinaison intégrale, non-seulement avec le système de trois équations susceptibles d'être intégrées comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, et où x et α sont pris pour les deux variables indépendantes, mais aussi avec l'autre système, où c'est x et β qui sont considérés comme les deux variables indépendantes; il est d'autant plus intéressant de nous occuper de cette transformation, que nous en déduirons dans la suite de ce Mémoire plusieurs conséquences importantes.

En désignant par ν l'intégrale de cette combinaison, en sorte que l'équation

$$\nu = \beta$$

soit à l'égard du second système ce que l'équation

$$n = \alpha$$

est à l'égard du premier, il est aisé de voir que si l'on représente par

λ', μ', ν', les facteurs des équations du second système correspondans aux facteurs λ, μ, ν, des équations du premier, on aura

$$\left(\frac{d\,v}{d\,x}\right) = -\lambda'(K - \sqrt{G}) + \mu' M - \nu' p,$$

$$\left(\frac{d\,v}{d\,y}\right) = \lambda' H - \nu' q,$$

$$\left(\frac{d\,v}{d\,z}\right) = \nu',$$

$$\left(\frac{d\,v}{d\,p}\right) = \mu' H,$$

$$\left(\frac{d\,v}{d\,q}\right) = \mu'(K + \sqrt{G}).$$

Supposons maintenant qu'on substitue dans v, qui ne contient que x, y, z, p et q, à la place de p et de q, leurs valeurs tirées des trois premières équations de l'intégrale, en les calculant comme nous avons dit qu'il fallait le faire lorsque nous avions à éliminer leurs dérivées partielles de la quatrième équation de l'intégrale, et représentons par W ce que devient v en vertu de cette substitution : comme α, γ et n n'entreront dans W qu'en tant que p et q se trouvaient dans v, il est évident, en donnant toujours le même sens aux parenthèses carrées, qu'on aura

$$\left[\frac{d\,W}{d\gamma\,(\alpha}\right] = \left(\frac{d\,v}{d\,p}\right)\left[\frac{d\,p}{d\,\gamma\,(\alpha}\right] + \left(\frac{d\,v}{d\,q}\right)\left[\frac{d\,q}{d\,\gamma\,(\alpha}\right] = \mu'\left\{H\left[\frac{d\,p}{d\,\gamma\,(\alpha}\right] + (K + \sqrt{G})\left[\frac{d\,q}{d\,\gamma\,(\alpha}\right]\right\},$$

et

$$\left[\frac{d\,W}{d\alpha\,(\gamma}\right] = \left(\frac{d\,v}{d\,p}\right)\left[\frac{d\,p}{d\,\alpha\,(\gamma}\right] + \left(\frac{d\,v}{d\,q}\right)\left[\frac{d\,q}{d\,\alpha\,(\gamma}\right] = \mu'\left\{H\left[\frac{d\,p}{d\,\alpha\,(\gamma}\right] + (K + \sqrt{G})\left[\frac{d\,q}{d\,\alpha\,(\gamma}\right]\right\}.$$

C'est en écrivant les premiers membres de ces deux équations à la place des derniers dans la quatrième équation de l'intégrale, après qu'elle aura été multipliée par μ', qu'on la mettra sous la forme dont nous venons de parler, savoir :

$$\left[\frac{d\,W}{d\,\alpha\,(\,\gamma}\right]\left[\frac{d^2\,V}{d\,\gamma^2\,(\alpha}\right]-\left[\frac{d\,W}{d\,\gamma\,(\,\alpha}\right]\left[\frac{d^2\,V}{d\,\alpha\,d\,\gamma}\right]=0.$$

Si, au lieu de substituer dans la valeur v de β, à la place de p et de q, leurs valeurs tirées des trois premières équations de l'intégrale, on les substituait dans celle de α, que nous avons représentée par u, et qu'on nommât w le résultat de cette substitution, comme α, γ et n n'entreraient aussi dans w qu'en tant que u contient p et q, on aurait de même

$$\left[\frac{d\,w}{d\,\gamma\,(\,\alpha}\right]=\left(\frac{d\,u}{d\,p}\right)\left[\frac{d\,p}{d\,\gamma\,(\,\alpha}\right]+\left(\frac{d\,u}{d\,q}\right)\left[\frac{d\,q}{d\,\gamma\,(\,\alpha}\right]=$$
$$\mu\left\{H\left[\frac{d\,p}{d\,\gamma\,(\,\alpha}\right]+(K-\sqrt{G})\left[\frac{d\,q}{d\,\gamma\,(\,\alpha}\right]\right\},$$

et

$$\left[\frac{d\,w}{d\,\alpha\,(\,\gamma}\right]=\left(\frac{d\,u}{d\,p}\right)\left[\frac{d\,p}{d\,\alpha\,(\,\gamma}\right]+\left(\frac{d\,u}{d\,q}\right)\left[\frac{d\,q}{d\,\alpha\,(\,\gamma}\right]=$$
$$\mu\left\{H\left[\frac{d\,p}{d\,\alpha\,(\,\gamma}\right]+(K-\sqrt{G})\left[\frac{d\,q}{d\,\alpha\,(\,\gamma}\right]\right\};$$

d'où l'on tire

$$H\left[\frac{d\,p}{d\,\gamma\,(\alpha}\right]+(K+\sqrt{G})\left[\frac{d\,q}{d\,\gamma\,(\alpha}\right]=\frac{1}{\mu}\left[\frac{d\,w}{d\,\gamma\,(\alpha}\right]+2\sqrt{G}\left[\frac{d\,q}{d\,\gamma\,(\alpha}\right],$$

et

$$H\left[\frac{d\,p}{d\,\alpha\,(\gamma}\right]+(K+\sqrt{G})\left[\frac{d\,q}{d\,\alpha\,(\gamma}\right]=\frac{1}{\mu}\left[\frac{d\,w}{d\,\alpha\,(\gamma}\right]+2\sqrt{G}\left[\frac{d\,q}{d\,\alpha\,(\gamma}\right].$$

Il est aisé de voir qu'on simplifiera beaucoup ces expressions, en faisant attention que l'équation $u=\alpha$, ou $u-\alpha=0$, résultant de l'équation

$$V=0,$$

lorsqu'on en élimine α, γ et n au moyen des deux équations

$$\left(\frac{d\,V}{d\,z}\right)p+\left(\frac{d\,V}{d\,x}\right)=0,$$

$$\left(\frac{dV}{dz}\right) q + \left(\frac{dV}{dy}\right) = 0;$$

il s'ensuit que quand on remet les valeurs de p et de q tirées de ces deux dernières équations dans

$$u - \alpha = 0,$$

ce qui, d'après la signification que nous venons de donner à la lettre w, change cette équation en

$$w - \alpha = 0,$$

on trouve nécessairement une relation entre les variables qu'elle contient équivalente à

$$V = 0;$$

en sorte qu'elle ne peut différer de celle-ci que par un facteur commun à tous ses termes, et que si l'on nomme ce facteur ω, on aura identiquement

$$w - \alpha = \omega V,$$

$$\left[\frac{dw}{d\gamma\,(\alpha}\right] = V\left[\frac{d\omega}{d\gamma\,(\alpha}\right] + \omega\left[\frac{dV}{d\gamma\,(\alpha}\right],$$

et

$$\left[\frac{dw}{d\alpha\,(\gamma}\right] - 1 = V\left[\frac{d\omega}{d\alpha\,(\gamma}\right] + \omega\left[\frac{dV}{d\alpha\,(\gamma}\right];$$

d'où l'on conclut, en vertu des trois premières équations de l'intégrale,

$$V = 0,$$

$$\left[\frac{dV}{d\gamma\,(\alpha}\right] = 0,$$

$$\left[\frac{dV}{d\alpha\,(\gamma}\right] = 0,$$

que

$$\left[\frac{dw}{d\gamma\,(\alpha}\right] = 0;$$

et que

$$\left[\frac{dw}{d\alpha\,(\gamma}\right] = 1:$$

on aura donc

$$H\left[\frac{dp}{d\gamma\,(\alpha}\right]+(K+\sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]=2\sqrt{G}\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right],$$

et

$$H\left[\frac{dp}{d\alpha\,(\gamma}\right]+(K+\sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]=\frac{1}{\mu}+2\sqrt{G}\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right].$$

En substituant ces valeurs dans la quatrième équation de l'intégrale, et multipliant par μ, on obtient

$$\left[\frac{d^2 V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right]+2\mu\sqrt{G}\left\{\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]\left[\frac{d^2 V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right]-\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]\left[\frac{d^2 V}{d\alpha\, d\gamma}\right]\right\}=0.$$

Cette dernière forme est moins symétrique que celles sous lesquelles nous avons déjà mis cette quatrième équation; mais elle a, comme la première, l'avantage de ne pas exiger que l'on puisse avoir la valeur de β; et elle est ordinairement plus promptement calculée, parce qu'on n'a pas besoin, lorsqu'on en fait usage, de tirer celle de p des trois premières équations de l'intégrale.

Lorsque $G=0$, et qu'il n'y a par conséquent qu'un seul système d'équations susceptibles d'être intégrées comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, l'équation que nous venons de trouver se réduit à

$$\left[\frac{d^2 V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right]=0;$$

en sorte que l'intégrale est alors représentée par ce système de quatre équations;

$$V=0,$$

$$\left[\frac{dV}{d\gamma\,(\alpha}\right]=0,$$

$$\left[\frac{dV}{d\alpha\,(\gamma}\right]=0,$$

$$\left[\frac{d^2 V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right]=0.$$

Il est aisé de voir directement que, dans le cas dont nous parlons, ces quatre équations satisfont, en effet, à la proposée; car nous avons vu qu'elle était toujours satisfaite par les trois premières, quand on avait en outre

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha}=\frac{K+\sqrt{G}}{H};$$

et nous savons d'ailleurs qu'en considérant α comme une constante dans l'équation $u = \alpha$, son intégrale est représentée par ces deux-ci :

$$V = 0,$$

$$\left[\frac{dV}{d\gamma}\right] = 0,$$

qui satisfont à un système d'équations intégrables comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, parmi lesquelles se trouve

$$\left(\frac{du}{dp}\right) \frac{dy}{dx\,(\alpha,\gamma} - \left(\frac{du}{dq}\right) = 0,$$

et qu'elles donnent, par conséquent,

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha,\gamma} = \frac{\left(\frac{du}{dq}\right)}{\left(\frac{du}{dp}\right)} = \frac{K - \sqrt{G}}{H}.$$

Les deux premières équations de l'intégrale générale ne différant de celles dont se compose l'intégrale de

$$u = \alpha,$$

quand α est considéré comme une constante, qu'en ce que n s'y trouve écrit au lieu de $\varphi\gamma$; il est clair que la valeur de $\frac{dy}{dx\,(\alpha,\gamma}$ (*), tirée de ces deux premières équations, sera toujours la même, et par conséquent égale à $\frac{K - \sqrt{G}}{H}$, tandis que $\frac{dy}{dx\,(\alpha}$ doit être égal à $\frac{K + \sqrt{G}}{H}$; mais quand $G = 0$, ces deux valeurs deviennent égales entre elles, puisqu'elles le sont toutes deux à $\frac{K}{H}$; d'où il suit que dans ce cas il suffit, pour que l'intégrales atisfasse à la proposée, qu'outre les trois équations

$$V = 0,$$

$$\left[\frac{dV}{d\gamma\,(\alpha}\right] = 0.$$

$$\left[\frac{dV}{d\alpha\,(\gamma}\right] = 0,$$

(*) L'invariabilité de α et γ dans la différenciation par laquelle on calculerait cette dérivée, entraîne celle de n, qui est une fonction de α et γ, sans qu'il soit nécessaire de l'indiquer en écrivant n à la suite de α et de γ.

les valeurs de $\frac{dy}{dx\,(\alpha}$ et de $\frac{dy}{dx\,(\alpha,\gamma}$ tirées des deux premières soient égales entre elles : or, c'est ce qui a lieu si leurs dérivées partielles, prises en n'y faisant varier que γ, et n en tant qu'il contient γ, sont nulles; celle de la première l'est déjà en vertu de la seconde; il ne s'agira donc plus que d'exprimer que celle de la seconde l'est aussi, en joignant à ces trois équations celle-ci :

$$\left[\frac{d^2 V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right] = 0.$$

On voit que, dans ce cas, la quatrième équation de l'intégrale ne contiendra qu'une seule dérivée de n qui soit du second ordre, savoir, $\frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha}$, et que cette dérivée n'y entrera qu'au premier degré, puisque, d'après la signification que nous avons donnée aux parenthèses carrées, on a

$$\left[\frac{d^2 V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right] = \left(\frac{dV}{dn}\right)\frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha} + \left(\frac{d^2 V}{dn^2}\right)\left(\frac{dn}{d\gamma\,(\alpha}\right)^2$$
$$+ 2\left(\frac{d^2 V}{d\gamma\, dn}\right)\frac{dn}{d\gamma\,(\alpha} + \left(\frac{d^2 V}{d\gamma^2}\right):$$

il sera donc facile de voir si cette équation est susceptible d'être intégrée par les méthodes connues, et, dans ce cas, d'en tirer la valeur de n, qu'il ne s'agira plus que de substituer dans les trois premières équations de l'intégrale pour avoir celle-ci sous la forme d'un système de trois équations.

Donnons d'abord quelques exemples d'équations du second ordre dans lesquelles la quantité G ou $K^2 - HL$ est nulle, et dont l'intégrale générale puisse facilement s'obtenir par cette méthode. Soit d'abord l'équation

$$x^4 r - 4x^2 qs + 4q^2 t + 2px^3 = 0;$$

on aura

$$H = x^4,\ K = -2x^2 q,\ L = 4q^2,\ M = 2px^3,\ G = 0,$$

et par conséquent,

x^6

$$x^2 \frac{dy}{dx\,(\alpha} + 2q = 0,$$

et

$$x^2 \frac{dp}{dx\,(\alpha} - 2q\frac{dq}{dx\,(\alpha} + 2px = 0,$$

dont la seconde est une différentielle exacte, et donne

$$x^2 p - q^2 = 2\alpha,$$

où j'ai pris 2α au lieu de α pour éviter les fractions, cette équation s'intégrera ainsi, en y considérant α comme une constante :

$$x^2 s - 2qt = 0,$$

$$x^2 \frac{dq}{dx\,(\alpha, \gamma} = 0,$$

$$x^2 \frac{dy}{dx\,(\alpha, \gamma} + 2q = 0;$$

d'où il est aisé de conclure

$$q = \gamma,\ \frac{dy}{dx\,(\alpha, \gamma} = -\frac{2\gamma}{x^2},\ p = \frac{2\alpha + \gamma^2}{x^2},$$

$$y = \frac{2\gamma}{x} - \phi'\gamma,\ dz = \gamma dy + \frac{2\alpha + \gamma^2}{x^2}dx,$$

$$z = \gamma y - \frac{2\alpha + \gamma^2}{x} + \phi\gamma.$$

La valeur de y étant celle qu'on obtient en égalant à zéro la différentielle partielle de l'équation qui donne la valeur de z, ces équations n'ont pas besoin d'être transformées, et l'intégrale générale de la proposée sera représentée par les trois équations

$$z = \gamma y - \frac{2\alpha + \gamma^2}{x} + n,$$

$$y - \frac{2\gamma}{x} + \frac{dn}{d\gamma\,(\alpha} = 0,$$

$$-\frac{2}{x} + \frac{dn}{d\alpha\,(\gamma} = 0,$$

pourvu qu'on détermine n de manière qu'on ait en même temps la dérivée partielle relative à γ seul de la seconde équation, égale à zéro, on trouve pour cette dérivée

$$-\frac{2}{x} + \frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha} = 0,$$

et en éliminant x,

$$\frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha} = \frac{dn}{d\alpha\,(\gamma},$$

d'où

$$n = \int e^{-u^2}\,du\,\varphi(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}),\ \left[u = -\tfrac{1}{0},\ u = \tfrac{1}{0}\right]$$

$$\frac{dn}{d\gamma\,(\alpha} = \int e^{-u^2}\,du\,\varphi'(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}),$$

$$\frac{dn}{d\alpha\,(\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int e^{-u^2}\,u\,du\,\varphi'(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}) = \int e^{-u^2}\,du\,\varphi''(\gamma + 2u\sqrt{\alpha});$$

en sorte que l'intégrale est exprimée par ces trois équations,

$$z = \gamma y - \frac{2\alpha + \gamma^2}{x} + \int e^{-u^2}\,du\,\varphi(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}),$$

$$y - \frac{2\gamma}{x} + \int e^{-u^2}\,du\,\varphi'(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}),$$

$$-\frac{2}{x} + \int e^{-u^2}\,du\,\varphi''(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}),$$

qui se vérifient très-facilement, puisqu'on en tire

$$p = \frac{2\alpha + \gamma^2}{x^2}, \quad q = \gamma,$$

$$2\alpha = x^2 p - q^2, \quad \frac{dy}{dx\,(\alpha} = -\frac{2\gamma}{x^2} = -\frac{2q}{x^2},$$

parce que la troisième équation de l'intégrale fait disparaître de cette dernière valeur les termes en $\frac{d\gamma}{dx\,(\alpha}$;

et comme cette dérivée de y est égale à $-\frac{\frac{d\alpha}{dx\,(y}}{\frac{d\alpha}{dy\,(x}}$, on a

$$\frac{2q}{x^2} = \frac{2xp + x^2 r - 2qs}{x^2 s - 2qt},$$

qui donne sur-le-champ,

$$x^4 r - 4x^2 qs + 4q^2 t + 2x^3 p = 0.$$

Cette autre équation

$$r + 2(q - x)s + (q - x)^2 t - q = 0,$$

se ramène aussi à

$$\frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha} = \frac{dn}{d\alpha\,(\gamma},$$

lorsqu'on y applique la même méthode, car on en tire successivement,

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha} - q + x = 0,$$

$$\frac{dp}{dx\,(\alpha} + q\,\frac{dq}{dx\,(\alpha} - x\,\frac{dq}{dx\,(\alpha} - q = 0,$$

$$p + \frac{q^2}{2} - xq + \alpha = 0,$$

$$s + (q - x)t = 0,$$

$$\frac{dq}{dx\,(\alpha, \gamma} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha,\gamma} - q + x = 0,$$

$$q = \gamma, \quad p = \gamma x - \frac{\gamma^2}{2} - \alpha,$$

$$z = \gamma y + \frac{\gamma x^2 - \gamma^2 x}{2} - \alpha x + n,$$

$$y + \frac{x^2}{2} - \gamma x + \frac{dn}{d\gamma\,(\alpha} = 0,$$

$$- x + \frac{dn}{d\alpha\,(\gamma} = 0,$$

$$- x + \frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha} = 0,$$

$$\frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha} = \frac{dn}{d\alpha\,(\gamma},$$

$$n = \int e^{-u^2}\, du\, \varphi(\gamma + 2u\sqrt{\alpha});$$

en sorte que l'intégrale de

$$r + 2(q - x)s + (q - x)^2 t - q = 0,$$

est

$$z = \gamma y + \frac{\gamma x^2 - \gamma^2 x}{2} - \alpha x + \int e^{-u^2}\, du\, \varphi(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}),$$

$$y + \frac{x^2}{2} - \gamma x + \int e^{-u^2}\, du\, \varphi'(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}) = 0,$$

$$x - \int e^{-u^2}\, du\, \varphi''(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}) = 0,$$

Soit encore l'équation

$$(x+q)^2 r + 2(x+q)(y+p)s + (y+p)^2 t + 2(x+q)(y+p) = 0,$$

on aura

$$(x + q)\frac{dy}{dx\,(\alpha} - y - p = 0,$$

$$(x + q)\frac{dp}{dx\,(\alpha} + (y + p)\frac{dq}{dx\,(\alpha} + 2(y + p) = 0.$$

On trouve, en ajoutant ces deux équations,

$$(x+q)\left(\frac{dy}{dx(\alpha} + \frac{dp}{dx(\alpha}\right) + (y+p)\left(1 + \frac{dq}{dx(\alpha}\right) = 0,$$

dont l'intégrale est

$$(x+q)\ (y+p) = \alpha;$$

en l'intégrant de nouveau, comme une équation aux différentielles du premier ordre, on obtient successivement

$$(x+q)\,s + x + q + (y+p)\,t = 0,$$

$$\frac{dq}{dx(\alpha,\gamma} + 1 = 0,$$

$$(x+q)\frac{dy}{dx(\alpha,\gamma} = y + p;$$

on a donc

$$q + x = \gamma,$$

$$y + p = \frac{\alpha}{\gamma},$$

$$q = \gamma - x,$$

$$p = \frac{\alpha}{\gamma} - y,$$

$$z = \gamma y + \frac{\alpha x}{\gamma} - xy - n,$$

$$y - \frac{\alpha x}{\gamma^2} - \frac{dn}{d\gamma(\alpha} = 0,$$

$$\frac{x}{\gamma} - \frac{dn}{d\alpha(\gamma} = 0;$$

$$\frac{2\alpha x}{\gamma^3} - \frac{d^2 n}{d\gamma^2(\alpha} = 0.$$

L'une de ces équations donne $x = \gamma \frac{d\,n}{d\,\alpha\,(\gamma}$; et cette valeur, substituée dans la dernière, la change en

$$\frac{d^2\,n}{d\,\gamma^2\,(\alpha} = \frac{2\,\alpha}{\gamma^2}\;\frac{d\,n}{d\,\alpha\,(\gamma}\;;$$

cette équation peut être intégrée de différentes manières ; la plus simple consiste à la ramener à une équation de la forme

$$t = p f x\,,$$

dont l'intégrale s'obtient facilement comme celle de l'équation

$$t = p\;;$$

car, en supposant

$$z = \int e^{-u^2} du\,\varphi\,(y + u X),\;\; \left[u = -\tfrac{1}{0},\;\; u = \tfrac{1}{0}\right],$$

on a

$$p = \frac{d\,X}{d\,x} \int e^{-u^2}\, u\,du\,\varphi'\,(y + u X) =$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{d\,X}{d\,x}\,e^{-u^2}\,\varphi'\,(y + u\,X) + \frac{X}{2}\,\frac{d\,X}{u\,x}\int e^{-u^2}\,du\,\varphi''\,(y + u\,X),$$

dont la partie qui est hors du signe $\int$ est nulle aux deux limites ; en sorte que

$$p = \frac{X}{2}\,\frac{d\,X}{d\,x}\int e^{-u^2}\,du\,\varphi''\,(y + u\,X) = \frac{X}{2}\,\frac{d\,X}{d\,x}\,t\;;$$

ainsi

$$t = \frac{2}{X\,\frac{d\,X}{d\,x}}\,p\;;$$

on a donc

$$X\,\frac{dX}{dx} = \frac{2}{fx},$$

ou

$$X^2 = 4\int\frac{dx}{fx};$$

en sorte que l'intégrale de

$$t = pfx,$$

est

$$z = \int e^{-uu}\,du\,\varphi\left(y + 2u\sqrt{\int\frac{dx}{fx}}\right).$$

Pour ramener à cette forme l'équation en n, il suffit de changer une des variables indépendantes; soit ε la quantité qu'on prend pour variable indépendante à la place de γ, on aura

$$\frac{dn}{d\gamma\,(\alpha} = \frac{\dfrac{dn}{d\varepsilon\,(\alpha}}{\dfrac{d\gamma}{d\varepsilon\,(\alpha}},$$

$$\frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha} = \frac{\dfrac{d\gamma}{d\varepsilon\,(\alpha}\,\dfrac{d^2 n}{d\varepsilon^2\,(\alpha} - \dfrac{d^2\gamma}{d\varepsilon^2\,(\alpha}\,\dfrac{dn}{d\varepsilon\,(\alpha}}{\left(\dfrac{d\gamma}{d\varepsilon\,(\alpha}\right)^3},$$

et

$$\frac{dn}{d\alpha\,(\gamma} = \frac{dn}{d\alpha\,(\varepsilon} - \frac{dn}{d\varepsilon\,(\alpha}\,\frac{\dfrac{d\gamma}{d\alpha\,(\varepsilon}}{\dfrac{d\gamma}{d\varepsilon\,(\alpha}},$$

ces valeurs, substituées dans l'équation qu'on se propose d'intégrer, la changent en

$$\frac{d^2 u}{d t^2 \,(\alpha} = \frac{2\alpha}{\gamma^2}\left(\frac{d\gamma}{dt\,(\alpha}\right)^2 \frac{du}{d\alpha\,(t}$$

$$+\frac{\dfrac{d^2\gamma}{dt^2\,(\alpha} - \dfrac{2\alpha}{\gamma^2}\left(\dfrac{d\gamma}{dt\,(\alpha}\right)^2 \dfrac{d\gamma}{d\alpha\,(t}}{\dfrac{d\gamma}{dt\,(\alpha}} \frac{du}{dt\,(\alpha},$$

qui prendra la forme demandée, si, après avoir supposé $\frac{d\gamma}{dt\,(\alpha} = \gamma$, ce qui réduit à une fonction de α le coefficient de $\frac{du}{d\alpha\,(t}$, on peut satisfaire à

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2\,(\alpha} - \frac{2\alpha}{\gamma^2}\left(\frac{d\gamma}{dt\,(\alpha}\right)^2 \frac{d\gamma}{d\alpha\,(t} = 0,$$

qui devient alors

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2\,(\alpha} - 2\alpha\,\frac{d\gamma}{d\alpha\,(t} = 0.$$

En déterminant convenablement la fonction arbitraire de α qui se trouve dans la valeur de γ, tirée de l'équation

$$\frac{d\gamma}{dt\,(\alpha} = \gamma,$$

savoir :

$$\gamma = e^t\,\psi\,\alpha;$$

on a

$$e^t\,\psi\,\alpha - 2\alpha\, e^t\,\psi'\,\alpha = 0, \quad \frac{\psi'\,\alpha}{\psi\,\alpha} = \frac{1}{2\alpha},$$

et par conséquent

$$\psi\,\alpha = \sqrt{\alpha};$$

ainsi,

$$\gamma = e^t\sqrt{\alpha}:$$

et

on a d'ailleurs

$$\frac{d^2 n}{d\varepsilon^2 (\alpha} = 2\alpha \frac{dn}{d\alpha(\varepsilon};$$

cette équation donne pour la valeur de n

$$n = \int e^{-u^2} du\,\phi\left(\varepsilon + 2u\sqrt{\tfrac{1}{2} l\alpha}\right):$$

si l'on écrit, pour simplifier ces expressions, α^2 à la place de α, on aura

$$\gamma = \alpha e^{\varepsilon},$$
$$n = \int e^{-u^2} du\,\phi\,(\varepsilon + 2u\sqrt{l\alpha});$$

et l'intégrale générale cherchée sera représentée par le système des trois équations

$$z = \alpha e^{\varepsilon} y + \alpha e^{-\varepsilon} x - xy - \int e^{-u^2} du\,\phi\,(\varepsilon + 2u\sqrt{l\alpha}),$$
$$\alpha e^{\varepsilon} y - \alpha e^{-\varepsilon} x - \int e^{-u^2} du\,\phi'\,(\varepsilon + 2u\sqrt{l\alpha}) = 0,$$
$$\alpha e^{\varepsilon} y + \alpha e^{-\varepsilon} x - \int e^{-u^2} du\,\phi''(\varepsilon + 2u\sqrt{l\alpha}) = 0,$$

dont la troisième est écrite comme on l'obtient en prenant la dérivée partielle de la seconde par rapport à ε seul, mais n'en est pas moins identique à la dérivée partielle de la première relative à α seul; car on trouve, en prenant cette dernière,

$$e^{\varepsilon} y + e^{-\varepsilon} x - \frac{1}{\alpha\sqrt{l\alpha}} \int e^{-u^2} u\,du\,\phi'\,(\varepsilon + 2u\sqrt{l\alpha}) = 0,$$

qui devient, en intégrant par parties,

$$e^{\varepsilon} y + e^{-\varepsilon} x - \frac{1}{\alpha} \int e^{-u^2} du\,\phi''\,(\varepsilon + 2u\sqrt{l\alpha}) = 0:$$

Pour vérifier l'intégrale que nous venons d'obtenir, il suffit de remarquer,

1.° Que les dérivées partielles de la première, relativement à α et ε, étant toutes deux nulles, on a

$$p = \alpha e^{-\varepsilon} - y, \quad q = \alpha e^{\varepsilon} - x,$$

et par conséquent

$$(x+q)(y+p)=\alpha^2, \quad \frac{y+p}{x+q}=e^{-2\varepsilon};$$

2.° Que la dérivée de la seconde, par rapport à ε, étant identique à celle de la première prise relativement à α, les termes où entreraient $\frac{d\varepsilon}{dx(\alpha}$ dans la valeur de $\frac{dy}{dx(\alpha}$ qu'on tirerait de cette seconde équation, seraient nuls; ce qui donne

$$\alpha e^{\varepsilon}\frac{dy}{dx(\alpha}-\alpha e^{-\varepsilon}=0,$$

ou

$$\frac{dy}{dx(\alpha}=e^{-2\varepsilon}=\frac{y+p}{x+q};$$

ainsi,

$$\frac{\frac{d\alpha}{dx(y}}{\frac{d\alpha}{dy(x}}=-\frac{y+p}{x+q};$$

et comme on tire de

$$(x+q)(y+p)=\alpha^2,$$

$$\frac{\frac{d\alpha}{dx(y}}{\frac{d\alpha}{dy(x}}=\frac{(x+q)r+(y+p)s+y+p}{(x+q)s+(y+p)t+x+q},$$

on aura

$$\frac{(x+q)r+(y+p)s+y+p}{(x+q)s+(y+p)t+x+q}=-\frac{y+p}{x+q},$$

c'est-à-dire, l'équation donnée,

$$(x+q)^2r+2(x+q)(y+p)s+(y+p)^2t+2(x+q)(y+p)=0.$$

Dans ces divers exemples, lorsque l'intégrale a été réduite à un système de trois équations par la détermination de la valeur explicite de n en fonction de α et de γ, il est arrivé que la troisième équation, en même temps qu'elle était la dérivée partielle de la première par rapport à α, était celle de la seconde relativement à γ, et par conséquent la dérivée partielle du second ordre de la première équation, aussi relativement à γ. Cette circonstance, que nous avions déjà remarquée dans l'intégrale de l'équation

$$r + 2qs + q^2 t = X,$$

vient de ce que G étant nul dans ces exemples, la valeur de n doit être telle qu'elle réduise à trois, quatre équations de la forme

$$V = 0, \quad \left[\frac{dV}{d\gamma\,(\alpha}\right] = 0, \quad \left[\frac{dV}{d\alpha\,(\gamma}\right] = 0, \quad \left[\frac{d^2 V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right] = 0,$$

en faisant que les deux dernières deviennent identiques.

Avant de donner des exemples du cas où G, c'est-à-dire, $K^2 - HL$, n'est pas nul, nous ferons sur la quatrième équation de l'intégrale une remarque importante.

En considérant les diverses formes sous lesquelles nous avons successivement mis cette équation, on s'aperçoit aisément qu'il suffit, pour l'obtenir, d'égaler la quantité

$$\frac{\left[\dfrac{d^2 V}{d\alpha\, d\gamma}\right]}{\left[\dfrac{d^2 V}{d\gamma^2}\right]}.$$

à l'une des trois suivantes,

$$\frac{H\left[\dfrac{dp}{d\alpha\,(\gamma}\right] + (K + \sqrt{G})\left[\dfrac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]}{H\left[\dfrac{dp}{d\gamma\,(\alpha}\right] + (K + \sqrt{G})\left[\dfrac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]}, \quad \frac{\left[\dfrac{dW}{d\alpha\,(\gamma}\right]}{\left[\dfrac{dW}{d\gamma\,(\alpha}\right]},$$

$$\frac{1 + 2\mu\sqrt{G}\left[\dfrac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]}{2\mu\sqrt{G}\left[\dfrac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]},$$

qui sont identiquement égales entre elles. Ces quantités sont le rapport des dérivées partielles de W relativement à α et à γ, lorsqu'on regarde comme des constantes les x, y, z, qui se trouvent dans cette quantité ; ces dérivées dépendent donc de la forme qu'on donne à la valeur de β par la substitution qui change cette valeur en W. Mais il est d'autres dérivées relativement à α et à γ, de la même quantité β, qui, d'après la notation adoptée dans ce Mémoire, doivent être représentées par $\frac{d\beta}{d\alpha(\gamma}$ et $\frac{d\beta}{d\gamma(\alpha}$, et qui restent toujours les mêmes, quelle que soit la forme qu'on donne à la valeur de β ; ce sont celles qu'on obtient en considérant que, lorsqu'on prend α et γ pour les deux variables indépendantes, toutes les quantités qui entrent dans le calcul en deviennent des fonctions, et qu'ainsi elles doivent toutes varier conformément aux relations qui les lient à ces deux-là. Dans cette hypothèse de différenciation, le rapport

$$\frac{\frac{d\beta}{d\alpha(\gamma}}{\frac{d\beta}{d\gamma(\alpha}},$$

de ces dérivées semble d'abord devoir être différent de celui des deux dérivées de W prises en y regardant x, y, z comme des constantes : mais il n'en est pas ainsi, et ces deux rapports sont égaux en vertu des quatre équations dont se compose l'intégrale. Pour le démontrer, il faut remarquer qu'en vertu de l'équation $\beta = \nu$ et des valeurs de

$$\left(\frac{d\nu}{dx}\right), \quad \left(\frac{d\nu}{dy}\right), \quad \left(\frac{d\nu}{dz}\right), \quad \left(\frac{d\nu}{dp}\right), \quad \left(\frac{d\nu}{dq}\right),$$

trouvées ci-dessus, on a

$$\frac{d\beta}{d\alpha(\gamma} = \left\{-\lambda'(K-\sqrt{G})+\mu' M\right\}\frac{dx}{d\alpha(\gamma} + \lambda' H\frac{dy}{d\alpha(\gamma} + \mu' H\frac{dp}{d\alpha(\gamma} + \mu'(K+\sqrt{G})\frac{dq}{d\alpha(\gamma},$$

et

$$\frac{d\beta}{d\gamma(\alpha} = \left\{-\lambda'(K-\sqrt{G})+\mu' M\right\}\frac{dx}{d\gamma(\alpha} + \lambda' H\frac{dy}{d\gamma(\alpha} + \mu' H\frac{dp}{d\gamma(\alpha} + \mu'(K+\sqrt{G})\frac{dq}{d\gamma(\alpha}.$$

Mais, d'après la notation adoptée dans ce Mémoire,

$$\frac{dp}{d\alpha\,(\gamma} = \left[\frac{dp}{d\alpha\,(\gamma}\right] + \frac{dp}{dx\,(\alpha,\gamma}\;\frac{dx}{d\alpha\,(\gamma},$$

$$\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma} = \left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right] + \frac{dq}{dx\,(\alpha,\gamma}\;\frac{dx}{d\alpha\,(\gamma},$$

$$\frac{dp}{d\gamma\,(\alpha} = \left[\frac{dp}{d\gamma\,(\alpha}\right] + \frac{dp}{dx\,(\alpha,\gamma}\;\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha},$$

$$\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha} = \left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right] + \frac{dq}{dx\,(\alpha,\gamma}\;\frac{dx}{d\gamma\,(\alpha};$$

les valeurs que nous venons de trouver pour $\frac{d\beta}{dx\,(y}$ et $\frac{d\beta}{d\alpha\,(\gamma}$, peuvent donc s'écrire ainsi :

$$\frac{d\beta}{d\alpha\,(\gamma} = \lambda'\left\{H\frac{dy}{d\alpha\,(\gamma} - (K - \sqrt{G})\frac{dx}{d\alpha\,(\gamma}\right\} +$$
$$\mu'\left\{H\left[\frac{dp}{d\alpha\,(\gamma}\right] + (K + \sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]\right\} +$$
$$\mu'\left\{H\frac{dp}{dx\,(\alpha,\gamma} + (K + \sqrt{G})\frac{dq}{dx\,(\alpha,\gamma} + M\right\}\frac{dx}{d\alpha\,(\gamma},$$

et

$$\frac{d\beta}{d\gamma\,(\alpha} = \lambda'\left\{H\frac{dy}{d\gamma\,(\alpha} - (K - \sqrt{G})\frac{dx}{d\gamma\,(\alpha}\right\} +$$
$$\mu'\left\{H\left[\frac{dp}{d\gamma\,(\alpha}\right] + (K + \sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]\right\} +$$
$$\mu'\left\{H\frac{dp}{dx\,(\alpha,\gamma} + (K + \sqrt{G})\frac{dq}{dx\,(\alpha,\gamma} + M\right\}\frac{dx}{d\gamma\,(\alpha}.$$

Rappelons-nous maintenant que, d'après la théorie des équations aux différentielles partielles du premier ordre, et le procédé même par lequel nous avons trouvé les trois premières équations de l'intégrale, si l'on considère α, γ, et par conséquent aussi la quantité que nous avons représentée par n, comme des constantes, les valeurs de p et de q tirées de ces trois équations, satisfont à l'équation du premier ordre

$$u = \alpha,$$

en rendant nulles les deux quantités

$$\left(\frac{du}{dp}\right)\frac{dy}{dx\,(\alpha,\gamma}-\left(\frac{du}{dq}\right),$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dz}\right)q+\left(\frac{du}{dp}\right)\frac{dq}{dx\,(\alpha,\gamma},$$

qu'on obtient en décomposant, comme nous l'avons déjà vu, la dérivée de $u=\alpha$ par rapport à y, après y avoir remplacé s par sa valeur

$$\frac{dq}{dx\,(\alpha,\gamma}-\frac{\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha,x}}{\frac{dy}{d\gamma\,(\alpha,x}}\,\frac{dy}{dx\,(\alpha,\gamma},$$

et que si l'on avait pris la dérivée de $u=\alpha$ relativement à x, et qu'on y eût mis à la place de r sa valeur

$$\frac{dp}{dx\,(\alpha,\gamma}-s\,\frac{dy}{dx\,(\alpha,\gamma},$$

les termes multipliés par s étant nuls, on aurait eu cette troisième quantité

$$\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dz}\right)p+\left(\frac{du}{dp}\right)\frac{dp}{dx\,(\alpha,\gamma},$$

nulle en vertu des mêmes valeurs de p et de q; nous en conclurons, en égalant à zéro les deux dernières de ces trois quantités, après y avoir remplacé

$$\left(\frac{du}{dx}\right),\quad\left(\frac{du}{dy}\right),\quad\left(\frac{du}{dz}\right),\quad\left(\frac{du}{dp}\right),$$

par leurs valeurs trouvées ci-dessus, et avoir divisé tous les termes de la première par H, ces deux équations

$$\lambda+\mu\frac{dq}{dx\,(\alpha,\gamma}=0,$$

et $$-\lambda(K+\sqrt{G})+\mu M+\mu H\frac{dp}{dx\,(\alpha,\gamma}=0;$$

d'où $$H\frac{dp}{dx\,(\alpha,\gamma}+(K+\sqrt{G})\frac{dq}{dx\,(\alpha,\gamma}+M=0;$$

ce qui réduit le rapport des deux dérivées de β, à

$$\frac{\frac{d\beta}{d\alpha\,(\gamma}}{\frac{d\beta}{d\gamma\,(\alpha}}=\frac{\frac{\lambda'}{\mu'}\left\{H\frac{dy}{d\alpha\,(\gamma}-(K-\sqrt{G})\frac{dx}{d\alpha\,(\gamma}\right\}+H\left[\frac{dp}{d\alpha\,(\gamma}\right]+(K+\sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]}{\frac{\lambda'}{\mu'}\left\{H\frac{dy}{d\gamma\,(\alpha}-(K-\sqrt{G})\frac{dx}{d\gamma\,(\alpha}\right\}+H\left[\frac{dp}{d\gamma\,(\alpha}\right]+(K+\sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]}.$$

Mais parmi les équations du second système d'équations intégrables comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, se trouve celle-ci :

$$H\,\frac{dy}{dx(\beta} - K + \sqrt{G} = 0\,;$$

en la multipliant alternativement par $\frac{dx}{d\alpha(\beta}$ et par $\frac{dx}{d\gamma(\beta}$, on trouve les deux suivantes :

$$H\,\frac{dy}{d\alpha(\beta} - (K - \sqrt{G})\,\frac{dx}{d\alpha(\beta} = 0\,,$$

$$H\,\frac{dy}{d\gamma(\beta} - (K - \sqrt{G})\,\frac{dx}{d\gamma(\beta} = 0\,:$$

mais on a identiquement

$$\frac{dy}{d\alpha(\gamma} = \frac{dy}{d\alpha(\beta} + \frac{dy}{d\beta(\alpha}\,\frac{d\beta}{d\alpha(\gamma}\,,$$

$$\frac{dx}{d\alpha(\gamma} = \frac{dx}{d\alpha(\beta} + \frac{dx}{d\beta(\alpha}\,\frac{d\beta}{d\alpha(\gamma}\,,$$

$$\frac{dy}{d\gamma(\alpha} = \frac{dy}{d\gamma(\beta} + \frac{dy}{d\beta(\gamma}\,\frac{d\beta}{d\gamma(\alpha} = \frac{dy}{d\gamma(\beta} + \left(\frac{dy}{d\beta(\alpha} + \frac{dy}{d\alpha(\beta}\,\frac{d\alpha}{d\beta(\gamma}\right)\frac{d\beta}{d\gamma(\alpha}\,,$$

$$\frac{dx}{d\gamma(\alpha} = \frac{dx}{d\gamma(\beta} + \frac{dx}{d\beta(\gamma}\,\frac{d\beta}{d\gamma(\alpha} = \frac{dx}{d\gamma(\beta} + \left(\frac{dx}{d\beta(\alpha} + \frac{dx}{d\alpha(\beta}\,\frac{d\alpha}{d\beta(\gamma}\right)\frac{d\beta}{d\gamma(\alpha}\,,$$

d'où l'on conclut, en effaçant les termes nuls en vertu de deux équations que nous venons d'obtenir, que

$$H\,\frac{dy}{d\alpha(\gamma} - (K - \sqrt{G})\,\frac{dx}{d\alpha(\gamma} = \left\{H\,\frac{dy}{d\beta(\alpha} - (K - \sqrt{G})\,\frac{dx}{d\beta(\alpha}\right\}\frac{d\beta}{d\alpha(\gamma}\,,$$

et que

$$H\,\frac{dy}{d\gamma(\alpha} - (K - \sqrt{G})\,\frac{dx}{d\gamma(\alpha} = \left\{H\,\frac{dy}{d\beta(\alpha} - (K - \sqrt{G})\,\frac{dx}{d\beta(\alpha}\right\}\frac{d\beta}{d\gamma(\alpha}\,;$$

on a donc

$$\frac{\dfrac{d\beta}{d\alpha(\gamma}}{\dfrac{d\beta}{d\gamma(\alpha}} = \frac{\dfrac{\lambda'}{\mu'}\left\{H\,\dfrac{dy}{d\alpha(\gamma} - (K - \sqrt{G})\,\dfrac{dx}{d\alpha(\gamma}\right\}}{\dfrac{\lambda'}{\mu'}\left\{H\,\dfrac{dy}{d\gamma(\alpha} - (K - \sqrt{G})\,\dfrac{dx}{d\gamma(\alpha}\right\}}\,.$$

Comme deux fractions ne peuvent être égales sans l'être aussi à celle qu'on forme en prenant pour numérateur la différence de leurs numérateurs, et pour dénominateur celle de leurs dénominateurs, on trouvera, en comparant les deux valeurs obtenues pour

$$\frac{\frac{d\beta}{d\alpha\,(\gamma}}{\frac{d\beta}{d\gamma\,(\alpha}},$$

que

$$\frac{\frac{d\beta}{d\alpha\,(\gamma}}{\frac{d\beta}{d\gamma\,(\alpha}} = \frac{H\left[\frac{dp}{d\alpha\,(\gamma}\right] + (K + \sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]}{H\left[\frac{dp}{d\gamma\,(\alpha}\right] + (K + \sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]} =$$

$$\frac{\left[\frac{dW}{d\alpha\,(\gamma}\right]}{\left[\frac{dW}{d\gamma\,(\alpha}\right]} = \frac{1 + 2\mu\sqrt{G}\left[\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\gamma}\right]}{2\mu\sqrt{G}\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]};$$

il suit de là et des résultats obtenus précédemment, qu'on peut mettre la quatrième équation de l'intégrale sous cette dernière forme

$$\left[\frac{d^2 V}{d\alpha\, d\gamma}\right]\frac{d\beta}{d\gamma\,(\alpha} - \left[\frac{d^2 V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right]\frac{d\beta}{d\alpha\,(\gamma} = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left[\frac{d^2 V}{d\alpha\, d\gamma}\right] + \left[\frac{d^2 V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right]\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\beta} = 0.$$

Cette forme n'est pas propre en général à calculer la quatrième équation; parce que la nécessité de faire varier x, y, z, dans la valeur de β, multiplie inutilement le nombre des différenciations: mais elle devient la plus commode, quand, en éliminant ces quantités au moyen des trois premières équations de l'intégrale, on obtient une équation entre α, β et γ seulement, d'où l'on tire alors sur-le-champ la valeur de $\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\beta}$. Il arrive dans des cas particuliers que $\frac{\frac{d\beta}{d\alpha\,(\gamma}}{\frac{d\beta}{d\gamma\,(\alpha}}$ est identique aux trois quantités auxquelles nous venons de trouver qu'il doit toujours être égal; mais cela n'a pas lieu en général, et alors on trouve encore la quatrième équation de l'intégrale en l'égalant à l'une d'elles, ce qui donne cette équation sous d'autres formes, telles, par exemple, que

dW.

$$\left[\frac{dW}{d\alpha(\gamma}\right]+\left[\frac{dW}{d\gamma(\alpha}\right]\frac{d\gamma}{d\alpha(\beta}=0,$$

Prenons pour premier exemple l'équation

$$2z=x^2(r+2s+t)-\frac{b^2}{q^2x^2}t,$$

ou

$$x^2r+2x^2s+\left(x^2-\frac{b^2}{q^2x^2}\right)t-2z=0;$$

nous aurons

$$H=x^2,\quad K=x^2,\quad L=x^2-\frac{b^2}{q^2x^2},\quad M=-2z,\quad \sqrt{G}=\frac{b}{q};$$

et les deux systèmes d'équations susceptibles d'être intégrées comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, seront

$$x^2\frac{dy}{dx(\alpha}-x^2-\frac{b}{q}=0,\qquad x^2\frac{dy}{dx(\beta}-x^2+\frac{b}{q}=0,$$

$$x^2\frac{dp}{dx(\alpha}+\left(x^2-\frac{b}{q}\right)\frac{dq}{dx(\alpha}-2z=0,\qquad x^2\frac{dp}{dx(\beta}+\left(x^2+\frac{b}{q}\right)\frac{dq}{dx(\beta}-2z=0,$$

$$\frac{dz}{dx(\alpha}-p-q\frac{dy}{dx(\alpha}=0,\qquad \frac{dz}{dx(\beta}-p-q\frac{dy}{dx(\beta}=0.$$

En multipliant les trois équations du premier système respectivement par

$$\lambda=-\frac{2q}{x},\quad \mu=1,\quad \nu=-2x,$$

et en ajoutant les produits qui en résultent, les termes en $\frac{dy}{dx(\alpha}$ se détruiront mutuellement, et le résultat

$$x^2\frac{dp}{dx(\alpha}+x^2\frac{dq}{dx(\alpha}-\frac{b}{q}\frac{dq}{dx(\alpha}-2z+2qx+\frac{2b}{x}-2x\frac{dz}{dx(\alpha}+2px=0$$

étant une différentielle exacte, on aura l'équation du premier ordre

$$x^2p+x^2q-2xz-blq+2blx=a,$$

qu'il faudra d'abord intégrer en y considérant a comme une constante. Pour cela, on la différenciera par rapport à y, ce qui donnera

$$x^2s+\left(x^2-\frac{b}{q}\right)t-2xq=0;$$

et en y substituant à s et à t leurs valeurs

T

$$s = \frac{dq}{dx\,(\alpha,\gamma} - \frac{\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha,x}}{\frac{dy}{d\gamma\,(\alpha,x}}\;\frac{dy}{dx\,(\alpha,\gamma}\,; \quad t = \frac{\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha,x}}{\frac{dy}{d\gamma\,(\alpha,x}},$$

et égalant séparément à zéro les termes qui contiennent le facteur $\frac{\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha,x}}{\frac{dy}{d\gamma\,(\alpha,x}}$ et ceux où il n'entre pas, on aura les deux équations

$$x^2\,\frac{dy}{dx\,(\alpha,\gamma} - x^2 + \frac{b}{q} = 0,$$

$$x^2\,\frac{dq}{dx\,(\alpha,\gamma} - 2\,x\,q = 0.$$

Cette dernière devient intégrable en la divisant par x^4, et donne

$$\frac{q}{x^2} = \gamma \quad \text{ou} \quad q = \gamma\,x^2\,;$$

et en substituant cette valeur dans la première, après qu'elle aura été divisée par x^2, on aura

$$\frac{dy}{dx\,(\alpha,\gamma} = 1 - \frac{b}{\gamma\,x^4}.$$

d'où l'on tire $y = x + \frac{b}{3\,\gamma\,x^3} + \theta$ *.

Pour avoir la valeur de z, on mettra dans l'équation proposée γx^2 à la place de q, et

$$\frac{dz}{dx\,(\alpha,\gamma} - \gamma\,x^2\left(1 - \frac{b}{\gamma\,x^4}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{dx\,(\alpha,\gamma} - \gamma\,x^2 + \frac{b}{x^2}$$

à la place de p; et comme y n'y entre pas, on n'aura pas à y remplacer y par sa valeur : on trouvera ainsi

$$x^2\,\frac{dz}{dx\,(\alpha,\gamma} + b - 2\,x\,z - b\,l\,\gamma = a, \quad \text{ou}$$

$$\frac{x^2\,\frac{dz}{dx\,(\alpha,\gamma} - 2\,x\,z}{x^4} = \frac{a + b\,l\,\gamma - b}{x^4}.$$

L'intégrale de cette équation, multipliée par x^2, donne

* θ représente ici une fonction arbitraire de γ.

$$z = \frac{b - a - b\,l\,\gamma}{3\,x} + x^2\,\zeta.$$

Ces valeurs de z, de y et de q devant satisfaire à la relation

$$\frac{d\,z}{d\,\gamma\,(a,x}=q\,\frac{d\,y}{d\,\gamma\,(a,x},$$

on aura

$$x^2\,\frac{d\,\zeta}{d\,\gamma\,(a,x}-\frac{b}{3\,\gamma\,x}=\gamma\,x^2\left(\frac{d\,\theta}{d\,\gamma\,(a,x}-\frac{b}{3\,\gamma^2\,x^3}\right),$$

qui donne $\zeta = \int\gamma\,d\,\theta$, et par conséquent

$$z = \frac{b - a - b\,l\,\gamma}{3\,x} + x^2\int\gamma\,d\,\theta;$$

en joignant à cette équation celle que nous avons trouvée précédemment,

$$y = x + \frac{b}{3\,\gamma\,x^3} + \theta,$$

on aura un système de deux équations exprimant l'intégrale de l'équation du premier ordre où a était considéré comme une constante.

En effet, x et y étant les deux variables indépendantes, et prenant d'abord les dérivées de ces deux équations relatives à y, on aura

$$q = -\frac{b}{3\,\gamma\,x}\,\frac{d\,\gamma}{d\,y\,(x}+\gamma\,x^2\,\frac{d\,\theta}{d\,y\,(x},$$

et
$$1 = -\frac{b}{3\,\gamma^2\,x^3}\,\frac{d\,\gamma}{d\,y\,(x}+\frac{d\,\theta}{d\,y\,(x}.$$

Cette dernière équation réduit la valeur de q donnée par la première, à $q = \gamma\,x^2$: en différenciant ensuite par rapport à x, il vient

$$p = \frac{a + b\,l\,\gamma - b}{3\,x^2} + 2\,x\int\gamma\,d\theta - \frac{b}{3\,\gamma\,x}\,\frac{d\,\gamma}{d\,x\,(y}+\gamma\,x^2\,\frac{d\,\theta}{d\,x\,(y},$$

et
$$0 = 1 - \frac{b}{\gamma\,x^4} - \frac{b}{3\,\gamma^2\,x^3}\,\frac{d\,\gamma}{d\,x\,(y}+\frac{d\,\theta}{d\,x\,(y};$$

d'où

$$\frac{d\,\theta}{d\,x\,(y}=\frac{b}{\gamma\,x^4}+\frac{b}{3\,\gamma^2\,x^3}\,\frac{d\,\gamma}{d\,x\,(y}-1,$$

et
$$p = \frac{a + b\,l\,\gamma + 2\,b}{3\,x^2} - \gamma\,x^2 + 2\,x\int\gamma\,d\,\theta.$$

Ces valeurs de p et de q et la valeur de z, substituées dans l'équation

$$x^2 p + x^2 q - 2xz - blq + 2blx = \alpha,$$

la rendent évidemment identique.

Les deux équations de cette intégrale n'étant pas sous la forme

$$V = 0, \quad \left[\frac{dV}{d\gamma}\right] = 0,$$

il faut d'abord les y ramener par la méthode exposée dans le premier paragraphe de ce Mémoire. Pour cela, en conservant les dénominations que nous y avons adoptées, il faudra représenter par Q la valeur γx^2 de q, et l'on calculera celle de $u = z - Qy$, qui sera

$$u = \frac{b - \alpha - bl\gamma}{3x} + x^2 \int \gamma d\theta - \gamma x^3 - \frac{b}{3x} - \gamma\theta x^2,$$

ou

$$u = -\gamma x^3 - \frac{\alpha + bl\gamma}{3x} + x^2 \eta,$$

en faisant $\int \gamma d\theta - \gamma\theta = \eta$: ainsi l'on aura pour l'équation $V = 0$, celle-ci :

$$z = u + Qy = \gamma x^2 y - \gamma x^3 - \frac{\alpha + bl\gamma}{3x} + x^2 \eta;$$

et pour l'équation $\left[\frac{dV}{d\gamma}\right] = 0$, sa dérivée par rapport à γ, savoir,

$$x^2 y - x^3 - \frac{b}{3\gamma x} + x^2 \frac{d\eta}{d\gamma} = 0;$$

l'intégrale de la proposée sera donc représentée par les trois équations

$$z = \gamma x^2 y - \gamma x^3 - \frac{\alpha + bl\gamma}{3x} + x^2 \eta,$$

$$x^2 y - x^3 - \frac{b}{3\gamma x} + x^2 \frac{d\eta}{d\gamma\,(\alpha} = 0,$$

$$-\frac{1}{3x} + x^2 \frac{d\eta}{d\alpha\,(\gamma} = 0,$$

pourvu que la valeur de η en fonction de α et de γ soit donnée par la quatrième équation de l'intégrale. Pour calculer cette équation, on se rappellera qu'elle consiste à égaler la quantité $\dfrac{\left[\dfrac{d^2 V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right]}{\left[\dfrac{d^2 V}{d\alpha\, d\gamma}\right]}$, à l'une de celles-ci :

$$\frac{H\left[\frac{dp}{d\gamma\,(\alpha}\right]+(K+\sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]}{H\left[\frac{dp}{d\alpha\,(\gamma}\right]+(K+\sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]},\quad \frac{\left[\frac{dW}{d\gamma\,(\alpha}\right]}{\left[\frac{dW}{d\alpha\,(\gamma}\right]},$$

$$\frac{2\mu\sqrt{G}\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]}{1+2\mu\sqrt{G}\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]},\quad \frac{\frac{d\beta}{d\gamma\,(\alpha}}{\frac{d\beta}{d\alpha\,(\gamma}},$$

suivant celle qu'on veut employer des diverses formes sous lesquelles nous avons présenté cette quatrième équation.

On a d'abord

$$\frac{\left[\frac{d^2V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right]}{\left[\frac{d^2V}{d\alpha\,d\gamma}\right]}=\frac{\frac{b}{3\gamma^2x}+x^2\frac{d^2n}{d\gamma^2\,(\alpha}}{x^2\frac{d^2n}{d\alpha\,d\gamma}}=\frac{\frac{b}{3\gamma^2x^3}+\frac{d^2n}{d\gamma^2\,(\alpha}}{\frac{d^2n}{d\alpha\,d\gamma}}=\frac{\frac{b}{\gamma^2}\frac{dn}{d\alpha\,(\gamma}+\frac{d^2n}{d\gamma^2\,(\alpha}}{\frac{d^2n}{d\alpha\,d\gamma}};$$

on tire ensuite des trois premières équations de l'intégrale

$$p=2\gamma xy-3\gamma x^2+\frac{\alpha+bl\gamma}{3x^2}+2xn,\quad q=\gamma x^2,$$

et comme on a

$$H=x^2,\quad K+\sqrt{G}=x^2+\frac{b}{q},$$

il vient

$$\frac{H\left[\frac{dp}{d\gamma\,(\alpha}\right]+(K+\sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]}{H\left[\frac{dp}{d\alpha\,(\gamma}\right]+(K+\sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]}=$$

$$\frac{x^2\left(2xy-2x^2+\frac{b}{3\gamma x^2}+2x\frac{dn}{d\gamma\,(\alpha}+\frac{b}{q}\right)}{\frac{1}{3}+2x^3\frac{dn}{d\alpha\,(\gamma}};$$

mais on tire de la seconde équation de l'intégrale

$$2xy - 2x^2 + 2x\frac{dn}{d\gamma(\alpha} = \frac{b}{3\gamma x^2},$$

et de la troisième $2x^3\frac{dn}{d.\alpha.(\gamma} = \frac{2}{3}$, ce qui réduit la valeur de

$$\frac{H\left[\frac{dp}{d\gamma(\alpha}\right] + (K+\sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\gamma(\alpha}\right]}{H\left[\frac{dp}{d\alpha(\gamma}\right] + (K+\sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\alpha(\gamma}\right]}$$

à

$$x^2\left(\frac{b}{\gamma x^2} + \frac{b}{q}\right) = \frac{2b}{\gamma}, \text{ parce que } q = \gamma x^2.$$

Pour faire voir que les autres formes de la quatrième équation de l'intégrale conduisent au même résultat, il suffit de montrer que $\frac{2b}{\gamma}$ est aussi la valeur des trois quantités

$$\frac{\left[\frac{dW}{d\gamma(\alpha}\right]}{\left[\frac{dW}{d\alpha(\gamma}\right]}, \quad \frac{2\mu\sqrt{G}\left[\frac{dq}{d\gamma(\alpha}\right]}{1+2\mu\sqrt{G}\left[\frac{dq}{d\alpha(\gamma}\right]}, \quad \frac{\frac{d\beta}{d\gamma(\alpha}}{\frac{d\beta}{d\alpha(\gamma}}.$$

On peut employer la première dans cet exemple, parce que le second système d'équations susceptibles d'être intégrées comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, fournit une combinaison intégrable qu'on trouve en les multipliant par les mêmes facteurs que celles du premier système, et ajoutant de la même manière les produits de ces multiplications : on obtient ainsi l'équation

$$x^2\frac{dp}{dx(\beta} + x^2\frac{dq}{dx(\beta} + \frac{b}{q}\frac{dq}{dx(\beta} - 2z + 2px + 2qx - \frac{2b}{x} + 2x\frac{dz}{dx(\beta} = 0,$$

qui donne $\quad x^2p + x^2q + blq - 2xz - 2blx = \beta.$

En mettant dans le premier membre de cette équation, à la place de p et de q, leurs valeurs trouvées plus haut, on aura W : ainsi

$$W = 2\gamma x^3y - 2\gamma x^4 + \frac{\alpha + 4b.l.\gamma}{3} - 2xz + 2x^3n;$$

et par conséquent

$$\frac{\left[\frac{dW}{d\gamma\,(\alpha}\right]}{\left[\frac{dW}{d\alpha\,(\gamma}\right]} = \frac{2x^3y - 2x^4 + \frac{4b}{3\gamma} + 2x^3\frac{dn}{d\gamma\,(\alpha}}{\frac{1}{3} + 2x^3\frac{dn}{d\alpha\,(\gamma}} = \frac{2b}{\gamma},$$

par les mêmes réductions qui nous ont servi à ramener à $\frac{2b}{\gamma}$ l'expression

$$\frac{H\left[\frac{dp}{d\gamma\,(\alpha}\right] + (K + \sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]}{H\left[\frac{dp}{d\alpha\,(\gamma}\right] + (K + \sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]}.$$

Comme on a $q = \gamma x^2$, $\mu = 1$, $\sqrt{G} = \frac{b}{\gamma x^2}$, on trouve sur-le-champ

$$\frac{2\mu\sqrt{G}\left[\frac{dq}{d\gamma\,(\alpha}\right]}{1 + 2\mu\sqrt{G}\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\gamma}\right]} = \frac{2b}{\gamma}.$$

Enfin, en ôtant la valeur de α de celle de β, on trouve

$$\beta - \alpha = 2blq - 4blx = 2bl\frac{q}{x^2} = 2bl\gamma,$$

d'où $\beta = \alpha + 2bl\gamma$, et par conséquent,

$$\frac{\frac{d\beta}{d\gamma\,(\alpha}}{\frac{d\beta}{d\alpha\,(\gamma}} = \frac{2b}{\gamma}.$$

Ces différens procédés donnant tous la valeur $\frac{2b}{\gamma}$, il aurait suffi d'en employer un seul, et on aurait obtenu dans tous les cas la même quatrième équation de l'intégrale en égalant cette valeur à

$$\frac{\frac{b}{\gamma^2}\frac{dn}{d\alpha\,(\gamma} + \frac{d^2n}{d\gamma^2\,(\alpha}}{\frac{d^2n}{d\alpha\,d\gamma}}:$$

on a ainsi $\frac{d^2n}{d\gamma^2\,(\alpha} - \frac{2b}{\gamma}\frac{d^2n}{d\alpha\,d\gamma} + \frac{b}{\gamma^2}\frac{dn}{d\alpha\,(\gamma} = 0$, équation qui ne contient que deux dérivées du second ordre $\frac{d^2n}{d\gamma^2\,(\alpha}$ et $\frac{d^2n}{d\alpha\,d\gamma}$; c'est-là tout ce que nous nous étions proposé de faire : mais en examinant cette équation, on voit qu'en faisant $l\gamma = \varepsilon$, et prenant α et ε au lieu de α et γ pour les deux variables indépendantes, elle devient linéaire à coefficiens constans, et par conséquent susceptible d'être intégrée par les méthodes connues. Alors l'intégrale de l'équation donnée est représentée par ces quatre équations :

$$z = e^{\varepsilon}(x^2 y - x^3) - \frac{\alpha + b\varepsilon}{3x} + x^2 \eta,$$

$$e^{\varepsilon}(x^2 y - x^3) - \frac{b}{3x} + x^2 \frac{d\eta}{d\varepsilon(\alpha} = 0, \quad \frac{1}{3x} - x^2 \frac{d\eta}{d\alpha(\varepsilon} = 0,$$

$$\frac{d^2\eta}{d\varepsilon^2(\alpha} - 2b\frac{d^2\eta}{d\alpha\, d\varepsilon} + b\frac{d\eta}{d\alpha(\varepsilon} - \frac{d\eta}{d\varepsilon(\alpha} = 0.$$

Soit, pour second exemple, $r + 2qs + (q^2 - x^2)t - q = 0$; on aura

$$H = 1, \quad K = q, \quad L = q^2 - x^2, \quad M = -q, \quad \sqrt{G} = x,$$

et les deux systèmes deviendront

$$\frac{dy}{dx(\alpha} - q - x = 0, \qquad \Bigg\| \qquad \frac{dy}{dx(\beta} - q + x = 0,$$

$$\frac{dp}{dx(\alpha} + (q - x)\frac{dq}{dx(\alpha} - q = 0, \qquad \Bigg\| \qquad \frac{dp}{dx(\beta} + (q + x)\frac{dq}{dx(\beta} - q = 0,$$

$$\frac{dz}{dx(\alpha} - p - q\frac{dy}{dx(\alpha} = 0, \qquad \Bigg\| \qquad \frac{dz}{dx(\beta} - p - q\frac{dy}{dx(\beta} = 0.$$

Parmi ces six équations, il n'y a que la seconde qui soit une différentielle exacte ; elle donne

$$p + \frac{q^2}{2} - xq + \alpha = 0.$$

En intégrant celle-ci comme une équation aux différentielles partielles du premier ordre, où α représente une constante, on trouve

$$z = \gamma y + \frac{\gamma x^2 - \gamma^2 x}{2} - \alpha x + \varphi\gamma,$$

$$y + \frac{x^2}{2} - \gamma x + \varphi'\gamma = 0;$$

on a donc, lorsqu'on suppose α variable, $z = \gamma y + \frac{\gamma x^2 - \gamma^2 x}{2} - \alpha x + \eta$, et l'intégrale de la proposée est représentée par les trois équations

$$z = \gamma y + \frac{\gamma x^2 - \gamma^2 x}{2} - \alpha x + \eta,$$

$$y + \frac{x^2}{2} - \gamma x + \frac{d\eta}{d\gamma(\alpha} = 0, \quad x - \frac{d\eta}{d\alpha(\gamma} = 0,$$

pourvu

pourvu que la valeur de n en α et γ soit telle, que

$$\frac{d^2 n}{d\gamma\, d\alpha} + \left(\frac{d^2 n}{d\gamma^2 (\alpha} - x\right) \frac{d\gamma}{d\alpha (\beta} = 0,$$

où il ne s'agit plus que de mettre à la place de $\frac{d\gamma}{d\alpha (\beta}$ sa valeur

$$\frac{d\gamma}{d\alpha (\beta} = -\frac{\left[\frac{dp}{d\alpha (\gamma}\right] + (K + \sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\alpha (\gamma}\right]}{\left[\frac{dp}{d\gamma (\alpha}\right] + (K + \sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\gamma (\alpha}\right]}.$$

Mais la première des trois équations dont se compose l'intégrale, donne, en la différenciant par rapport à x et à y, et supprimant les termes qui sont nuls en vertu des deux autres,

$$p = \gamma x - \frac{\gamma^2}{2} - \alpha \quad \text{et} \quad q = \gamma:$$

lorsqu'au moyen de ces valeurs, on élimine p, q, et leurs dérivées partielles de celle de $\frac{d\gamma}{d\alpha (\beta}$, on trouve

$$\frac{d\gamma}{d\alpha (\beta} = -\frac{1}{x - \gamma + \gamma + x} = \frac{1}{2x}.$$

Cette valeur change l'équation

$$\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\gamma} + \left(\frac{d^2 n}{d\gamma (\alpha} - x\right) \frac{d\gamma}{d\alpha (\beta} = 0,$$

en
$$2x \frac{d^2 n}{d\alpha\, d\gamma} + \frac{d^2 n}{d\gamma^2 (\alpha} - x = 0.$$

Quand on l'a mise sous cette forme, il reste en général à y remplacer x, y, z, par leurs valeurs tirées des trois équations qui représentent l'intégrale; mais comme, dans cet exemple, x est la seule de ces trois quantités qui y soit contenue, il suffira de substituer à x sa valeur prise dans la troisième, et l'on aura

$$2 \frac{dn}{d\alpha (\gamma} \frac{d^2 n}{d\alpha\, d\gamma} + \frac{d^2 n}{d\gamma^2 (\alpha} - \frac{dn}{d\alpha (\gamma} = 0.$$

Cette équation du second ordre entre α, γ, n, peut s'obtenir encore plus simplement en suivant le procédé donné tout-à-l'heure pour le cas où le second système fournit une combinaison intégrable.

En effet, quoique aucune des équations de ce système ne soit une différentielle exacte, on en trouvera une en multipliant la première par

2 et en ôtant le produit de la seconde, on obtiendra ainsi

$$\frac{dp}{dx(\beta} + q\frac{dq}{dx(\beta} + x\frac{dq}{dx(\beta} + q - 2\frac{dy}{dx(\beta} - 2x = 0,$$

dont l'intégrale est $\quad p + \frac{q^2}{2} + xq - 2y - x^2 + \beta = 0;$

on en tire $\quad \beta = 2y + x^2 - p - xq - \frac{q^2}{2},$

qui devient $\quad W = 2y + x^2 - 2\gamma x + \alpha,$

lorsqu'on y substitue à p et à q les valeurs que nous venons de trouver pour ces deux quantités; on a donc

$$\left[\frac{dW}{d\gamma(\alpha}\right] = -2x,$$

et

$$\left[\frac{dW}{d\alpha(\gamma}\right] = 1;$$

ce qui donne sur-le-champ la même équation

$$2x\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\gamma} + \frac{d^2 n}{d\gamma^2(\alpha} - x = 0,$$

où il ne s'agit plus que de remplacer x par sa valeur $\frac{dn}{d\alpha(\gamma}$.

Il est à remarquer que, dans cet exemple, on obtient aisément une équation entre α, β, γ et n, en retranchant de

$$\beta = W = 2y + x^2 - 2\gamma x + \alpha,$$

le double de la seconde équation de l'intégrale, savoir,

$$2y + x^2 - 2\gamma x + 2\frac{dn}{d\gamma(\alpha} = 0:$$

on trouve ainsi,

$$\beta = \alpha - 2\frac{dn}{d\gamma(\alpha};$$

cette équation donne

$$\frac{\frac{d\beta}{d\alpha(\gamma}}{\frac{d\beta}{d\gamma(\alpha}} = \frac{2\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\gamma} - 1}{2\frac{d^2 n}{d\gamma^2(\alpha}},$$

et soit qu'on égale cette valeur à

$$\frac{\left[\frac{d^2 V}{d\alpha\, d\gamma}\right]}{\left[\frac{d^2 V}{d\gamma\,(\alpha}\right]} = \frac{\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\gamma}}{\frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha} - x},$$

ou à

$$\frac{\left[\frac{dW}{d\alpha\,(\gamma}\right]}{\left[\frac{dW}{d\gamma\,(\alpha}\right]} = -\frac{1}{2x},$$

on obtient la même équation

$$2x\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\gamma} + \frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha} - x = 0;$$

c'est-à-dire, en y mettant au lieu de x sa valeur,

$$2\frac{dn}{d\alpha\,(\gamma}\,\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\gamma} + \frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha} - \frac{dn}{d\alpha\,(\gamma} = 0.$$

Cette équation, à laquelle se trouve ramenée l'intégration de

$$r + 2qs + (q^2 - x^2)t - q = 0,$$

ne contient plus que deux dérivées du second ordre, et revient à

$$2ps + t - p = 0.$$

L'existence de deux systèmes de trois équations, où l'on considère dans le premier système x et α, et dans le second x et β, comme les deux variables indépendantes, suppose non-seulement que

$$G = K^2 - HL,$$

n'est pas nul, mais encore qu'on n'a ni $H = 0$, ni $L = 0$; c'est-à-dire que l'équation donnée $Hr + 2Ks + Lt + M = 0$, contient les deux dérivées extrêmes du second ordre r et t; car les deux équations

$$H\frac{dy}{dx\,(\alpha} - K - \sqrt{G} = 0,$$

et

$$H\frac{dy}{dx\,(\beta} - K + \sqrt{G} = 0,$$

qui déterminent les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ correspondantes à chacun des deux systèmes, donnent, quand on a $H=o$ et par conséquent $G=K^2$;

$$\frac{dy}{dx(\alpha}=\frac{2K}{o} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx(\beta}=\frac{o}{o}.$$

La première peut s'écrire ainsi : $\frac{dx}{dy(\alpha}=o$, d'où $x=\phi\alpha$; alors les deux quantités x et α étant fonctions l'une de l'autre, on ne peut les prendre pour les deux variables indépendantes, et il n'y a qu'un des deux systèmes indiqués par les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ qui soit possible, celui où l'on prend x et β pour les deux variables indépendantes : la valeur de $\frac{dy}{dx(\beta}$ qui répond à ce système, se présente, comme nous venons de le voir, sous la forme indéterminée $\frac{o}{o}$, quand on veut la conclure des formules générales ; mais cela n'empêche pas qu'on ne puisse l'obtenir aisément, comme nous le verrons tout-à-l'heure.

Dans le cas où l'on aurait $L=o$, G serait encore égal à K^2, et on aurait ces deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$,

$$\frac{dy}{dx(\alpha}=\frac{2K}{H}, \quad \frac{dy}{dx(\beta}=o;$$

la première conduirait à la même transformée que nous allons obtenir d'une manière plus simple, en supposant qu'on change dans la proposée x, y, p, q, r, en y, x, q, p, t; nous verrons qu'alors cette transformée ne contient qu'une seule dérivée du second ordre, savoir, $\frac{d^2n}{dx\,d\beta}$, d'où il suit que si on l'avait calculée sans faire ce changement, elle n'aurait contenu que celle-ci $\frac{d^2n}{dy\,d\alpha}$: quant à la seconde, elle exprime, ce qui est d'ailleurs évident, que la condition de ne pas contenir une des deux dérivées extrêmes du second ordre, est satisfaite en continuant de regarder x et y ou une fonction quelconque de y, comme les deux variables indépendantes. On tire en effet de cette seconde valeur $y=\psi\beta$; d'où il suit que β est constant ou variable en même temps que y, et qu'ainsi l'équation qui résulterait de cette transformation ne différerait pas

pas essentiellement de la proposée, et aurait toutes les mêmes dérivées du second ordre.

Si l'on avait $L=0$ dans l'équation donnée, il suffirait d'y changer x, y, p, q, r en y, x, q, p, t, pour en avoir une dans laquelle on eût $H=0$, et dont l'intégrale donnerait immédiatement celle de la proposée, en y écrivant x au lieu de y, et y au lieu de x; c'est pourquoi, quand il s'agira d'une équation aux différentielles partielles du second ordre, dans laquelle manque une des dérivées extrêmes de cet ordre, nous supposerons toujours que c'est celle qu'on obtient en différenciant deux fois par rapport à x, et nous représenterons l'équation par

$$2K's + L't + M' = 0.$$

Nous avons déjà vu que la formule générale donne $\frac{0}{0}$ pour la valeur de $\frac{dy}{dx(\beta}$, à laquelle correspond le seul système de trois équations qu'on puisse obtenir dans ce cas; pour déterminer cette valeur et en même temps celle de $\frac{dq}{dx(\beta}$, on substituera

$$\frac{dq}{dx(\beta} - \frac{dy}{dx(\beta} t$$

au lieu de s dans l'équation

$$2K's + L't + M' = 0,$$

et on égalera séparément à zéro les termes indépendans de t et ceux qui seront multipliés par la première puissance de cette dérivée; on aura ainsi deux équations qui, jointes à celle qui exprime que p et q sont les dérivées de z relativement à x et à y, donneront ce système de trois équations

$$2K' \frac{dy}{dx(\beta} - L' = 0,$$

$$2K' \frac{dq}{dx(\beta} + M' = 0,$$

$$\frac{dz}{dx\,(\beta} - p - q\,\frac{dy}{dx\,(\beta} = 0.$$

Il est à remarquer que, pourvu que les deux premières équations de ce système soient satisfaites, la proposée le sera aussi; car, en écrivant $s + \frac{dy}{dx\,(\beta}\,t$ au lieu de $\frac{dq}{dx\,(\beta}$ dans la seconde, et en éliminant ensuite $\frac{dy}{dx\,(\beta}$ entre ces deux équations, on trouve

$$\frac{L'}{2K'} = -\frac{2K's + M'}{2K't},$$

d'où l'on tire immédiatement l'équation proposée

$$2K's + M' + L't = 0.$$

Comme les trois équations du système que nous venons d'obtenir ne contiennent point de dérivée de p, il est évident qu'on n'en peut former une combinaison intégrable que par l'élimination de p; il faudra donc substituer à p, dans les deux premières équations de ce système, sa valeur tirée de la troisième, et examiner si l'on peut former avec les deux équations résultant de cette substitution, une combinaison qui satisfasse aux conditions d'intégrabilité.

Démontrons maintenant que toutes les fois qu'on aura obtenu une telle combinaison, il sera facile de ramener l'intégration de l'équation proposée à celle d'une équation qui ne contiendra qu'une dérivée du second ordre, cette dérivée étant celle qu'on obtient en différenciant successivement par rapport aux deux variables indépendantes.

Soit v la fonction de x, y, z, q, qu'on trouve égale à une constante en intégrant cette combinaison : comme les dérivées qui y sont contenues, sont prises en considérant β comme constant, v sera fonction de β; mais nous avons vu que cette quantité β peut toujours être remplacée par une de ses fonctions; nous aurons donc simplement

$$v = \beta.$$

Si nous considérons maintenant cette équation comme une équation aux différentielles partielles, où β est une constante, nous verrons qu'elle appartiendra à la classe de celles qui s'intègrent comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, parce qu'elles ne contiennent qu'une seule dérivée : il sera donc facile d'en avoir l'intégrale primitive exprimée par une seule équation qui contiendra, avec x, y, z, la quantité β considérée comme une constante et une fonction arbitraire ψx de x.

En remplaçant, dans cette équation, ψx par n, et en regardant dans l'équation qui en résultera, et que je représenterai par

$$W = 0,$$

cette nouvelle quantité n comme une fonction de x et de β, il est évident que le système des deux équations

$$W = 0,$$

$$\left[\frac{d\,W}{d\,\beta\,(\,x}\right] = 0,$$

donnera la même valeur de q, que l'intégrale de

$$v = \beta,$$

lorsqu'on y supposait β constant et n fonction de x, parce que x ne varie pas dans la différenciation qui donne q; en sorte que la supposition de n fonction de x et de β ne peut introduire dans cette différenciation que des termes dépendans de la variabilité de β dans n, qui sont détruits par ceux qui proviennent des termes où β entre explicitement dans $W = 0$, en vertu de la seconde équation

$$\left[\frac{d\,W}{d\,\beta\,(x}\right] = 0.$$

On voit en même temps que cette valeur de q ne pourra contenir, comme W, que x, y, z, β et n. Cette valeur étant précisément la même qu'on aurait déduite de $W = 0$ seulement, en y supposant β

constant et $\eta = \varphi x$, excepté que η s'y trouve à la place de φx; si l'on s'en sert pour éliminer η de $W = 0$, on aura, comme dans ce cas, l'équation $\nu = \beta$, qui sera, par conséquent, satisfaite par l'intégrale

$$W = 0,$$
$$\left[\frac{dW}{d\beta(x}\right] = 0.$$

Mais il ne suffira pas, pour que la proposée le soit, que $\nu = \beta$; il faudra encore que les deux équations en

$$x,\ y,\ z,\ q,\ \frac{dy}{dx(\beta},\quad \frac{dz}{dx(\beta},\quad \frac{dq}{dx(\beta},$$

résultant de l'élimination de p entre les trois équations du système d'où l'on est parti, et qui ont conduit à $\nu = \beta$, aient lieu séparément. Si l'on en chasse q et $\frac{dq}{dx(\beta}$ au moyen de la valeur de q, que donne cette dernière équation, elles se réduiront à une seule, où il n'y aura que

$$x,\ y,\ z,\ \frac{dy}{dx(\beta},\quad \frac{dz}{dx(\beta},\quad \beta,\ \eta \text{ et } \frac{d\eta}{dx(\beta};$$

c'est cette équation qui doit déterminer η en fonction de x et de β. Il faudra pour cela y substituer à

$$y,\ z,\ \frac{dy}{dx(\beta} \text{ et } \frac{dz}{dx(\beta},$$

leurs valeurs tirées des deux équations

$$W = 0,$$
$$\left[\frac{dW}{d\beta(x}\right] = 0;$$

et de leurs dérivées du premier ordre, prises en ne faisant varier que x, puisque β ne varie pas dans

$$\frac{dy}{dx\,(\beta} \text{ et } \frac{dz}{dx\,(\beta};$$

mais il n'y a de quantités variables dans ces deux équations que

$$x,\ y,\ z,\ \beta,\ n \text{ et } \frac{dn}{d\beta\,(x},$$

leurs dérivées ne contiendront donc que ces mêmes quantités, et de plus,

$$\frac{dy}{dx\,(\beta},\quad \frac{dz}{dx\,(\beta},\quad \frac{dn}{dx\,(\beta} \text{ et } \frac{d^2 n}{dx\,d\beta};$$

d'où il suit qu'après l'élimination, la transformée ne contiendra plus que

$$x,\ \beta,\ n,\ \frac{dn}{dx\,(\beta},\quad \frac{dn}{d\beta\,(x} \text{ et } \frac{d^2 n}{dx\,d\beta},$$

et sera par conséquent de la forme

$$\frac{d^2 n}{dx\,d\beta} = f\left(x,\ \beta,\ n,\ \frac{dn}{dx\,(\beta};\ \frac{dn}{d\beta\,(x}\right),$$

ainsi que nous nous étions proposé de le démontrer.

Soit, par exemple, l'équation

$$zs + \frac{zt}{q^2} + pq = 0,$$

on aura

$$z\,\frac{dq}{dx\,(\beta} + pq = 0;$$

$$\frac{dy}{dx\,(\beta} - \frac{1}{q^2} = 0;$$

$$\frac{dz}{dx\,(\beta} - p - q\,\frac{dy}{dx\,(\beta} = 0:$$

les deux équations qu'on obtient en éliminant p seront donc

$$z\,\frac{dq}{dx\,(\beta}+q\,\frac{dz}{dx\,(\beta}-q^2\,\frac{dy}{dx\,(\beta}=0,$$

$$q^2\,\frac{dy}{dx\,(\beta}-1=0,$$

dont la somme est une différentielle exacte, et donne

$$zq-x=\beta,$$

d'où

$$q=\frac{x+\beta}{z},$$

$$\frac{dq}{dx\,(\beta}=\frac{1}{z}-\frac{x+\beta}{z^2}\,\frac{dz}{dx\,(\beta}.$$

Ces valeurs réduisent chacune des deux équations résultant de l'élimination de p, à celle-ci,

$$(x+\beta)^2\,\frac{dy}{dx\,(\beta}-z^2=0;$$

mais l'équation

$$zq=x+\beta,$$

a pour intégrale

$$\frac{z^2}{2}=(x+\beta)\,y-\varphi x,$$

celle de la proposée sera donc représentée par

$$\frac{z^2}{2}=(x+\beta)\,y-n,$$

$$y-\frac{dn}{d\beta\,(x}=0,$$

pourvu que n soit déterminé par l'équation

$$(x+\beta)^2\,\frac{dy}{dx\,(\beta}-z^2=0,$$

qui devient, en y remplaçant y, z et $\frac{dy}{dx\,(}$ par leurs valeurs tirées des deux précédentes,

$$(x + \beta)^2 \frac{d^2 n}{dx\,d\beta} - 2(x+\beta)\frac{dn}{d\beta(x} + 2n = 0,$$

ou

$$\frac{d^2 n}{dx\,d\beta} - \frac{2}{x+\beta}\,\frac{dn}{d\beta(x} + \frac{2n}{(x+\beta)^2} = 0.$$

Cette équation se trouve parmi celles que M. de Laplace a intégrées en intégrales définies ; on aura donc la valeur de n sous cette forme, et en la substituant dans

$$z = \sqrt{2(x+\beta)y - 2n},$$

$$y = \frac{dn}{d\beta(x},$$

l'intégrale de la proposée sous la même forme.

Reprenons maintenant le cas le plus général, et voyons comment on peut, par une seconde transformation, ramener l'intégration de l'équation donnée à celle d'une autre équation de la forme

$$s = f(x,\ y,\ z,\ p,\ q),$$

en supposant toujours qu'on a la valeur v de β déduite d'une combinaison intégrable fournie par le second système. Pour cela, on remarquera d'abord, en examinant les valeurs développées de

$$\left[\frac{d^2 V}{d\alpha\ d\gamma}\right] \text{ et de } \left[\frac{d^2 V}{d\gamma^2(\alpha}\right]$$

qui ont été données plus haut, qu'elles ne contiennent chacune qu'un seul terme où entrent des dérivées de n du second ordre, et que ces termes sont dans la première,

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)\frac{d^2 n}{d\alpha\ d\gamma},$$

et dans la seconde,

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)\frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha};$$

d'où il suit que l'équation

$$\left[\frac{d^2 V}{d\alpha\,d\gamma}\right]+\left[\frac{d^2 V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right]\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\beta}=0,$$

à laquelle nous avons ramené l'intégration de la proposée, ne contiendra aussi de dérivées du second ordre que dans les deux termes,

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)\frac{d^2 n}{d\alpha\,d\gamma}+\left(\frac{dV}{dn}\right)\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\beta}\,\frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha}.$$

Pour appliquer à cette équation la méthode d'intégration que nous venons de donner pour la formule

$$2K's+L't+M'=0,$$

dans laquelle elle rentre d'après cette observation, nous ferons

$$\frac{dn}{d\alpha\,(\gamma}=\pi,\quad \frac{dn}{d\gamma\,(\alpha}=\chi,\quad \frac{dn}{d\alpha^2\,(\gamma}=\rho,\quad \frac{d^2 n}{d\alpha\,d\gamma}=\sigma,$$

$$\frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha}=\tau;$$

et en substituant $\left(\frac{dV}{dn}\right)$ à $2K'$ et $\left(\frac{dV}{dn}\right)\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\beta}$ à L',

nous aurons, à la place des deux termes $2K's+L't$, ceux-ci:

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)\sigma+\left(\frac{dV}{dn}\right)\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\beta}\,\tau;$$

il faudra, à l'ordinaire, remplacer σ par

$$\frac{d\chi}{d\alpha\,(\epsilon}-\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\epsilon}\,\tau,$$

ϵ étant une nouvelle variable indépendante, et égaler séparément à zéro,

zéro, les termes où τ n'entre pas, et ceux qui multiplient τ, pour avoir les deux équations qui doivent donner l'intégrale de l'équation dont nous nous occupons, la seconde de ces deux équations sera donc

$$\left(\frac{dV}{d\nu}\right)\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\varepsilon} - \left(\frac{dV}{d\nu}\right)\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\beta} = 0\,;$$

ainsi

$$\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\varepsilon} = \frac{d\gamma}{d\alpha\,(\beta},$$

ou

$$\frac{\frac{d\varepsilon}{d\alpha\,(\gamma}}{\frac{d\varepsilon}{d\gamma\,(\alpha}} = \frac{\frac{d\beta}{d\alpha\,(\gamma}}{\frac{d\beta}{d\gamma\,(\alpha}},$$

condition qui exprime que ε est une fonction de β, comme il était aisé de le prévoir, en considérant que ce n'est que quand on prend une fonction de β pour une des variables indépendantes, que la dérivée partielle la plus élevée de la fonction principale, prise par rapport à cette variable, peut disparaître de l'équation qui résulte de cette transformation; on pourra donc prendre $\varepsilon = \beta$, et achever d'intégrer l'équation

$$\left[\frac{d^2 V}{d\alpha\, d\gamma}\right] + \left[\frac{d^2 V}{d\gamma^2\,(\alpha}\right]\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\beta} = 0,$$

à laquelle nous avons ramené la proposée, en suivant le procédé que nous venons d'appliquer à la formule

$$2K's + L't + M' = 0:$$

par ce moyen, et en faisant attention que x, y, z de cette formule sont remplacés ici par α, γ, ν et que $\varepsilon = \beta$, on aura, pour représenter l'intégrale cherchée, deux équations de la forme

$$W = 0,$$
$$\left[\frac{dW}{d\beta\,(\alpha}\right] = 0,$$

X

W contenant une nouvelle quantité que je nommerai θ, et qui aura été mise à la place de la fonction arbitraire $\psi\,\alpha$ dans l'intégrale de

$$\nu = \beta,$$

prise en regardant β comme une constante. Cette nouvelle quantité sera une fonction de α et de β déterminée par une équation du second ordre entre ces trois quantités, qui ne contiendra que le seul coefficient $\frac{d^2\,\theta}{d\,\alpha\,d\,\beta}$ de cet ordre, et qu'on pourrait calculer comme nous l'avons vu en traitant de la formule

$$2\,K' + L'\,t + M' = 0;$$

mais il sera inutile de faire ce calcul, parce qu'on trouvera directement cette même équation, ainsi que l'intégrale de

$$H\,r + 2\,K\,s + L\,t + M = 0,$$

sous la forme qui résulte des deux transformations opérées successivement, en s'y prenant comme il suit.

D'après la manière dont nous avons trouvé les deux équations

$$W = 0,$$

$$\left[\frac{d\,W}{d\,\beta\,(\alpha}\right] = 0,$$

pour représenter l'intégrale de

$$\left[\frac{d^2\,V}{d\,\alpha\,d\,\gamma}\right] + \left[\frac{d^2\,V}{d\,\gamma^2\,(\alpha}\right]\frac{d\,\gamma}{d\,\alpha\,(\beta} = 0,$$

la première ne contiendra que α, β, γ, η et θ; la seconde renfermera en outre $\frac{d\,\theta}{d\,\beta\,(\alpha}$, et l'on aura une valeur de la dérivée du premier ordre $\chi = \frac{d\,\eta}{d\,\gamma\,(\alpha}$, où il n'y aura que α, β, γ, η et θ qu'on ramenera à ne contenir que α, β, θ et $\frac{d\,\theta}{d\,\beta\,(\alpha}$, en y substituant les valeurs de γ et η, tirées des deux premières. Quant à l'autre dérivée du premier ordre $\pi = \frac{d\,n}{d\,\alpha\,(\gamma}$, on la ramenera de même à ne contenir que les mêmes quantités, et de plus $\frac{d\,\theta}{d\,\alpha\,(\beta}$. Par ce moyen, γ, n et $\frac{d\,n}{d\,\gamma\,(\alpha}$ seront exprimées en fonctions de α, β, θ et $\frac{d\,\theta}{d\,\beta\,(\alpha}$, tandis que $\frac{d\,n}{d\,\alpha\,(\gamma}$ le sera en fonctions de α, β, θ, $\frac{d\,\theta}{d\,\alpha\,(\beta}$ et $\frac{d\,\theta}{d\,\beta\,(\alpha}$; si l'on substitue ces expressions dans les trois équations de l'intégrale générale représentée par

$$V = 0,$$

$$\left[\frac{d\,V}{d\,\gamma\,(\alpha}\right] = 0,$$

$$\left[\frac{d\,V}{d\,\alpha\,(\gamma}\right] = 0,$$

on en aura trois autres que je désignerai par

$$U = 0,$$

$$U' = 0,$$

$$U'' = 0,$$

et qui exprimeront la même intégrale sous une nouvelle forme, pourvu qu'on détermine θ en fonctions de α et de β; de manière que la condition qui, sous la première forme de l'intégrale, était donnée par l'équation

$$\left[\frac{d^2\,V}{d\,\alpha\,d\,\beta}\right] + \left[\frac{d^2\,V}{d\,\gamma^2\,(\alpha}\right]\frac{d\,\gamma}{d\,\alpha\,(\beta} = 0,$$

soit toujours satisfaite.

Avant de voir comment cette condition doit être exprimée actuellement, et de démontrer qu'il en résulte, pour déterminer θ, une équation de la forme

$$\frac{d^2\,\theta}{d\,\alpha\,d\,\beta} = f\left(\alpha,\ \beta,\ \theta,\ \frac{d\,\theta}{d\,\alpha\,(\beta},\ \frac{d\,\theta}{d\,\beta\,(\alpha}\right),$$

il est nécessaire de remarquer qu'en vertu des deux équations

$$U' = 0, \quad U'' = 0,$$

les dérivées partielles de $U=0$ seront toutes deux nulles, parce que, d'après la manière dont celles-ci ont été formées, on aura

$$\left[\frac{dU}{d\beta(\alpha}\right] = U' \frac{d\gamma}{d\beta(\alpha},$$

et

$$\left[\frac{dU}{d\alpha(\beta}\right] = U'' + U' \frac{d\gamma}{d\alpha(\beta}.$$

Il semble, d'après cette observation, qu'on aurait pu se dispenser de calculer U' et U'', et se borner à faire la substitution dans U, pour joindre ensuite à $U=0$ les deux équations

$$\left[\frac{dU}{d\beta(\alpha}\right] = 0 \text{ et } \left[\frac{dU}{d\alpha(\beta}\right] = 0,$$

puisqu'elles semblent équivalentes à

$$U' = 0 \quad \text{et} \quad U'' = 0,$$

aux facteurs près,

$$\frac{d\gamma}{d\beta(\alpha} \text{ et } \frac{d\gamma}{d\alpha(\beta};$$

qu'on pourrait supprimer; mais ce procédé serait beaucoup trop compliqué, comme il est aisé de le voir, et il deviendrait nécessaire de démontrer que les dérivées

$$\frac{d^2 n}{d\beta^2(\alpha} \text{ et } \frac{d^2 n}{d\alpha\, d\beta},$$

qui se trouveraient dans

$$\left[\frac{dU}{d(\alpha}\right] \text{ et } \left[\frac{dU}{d\alpha(\beta}\right],$$

puisque U contient $\frac{dn}{d\beta(\alpha}$, n'entreraient, la première, que dans un facteur commun à tous les termes de $\left[\frac{d\,U}{d\,\beta\,(\,\alpha}\right]$, et la seconde que dans un facteur commun à tous ceux de $\left[\frac{d\,U}{d\,\alpha\,(\,\beta}\right]$, facteurs qui ne s'évanouissent pas en vertu de $\left[\frac{d\,U}{d\,\beta\,(\,\alpha}\right] = 0$, au lieu qu'en formant les trois équations

$$U = 0,$$
$$U' = 0;$$
$$U'' = 0,$$

par la substitution des valeurs de

$$\gamma,\ n\ \frac{d\,n}{d\,\gamma\,(\,\alpha};\ \frac{d\,n}{d\,\alpha\,(\,\gamma};$$

dans

$$V = 0,$$
$$\left[\frac{d\,V}{d\,\gamma\,(\,\alpha}\right] = 0,$$
$$\left[\frac{d\,V}{d\,\alpha\,(\,\gamma}\right] = 0;$$

on voit, d'après la forme de ces valeurs, que U et U' ne peuvent contenir que

$$\alpha,\ \beta,\ \theta,\ \frac{d\,\theta}{d\,\beta\,(\,\alpha},$$

et U'' que

$$\alpha,\ \beta,\ \theta,\ \frac{d\,\theta}{d\,\beta\,(\,\alpha},\ \frac{d\,\theta}{d\,\alpha\,(\,\beta};$$

Maintenant, pour exprimer la condition

$$\left[\frac{d^2\,V}{d\,\alpha\,d\,\gamma}\right] + \left[\frac{d^2\,V}{d\,\gamma^2\,(\,\alpha}\right]\frac{d\,\gamma}{d\,\alpha\,(\,\beta} = 0,$$

il faut faire attention que U' étant la valeur que prend $\left[\frac{d\,V}{d\,\gamma\,(\,\alpha}\right]$

par la substitution, on a précisément

$$\left[\frac{d\,U'}{d\,\alpha\,(\beta}\right] = \left[\frac{d^2\,V}{d\,\alpha\,d\,\gamma}\right] + \left[\frac{d^2\,V}{d\,\gamma^2\,(\alpha}\right]\frac{d\,\gamma}{d\,\alpha\,(\beta} = 0\,;$$

en sorte que la condition demandée est simplement représentée par l'équation

$$\left[\frac{d\,U'}{d\,\alpha\,(\beta}\right] = 0\,,$$

dont il faut éliminer x, y, z, au moyen des trois équations

$$U = 0\,,$$
$$U' = 0\,,$$
$$U'' = 0\,,$$

pour avoir, entre les trois variables α, β, θ, l'équation du second ordre par laquelle la valeur de θ doit être déterminée pour que ces trois équations expriment l'intégrale générale de la proposée. Cette équation ne contiendra que la seule dérivée du second ordre $\frac{d^2\,n}{d\,\alpha\,d\,\beta}$, puisqu'il a été démontré que U' n'en contient qu'une du premier, qui est $\frac{d\,n}{d\,\beta\,(\alpha}$.

Les calculs précédens sont nécessaires à la démonstration de la méthode que je viens d'exposer; mais l'emploi de cette méthode n'exige, comme l'on voit, qu'un petit nombre d'opérations indispensables : elle peut être encore abrégée, en remarquant qu'au lieu d'opérer sur l'équation entre α, γ, n, renfermant

$$\alpha,\ \gamma,\ n,\ \frac{d\,n}{d\,\alpha\,(\gamma},\ \frac{d\,n}{d\,\gamma\,(\alpha},\ \frac{d^2\,n}{d\,\alpha\,d\,\gamma},\ \frac{d^2\,n}{d\,\gamma^2\,(\alpha},$$

qui résulte de la première transformation, pour en tirer l'intégrale particulière du premier ordre avec une constante arbitraire β, intégrale que nous avons représentée par $v = \beta$, il suffira, pour l'obtenir, de chasser x, y, z, p, q de la valeur de β, déduite de la combinaison intégrale du second système de l'équation donnée, si cette dernière valeur a été calculée. Dans ce cas, ce procédé est préférable à tout autre, parce qu'il donne sur-le-champ la valeur de n, et qu'il devient par conséquent inutile de calculer la quatrième équation de l'intégrale. Mais il est souvent plus difficile de reconnaître que le second système déduit de l'équation donnée peut fournir une combinaison intégrale, que de s'apercevoir, après la première transformation, qu'on en peut former une avec le système déduit de l'équation du second ordre en n, et il vaut mieux alors faire les opérations dans l'ordre où elles viennent d'être indiquées, en calculant la première transformée, sans s'attacher à reconnaître si les deux systèmes qu'on tire de la proposée peuvent fournir chacun une combinaison intégrale, ou s'il n'y en a qu'un seul, on examine ensuite la première transformée pour voir si elle en peut donner une. Il est bon d'observer aussi que si la première transformée était linéaire, on pourrait en faire évanouir la dérivée extrême $\frac{d^2 n}{d\gamma^2 (\alpha}$, sans changer la fonction n en une nouvelle fonction θ, comme il résulte de la théorie connue de ces équations; alors le calcul deviendrait beaucoup plus simple, parce que l'équation

$$2 K' \frac{d\gamma}{d\alpha (\beta} - L' = 0,$$

qui ferait partie du système fourni par la première transformée, ne contenant que les deux variables α et γ, s'intégrerait immédiatement et donnerait

$$f(\alpha, \gamma) = \beta;$$

il suffirait alors de substituer à γ, dans l'équation $V = 0$, sa valeur tirée de

$$f(\alpha, \gamma) = \beta,$$

pour avoir $U = 0$; et comme cette équation ne contiendrait plus alors que x, y, z, α, β et la fonction n de α et de β, sans qu'il s'y trouvât une dérivée du premier ordre de n, on aurait, pour représenter l'intégrale générale, les trois équations

$$U = 0,$$

$$\left[\frac{dU}{d\alpha\,(\beta}\right] = 0,$$

$$\left[\frac{dU}{d\beta\,(\alpha}\right] = 0,$$

auxquelles il faudra joindre

$$\left[\frac{d^2 U}{d\alpha\, d\beta}\right] = 0,$$

et en éliminer x, y, z, au moyen des trois autres, pour avoir l'équation du second ordre de la forme

$$\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\beta} = f\left(\alpha, \beta, n, \frac{dn}{dx\,(\beta}, \frac{dn}{d\beta\,(\alpha}\right),$$

qui doit déterminer n.

Si l'on avait trouvé dans chacun des deux systèmes déduits de la proposée une combinaison intégrable, on reconnaîtrait ce cas, que nous verrons bientôt être celui où tombe l'équation du son, quand les vibrations de l'air ont une grandeur finie, lorsqu'on substituerait à x, y, z, p et q, dans $v = \beta$, leurs valeurs tirées de l'intégrale de l'autre équation $u = \alpha$, prise en regardant α comme une constante : car, puisqu'il doit en résulter une équation entre α, β et γ seulement, il faudrait que n et celles de ses dérivées qui sont contenues dans x, y, z, disparussent d'eux-mêmes de l'équation $v = \beta$, pour qu'il ne restât que

$$f(\alpha, \gamma), = \beta.$$

Éclaircissons les diverses circonstances que présente l'usage de cette méthode, en l'appliquant à quelques exemples.

Nous avons vu que les deux systèmes déduits de l'équation

$$r + 2qs + (q^2 - x^2)\,t - q = 0,$$

fournissaient chacun une combinaison intégrable d'où résultaient les deux

deux équations

$$p + \frac{q^2}{2} - xq + \alpha = 0,$$

$$p + \frac{q^2}{2} + xq - 2y - x^2 + \beta = 0,$$

et qu'en représentant son intégrale par ce système

$$z = \gamma y + \frac{\gamma x^2 - \gamma^2 x}{2} - \alpha x + n,$$

$$y + \frac{x^2}{2} - \gamma x + \frac{dn}{d\gamma\,(\alpha} = 0,$$

$$x - \frac{dn}{d\alpha\,(\gamma} = 0,$$

trouvé en intégrant la première comme si α était une constante, et en le faisant ensuite varier, il fallait que n fût déterminé par l'équation

$$2\frac{dn}{d\alpha\,(\gamma}\frac{d^2n}{d\alpha\,d\gamma} + \frac{d^2n}{d\gamma^2\,(\alpha} - \frac{dn}{d\alpha\,(\gamma} = 0,$$

ou

$$2\pi\sigma + \tau - \pi = 0.$$

Comme on a ici

$$K' = \pi, \quad L' = 1, \quad M' = -\pi,$$

on obtiendra ce système de trois équations

$$2\pi\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\beta} - 1 = 0,$$

$$2\pi\frac{d\chi}{d\alpha\,(\beta} - \pi = 0,$$

$$\frac{dn}{d\alpha\,(\beta} - \pi - \chi\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\beta} = 0,$$

dont la seconde devient une différentielle exacte en la divisant par π, et donne

$$2\chi - \alpha + \beta = 0,$$

$$\frac{d\,n}{d\,\gamma\,(\alpha} = \chi = \frac{\alpha - \beta}{2} \text{*},$$

$$n = \frac{\alpha - \beta}{2}\gamma + \phi\,\alpha,$$

en sorte que l'intégrale de

$$2\frac{d\,n}{d\,\alpha\,(\gamma}\,\frac{d^2\,n}{d\,\alpha\,d\,\gamma} + \frac{d^2\,n}{d\,\gamma^2\,(\alpha} - \frac{d\,n}{d\,\alpha\,(\gamma} = 0,$$

pourra être représentée par

$$n = \frac{\alpha - \beta}{2}\gamma + \theta,$$

$$\frac{\gamma}{2} - \frac{d\,\theta}{d\,\beta\,(\alpha} = 0,$$

en y déterminant θ convenablement. On tire de cette intégrale

$$\gamma = 2\frac{d\,\theta}{d\,\beta\,(\alpha},$$

et

---

* On peut obtenir dans cet exemple la même valeur de $\frac{d\,n}{d\,\gamma\,(\alpha}$, en la déduisant de l'équation

$$p + \frac{q^2}{2} + x\,q - 2\,y - x^2 + \beta = 0;$$

il faut pour cela y remplacer d'abord p et q par leurs valeurs tirées de l'intégrale, ce qui donne, comme nous l'avons vu,

$$2\,\gamma\,x - \alpha - 2\,y - x^2 + \beta = 0,$$

et y mettre ensuite à la place de y sa valeur

$$\gamma\,x - \frac{x^2}{2} - \frac{d\,n}{d\,\gamma\,(\alpha};$$

alors comme x s'en va de lui-même, on n'a pas besoin de l'élimination, et on trouve immédiatement

$$2\frac{d\,n}{d\,\gamma\,(\alpha} - \alpha + \beta = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d\,n}{d\,\gamma\,(\alpha} = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\frac{dn}{d\alpha\,(} = \frac{\gamma}{2} + \frac{d\theta}{d\alpha\,(\beta},$$

parce que les termes en $\frac{d\beta}{d\alpha\,(\gamma}$ qui devraient entrer dans cette valeur, s'évanouissent en vertu de la seconde équation. On a de plus, en éliminant γ,

$$n = (\alpha - \beta)\frac{d\theta}{d\beta\,(\alpha} + \theta;$$

$$\frac{dn}{d\alpha\,(\gamma} = \frac{d\theta}{d\alpha\,(\beta} + \frac{d\theta}{d\beta\,(\alpha};$$

substituant ces deux valeurs, ainsi que celles de γ et de $\frac{dn}{d\gamma\,(\alpha}$, pour lesquelles nous avons trouvé

$$2\frac{d\theta}{d\beta\,(\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha - \beta}{2},$$

dans les trois équations qui représentent l'intégrale, il vient

$$z = (2y + x^2 + \alpha - \beta)\frac{d\theta}{d\beta\,(\alpha} - 2x\left(\frac{d\theta}{d\beta\,(\alpha}\right)^2 - \alpha x + \theta,$$

$$2y + x^2 - 4x\frac{d\theta}{d\beta\,(\alpha} + \alpha - \beta = 0,$$

$$x - \frac{d\theta}{d\alpha\,(\beta} - \frac{d\theta}{d\beta\,(\alpha} = 0.$$

Ces trois équations expriment l'intégrale générale de

$$r + 2qs + (q^2 - x^2) - q = 0,$$

sous une forme telle que la fonction θ dépend d'une équation du second ordre, renfermant une seule dérivée de cet ordre, équation qu'on obtient en égalant à zéro la différentielle partielle par rapport à α de la seconde équation de cette intégrale; on a ainsi

$$4x\frac{d^2\theta}{d\alpha\, d\beta} - 1 = 0,$$

et en éliminant x, puisqu'il ne reste dans cette équation ni y ni z,

$$4\left(\frac{d\theta}{d\alpha\,(\beta}+\frac{d\theta}{d\beta\,(\alpha}\right)\frac{d^2\theta}{d\alpha\,d\beta}-1=0.$$

Telle est l'équation à l'intégration de laquelle celle de la proposée est ramenée, et qui n'est autre que

$$s=\frac{1}{4\,(p+q)};$$

des recherches sur la manière de l'intégrer m'éloigneraient de l'objet de ce Mémoire; je compte m'en occuper ailleurs, et je me bornerai, quant à présent, à montrer comment on la peut vérifier.

Il est aisé de voir d'abord que la dérivée partielle de la première, par rapport à β, contient $\frac{d^2\theta}{d\beta^2\,(\alpha}$ dans tous ses termes, et qu'elle est égale à la seconde multipliée par ce facteur; sa dérivée partielle relative à α se compose de cette seconde équation multipliée par $\frac{d^2\theta}{d\alpha\,d\beta}$, ajoutée à la troisième prise avec des signes contraires : ces deux dérivées partielles s'évanouissent donc; et en différenciant la valeur de z alternativement par rapport à x et y, on a

$$p=2x\frac{d\theta}{d\beta\,(\alpha}-2\left(\frac{d\theta}{d\quad(\alpha}\right)^2-\alpha,$$

$$q=2\frac{d\theta}{d\beta\,(\alpha};$$

ces valeurs satisfont évidemment à

$$p+\frac{q^2}{2}-xq+\alpha=0\,^*.$$

---

* On voit aussi qu'en ôtant de cette équation

$$2y+x^2-2xq+\alpha-\beta=0,$$

qu'on trouve en remplaçant $\frac{d\theta}{d\beta\,(\alpha}$ par $\frac{q}{2}$ dans la seconde, on trouve l'autre équation

$$p+\frac{q^2}{2}+xq-2y-x^2+\beta=0.$$

On a ensuite en vertu de la seconde

$$y = 2x \frac{d\theta}{d\beta(\alpha} - \frac{x^2}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2},$$

et par conséquent,

$$\frac{dy}{dx(\alpha} = 2\frac{d\theta}{d\beta(\alpha} - x + \left(2x\frac{d^2\theta}{d\beta^2(\alpha} + \frac{1}{2}\right)\frac{d\beta}{dx(\alpha} = q - x$$
$$+ \frac{1}{2}\left(4x\frac{d^2\theta}{d\beta^2(\alpha} + 1\right)\frac{d\beta}{dx(\alpha};$$

mais l'équation

$$x = \frac{d\theta}{d\beta(\alpha} + \frac{d\theta}{d\alpha(\beta};$$

donne

$$\frac{dx}{d\beta(\alpha} = \frac{d^2\theta}{d\beta^2(\alpha} + \frac{d^2\theta}{d\alpha\,d\beta};$$

ou

$$\frac{d\beta}{dx(\alpha} = \frac{1}{\frac{d^2\theta}{d\beta^2(\alpha} + \frac{d^2\theta}{d\alpha\,d\beta}};$$

et comme

$$\frac{d^2\theta}{d\alpha\,d\beta} = \frac{1}{4\left(\frac{d\theta}{d\beta(\alpha} + \frac{d\theta}{d\alpha(\beta}\right)} = \frac{1}{4x};$$

on a

$$\frac{d\beta}{dx(\alpha} = \frac{4x}{4x\frac{d^2\theta}{d\beta^2(\alpha} + 1};$$

valeur qui réduit celle de $\frac{dy}{dx(\alpha}$ à

$$\frac{dy}{dx(\alpha} = q + x:$$

cette valeur est celle de

$$-\frac{\frac{d\alpha}{dx(y}}{\frac{d\alpha}{dy(x}};$$

et l'équation

$$p+\frac{q^2}{2}-xq+\alpha=0,$$

que nous venons de trouver, donne, en la combinant avec cette valeur,

$$\frac{r+(q-x)s-q}{s+(q-x)t}=\frac{\frac{d\alpha}{dx(y}}{\frac{d\alpha}{dy(x}}=-q-x,$$

d'où l'on tire immédiatement l'équation proposée

$$r+2qs+(q^2-x^2)t-q=0.$$

Soit maintenant l'équation

$$x^4r-4x^2qs+3q^2t+2x^3p=0,$$

on aura

$H=x^4$, $K=-2x^2q$, $L=3q^2$, $M=2x^3p$, et $\sqrt{G}=-xq$*;

ainsi les deux premières équations du premier système seront

$$x^2\frac{dy}{dx(\alpha}+3q=0,$$

$$x^2\frac{dp}{dx(\alpha}-q\frac{dq}{dx(\alpha}+2px=0.$$

Cette dernière équation est intégrable, et donne

$$x^2p-\frac{q^2}{2}=\alpha.$$

* En prenant $G=x^2q$, qui ne ferait que changer les deux systèmes l'un contre l'autre, et le calcul resterait le même en opérant sur le second, comme je vais le faire sur le premier.

En traitant celle-ci comme une équation du premier ordre, où α est une constante, on trouve pour son intégrale

$$z = \gamma y - \frac{2\alpha + \gamma^2}{2x} + \phi\gamma,$$

$$y - \frac{\gamma}{x} + \phi'\gamma = 0,$$

d'où il suit que celle de la proposée est représentée par les trois équations

$$z = \gamma y - \frac{2\alpha + \gamma^2}{2x} + n,$$

$$y - \frac{\gamma}{x} + \frac{dn}{d\gamma\,(\alpha} = 0,$$

$$-\frac{1}{x} + \frac{dn}{d\alpha\,(\gamma} = 0,$$

pourvu que la valeur de n soit déterminée par l'équation

$$\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\gamma} + \left(\frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha} - \frac{1}{x}\right)\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\beta} = 0,$$

il serait facile de trouver la valeur de $\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\beta}$ pour la mettre dans cette équation ; on obtiendrait

$$2\gamma\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\gamma} + \frac{d^2 n}{d\gamma^2\,(\alpha} - \frac{dn}{d\alpha\,(\gamma} = 0;$$

mais comme cette équation est linéaire, il n'est pas même nécessaire de la calculer; elle ne pourrait servir qu'à donner la valeur de γ en α et β, qu'on trouvera plus simplement ainsi : en changeant le signe que nous avons donné à $\sqrt{G}$ dans le premier système, nous aurons pour le second,

$$x^2\frac{dy}{dx\,(\beta} + q = 0,$$

$$x^2\frac{dp}{dx\,(\beta} - 3q\frac{dq}{dx\,(\beta} + 2px = 0.$$

Il est inutile d'y comprendre

$$\frac{dz}{dx\,(\beta} - p - q\,\frac{dy}{dx\,(\beta},$$

parce que z n'entre pas dans ces équations; on voit d'ailleurs que la seconde est une différentielle exacte, et donne

$$p\,x^2 - \frac{3\,q^2}{2} + \beta = 0;$$

mais on tire des trois équations dont se compose l'intégrale

$$p = \frac{2\,\alpha + \gamma^2}{2\,x^2}, \quad q = \gamma,$$

et par conséquent,

$$\alpha - \gamma^2 + \beta = 0,$$

ou

$$\gamma = \sqrt{\alpha + \beta};$$

on aura ainsi les trois équations

$$z = y\sqrt{\alpha + \beta} - \frac{3\,\alpha + \beta}{2\,x} + n,$$

$$\frac{y}{2\sqrt{\alpha + \beta}} - \frac{3}{2\,x} + \frac{dn}{d\alpha\,(\beta} = 0,$$

$$\frac{y}{2\sqrt{\alpha + \beta}} - \frac{1}{2\,x} + \frac{dn}{d\beta\,(\alpha} = 0,$$

pourvu que n soit déterminé par l'équation

$$-\frac{y}{4\,(\alpha + \beta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{d^2 n}{d\alpha\,d\beta} = 0,$$

après qu'on a éliminé y au moyen des trois autres, les deux dernières donnent

$$\frac{y}{\sqrt{\alpha + \beta}} + 3\,\frac{dn}{d\beta\,(\alpha} - \frac{dn}{d\alpha\,(\beta} = 0,$$

et

et l'on trouve, en chassant y,

$$4\,(\alpha+\beta)\,\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\beta}+3\,\frac{dn}{d\beta\,(\alpha}-\frac{dn}{d\alpha\,(\beta}=0,$$

qui appartient encore à l'une des classes d'équation dont M. de Laplace a trouvé l'intégrale générale en intégrales définies ; on aura donc sous cette forme la valeur de n; et en la substituant dans les trois équations que nous venons d'obtenir, et qu'on peut écrire ainsi :

$$z=y\,\sqrt{\alpha+\beta}-\frac{3\,\alpha+\beta}{2\,x}+n,$$

$$\frac{y}{\sqrt{\alpha+\beta}}+3\,\frac{dn}{d\beta\,(\alpha}-\frac{dn}{d\alpha\,(\beta}=0,$$

$$\frac{1}{x}+\frac{dn}{d\beta\,(\alpha}-\frac{dn}{d\alpha\,(\beta}=0,$$

on aura l'intégrale complète de la proposée.

Je prendrai pour dernier exemple l'équation

$$r+2qs+(q^2-b^2)\,t=0;$$

dont dépend le mouvement d'un fluide élastique, lorsqu'on fait entrer dans le calcul la grandeur de ses vibrations. On trouve pour cette équation deux systèmes qui présentent chacun une combinaison intégrable; en intégrant ces deux combinaisons, et écrivant, pour éviter les fractions, $2b\alpha$ et $2b\beta$ au lieu de α et β, on a

$$p+\frac{q^2}{2}-bq=2b\alpha,$$

et

$$p+\frac{q^2}{2}+bq=2b\beta:$$

la première a pour intégrale, en y regardant α comme constant,

$$z = \gamma y + \left(2b\alpha + b\gamma - \frac{\gamma^2}{2}\right)x + \phi\gamma,$$

$$y + (b - \gamma)x + \phi'\gamma = 0,$$

intégrale que M. Poisson a indiquée le premier dans un Mémoire où il intègre de la même manière une classe très-étendue d'équations aux différentielles partielles. (Voy. la *Correspondance sur l'École polytechnique*, tom. II, pag. 410). Celle de la proposée peut donc être représentée par le système des trois équations

$$z = \gamma y + \left(2b\alpha + b\gamma - \frac{\gamma^2}{2}\right)x + \pi,$$

$$y + (b - \gamma)x + \frac{d\pi}{d\gamma\,(\alpha} = 0$$

$$2bx + \frac{d\pi}{d\alpha\,(\gamma} = 0,$$

en déterminant convenablement π, qui serait alors donné par une équation du second ordre entre α, γ, π, contenant deux dérivées de cet ordre : mais il ne sera pas nécessaire de la calculer, parce que les trois équations que nous venons d'obtenir donnent

$$p = 2b\alpha + b\gamma - \frac{\gamma^2}{2}, \quad q = \gamma,$$

et qu'en mettant ces valeurs dans l'équation en β, on a une équation qui ne renferme que α, β, γ, savoir :

$$2b\alpha + 2b\gamma = 2b\beta,$$

ou

$$\gamma = \beta - \alpha;$$

d'où il suit que l'équation du second ordre d'où l'on aurait pu tirer la valeur de t, aurait été linéaire; et d'après ce que nous avons dit de ce cas où la méthode générale se simplifie beaucoup, il suffit d'éliminer γ de la valeur de z, et de joindre à l'équation qui en résulte ses dérivées partielles relatives à α et à β, et sa seconde dérivée partielle, prise une fois par rapport à α et une fois par rapport à β, pour avoir les quatre équations

$$z = (\beta - \alpha) y + \left[b(\beta + \alpha) - \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} \right] x + n,$$

$$y + (b - \beta + \alpha) x + \frac{dn}{d\beta(\alpha} = 0,$$

$$- y + (b + \beta - \alpha) x + \frac{dn}{d\alpha(\beta} = 0,$$

$$x + \frac{d^2 n}{d\alpha\, d\beta} = 0,$$

dont les trois premières exprimeront l'intégrale de

$$r + 2qs + (q^2 - b^2) t = 0,$$

pourvu que n soit déterminée par l'équation linéaire à coefficiens constans,

$$2b \frac{d^2 n}{d\alpha\, d\beta} - \frac{dn}{d\alpha(\beta} - \frac{dn}{d\beta(\alpha} = 0,$$

dont on connaît l'équation primitive générale en intégrales définies.

Après avoir calculé cette valeur de n, il n'y aura plus qu'à la substituer dans les trois équations dont se compose l'intégrale, et qu'on peut, si l'on veut, écrire ainsi :

$$z = (\beta - \alpha) y + \left[b(\beta + \alpha) - \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} \right] x + n,$$

$$y = (\beta - \alpha) x - \frac{1}{2} \left(\frac{dn}{d\beta(\alpha} - \frac{dn}{d\alpha(\beta} \right),$$

$$x = -\frac{1}{2b} \left(\frac{dn}{d\beta(\alpha} + \frac{dn}{d\alpha(\beta} \right).$$

J'ai supposé, dans les calculs précédens, que l'intégrale de l'équation du premier ordre entre x, y, z, p, q, α, où α est considéré comme une constante, s'obtenait par un système de deux équations entre cette constante et les quatre variables x, y, z, γ, et qui fût tel, qu'une des équations de ce système fût la dérivée partielle de l'autre par rapport à γ. C'est, en effet, ce qui a lieu en général; mais il pourrait arriver que p et q n'entrassent qu'à la première puissance dans l'équation entre x, y, z, p, q, α, ou qu'elle fût décomposable en facteurs qui présentassent cette circontance. Son intégrale ne serait plus alors représentée de la même manière.

Pour y appliquer la même transformation, il faudra d'abord remarquer que cette équation, ou ses différens facteurs, serait, dans ce cas, de la forme

$$Pp + Qq + R = 0,$$

où P, Q, R ne contiendraient que x, y, z et α; son intégrale s'obtiendrait alors par l'intégration simultanée de deux équations du premier ordre, représentées, d'après la notation dont j'ai déjà fait usage, par

$$P\frac{dz}{dx(\alpha,\gamma} + R = 0,$$

et

$$P\frac{dy}{dx(\alpha,\gamma} - Q = 0.$$

Ces deux équations réunies à

$$\frac{dz}{dx(\alpha,\gamma} - p - q\frac{dy}{dx(\alpha,\gamma} = 0,$$

exprimeront, ainsi qu'il a été dit précédemment, les mêmes relations que le second système déduit de la proposée, avec cette seule différence que les dénominateurs des termes des équations dont se compose ce second système, contiennent $dx(\beta$ au lieu de $dx(\alpha,\gamma$. Il s'ensuit que si l'on élimine α qui n'entre point dans le second système en combinant les deux équations

$$P\frac{dz}{dx(\alpha,\gamma} + R = 0,$$

$$P\frac{dy}{dx(\alpha,\gamma} - Q = 0,$$

on en aura une qu'on tirerait également de ces deux-ci :

$$H \frac{dy}{dx\,(\beta} - K + \sqrt{G} = 0,$$

et

$$\frac{dz}{dx\,(\beta} - p - q \frac{dy}{dx\,(\beta} = 0;$$

puisque la troisième équation de ce système

$$H \frac{dp}{dx\,(\beta} + (K + \sqrt{G}) \frac{dq}{dx\,(\beta} + M = 0,$$

contenant

$$\frac{dp}{dx\,(\beta} \text{ et } \frac{dq}{dx\,(},$$

ne peut concourir à la formation d'une équation où ces dérivées n'entrent pas. On voit par-là que, dans le cas où l'intégrale particulière du premier ordre, tirée d'un des systèmes, ne contient p et q qu'à la première puissance, on peut toujours former avec les équations de l'autre système une combinaison qui ne renferme que x, y, z et leurs dérivées mutuelles. Si l'on voulait la déduire de ce second système, on ne pourrait le faire que par une sorte de tâtonnement ; mais on la trouvera sur-le-champ, en éliminant α entre

$$P \frac{dz}{dx\,(\alpha, \gamma} + R = 0,$$

$$P \frac{dy}{dx\,(\alpha, \gamma} - Q = 0.$$

Après l'avoir ainsi obtenue, on n'aura qu'à y appliquer les règles connues, pour savoir si elle peut avoir une intégrale exprimée par une seule équation entre x, y, z et une constante arbitraire, et en trouver dans ce cas l'intégrale ; alors γ sera nécessairement une fonction de β seul, ou plutôt on pourra prendre $\beta = \gamma$: car ces deux quantités pourraient être mises indifféremment à la place de la constante arbitraire dont nous venons de parler, puisque l'équation différentielle qui a conduit à l'intégrale où elle se trouve avait également lieu entre

$$x,\ y,\ z,\ \frac{dy}{dx\,(\alpha,\gamma},\quad \frac{dz}{dx\,(\alpha,\gamma},$$

et entre

$$x,\ y,\ z,\ \frac{dy}{dx\,(\beta},\quad \frac{dz}{dx\,(\beta},$$

et qu'on en a fait disparaître α dans le premier cas.

Cette équation différentielle étant intégrable et résultant du second système, on doit pouvoir ramener l'intégration de la proposée à celle d'une équation du second ordre de la forme

$$s = f(x,\ y,\ z,\ p,\ q),$$

comme dans tous les autres cas où le second système fournit une combinaison intégrable. Cependant la méthode que je viens de donner pour atteindre ce but ne peut plus être employée, puisqu'elle suppose qu'on a préalablement ramené l'intégration proposée à celle d'une équation de la forme

$$s + tF(x, y, z, p, q) = f(x, y, z, p, q),$$

par le second procédé, c'est-à-dire, en substituant à la place de p et de q leurs valeurs dans $v = \beta$, pour obtenir l'équation $W = \beta$, et en tirer ensuite

$$\frac{d\gamma}{d\alpha\,(\beta} = -\frac{\left[\frac{dW}{d\alpha\,(\gamma}\right]}{\left[\frac{dW}{d\gamma\,(\alpha}\right]},$$

tandis que v ne contient alors ni p ni q, qu'il est par conséquent identique à W, et que α et γ ne peuvent être introduits dans cette quantité W par une substitution qui ne saurait plus avoir lieu.

Voici le procédé qu'il faut suivre dans le cas où cette exception se rencontre : puisqu'on peut continuer de prendre alors $v = \beta$, on aura les deux équations

$$P\frac{dz}{dx\,(\beta}+R=0,$$

$$P\frac{dy}{dx\,(\beta}-Q=0,$$

qu'on pourra traiter comme si elles étaient aux différentielles ordinaires; on en tirera ainsi deux équations primitives, dont l'une ne contiendra que x, y, z, β, puisqu'on suppose intégrable l'équation différentielle qui résulte de l'élimination de α, et l'autre contiendra x, y, z, α, β, $\phi\beta$; et on écrira dans cette dernière ν au lieu de $\phi\beta$, parce que cette quantité doit se changer, comme nous l'avons vu, en une fonction de α et de β, lorsqu'on fera varier α pour généraliser l'intégrale.

Représentons par $V=0$ ce que devient la dernière après qu'on en a éliminé β au moyen de l'autre; en sorte que ces deux équations soient

$$\nu=\beta,$$

$$V=0,$$

où β n'entre que dans le terme où il est écrit; elles satisferont nécessairement, comme on l'a vu, au second système, lorsqu'on considérera α et ν comme des constantes, et par conséquent aussi quand on fera varier ces deux quantités de manière,

1.° Que les valeurs de p et de q soient toujours les mêmes;

2.° Que les termes provenant de la variabilité de α et de ν dans leurs dérivées disparaissent d'eux-mêmes.

On remplira la première condition en joignant aux deux précédentes celle-ci :

$$\left[\frac{dV}{d\alpha}\right]=0.$$

Le système de ces trois équations représentera donc l'intégrale cherchée, pourvu que la valeur de n en fonctions de α et β soit déterminée de manière à satisfaire à la seconde. Reste à trouver l'équation du second ordre qui donne cette valeur, et à démontrer qu'elle ne contient que

$$\alpha,\ \beta,\ n,\ \frac{dn}{d\alpha(\beta},\quad \frac{dn}{d\beta(\alpha}\ \text{et}\ \frac{d^2 n}{d\alpha\, d\beta}.$$

Or, les valeurs de

$$\frac{dy}{dx(\beta}\ \text{et de}\ \frac{dz}{dx(\beta},$$

tirées de ces trois équations, étant évidemment les mêmes, soit que α et n soient variables ou constans, puisque ces quantités n'entrent pas dans $v=\beta$, deux des trois équations du second système, qui ne contiennent que ces dérivées, seront encore satisfaites; mais la troisième

$$H\,\frac{dp}{dx(\beta} + (K+\sqrt{G})\,\frac{dq}{dx(\beta} + M = 0,$$

ne pourra l'être qu'en vertu de la condition qui doit déterminer n.

Pour l'exprimer, on multipliera d'abord cette équation par $\frac{dx}{d\alpha(\beta}$, ce qui la changera en

$$H\,\frac{dp}{d\alpha(\beta} + (K+\sqrt{G})\,\frac{dq}{d\alpha(\beta} + M\,\frac{dx}{d\alpha(\beta} = 0;$$

on remarquera ensuite que les valeurs de p et de q, tirées de l'équation $V=0$, en la différenciant alternativement par rapport à x et par rapport à y, et en omettant dans ses différentielles les termes que

$$\left[\frac{dV}{d\alpha}\right] = 0$$

fait évanouir, ne pourront contenir que

$$x,\ y,\ z,\ \alpha,\ n\ \text{et}\ \frac{dn}{d\beta(\alpha};$$

cette

cette dernière quantité se trouvant multipliée dans l'une de ces différentielles par $\frac{d\beta}{dx(y}$ et dans l'autre par $\frac{d\beta}{dy(x}$, qu'on remplacera par leurs valeurs déduites de l'autre équation $v=\beta$.

Les valeurs de

$$\frac{dp}{d\alpha(\beta} \text{ et de } \frac{dq}{d\alpha(\beta},$$

qu'on trouvera en différenciant celles de p et de q, renfermeront donc $\frac{d^2 n}{d\alpha\, d\beta}$; mais il ne s'y trouvera que cette seule dérivée du second ordre de la fonction n; en les mettant, ainsi que celles de p et de q, dans

$$H\frac{dp}{d\alpha(\beta} + (K + \sqrt{G})\frac{dq}{d\alpha(\beta} + M\frac{dx}{d\alpha(\beta} = 0,$$

qui eût été identique si on avait considéré α, n et $\frac{dn}{d\beta(\alpha}$ comme des constantes, on aura

$$H\left[\frac{dp}{d\alpha(\beta}\right] + (K + \sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\alpha(\beta}\right] = 0,$$

en supprimant les autres termes, puisqu'ils se détruisent mutuellement; et il ne s'agira plus que d'y remplacer x, y, z, par leurs valeurs tirées des trois équations dont se compose l'intégrale, pour avoir l'équation cherchée entre

$$\alpha,\ \beta,\ n,\ \frac{dn}{d\alpha(\beta},\ \frac{dn}{d\beta(\alpha} \text{ et } \frac{d^2 n}{d\alpha\, d\beta}.$$

Soit, par exemple :

$$xr + (p + x)s + pt - x = 0,$$

on aura

$$H = x,\ K = \frac{p+x}{2},\ L = p,\ M = -x,\ \sqrt{G} = \frac{p-x}{2},$$

et les deux systèmes seront

$$x\frac{dy}{dx(\alpha}-p=0, \qquad \frac{dy}{dx(\beta}-1=0;$$

$$\frac{dp}{dx(\alpha}+\frac{dq}{dx(\alpha}=1=0, \qquad x\frac{dp}{dx(\beta}+p\frac{dq}{dx(\beta}-x=0,$$

$$\frac{dz}{dx(\alpha}-p-q\frac{dy}{dx(\alpha}=0, \qquad \frac{dz}{dx(\beta}-p-q\frac{dy}{dx(\beta}=0.$$

Le premier donne d'abord

$$p+q-x+\alpha=0,$$

équation linéaire du premier ordre, dont l'intégration, à cause de

$$P=1,\ Q=1,\ R=-x+\alpha,$$

dépend de celle de

$$\frac{dz}{dx(\alpha,\gamma}=x-\alpha,$$

et de

$$\frac{dy}{dx(\alpha,\gamma}-1=0.$$

Cette dernière s'intègre immédiatement ; et comme elle ne contient point α, elle doit résulter du second système en y faisant $\gamma=\beta$; c'est ce qui arrive en effet, puisque cette supposition la rend identique à la première équation de ce système : on écrira donc $dx(\beta$ au lieu de $dx(\gamma,\alpha$ dans les deux précédentes, et on en tirera pour l'intégrale de

$$p+q-x+\alpha=0,$$

quand α est constant,

$$y=x+\beta,$$

$$z=\frac{x^2}{2}-\alpha x+\phi\beta;$$

celle de la proposée sera donc représentée par le système des trois équations

$$y = x + \beta,$$

$$z = \frac{x^2}{2} - \alpha x + \eta,$$

$$x - \frac{d\eta}{d\alpha\,(\beta} = 0.$$

Reste à calculer l'équation qui doit terminer η. Pour cela, on prendra la valeur de p et de q pour en conclure celle de

$$\left[\frac{dp}{d\alpha\,(\beta}\right] \text{ et de } \left[\frac{dq}{d\alpha\,(\beta}\right];$$

on trouvera, à cause que la troisième équation fait disparaître les termes de la valeur de p et de q dépendans de la variabilité de α,

$$p = x - \alpha + \frac{d\eta}{d\beta\,(\alpha}\,\frac{d\beta}{dx\,(y} = x - \alpha - \frac{d\eta}{d\beta\,(\alpha},$$

$$q = \frac{d\eta}{d\beta\,(\alpha}\,\frac{d\beta}{dy\,(x} = \frac{d\eta}{d\beta\,(\alpha},$$

$$\left[\frac{dp}{d\alpha\,(\beta}\right] = -\frac{d^2\eta}{d\alpha\,d\beta} - 1,$$

$$\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\beta}\right] = \frac{d^2\eta}{d\alpha\,d\beta};$$

substituant ces valeurs dans

$$H\left[\frac{dp}{d\alpha\,(\beta}\right] + (K + \sqrt{G})\left[\frac{dq}{d\alpha\,(\beta}\right] = 0;$$

on aura en se rappelant que

$$H = x,\ K + \sqrt{G} = p,$$

et en changeant les signes

$$(x - p)\,\frac{d^2\eta}{d\alpha\,d\beta} + x = 0;$$

mais

$$x = \frac{d\eta}{d\alpha\,(\beta},$$

et

$$x - p = q + \alpha = \frac{d\,n}{d\,\beta\,(\,\alpha} + \alpha :$$

ainsi

$$\left(\frac{d\,n}{d\,\beta\,(\alpha} + \alpha\right)\frac{d^2\,n}{d\,\alpha\,d\,\beta} + \frac{d\,n}{d\,\alpha\,(\beta} = 0\,,$$

pour avoir l'intégrale de cette dernière, il faudrait connaître celle de

$$(q + x)\,s + p = 0.$$

C'est donc à trouver la valeur générale de z, qui satisfait à cette équation où il n'entre que la seule dérivée du second ordre s, qu'est ramenée, par la méthode que nous venons d'exposer, l'intégration de l'équation donnée,

$$x\,r + (p + x)\,s + p\,t - x = 0.$$

FIN.

mathém. pures

ESSAI HISTORIQUE

SUR LE PROBLÈME

DES MAXIMUMS ET MINIMUMS,

ET SUR SES APPLICATIONS A LA MÉCANIQUE.

PAR J. D. CHOISY,

MINISTRE DU ST. EVANGILE, AIDE-NATURALISTE AU MUSÉE D'HISTOIRE NATURELLE ET AU JARDIN DES PLANTES DE GENÈVE, MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ HELVÉTIQUE DES SCIENCES NATURELLES, DE LA SOCIÉTÉ DE PHYSIQUE ET D'HISTOIRE NATURELLE DE GENÈVE, CORRESPONDANT DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATIQUE, DE LA SOCIÉTÉ D'HISTOIRE NATURELLE ET DE LA SOCIÉTÉ LINNÉENNE DE PARIS.

GENÈVE,

DE L'IMPRIMERIE N.° 142, AUX BARRIÈRES.

1823.

Don de l'auteur

FAUTES ESSENTIELLES A CORRIGER.

PAGE 2	ligne	2 et 3 de la note,	$X'd^2x + X''d^3x +$ etc., *lisez* $X'dx^2 + X''dx^3 +$ etc.
» 7	»	19	$x^2 - 2rx - + y^2$, *supprimez le second* —
» 8	»	5	en rem. $y = \frac{xdx}{\sqrt{a^{2n} - x^{2n}}}$, *lisez* $dy = \frac{x^n dx}{\sqrt{a^{2n} - x^{2n}}}$
» 9	»	13	étant, *lisez* y étant
» 10	»	1	en rem. $GZ = dx''$, *lisez* $CZ = dx'''$
» 11	»	1	en rem. $df;$ *lisez* $df:$
» *id.*	»	5	en rem. $2d^3P$, *lisez* $2d^2P$
» 12	»	3	$dy^2d^3x\ x$, *supprimez* ce dernier x.
» *id.*	»	*id.*	$dP + d^2$, *lisez* $dP + d^2P$
» *id.*	»	9	$=0$, *lisez* $= -\beta dPd^2xd^2y$
» 13	»	18	et 23 $\phi\mu$ et $\lambda\phi$, *lisez* $\rho\mu$ et $\lambda\rho$.
» *id.*	»	32	et BO à $B\omega$, *lisez* et $B\phi$ à $B\omega$.
» *id.*	»	37	courbe $B, F\phi$, *lisez* courbe $BF\phi$.
» 19	»	11	en rem. $Pv - Qv' - 0$, *lisez* $Pv - Qv' = 0$.
» 21	»	10	et pour, *lisez* etc., pour
» 22	»	15	$N + dN$, *lisez* $N - dN$.
» 23	»	12	$M = -\frac{\sqrt{1+p}}{2x\sqrt{x}}$, *lisez*, $M = -\frac{\sqrt{1+p^2}}{2x\sqrt{x}}$
» *id.*	»	2	en rem. à la fin de la formule, $+\frac{Q'}{dx^2}$ *lisez* $+\frac{Q_,}{dx^2}$
» 24	»	5	$=Cp$, *lisez* $=-Cp$.
» *id.*	»	11	$-\frac{dp(1+p^2)^2}{q}$, *lisez* $-\frac{dq(1+p^2)^2}{q^2}$
» *id.*	»	12	$\frac{(1+p^2)^2}{q'}$, *lisez* $\frac{(1+p^2)^2}{q}$
» 26	»	2	le double avantage, *lisez* l'avantage.
» 28	»	1	à la fin, *ôtez* le signe $+$.
» *id.*	»	5	à la fin, $\delta y dx \delta x$, *lisez* $dydx\delta x$.
» 30	»	15	$\left(\frac{dy}{dt} + p\frac{dx}{dt}\right)$, *lisez* $\left(\frac{dy}{dt} - p\frac{dx}{dt}\right)$
» 33	»	10	$d\int Vdx$, *lisez* $\int Vdx$
» 34	»	1	et 2, à la place de H, *mettez* partout dH.
» *id.*	»	4	en rem. $P_0 - P_0H$, $Q_0 - Q_0H$, *lisez* $P - P_0H$, $Q - Q_0H$.
» 35	»	3	$-N\bar{H}' - P\bar{H}' - Q\bar{H}'$, *lisez* $-\bar{N}H' - \bar{P}H' - \bar{Q}H'$
» 36	»	5	$\delta\int V\delta x$, *lisez* $\delta\int Vdx$.
» *id.*	»	*id.*	$-\frac{d\pi}{d\pi}$, *lisez* $-\frac{d\pi}{dx}$
» *id.*	»	19	$a =$, *lisez* $\alpha =$
» *id.*	»	5	en rem. $e^H\int e^{-H}$, *lisez* $e^H\int - e^{-H}$
» 37	»	1	$-e^H(\bar{V}\delta x - \int d\bar{V}\delta x +$ etc., *lisez* $e^H(\bar{V}\delta x - \int(\bar{V}dH + d\bar{V})\delta x +$ etc.
» *id.*	»	6	en rem. *mettez* le signe $+$ entre $\int\delta\phi dx$ et $\int Ldx\delta\Pi$.
» 39	»	14	$\mu + \int v\theta dx$, *lisez* $d\mu + v\theta dx$.

PAGE	40	ligne	6	notamment, *lisez* nommant.
»	»	»	20	$-\iota\Theta_0$, *lisez* $-\iota_0\Theta_0$.
»	42	»	21	$I''_{,}d^2\delta y'$, *lisez* $I''_{,}d^2\delta y_{,}$
»	*id.*	»	*id.*	$+V\delta x$, *lisez* $+M\delta x$.
»	*id.*	»	26	et 27 δx, δy, *lisez* $\delta x_{,}$ $\delta y_{,}$
»	43	»	2	en rem. sans espérer, *lisez* sans opérer.
»	44	»	12	$\frac{1}{2}\frac{d^2V}{dydp}\delta y\delta p$, *lisez* $\frac{1}{2}\frac{d^2V}{dydp}2\delta y\delta p$
»	*id.*	»	13	hors du radical, *lisez* hors du signe $\int$.
»	*id.*	»	4	en rem. $G\delta y\delta p$, *lisez* $2G\delta y\delta p$.
»	46	»	13	DES OEFFICIENS, *lisez* DES COEFFICIENS.
»	*id.*	»	1	en rem. $X+\lambda\frac{\delta L}{dx}=0$ *lisez* $X+\lambda\frac{dL}{dx}=0$
»	47	»	2	et 4 en rem. *mettez* à la fin $=0$
»	50	»	17	$d\Sigma 2mv^2$, *lisez* $d\Sigma mv^2$
»	*id.*	»	1	en rem. $\frac{d_2y}{dt^2}Y$, *lisez* $\frac{d^2y}{dt^2}=Y$.
»	51	»	7	en rem. $+\frac{v'vd\theta\sin\theta}{\cos^2\theta'}$, *lisez* $+\frac{p'vd\theta'\sin\theta'}{\cos^2\theta'}$
»	52	»	2	$+p'$ tang θ cos π, *lisez* $+p$ tang θ cos π.
»	*id.*	»	8	$-\frac{dv}{d\pi}$, *lisez* $-\frac{dv}{d\pi'}$
»	*id.*	»	9	$1-\sin^2(\pi-\pi')$, *lisez* $1-\sin^2(\pi'-\pi)$.
»	53	»	1	CHAPITRE II, *lisez* CHAPITRE III.
»	54	»	4	en rem. $-(p_{,}-\alpha_{,})z_{,}\frac{p_{,}}{\sqrt{1+p_{,}^2}}$, *lisez* $-(p_{,}-\alpha_{,})\frac{p_{,}}{z_{,}\sqrt{1+p_{,}^2}}$
»	*id.*	»	9	en rem. $-P_{,}\delta y_0=0$, *lisez* $-P_0\delta y_0=0$.
»	55	»	2	$-\delta y_{,}\int Idx_{,}=-\alpha\delta x_{,}\int Idx$, *lisez* $-\delta y_{,}\int I_{,}dx=-\alpha_{,}\delta x_{,}\int I_{,}dx$
»	*id.*	»	6	$=\frac{\alpha_{,}p_{,}}{z^0\sqrt{1+p_0^2}}$, *lisez* $=\frac{\alpha_{,}p_0}{z_0\sqrt{1+p_0^2}}$
»	*id.*	»	7	$+\frac{\alpha p_0}{z_0\sqrt{1+p_0^2}}$, *lisez* $+\frac{\alpha_{,}p_0}{z_0\sqrt{1+p_0^2}}$
»	*id.*	»	13	$m=0$, *lisez* $M=0$
»	*id.*	»	17	à un dénominateur aulieu de $(1=p^2)$, *lisez* $(1+p^2)$
»	56	»	8	en rem. $\int Vdx$, *lisez* $\frac{1}{2}\int Vdx$.
»	*id.*	»	6	en rem. $2(1\cdot p)^2$, *lisez* $2(1+p^2)^2$
»	58	»	12	après une double intégration, *lisez* après une intégration.
»	59	»	15	$dV=dSx\sqrt{1+p}$, *lisez* $dV=dSx\sqrt{1+p^2}$
»	*id.*	»	6	en rem. $-\frac{dP}{dx}=0$, *lisez* $-\frac{dP}{dx}+P_0\frac{dH}{dx}=0$

PAGE	59	ligne	4	en rem. après $=0$, *ajoutez* et supposant S constant pour retomber directement sur l'équation de la chaînette.
»	*id.*	»	1	en rem. *ôtez* la dernière phrase depuis les mots *elle devient.*
»	60	»	8	$A=$, lisez $U=$
»	61	»	11	$\int ax\sqrt{1+p^2}$, *lisez* $\int dx\sqrt{1+p^2}$
»	63	»	11	$\Sigma mv=C-2\phi$, *lisez* $\Sigma mv^2=C-2\phi$.
»	*id.*	»	6	en rem. le coefficient de x'' est nul, *lisez* le coefficient de x' est nul.
»	*id.*	»	2	en rem. $K\frac{d^2x'}{dt^2}+K'x'=0$, *lisez* $K\frac{d^2x'}{dt^2}-K'x'=0$.

NOTE.

Je ne prétends point donner du nouveau dans une dissertation que j'ai dû composer très-rapidement; mon but sera atteint, si je parviens à exposer fidèlement les travaux des géomètres et l'état actuel de la science, relativement à l'une des théories les plus difficiles que présentent les Mathématiques.

ESSAI HISTORIQUE

SUR LE PROBLÈME

DES MAXIMUMS ET MINIMUMS,

ET SUR SES APPLICATIONS A LA MÉCANIQUE.

PARTIE PREMIÈRE.

DU PROBLÈME DES MAXIMUMS ET MINIMUMS, CONSIDÉRÉ D'UNE MANIÈRE ABSTRAITE.

CHAPITRE PREMIER.

CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

UNE *fonction quelconque étant donnée, trouver les valeurs qu'il faut assigner aux variables qui y entrent, pour qu'entre certaines limites cette fonction soit un maximum ou un minimum ?* Tel est l'énoncé le plus général que l'on peut donner au problème qui va nous occuper dans cette dissertation; les anciens géomètres et les premiers analystes n'en ont considéré que des cas particuliers, et, dans l'un de ces cas, il avait reçu le nom de *problème des isopérimètres.* Euler est le premier (1) qui l'ait embrassé dans toute sa généralité, et qui ait montré en lui deux parties bien distinctes, suivant que, outre les limites données à la fonction, on n'assignait aucune autre propriété commune aux valeurs diverses entre lesquelles il y en a une qui est maximum ou minimum, ou suivant qu'on assignait une ou plusieurs autres propriétés communes; dans le premier cas, le maximum ou minimum est nommé *absolu;* dans le second il est nommé *relatif:* trouver la ligne la plus courte d'un point à un autre? voilà un problème de minimum absolu : entre toutes les courbes de même longueur, trouver celle qui, entre ses limites, renferme le plus grand espace? voilà un problème de maximum relatif dans lequel on assigne aux courbes que l'on considère la propriété commune

(1) Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. Lausannæ et Genevæ 1744.

d'avoir même longueur. L'énoncé du problème montre qu'il peut se subdiviser encore suivant que la valeur cherchée est ou un maximum ou un minimum; dans le premier cas, elle surpasse toutes celles qui la précèdent ou la suivent immédiatement; dans le second cas, elle en est surpassée : il est facile de voir que les conditions du maximum et du minimum doivent être les mêmes en grandeur et que les différences qu'elles présentent ne doivent résider que dans les signes, car pour l'un les changemens infiniment petits que subit la fonction avant et après sont des décroissemens; pour l'autre ce sont des accroissemens que le calcul ne distingue que par le signe; il faudra donc dans toute question proposée chercher d'abord la condition qui indique l'un des deux états dont nous parlons, puis s'assurer ou par la nature de la question, ou par quelque méthode générale, lequel a réellement lieu. Le nombre et la nature des variables qui entrent dans la fonction proposée, la forme sous laquelle elles s'y présentent n'est point du tout déterminée dans le problème général, d'où l'on sent qu'il naîtra une multitude de distinctions à faire suivant que la fonction ne contiendra que les variables à leur état naturel, ou les variables et leurs coefficiens différentiels, ou enfin de plus des formules intégrales, et, dans chacun de ces cas, suivant le nombre et les combinaisons diverses de ces variables; dans le premier des trois cas que nous venons d'énumérer le calcul différentiel suffit pour résoudre le problème; dans les deux autres, le calcul intégral est nécessaire. L'on sent en effet que lorsque les variables se présentent à leur état naturel, on peut, si elles sont liées par un nombre suffisant de relations, les réduire à une seule, et qu'alors après avoir différentié, c'est-à-dire, après avoir pris l'accroissement premier de la fonction, tous les termes seront affectés de l'accroissement de la variable unique, et se présenteront collectivement sous la forme Xdx, x étant la variable unique et X une fonction quelconque de termes tout constans et de x; or, quelque soit la condition à laquelle vous assujettissiez le terme Xdx, duquel dépend le maximum ou le minimum (1), pour que ce maximum ou ce minimum arrive, quelque soit la quantité à laquelle vous le compariez, il faudra pour l'homogénité que cette quantité soit ou o, ou $\frac{0}{0}$, ou affectée de dx, et, dans les trois cas, ce coefficient dx disparaît et il reste une expression algébrique. Si les variables ne sont pas liées par un nombre suffisant de relations et que toutes ou plusieurs restent indépendantes, le premier accroissement de la fonction sera de la forme $Xdx+Ydy+Zdz+$ etc. x,y,z, etc. étant les variables indépendantes et X,Y,Z, etc. étant des fonctions de constantes et des variables correspondantes; or, pour que ce terme satisfasse à la condition du maximum ou du minimum, il faut nécessairement que chacune des portions qui le composent y satisfassent à part, ce qui établit autant de relations qu'il y a de variables indépendantes, et appliquant à chacune de ces relations le raisonnement employé ci-dessus il suit que dx,dy,dz, etc. disparaissent, et qu'on obtient autant d'expressions algébriques. Si, au contraire, la fonction proposée contient des coefficiens différentiels, les opérations que nous venons d'indiquer ne les feront jamais disparaître, et on ne parviendra à des expressions algébriques que par le calcul intégral. La chose est encore évidente quand la fonction contient des formules intégrales. Les méthodes synthétiques ne peuvent atteindre les cas où il y a plus de 3 variables, puisque l'espace n'a que trois dimensions. Pour terminer l'exposition du problème, nous avons encore à parler des limites auxquelles sont soumises les valeurs de la fonction

(1) Si la fonction est $U=f(x)$ et que x devienne $x+dx$, la fonction deviendra $f(x+dx)$ et sera de la forme $U+dU+\frac{d^2U}{1.2}+\frac{d^3U}{1.2.3}+$ etc. $=\xi+Xdx+X'd^2x+X''d^3x+$ etc., ξ, X, X', X'', etc. étant des fonctions de constantes et de x; l'accroissement total de la fonction est donc $Xdx+X'd^2x+Xd^3x+$ etc. et il semble que cet accroissement doit être en entier assujetti à la condition qui détermine le maximum ou le minimum; mais comme le premier terme $X\,dx$ peut être rendu plus grand que la somme de tous les autres, il suffit d'y assujettir ce terme, comme nous l'avons supposé.

proposée; et d'abord il est clair que ces limites sont indispensables pour que le problème soit déterminé, car sans elles on pourrait toujours donner une valeur plus grande ou plus petite que celle que l'on considère. Ces limites peuvent être de divers genres : ce sont, par exemple, ou des points par où une courbe doit passer, ou des ordonnées, ou d'autres courbes entre lesquelles elle doit être toujours renfermée ; ces limites servent à déterminer les constantes arbitraires lorsque l'expression algébrique finale en contient, et leur nombre doit être égal à celui de ces constantes arbitraires ; ainsi dans le problème de la ligne la plus courte entre deux points donnés, il y a deux limites, savoir les deux points et l'expression finale est l'équation de la ligne droite qui contient deux constantes arbitraires. Lorsqu'une portion quelconque de la valeur de la fonction proposée ne dépend que de ses propres limites, et point de celles de la fonction totale, alors cette portion doit être elle-même un maximum ou un minimum, pour que la fonction totale le soit ; car celle-ci doit être considérée comme la somme de toutes les portions indépendantes qui la composent. Si, au contraire, aucune portion n'est indépendante des limites de la fonction totale ; si, par exemple, celle-ci contient des formules intégrales qui s'étendent entre ces dernières limites, et qui affectent toutes les portions de la fonction, alors il n'est point nécessaire pour le maximum ou le minimum que chaque portion jouisse à part de cette propriété.

Après ces éclaircissemens préliminaires, passons à l'exposé de l'histoire du problème et des méthodes proposées pour le satisfaire.

CHAPITRE II.

MÉTHODES ÉLÉMENTAIRES ET SYNTHÉTIQUES.

Tous les problèmes géométriques dans lesquels on n'emploie que la ligne droite et le cercle sont des problèmes élémentaires, et les méthodes qui servent à les résoudre se nomment méthodes élémentaires ; nous comprendrons de plus, ici, sous cette dénomination, tous ceux qui se rapportent au premier des trois cas que nous avons distingués dans la question qui nous occupe, et qui, en même temps, peuvent être atteints par l'algèbre élémentaire, sans le secours du calcul différentiel et intégral. Les méthodes géométriques, improprement nommées synthétiques, résolvent les problèmes de cette espèce, et de plus, peuvent servir quelquefois à en résoudre de plus compliqués; mais alors elles emploient presque toujours les considérations d'infiniment petits ; telles sont, par exemple, les solutions géométriques du problème de la brachystochrone ; les premiers analystes étaient souvent obligés, pour se soumettre à leur siècle, de traduire sous forme géométrique, les résultats qu'ils avaient obtenus par l'analyse, et nous n'exposerons, en conséquence, dans ce chapitre, que ceux de ces résultats auxquels sont parvenus les géomètres qui n'y ont pas appliqué l'analyse.

Apollonius de Perge est le premier des auteurs anciens qui nous sont parvenus, où l'on trouve traitées des questions de maximum et de minimum ; le cinquième livre de son ouvrage sur les sections coniques est entièrement consacré à des questions de ce genre, et la beauté, la difficulté des théorèmes qu'il y établit nous porte à croire que déjà, avant lui, les anciens avaient fait des progrès dans cette théorie. Maurolicus affirme qu'Archimède s'en était occupé, et Apollonius dit, dans la préface de son cinquième, livre que ses prédécesseurs et ses contemporains n'avaient fait qu'aborder légèrement la science des minimums; étant donnée une section conique et son axe transverse, Apollonius mène des différens points de cet axe des lignes à la section, et recherche d'abord quelle est d'un quelconque de ces points la plus courte de ces lignes; il arrive à différentes solutions, suivant que les distances de ces points au sommet ou au centre sont en certains rapports avec le *latus rectum*. Il s'occupe ensuite de la détermination des angles que ces plus courtes lignes font avec l'axe; cela posé, il montre que de certains points pris sur le petit axe d'une ellipse ou sur son prolongement hors de l'ellipse, on peut mener une droite maximum et une minimum à la courbe, et que ces droites coïncident avec la direction de l'axe; il est facile de voir que les théorèmes de ce genre qu'on démontre dans la géométrie élémentaire sur le cercle sont des cas particuliers de ce théorème général: pour tous les autres points du même petit axe, il existe une droite maximum, et Apollonius détermine la position de cette droite; la portion de cette droite interceptée entre le grand axe et la section se trouve en même temps, la droite minimum pour le point d'intersection; toutes ces droites, maximum ou minimum, sont perpendiculaires aux tangentes à leur extrémité, et réciproquement pour les trouver il faut construire les tangentes, puis mener des perpendiculaires à ces tangentes au point de contact; enfin, ces droites conservent leur propriété, soit qu'on les considère comme terminées au point de l'axe d'où elles sont tirées, soit qu'on les rapporte à un quelconque de leurs points, pris en dedans ou en dehors de la courbe. Une des propositions que nous venons de rapporter montre que ces droites maximum ou minimum sont des normales à la courbe, et comme il était naturel qu'Apollonius recherchât les propriétés des points d'intersection de ces normales, il a dû nécessairement arriver à des théorèmes relatifs à ce que nous appelons les rayons osculateurs et les développées; c'est en effet sur des propositions de ce genre que roule la dernière moitié de son livre, il s'occupe d'abord de l'espace dans lequel se font les intersections; il montre ensuite qu'elles forment une courbe, puisqu'une même intersection ne répond qu'à deux droites maximum ou minimum, pour une même branche de la section conique; il limite l'espace que cette courbe termine, c'est-à-dire, montre quels sont les points desquels on ne peut mener ni maximum ni minimum à une branche donnée de la section et quels sont ceux desquels on n'en peut mener qu'une; quant à tous les autres points, il montre qu'on peut faire passer par eux une droite minimum à la section entière. Enfin, les dernières propositions ne sont guère que des répétitions ou des contreparties de celles que nous avons énumérées; le nombre total des propositions est de soixante-dix-sept. On admirera l'ouvrage d'Apollonius quand on réfléchira qu'il a déterminé pour les sections coniques, des élémens que l'analyse moderne semblerait seule pouvoir atteindre; les propositions 68, 69, 70 et 71, renferment des théorèmes remarquables sur les intersections, non des normales, mais des tangentes à la courbe: la méthode d'Apollonius est purement géométrique et fondée sur les propriétés des sections coniques.

Pappus, dans le cinquième livre de ses Collections mathématiques, présente les élémens de l'isopérimètrie proprement dite, en cherchant les rapports entre le contour des figures et leur surface, ainsi qu'entre la surface des solides et leur capacité; il montre que le cercle est plus grand que toute figure rectiligne isopérimètre avec lui, et que la sphère est plus grande que tout solide régulier isopérimètre avec elle : sa méthode est en général embarrassée; les résultats auxquels il arrive sont très-peu généraux.

Depuis Pappus, un très-petit nombre de mathématiciens ont appliqué la Géométrie des anciens à la solution des problèmes isopérimètres; Elvius démontre, que de toutes les figures du même nombre de côtés égaux et disposés dans le même ordre, celle qui est inscrite au cercle est la plus grande; mais il introduit la considération des infiniment petits; Klingenstern démontre tout-à-fait géométriquement que cette propriété est vraie dans les quadrilatères : Gabriel Cramer (1) s'attache à démontrer le même théorème, en comparant, par une suite de proportions, les surfaces des deux triangles du quadrilatère inscrit et du non inscrit, et montrant que les premières surpassent les secondes ; il étend ensuite son théorème aux figures d'un nombre quelconque de côtés, et montre que l'ordre dans lequel ces côtés sont disposés est indifférent ; enfin, il applique le calcul différentiel à la même proposition. Thomas Simpson est encore arrivé au même résultat par une voie plus courte, en partant du principe que de tous les triangles qui ont deux côtés les mêmes, le plus grand est celui qui renferme entre ces deux côtés un angle droit, c'est-à-dire, qui est inscriptible au demi-cercle, dont son troisième côté est diamètre. Marsson (2) a étendu les recherches d'isopérimétrie aux solides, et en particulier à ceux qui sont circonscriptibles à la sphère : enfin, Tommasini (3), et surtout M.r Lhuillier (4), ont repris le problème en grand, et l'ont traité en entier.

Le premier de ces savans divise son ouvrage en deux parties, traitant l'une des figures planes, savoir, successivement des Triangles, Quadrilatères, Polygones et du cercle ; l'autre des solides, d'abord considérés en général, puis particulièrement dans leur rapport avec la sphère.

M.r Lhuillier, avec ce talent qui lui est propre, pour ramener aux élémens, et mettre à la portée de tous les objets les plus difficiles, a complettè les connaissances qu'on pouvait avoir acquises jusqu'à lui en isopérimétrie élémentaire, a simplifié les démonstrations, et rectifié toutes les erreurs qui pouvaient avoir été commises ; nous allons entrer dans quelques détails sur cet important ouvrage : il adopte d'abord la même division que ses prédécesseurs, savoir, en figures planes et en solides ; sa première partie se divise en deux Chapitres, l'un intitulé, Des Isopérimètres, proprement dits, et comprenant tous les Théorèmes d'Isopérimétrie plane, que nous avons mentionnés jusqu'à présent jusqu'à la propriété fondamentale du cercle. Dans un Appendix et dans un second Chapitre, M.r Lhuillier réunit un certain nombre de propositions de maximums et de minimums moins liées entr'elles que les précédentes, traitant principalement des inscriptions et circonscriptions des figures rectilignes les unes aux autres, et de la situation de points jouissant de certaines propriétés maximum ou minimum, relativement à certaines lignes ou figures. Le second livre se divise en quatre Chapitres, traitant des Parallélépipèdes, des Prismes et Cylindres, des Pyramides et Cônes, de la Sphère ; enfin, de diverses Propositions. Chacun de ces Chapitres est accompagné d'appendices contenant certains Théorèmes y relatifs, mais moins intimément liés avec les autres : un des résultats les plus curieux de ces recherches est la réciprocité existant entre les contours et les surfaces d'une part, entre les surfaces et les capacités de l'autre ; ainsi, le cercle est plus grand que toute figure rectiligne isopérimètre, et réciproquement il a un contour plus petit que toute figure de même surface ; ainsi, le parallélipède droit a moindre surface latérale que tous ceux de même base et hauteur, et réciproquement de tous les parallélipèdes de même base et surface latérale, le droit a le moins de capacité : nous aurons plus tard occasion d'établir la théorie générale à laquelle se rapporte cette réciprocité. Un second résultat remarquable est, que les propriétés maximum et minimum appartiennent entre tous les solides de même espèce à celui qui est le plus régulier, c'est-à-dire, à celui qui a ses surfaces égales et le plus possible ses divers élémens joints à angle droit. Dans le quatrième Chapitre, traitant de la Sphère, le savant Mathématicien démontre que ce corps est le plus grand de tous ceux qui ont même

(1) Mémoires de Berlin, 1752, page 283.

(2) Les trois coups d'essais géométriques, Strasbourg, 1770.

(3) De Maximis et minimis ad Institutiones geometricas accommodatis specimen, Pisæ 1774.

(4) De Relatione mutuâ capacitatis et terminorum figurarum, Varsoviæ 1782. — Polygonométrie et abrégé d'isopérimétrie élémentaire, Genève 1789.

surface, mais il convient ne pouvoir entièrement établir ce théorème sans la considération des infiniment petits. Enfin, dans le cinquième Chapitre, on trouve une application ingénieuse de ces théories aux cellules des abeilles. Cet ouvrage, qui était précédé d'une préface historique sur les travaux en isopérimétrie élémentaire, se termine par une dissertation spéciale sur les figures rectilignes de moindre contour inscrites à des figures rectilignes de même nom. — M.r Lhuilier a donné, en 1789, un extrait en français de son grand ouvrage.

Il a paru dans les Annales de Mathématiques, tom. IV, pag. 338, et XIII, pag. 133, une démonstration des propriétés du cercle, relativement aux figures planes, et de la sphère relativement aux solides; mais il est facile de s'assurer que cette démonstration n'est point dégagée des considérations d'infiniment petit; car, pour qu'elle soit valide, il faut admettre qu'un arc de courbe infiniment petit se confond avec sa corde et un triangle curviligne et à surface courbe avec le triangle plane et rectiligne qui le peut soustendre; pour être rigoureuse, cette démonstration ne doit s'étendre qu'aux figures rectilignes et aux solides terminés par de telles figures.

Je ne m'étendrai pas davantage sur l'objet de ce chapitre, parce que les applications à la mécanique que je dois avoir principalement en vue, font peu usage des solutions de ce genre.

CHAPITRE III.

MÉTHODES ANALYTIQUES, JUSQUES ET Y COMPRIS CELLES DES BERNOUILLI.

Le principe sur lequel repose la recherche du maximum ou du minimum d'une quantité variable quelconque, dut frapper très-rapidement ceux qui s'élevèrent à ces considérations générales; rien de plus naturel en effet que de comparer l'état de la variable lorsqu'elle jouit de cette propriété avec son état immédiatement avant et après. Déjà Képler, dans sa Stereometria doliorum avait remarqué que les accroissemens ou décroissemens, infiniment voisins de l'état demandé, sont insensibles. Descartes appliquant à ce problème les résultats de sa géométrie analytique, représenta la variable par les ordonnées d'une courbe; et remarquant qu'avant et après le point maximum ou minimum, il devait y avoir deux ordonnées égales, conclut que pour chaque valeur de l'ordonnée on devait trouver deux valeurs de l'abcisse; mais qu'au point même les deux valeurs de l'abcisse devenaient égales; donc deux racines égales d'une équation qui servait à déterminer l'abcisse, indiquaient le maximum ou minimum; cette méthode a deux défauts: 1.° elle convient également à la détermination des points de rebroussement. 2.° elle ne fournit aucun moyen de distinguer le maximum du minimum; cette méthode a ainsi que la suivante, due à Fermat, les plus grandes affinités avec leurs méthodes des tangentes, ainsi qu'on peut s'en assurer en examinant celles-ci, et en considérant que la tangente est la limite des sécantes qui partent du même point, ou qui sont parallèles entre elles. Fermat adopte le principe qu'une valeur de la variable infiniment voisine de la valeur maximum ou minimum ne diffère pas de celle-ci, et qu'ainsi ces deux valeurs peuvent être égalées; ainsi soit y une ordonnée exprimée d'une manière quelconque en x, et supposons que x prenant un accroissement infiniment petit a devienne $x+a$; remplaçant x par $x+a$ dans l'expression de y, on obtiendra une nouvelle valeur qui, d'après la règle de Fermat, devra être égalée à la première ; retranchant les termes communs, divisant par les facteurs communs a autant qu'il y en a, puis supprimant comme infiniment petits les termes encore affectés du facteur a, le reste donnera la condition du maximum ; un exemple éclaircira cette exposition ; soit demandé de trouver la plus grande ordonnée du cercle rapporté à son centre ; on a $y^2=r^2-x^2$, que x devienne $x+a$, on aura $y^2=r^2-x^2-2ax-a^2$; égalant ces deux valeurs, on a $a^2+2ax=0$, ou $a+2x=0$, supprimant le terme a, on a enfin $x=0$, d'où $y=\pm r$; cette méthode quoique plus générale que celle de Descartes est cependant sujette à peu près aux mêmes inconvéniens ; elle s'étend aux points de rebroussement qui ont leur tangente parallèle à l'axe des abcisses et par conséquent deux ordonnées consécutives égales ; elle n'apprend pas non plus à distinguer le maximum du minimum ; Descartes, rival de Fermat, éleva contre elle plusieurs objections ainsi que contre sa méthode des tangentes ; mais ces objections n'ont pas de valeur et étaient probablement dictées par la jalousie ; Fermat et ses partisans y répondirent victorieusement ; les successeurs de ces géomètres reprirent et perfectionnèrent ces méthodes. Hudde amena celle de Descartes à donner les mêmes équations que fournit le calcul différentiel, et voici comment : il démontra que pour donner à l'équation proposée des racines égales, il fallait ordonner cette équation d'après les puissances de l'abcisse, suppléer les termes qui manquaient pour que cette équation fut complète, puis multiplier terme à terme par ceux d'une progression arithmétique choisie d'après l'inspection de l'équation ; le résultat donne la condition du maximum ou minimum ; reprenons par exemple l'équation du cercle, mais rapportons-la à l'extrémité du diamètre pris pour axe des abcisses, nous avons $y^2=2rx-x^2$, ou $x^2-2rx+y^2=0$. Multiplions le premier terme par 2, le second par 1, le troisième par 0, nous aurons, $2x^2-2rx=0$, ou $2x-2r=0$, ou $x=r$ et $y=\pm r$. Le marquis de l'Hôpital a développé, dans son analyse des infiniment petits, page 164, les applications de cette méthode à la recherche des tangentes, des points d'inflexions, etc. ; il est facile de voir que les équations auxquelles elle conduit ne sont autres que celles du calcul différentiel, en y regardant une des variables comme constante. Huyghens et Sluse travaillant la méthode de Fermat virent comment on pourrait obtenir de suite l'équation finale sans passer par l'intermédiaire de la substitution de $x+a$ à x, et ils arrivèrent à la règle du calcul différentiel ; ils dirent de multiplier chaque terme affecté de la variable par l'exposant de cette variable, de diminuer cet exposant d'une unité et d'égaler le résultat à 0 ; en opérant ainsi sur les exemples ci-dessus, on voit que r^2-x^2 donne $2x=0$, et que x^2-2rx donne $2x-2r=0$.

Dès que Newton et Leibnitz eurent inventé le calcul différentiel, le principe du maximum et du minimum fut bientôt reconnu ; on vit que l'accroissement de la variable, qui avait un signe quelconque avant le point maximum, prenait le signe contraire après ce point, et qu'ainsi il devait au point même être 0 ; par conséquent prendre la fluxion ou la différentielle de la fonction proposée et l'égaler à 0, déterminait la condition demandée : on reconnut bientôt aussi le caractère distinctif du maximum et du minimum, savoir, que pour le premier, la seconde fluxion ou la seconde différentielle devait être négative, et pour le dernier positive. En possession de cette règle, dont on peut lire les détails, soit dans Maclaurin, soit dans le marquis de l'Hôpital, en possession aussi des moyens puissans de l'analyse moderne, on dut pouvoir aborder des questions plus difficiles qu'on n'avait fait jusqu'alors ; c'est ce que nous allons voir en rendant compte des travaux des frères Bernouilli, qui donnèrent aux problèmes de ce genre la célébrité qu'ils ont eue jusqu'à présent.

En Juin 1696, Jean Bernouilli, le cadet des deux frères, proposa aux savans le problème de la Brachystochrone, c'est-à-dire, de trouver la courbe que décrirait un mobile par l'effet de la pesanteur pour aller le plus vîte d'un point à un autre situé dans le même plan vertical, mais non sur la même verticale ; l'auteur de la question donnait six mois aux savans ponr la résoudre. Leibnitz, Newton, l'Hôpital, Jaques Bernouilli se mirent à réfléchir sur le problème, et en trouvèrent la solution; mais comme le premier de ces savans avait trouvé la question très-intéressante, il avait demandé à Jean Bernouilli de proroger de six mois le terme du concours; celui-ci y avait consenti, et avait publié de nouveau le programme avec assez d'emphase. A l'expiration du terme proposé, Jaques et Jean Bernouilli publièrent, chacun de leur côté, la solution qui leur était propre, et montrèrent que la courbe cherchée était une cycloïde. Jaques fit voir que, dans la courbe cherchée, les sinus des angles formés avec l'horizontale par deux élémens consécutifs de la courbe, devaient être réciproques aux racines carrées des hauteurs d'où le mobile était tombé pour atteindre ces deux élémens; il montra ensuite que cette propriété appartenait à la cycloïde: c'était un procédé purement synthétique. Jean employa une méthode tout-à-fait indirecte, mais non moins ingénieuse; il compare la marche du mobile à celle d'un rayon de lumière qui irait d'un point à un autre en traversant un milieu dont la densité varie uniformément comme la racine carrée de la hauteur du point de départ; il montre que la courbe décrite par le rayon est une cycloïde, et comme il adopte le principe que le rayon se meut par le chemin le plus court, il suit que ce chemin est la courbe trouvée: du reste il annonça, la même année, dans une lettre à M.r Basnage, qu'il possédait une méthode directe pour arriver au même résultat, mais il ne la publia qu'en 1718; il y montre que la courbe recherchée est telle que son rayon osculateur est toujours coupé en deux également par l'axe horizontal, propriété qui ne convient qu'à la cycloïde; il ajoute encore une troisième solution synthétique. Jaques Bernouilli, lorsqu'il publia sa découverte, ne voulut pas rester en arrière, et prit l'offensive, en proposant à son frère le fameux problème nommé des Isopérimètres, et ainsi conçu: Etant donné le contour d'une courbe et une base commune, et les ordonnées étant proportionnelles à des quantités élevées à une puissance quelconque, trouver la courbe qui renfermera la plus grande aire entr'elle, l'abcisse et l'ordonnée? Il joignit à ce problème celui de déterminer entre l'infinité de cycloïdes qui peuvent être menées d'un point à une ligne verticale, quelle est celle que le mobile parti du point donné doit parcourir pour arriver dans le temps le plus court à la ligne donnée? Il promit enfin, au nom d'un inconnu, cinquante ducats à son frère, si, dans trois mois, il résolvait ces problèmes. Un mois après, en Juin 1697, Jean répondit à cette provocation, et, dans une lettre à M.r Basnage, il annonça n'avoir pas employé plus de trois minutes à résoudre les problèmes de son frère, et à trouver des solutions beaucoup plus générales; il termine sa lettre par quelques bravades mêlées d'ironie, et annonce qu'il donne aux pauvres les cinquante écus qu'il se croit légitimement acquis. En Août de la même année, il proposa lui-même six problèmes de maximums et minimums; par exemple, quelle était la ligne la plus courte d'un point à un autre pris sur une surface convexe? Toutes les ellipses possibles sur un même axe étant données, retrancher des segmens égaux à partir d'une même extrémité de l'axe, et trouver la plus courte des droites qui joignent l'extrémité de l'axe avec celles des arcs retranchés? Quelle est, dans ce cas, la courbe qui passe par ces dernières extrémités? etc. En Décembre, Jean Bernouilli publia, sans démonstration, la solution annoncée plus haut des problèmes de Jaques; il déclara qu'on résolvait celui des Isopérimètres en prenant $y=\frac{x\,dx}{\sqrt{(a^{2n}-x^{2n})}}$, y étant l'abcisse, x l'ordonnée, n l'exposant de la puissance, a une constante; en posant $n=1$ on a le cercle, $n=2$ on a l'élastique, $n=\frac{1}{2}$ on a la cycloïde; il généralisa ce problème en supposant non-seulement que les ordonnées sont proportionnelles à des quantités élevées à une puissance quelconque, mais encore sont fonctions de ces quantités et de constantes: quant au second problème, il montra que la cycloïde demandée était perpendiculaire à la verticale, et généralisa en affirmant que le théorème était vrai, quelle que fût la position de la ligne donnée, et enfin en supposant que les courbes données n'étaient pas des cycloïdes, mais des courbes semblables quelconques. Jaques Berno uilli ne contesta point ces derniers résultats, mais en Février 1698, il déclara que la solution du principal de ces problèmes, savoir, celui des Isopérimètres, n'était point entièrement conforme à la vérité; il s'engagea de plus, à prouver son assertion et à donner lui-même une solution exacte. Jean répliqua aussitôt, en persistant et en corrigeant quelques petites inexactitudes; il insista surtout sur l'exactitude de ses solutions quant au second problème, reconnaissant peut-être déjà qu'il s'était trop avancé sur le premier: il attaqua vivement le *Nonnemo* qui lui avait promis cinquante ducats sous la caution de son frère, et lui adressa un nouveau problème de minimum. Nouvel avis de Jaques en Mai; nouvelle réplique de Jean en Juin, dans laquelle il déclare définitivement regarder comme entièrement légitimes ses solutions. Là-dessus, Jaques se met en devoir d'exécuter ce qu'il avait promis; mais avant de publier, il invite encore son frère à examiner s'il n'y a point de faute d'impression dans l'équation trouvée par celui-ci pour l'arc de la courbe maximum, savoir $V = \int \frac{d^2y}{dt^2 - dy^2}$, étant un élément constant de la courbe, v une fonction de t et de constantes. Cette invitation étant restée sans réponse, il chercha à démontrer en Août, 1.° que son frère avait fait usage d'un principe mécanique et de son applic ation à l'élastique ou lintéaire pour arriver à la solution qu'il avait obtenue; 2.° que ce principe était faux, et que, dans la manière même dont son frère s'en était servi, il y avait une erreur; 3.° que cependant, par une compensation d'erreurs, sa solution s'appliquait à quelques cas particuliers. Jean ne put laisser cette lettre sans réponse; il nia formellement avoir employé les procédés que son frère lui prêtait, et fit à celui-ci d'amers reproches, mais il glissa sans bruit sur l'équation inculpée: cependant Jaques avança le dénouement de cette discussion, en publiant, en 1701, ses solutions accompagnées de leurs démonstrations. Jean avait envoyé, la même année, les siennes à l'Académie des Sciences; mais sentant probablement son erreur, il ne les fit publier qu'en 1706, une année après la mort de son frère: personne ne se mêla de prononcer entre les deux illustres rivaux. Jean prononça lui-même en 1718, en avouant son erreur, et en donnant une nouvelle et grande solution du problème des Isopérimètres. Nous allons reprendre et exposer les trois solutions, l'une de Jaques, les deux autres de Jean, et établir leur comparaison. Ajoutons ici quelques mots sur l'histoire des six problèmes proposés par Jean en Août 1697: son frère en publia la solution dès le mois de Mai de l'année suivante par une méthode purement géométrique, en même temps que celle du second des problèmes qu'il avait proposés lui-même; il montre que la cycloïde perpendiculaire à la ligne donnée satisfait à la question; puis, il généralise en étendant au cercle et aux courbes semblables les résultats obtenus; mais ces détails étant d'un intérêt beaucoup moindre que les méthodes générales, nous passons à l'exposition de celles-ci.

§. I. *Méthode de Jaques Bernouilly.*

Le principe duquel part ce géomètre n'est autre chose que celui du calcul différentiel, savoir que l'accroissement de la fonction doit être égalé à 0 pour le maximum ou le minimum; la question se réduit donc à développer les accroissemens de cette fonction suivant ceux des variables dont elle dépend. Nous allons rapporter les procédés qu'il emploie en les abrégeant.

Lemme 1.er *Définitions*. Soient x, x', x'', etc. les ordonnées consécutives, y, y', y'' etc. les abcisses, z, z', z'' etc. les arcs d'une courbe, on a nécessairement :

$x''=x\pm dx$	$dx'=dx\pm d^2x$	$d^2x'=d^2x\pm d^3x$
$x'''=x\pm 2dx+d^2x$	$dx''=dx\pm 2d^2x+d^3x$	etc.
$x^{IV}=x\pm 3dx+3d^2x\pm d^3x$	etc.	
etc.		

Et de même pour les y et les z.

Lemme 2. Soit une ligne fixe AT (Fig. 1.), et un arc de courbe BC que nous partageons en trois parties par les points F et G. Menons les ordonnées BH, FK, GL, CI, et les lignes BX, FY, GZ parallèles à l'axe ; joignons par des droites B, F, G etc. ; nommons

$BX=l$	$FX=p$	$BF=s$	$HB=b$	
$FY=m$	$GY=q$	$FG=t$	$KF=f=b+p$	$df=dp$
$GZ=n$	$CZ=r$	$GC=u$	$LG=g=b+p+q$	$dg=dp+dq$

Supposons que quelques soient les petits mouvemens qu'on fasse faire aux points F et G, la somme des droites correspondantes, savoir, BX, FY, GZ d'une part, BF, FG, GC d'une autre, enfin FX, GY, CZ soit constante, on aura, tant à cause de cette hypothèse qu'à cause des triangles rectangles que forment ces lignes, les équations.

$l^2+p^2=s^2$	$l+m+n=A$	$ldl+pdp=sds$	$dl+dm+dn=0$
$m^2+q^2=t^2$	$p+q+r=B$	$mdm+qdq=tdt$	$dp+dq+dr=0$
$n^2+r^2=u^2$	$s+t+u=C$	$ndn+rdr=udu$	$ds+dt+du=0$

Hyp. 1.re Supposons que dans le mouvement communiqué les lignes BX, FY, GZ demeurent non-seulement les mêmes en somme, mais individuellement ; alors l'équation $dl+dm+dn=0$ devient identique et peut être supprimée.

Hyp. 2. La même chose arrivera pour l'équation $ds+dt+du=0$, si ce sont les lignes BF, FG, GC qui demeurent invariables.

Tout ceci étant entendu, passons aux théorèmes proprement dits, qui conduisent à la différentiation demandée.

Théor. 1.er Supposons que la situation de F et de G vienne à varier dans le sens des ordonnées, de manière que les lignes FK et FL prennent un accroissement ou un décroissement df et dg, ce cas rentre dans l'hypothèse première du lemme précédent, et on trouve par diverses combinaisons faciles

$$df : -dg = rst - qsu : qsu - ptu$$

Théor. 2. Supposons de même que F et G se meuvent sur des arcs de cercle dont B et C sont les centres, de manière que FK et GL prennent aussi un accroissement ou un décroissement, mais que le cas rentre dans l'hypothèse seconde du lemme, on trouve par de semblables combinaisons :

$$df : -dg = lmr - lnq : lnq - mnp.$$

Hyp. Supposons que les intervalles HK, KL, LI deviennent infiniment petits et égaux entr'eux, que tous les élémens des petits triangles construits sur la courbe deviennent aussi infiniment petits, et que les hypothénuses de ces triangles se confondent avec les élémens correspondans de la courbe, on aura :

$BX=dy$	$FX=dx$	$BF=dz$
$FY=dy'$	$GY=dx'$	$FG=dz'$
$GZ=dy''$	$GZ=dx''$	$GC=dz''$

Théor. 3. Dans la même supposition que nous avons faite au théorème premier, l'équation que nous y avons trouvée se change dans l'hypothèse précédente, et en y substituant les valeurs du lemme premier, en l'expression suivante.

$$df : -dg = dz^2 d^2x + dz^2 d^3x - dx(d^2x)^2 : dz^2 d^2x + 2dx(d^2x)^2$$

Théor. 4. De même l'équation trouvée pour le théorème second se change en la suivante.

$$df : -dg = dy^2 d^2x + dy^2 d^3x + dx(d^2x)^2 : dy^2 d^2x - 2dx(d^2x)^2$$

Théor. 5. Si on a deux quantités indéterminées f et $g = f + df$, qu'on ait deux autres quantités F et G, formées de la même manière, l'une en f, l'autre en g, savoir : $a d\mathrm{F} = h df$ et $a d\mathrm{G} = i dg$, on aura $i = h + dh$

En effet, on tire $h = \frac{a d\mathrm{F}}{df}$; $i = \frac{a d\mathrm{G}}{dg}$, d'où il est facile de voir que h et i seront semblablement exprimées, l'une en f, l'autre en g; si donc f et g représentent deux abcisses consécutives d'une courbe, h et i peuvent en représenter deux ordonnées consécutives, la première de ces ordonnées étant h, la seconde est $h + dh$.

Théor. 6. Si une courbe, entre toutes celles de même longueur contenues entre deux points, jouit d'un maximum ou minimum, une quelconque de ses portions jouit entre ses deux points extrêmes de la même propriété.

En effet, si cela n'était pas, on pourrait supposer une autre courbe qui aurait même cours que la première, avant et après la portion considérée; mais qui en cette portion jouirait de la propriété demandée, et par conséquent la posséderait au préjudice de la première courbe.

Ces théorèmes une fois démontrés, Bernouilli en fait l'application aux trois problèmes suivans.

Problème 1.er Etant données deux perpendiculaires AT, AM, et une courbe AN; entre toutes les courbes isopérimètres, construites sur A T, et joignant les points A et D, trouver celle de chaque point de laquelle menant des droites BP, BN perpendiculaires à AT et prenant HP=MN, l'espace ATV soit un maximum ou un minimum.

Problème 2. Les mêmes choses étant données, et les portions d'ordonnées HP ayant avec les arcs correspondans AB un rapport donné, quelle est la courbe pour laquelle l'espace ATV est un maximum ou un minimum?

Problème 3. Si une ligne flexible ABD est chargée de poids dans toute sa longueur, et librement suspendue entre ses extrémités A et D, quelle courbure doit-elle prendre pour que le centre de gravité commun soit le plus près ou le plus loin de la ligne AT?

Bernouilli ne donne l'analyse complète que du premier de ces problèmes; mais comme l'examen du dernier rentre davantage dans notre but, nous allons le résoudre en suivant sa marche.

Soit P le poids dont est chargé l'arc de courbe AB$=z$, on aura successivement pour les poids des élémens BF, FG, GC, $d\mathrm{P}$, $d\mathrm{P} + d^2P$, $d\mathrm{P} + 2d^2\mathrm{P} + d^3\mathrm{P}$; nous négligerons $d^3\mathrm{P}$ en comparaison de $d\mathrm{P}$ et $d^2\mathrm{P}$. Cela étant, et conservant les mêmes dénominations que ci-dessus, on aura pour la somme des momens de ces poids relativement à la ligne AT, la quantité $b d\mathrm{P} + f \left\{ d\mathrm{P} + d^2\mathrm{P} \right\} + g \left\{ d\mathrm{P} + 2d^2\mathrm{P} \right\}$; supposons maintenant que nous fassions un peu varier f et g en mouvant les points F et G sur des circonférences de cercles, les poids ne changeront pas et la différentielle des momens cherchée d'après cela et égalée à o pour le maximum ou le minimum donnera $df \left\{ d\mathrm{P} + d^2\mathrm{P} \right\} + dg \left\{ d\mathrm{P} + 2d^2\mathrm{P} \right\} = 0$, d'où

$$df ; -dg = d\mathrm{P} + 2d^2\mathrm{P} : d\mathrm{P} + d^2\mathrm{P}.$$

Comparant cette équation avec celle que fournit le théor. 4.^{e}, on en tire facilement

$dy^2d^3x + 3dx\,(d^2x)^2 : dy^2d^2x - 2dx(d^2x)^2 = d^2P : dP + d^2P$, ou, négligeant le terme $2\,dx(d^2x)^2$ $dy^2d^3x\ x + 3dx(d^2x)^2 : dy^2d^2x = d^2P : dP + d^2$; multiplions, substituons $-dyd^2y$ à dxd^2x, parce que $dx^2 = dz^2 - dy^2$ et que dz est constant, divisons par dy, nous aurons enfin

$$dPdyd^3x - 3dPd^2xd^2y - dyd^2Pd^2x = 0$$

Soit maintenant une équation arbitraire $dP^{\alpha}dy^{\beta}(d^2x)^{\gamma} = A$; α, β, γ, étant des exposans indéterminés, et A une constante, nous aurons en différentiant

$$\alpha dP^{\alpha-1}\,d^2Pdy^{\beta}(d^2x)^{\gamma} + \beta dP^{\alpha}dy^{\beta-1}\,d^2y(d^2x)^{\gamma} + \gamma dP^{\alpha}dy^{\beta}(d^2x)^{\gamma-1}\,d^3x = 0$$

Divisant tout par $dP^{\alpha-1}dy^{\beta-1}(d^2x)^{\gamma-1}$, on a $\alpha d^2Pdyd^2x + \gamma dPdyd^3x = 0$

Comparant terme à terme avec l'équation précédente, on a : $\alpha = -1$ $\beta = -3$ $\gamma = 1$, valeurs, qui, substituées dans l'équation arbitraire, la changent en celle-ci : $\frac{d^2x}{dPdy^3} = A$; appelant a une constante, et nous souvenant que dz est constant, on peut faire $A = \pm\frac{1}{adz^2}$ d'où $\frac{d^2x}{dPdy^3} = \pm\frac{1}{adz^2}$; pour traiter cette équation, posons $ady = tdz$, d'où $ad^2y = dtdz$, et $dy^2 = \frac{t^2dz^2}{a^2}$, et rappelons-nous que

$d^2x = -\frac{dyd^2y}{dx} = -\frac{dyd^2y}{\sqrt{dz^2 - dy^2}}$ nous obtiendrons par la substitution des valeurs de dy^2 et d^2y une expression toute divisible par dz, et qui donnera $dP = \pm\frac{a^3dt}{t^2\sqrt{a^2 - t^2}}$; prenons le signe inférieur il donnera :

$P = \frac{a}{t}\sqrt{a^2 - t^2} + b$, où nous poserons $b = 0$ pour simplifier; de là : $t = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + P^2}}$ et $\frac{t}{a} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + P^2}}$ et par conséquent $dy = \frac{adz}{\sqrt{a^2 + P^2}}$; si nous avions pris le signe supérieur, nous aurions eu $P = -\frac{a}{t}\sqrt{a^2 - t^2} + b$ et nous aurions dû conserver la constante pour que le poids fut positif; alors $t = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + (P-b)^2}}$ et $dy = \frac{adz}{\sqrt{a^2 + (P-b)^2}}$: Voyons maintenant comment Bernouilli distingue s'il y a lieu à maximum ou à minimum; comme on a $dx = \sqrt{dz^2 - dy^2}$, il suit $dx = \frac{Pdz}{\sqrt{a^2 + P^2}}$ en prenant la première valeur; donc $dy : dx = a : P$ et regardant dy comme constant, dx est proportionnel au poids; or, comme le poids croît avec la longueur z de la couche, il suit que dx croît de même et que la courbe tourne par conséquent sa convexité vers la ligne AT (Fig. 2.); soit ADC cette courbe, faisons-la tourner autour de sa corde AC, de manière à ce qu'elle engendre dans le même plan vertical une courbe isopérimètre ABC; menons BD perpendiculaire à AC et abaissons les ordonnées DG, BF, il est clair que l'ordonnée, et par conséquent le x et par conséquent le $\int xdP$ est plus petit pour la courbe ADC que pour la courbe ABC; donc cette première est un minimum.

Tel est l'exposé de la doctrine de Jaques Bernouilli sur les isopérimètres; avant de la mettre au jour, il en avait publié les résultats dans une table particulière et avait montré comment certaines équations de son frère ne s'accordaient pas avec les siennes ; avant de faire les remarques générales que nous aurons à présenter, il convient de faire connaître les travaux de Jean Bernouilli.

§. II. *Première Méthode de Jean Bernouilli.*

La méthode dont nous allons rendre compte ne parut qu'en 1706, quoique créée plusieurs années à l'avance ; les calculs sur lesquels elle repose sont ingénieux, mais pénibles ; l'auteur divise le problème des isopérimètres en deux cas, suivant que les ordonnées de la courbe qui doit renfermer un espace maximum sont fonctions des ordonnées d'une autre courbe ou suivant qu'elles sont fonctions des arcs de cette autre courbe ; le premier de ce cas était le seul proposé par Bernouilli l'aîné ; mais comme ce fut le second qui fut l'objet des attaques de ce dernier, nous le choisirons pour exposer la méthode que nous traitons ici.

Lemme. Soit $BF\phi$ (Fig. 3.), la courbe cherchée, $F\phi$ une portion infiniment petite partagée en deux élémens au point O, menons l'ordonnée OR, je dis que dans le cas du maximum le sinus de l'angle de courbure au point F est au produit du sinus de IFO par la différentielle de l'arc BF en rapport constant.

N. B. L'angle de courbure est l'angle formé par la tangente en un point avec la courbe elle-même ou par deux élémens consécutifs de la courbe ; la ligne FI est une parallèle à l'axe des abcisses BR.

Soit pris un point ω infiniment voisin de O et tel que $F\omega+\omega\phi=FO+O\phi$; élevons l'ordonnée RL fonction de l'arc BO et RM fonction de l'arc BT ; de même $\phi\mu$ fonction de l'arc $B\theta$ et $\phi\lambda$ fonction de l'arc $B\omega$; la courbe $BL\zeta$ ou $B\lambda\zeta$ devra jouir du maximum ; or, par cette propriété les deux espaces infiniment rapprochés que comprennent les courbes sont égaux entr'eux ; donc le triangle $ZLY=\zeta\lambda Y$ ou négligeant LYM, $\lambda\mu Y$, $ZML=\zeta\lambda\mu$; abaissant les perpendiculaires ζC, $Z\zeta$, il suit $\zeta C\times LM=\zeta D\times\lambda\mu$; or, $LM=LR-MR=f(BO)-f(BT)=f'(BO)d.BO$; (j'appelle ici f' pour me rapprocher d'une notation connue ce qu'il nomme $\triangle$) ; de même $\lambda\mu=\lambda\phi-\mu\phi=f(B\omega)-f(B\theta)=f'(B\omega)\ d.B\omega$; or $d.BO=TX$, $d.B\omega=\theta\xi$, de plus, $ZC=FI$, $\zeta D=\phi K$ donc, substituant $FI.f'(BO).\ TX=\phi Kf'(B\omega).\theta\xi$

Les lignes OX, $\omega\xi$ sont égales ; les triangles OTX, $\omega\theta\xi$ sont semblables aux triangles FOI, $\phi\omega K$, donc

$$TX:\theta\xi=tg.IFO:tg.K\phi\omega$$

de plus $\quad FI:\phi K=FO\sin FOI:\phi\omega\sin\phi\omega K.$

donc, $\quad f'(BO)\ tg.\ IFO\ \sin FOI\times FO=f'(B\omega)\ tgK\phi\omega\ \sin\phi\omega K\times\phi\omega$

mais, $\quad \sin FOI tg.IFO=R\ \sin IFO$

et $\quad \sin\phi\omega K tg.K\phi\omega=R.\ \sin K\phi\omega.$

donc $\quad FO\sin IFOf'(BO)=\phi\omega\ \sin K\phi\omega\ f'(B\omega)$

Substituant BF à BO et BO à $B\omega$, faisant quelques changemens d'ordre, et remarquant que $FO:\phi\omega=\sin O\phi F:\sin OF\phi$, nous arriverons finalement à l'équation

$$\frac{\sin OF\phi}{\sin IFOf'(BF)}=\frac{\sin O\phi F}{\sin K\phi\omega f'(B\phi)}$$

d'où on voit que ce rapport a la même expression, que l'on considère le point F ou le point ϕ, et par conséquent est constant Q.E.D.

Problème. Tout se réduit donc maintenant à trouver une courbe $B\ ,F\phi$ telle que le sinus de sa courbure, en un point quelconque F, soit à $\sin IFOf'(BF)$ en rapport constant ; en effet, on peut considérer $OF\phi$ et

$O\phi F$ comme étant chacun la moitié de l'angle de courbure formé par le point O, ou son infiniment voisin F, car on a $OF\phi = O\phi F = \frac{1}{2}\,\phi OS$.

Soit BFl (Fig. 4.) cette courbe, $BF=t$, $Fl=dt$, $BP=y$, $Pp=dy$, $PF=x$, $Cl=dx$, $f(BF)=v$, soit Fm la tangente à la courbe au point F et mFl l'angle de courbure; menons ml et construisons le petit triangle rectangle lnm, on aura $nl=d^2y$, $ml=Fl \sin mFl$; de plus à cause de $Flc \backsim mnl$, $dx:dt=d^2y:ml$, d'où $\sin mFl=\frac{d^2y}{dx}$; de plus $\sin IFO$ qui devient ici $\sin CFl=\frac{Cl}{Fl}=\frac{dx}{dt}$; enfin $f(t)=\frac{dv}{dt}$; donc nous avons d'après le théorème, $\frac{d^2y}{dx}=A\frac{dxdv}{dt^2}$; supposons dt constant et posons $A=\frac{dt}{a}$, nous aurons finalement $dv=\frac{adtd^2y}{dx^2}=\frac{adtd^2y}{dt^2-dy^2}=\frac{d^2y}{dt^2-dy^2}$, si on fait abstraction du facteur constant adt; or, c'est bien là l'équation que Jaques Bernouilli a attaquée, et que Jean a depuis avouée fausse, en montrant qu'il fallait dx^3 et non dx^2, et en remettant le facteur constant dt^2 au lieu de dt.

Jean Bernouilli termine son mémoire en montrant l'accord de ces résultats avec ceux que l'on tirerait de la considération de la lintéaire, considération que son frère avait cru être la base unique de ses recherches.

Il est facile de voir que cette solution repose sur deux principes, le premier que dans le cas du maximum la différentielle de la fonction considérée est nulle, ou que cette fonction est la même dans deux états infiniment voisins; le second que le maximum appartenant à une courbe, appartient à une portion qnelconque de cette courbe. De plus le théorème général dont elle se sert, et qu'il faut appliquer diversement suivant les différens cas est que le sinus de la courbure en un point quelconque est à une certaine quantité en rapport constant.

§. III. *Seconde méthode de Jean Bernouilli.*

En 1718, Jean Bernouilli donna un second mémoire sur les isopérimètres dans lequel il eut la candeur d'avouer qu'il s'était trompé précédemment; mais il n'eut pas celle de convenir que sa nouvelle méthode n'était autre que celle de son frère, et il s'étendit fort au long sur la prétendue complication de cette dernière et sur les simplifications qu'il y avait apportées; nous allons établir les lemmes sur lesquels il fonde ses solutions, puis nous les appliquerons avec lui à la solution du même problème qui vient déjà de nous occuper.

Lemme 1.er Soient deux droites rectangulaires aq, qe (Fig. 5.) et deux autres droites brisées $agie$, $abce$ telles que $ag+gi+ie=ab+bc+ce$, et que les abcisses af, fp, pq, soient égales entr'elles; soient les petites lignes bm, gn, io, ch perpendiculaires sur ag, bc, ie, et enfin soient bk, cl parallèles à aq; je dis qu'on a

$$\left\{\frac{fb}{ab}-\frac{kc}{cb}\right\} bg=\left\{\frac{kc}{ce}-\frac{le}{cb}\right\} ci$$

En effet, des triangles semblables gmb et afb, bng et ckb, coi et ckb, ihc etc. on tire:

$$gm=\frac{bf\times bg}{ab} \qquad bn=\frac{kc\times bg}{bc} \qquad co=\frac{kc\times ci}{bc} \qquad ih=\frac{lc\times ci}{ce}$$

Mais de $ag+gi+ie=ab+bc+ce$, on tire $gm-bn-co+ih=0$, donc substituant et réduisant

$$\left\{\frac{fb}{ab}-\frac{kc}{bc}\right\} bg=\left\{\frac{kc}{bc}-\frac{le}{ce}\right\} ci \text{ Q.E.D.}$$

Coroll. De là $bg:ci=\frac{kc}{bc}-\frac{le}{ce}:\frac{fb}{ab}-\frac{kc}{bc}$; multipliant les deux derniers termes par $ab\times bc\times ce$, on a

$bg:ci=ab\times ce\times ck-ab\times bc\times le:bc\times ce\times fb-ab\times ce\times ck$, ce qui est le Lemme premier de Jaques Bernouilli.

Lemme 2. Les mêmes choses étant posées que ci-dessus, mais les points b et g, i et c (Fig. 6.), étant joints par des arcs de cercle, dont les centres sont en a et en e; menant gn, io parallèles à aq jusqu'à la rencontre en n et o des ordonnées fb, pc, je dis qu'on a

$$\left\{\frac{fb}{af}-\frac{kc}{bk}\right\} bn=\left\{\frac{kc}{bk}-\frac{le}{cl}\right\} co$$

En effet, si on construit sur gi un triangle rectangle dont les côtés soient parallèles à aq et qe, on trouvera facilement : $gi^2=(bk+gn+oi)^2+(kc-co-bn)^2$

D'autre part : $bc^2=bk^2+kc^2$

Comme $bc=gi$, et négligeant les carrés de $gn+oi$, $co+bn$, on a

$2bk(gn+oi)=2kc(co+bn)$, ou $gn+oi=kc\frac{co}{bk}+kc\frac{bn}{bk}$; or, afb est semblable à bng, donc $af:fb=bn:gn$, donc

$gn=fb\times\frac{bn}{af}$; de plus cle est semblable à coi, donc $oi=le\times\frac{co}{cl}$; donc substituant et réduisant

$$\left\{\frac{fb}{af}-\frac{kc}{bk}\right\} bn=\left\{\frac{kc}{bk}-\frac{le}{cl}\right\} co \quad \text{Q.E.D.}$$

Corollaire. De là $bn:co=\frac{kc}{bk}-\frac{le}{cl}:\frac{fb}{af}-\frac{kc}{bk}$; multipliant les deux derniers termes par $af\times bk\times cl$, on a $bn:co=af\times cl\times kc-af\times bk\times le:fb\times bk\times cl-af\times cl\times ck$, ce qui est le lemme second de Jaques Bernouilli.

Cela posé, l'auteur passe aux applications.

Problème 1.er Ce problème n'est autre que le premier problème des isopérimètres, proposé par Jaques; nous ne nous y arrêterons pas.

Problème second. Le même que le second de la méthode précédente, savoir celui dans lequel les ordonnées de la courbe qui comprend l'espace maximum sont fonctions des arcs de la courbe cherchée.

Comparons la Fig. 7, dans laquelle ae est un élément de la courbe cherchée avec la Fig. 5, dans laquelle cet élément est divisé en trois portions infiniment petites; d'après nos conventions la somme des fonctions des arcs Bab, $Babc$ doit être égale à la somme des fonctions des arcs, Bag, $Bagi$, et la différence des fonctions de Bag, Bab doit être égale à la différence des fonctions de $Babc$, $Bagi$; mais $f(Bag)-f(Bab)=f'(Bag)d.\,Bag$, et comme $d.\,Bag=mg$, $f(Bag)-f(Bab)=f'(Bag)\times mg$, de même on obtient $f(Babc)-f(Bagi)=f'(Babc)\times ih$; donc ici $f'(Babc)\times ih=f'(Bag)\times mg$; mais prenant les valeurs de mg, ih, telles que les donne le lemme 1.er, et substituant on trouve

$$f'(Bag)\times fb\times\frac{bg}{ab}=f'(Babc)\times le\times\frac{ci}{ce},\ \text{et}\ bg:ci=\frac{le}{ce}f'(Babc):\frac{fb}{ab}f'(Bag)=\frac{ab}{fbf'(Bag)}:\frac{ce}{lef'(Babc)}$$

Prenant le rapport de $bg : ci$ donné dans le lemme 1, et substituant, on arrive à

$$\left\{\frac{fb}{ab}-\frac{kc}{bc}\right\}\frac{ab}{fbf'(Bag)}=\left\{\frac{kc}{bc}-\frac{le}{ce}\right\}\frac{ce}{lef'(Babc)}$$

Multipliant chaque membre par $\frac{bc}{kc}$ on obtient

$$\left\{\frac{fb}{ab}-\frac{kc}{bc}\right\}\frac{ab\times bc}{fb\times kcf'(Bag)}=\left\{\frac{kc}{bc}-\frac{le}{ce}\right\}\frac{bc\times ce}{kc\ lef'(Babc)}$$

Or, ces deux termes étant identiquement composés l'un pour le point a, l'autre pour le point b, il est clair que pour un point quelconque la quantité qu'ils représentent est constante; d'où suit en regardant le produit $\frac{ab\times bc}{fb\times kc}$ comme sensiblement égal à $\left(\frac{ab}{fb}\right)^2$

$$\left\{\frac{fb}{ab}-\frac{kc}{bc}\right\}\frac{ab^2}{fb^2f'(Bag)}=A$$

Or, appelant $BN=y$ $Na=x$ $Ba=t$, $fa=dy=$ constante, $fb=dx$ $ab=dt$ on a $\frac{fb}{ab}=\frac{dx}{dt}$; de plus, $\frac{kc}{bc}$ est ce que devient $\frac{dx}{dt}$ en passant d'un élément à l'autre, c'est-à-dire $\frac{dx}{dt}+d\frac{dx}{dt}$; donc $\frac{fb}{ab}-\frac{Kc}{bc}=-d\frac{dx}{dt}=\frac{dxd^2t-dtd^2x}{dt^2}$; substituant, l'expression devient $\left\{\frac{dxd^2t-dtd^2x}{dt^2}\right\}\frac{dt^2}{dx^2f'(t)}=\frac{dy}{a}$, en faisant $Ba=Bag$ et $A=\frac{dy}{a}$; mais faisant $f(t)=T$, on a $f'(t)=\frac{dT}{dt}$; de plus $dt^2=dx^2+dy^2$; donc $dtd^2t=dxd^2x$; substituant ces valeurs, on obtient $\frac{d^2x(dx^2-dt^2)}{dx^2}=\frac{dydT}{a}=-\frac{d^2xdy^2}{dx^2}$, d'où enfin $-dy\frac{d^2x}{dx^2}=\frac{dT}{a}$, et intégrant $a\frac{dy}{dx}=T\pm b$, ou $ady=Tdx$, quand on fait $b=0$. Bernouilli montre que cette équation concorde bien avec celle qu'avait donnée son frère, savoir $dy=\frac{Tdt}{\sqrt{a^2+T^2}}$, équation de laquelle celui-ci avait déja tiré la précédente lorsqu'il avait voulu montrer l'erreur de Jean.

Problème 3. Les mêmes données que ci-dessus, sinon que ce sont les abcisses qui sont fonctions des arcs, et que les ordonnées de la courbe qui renferme l'espace maximum sont égales aux ordonnées de la courbe cherchée.

Problème 4 Problème de la Brachystochrone.

Problème 5. De toutes les courbes isochrones comprises entre deux points donnés, trouver celle qui comprend entr'elle et la droite qui joint les deux points extrêmes le plus grand espace.

Aux solutions de chacun de ces problèmes, semblables à celle que nous avons rapportée, Bernouilli en joint une autre, dans laquelle il n'opère pas de différentiation : à la fin de son mémoire, il ajoute les deux solutions de la Brachystochrone, qu'il avait trouvées long-temps auparavant et que nous avons fait connaître.

§. IV. *Remarques sur ces méthodes.*

Remarque 1.re Commençons par éclaircir la difficulté qui s'était élevée entre les deux frères, et montrons en quoi la première méthode de Jean Bernouilli était vicieuse; nous avons vu que (en désignant par *s. C.* le sinus de courbure en un point quelconque), cette méthode donnait $\frac{s.C.F}{X}=\frac{s.C.\phi}{Y}$;

et de là, Bernouilli concluait $\frac{s.C.F.}{X}=A$; or, remarquons que cette conclusion ne peut être vraie que lorsqu'il y a parfaite uniformité entre les deux membres de l'équation; mais X est affectée de *sin IFO*, Y est affectée de *sin* $K\phi\omega$: or, pour l'uniformité, il faudrait que Y (Fig. 3.) fût affectée de *sin.* $V\phi\phi'$, ce dernier angle étant celui que produit l'élément $\phi\phi'$ subséquent au point ϕ, tout comme IFO est l'angle que produit l'élément FO subséquent au point F; de là suivent trois conséquences. 1.° Il faut considérer trois élémens de la courbe et non pas seulement deux; 2.° l'expression finale doit être affectée d'un côté de $\frac{IO}{OF}$, de l'autre de $\frac{\nu\phi'}{\phi\phi'}$; or, si on se transporte à la fig. 5 et au résultat obtenu plus haut, dans lequel $\frac{IO}{OF}$ est remplacé par $\frac{fb}{ab}$ et $\frac{\nu\phi'}{\phi\phi'}$ par $\frac{le}{ce}$, on verra que cette condition y est effectivement remplie; 3.° enfin, dans ce dernier résultat, il faut multiplier par $\frac{bc}{kc}$ les deux membres de l'équation obtenue, et cela, comme le remarque Bernouilli, pour permettre de regarder les deux élémens ab, bc comme affectés précisément de la même manière des diverses quantités qui leur correspondent, et de celles qui correspondent à l'élément suivant; sans cela, en effet, l'élément ab serait affecté de la quantité $\frac{fb}{ab}$ qui lui correspond, et l'élément bc de la quantité $\frac{le}{ce}$ qui correspond à l'élément ce; au contraire les quantités $\frac{fb}{ab}\times\frac{kc}{bc}$, $\frac{kc}{bc}\times\frac{le}{ce}$ sont parfaitement uniformes : mais multiplier par $\frac{bc}{kc}$, c'est multiplier par $\frac{dt}{dx}+d.\frac{dt}{dx}$; lors donc que ce facteur affecte un autre facteur infiniment petit $\frac{ab}{fb}=\frac{dt}{dx}$, on peut négliger le $\frac{dt}{dx}d\frac{dt}{dx}$, et le facteur $\frac{bc}{kc}$ introduit simplement un facteur $\frac{dt}{dx}$ de plus : or, c'est précisément ce qu'il faut faire sur l'expression fausse $dv=\frac{adtd^2y}{dx^2}$ pour qu'elle devienne la vraie $dv=\frac{adt^2d^2y}{dx^3}$

Remarque 2.[e] Le premier problème des Isopérimètres est bien résolu par la première méthode de Jean Bernouilli, parce que les angles IFO, Kφω n'affectent pas le résultat final qui n'est composé que des sinus de courbure et des f'

Remarque 3. Il est facile de voir que les lemmes de Jean Bernouilli sont au fond absolument les mêmes que ceux de Jaques.

Remarque 4.[e] Les deux frères, et Jaques le premier, ont remarqué la réciprocité qui existe entre le maximum et le minimum dans les problèmes de ce genre.

Remarque 5.[e] Jaques Bernouilli manque de rigueur et d'exactitude dans l'usage des constantes arbitraires introduites par l'intégration, et son frère lui fait, à cet égard, des reproches mérités; cela tient à ce qu'il n'avait point réfléchi sur la considération des limites entre lesquelles la courbe s'étend.

Remarque 6.[e] En résumé, voici l'état dans lequel ces savans ont laissé le problème.

1.° Ils se sont plus occupés de maximums et minimums relatifs que d'absolus.

2.° Ils ont vu que toute la question se réduisait à trouver les relations entre les différentielles des diverses fonctions considérées.

3.° Ils n'ont aucun problème où la fonction donnée fût affectée de formules intégrales.

4.[e] Ils ont remarqué la réciprocité qui existe dans les problèmes de maximums et minimums relatifs.

5.° Ils ont toujours admis comme vrai le Principe, que si une courbe jouit d'une propriété de maximum ou de minimum, chaque portion de cette courbe en jouit à part. Jaques Bernouilli démontre ce principe, mais paraît se douter qu'il n'est pas général.

6.° Ils n'ont donné aucune considération sur les limites entre lesquelles doit s'étendre la fonction donnée.

7.° Ils n'ont fourni aucun moyen général de distinguer le maximum du minimum : Jaques Bernouilli fait cependant, dans chaque cas particulier, des remarques à ce sujet.

CHAPITRE IV.

MÉTHODES D'EULER.

Nous avons maintenant à exposer les recherches de ce Géomètre qu'on trouve partout, et qui partout a créé ou perfectionné; ses travaux sur le problème dont nous nous occupons, ont fait faire des pas immenses à cette portion de la science; ils ont servi de passage et d'avant-coureurs à la découverte du calcul des Variations, auquel depuis il les sacrifia avec cette modestie que le vrai génie comporte seul. Dans ce Chapitre, nous ne voulons exposer que ceux des efforts d'Euler, qui ont précédé le calcul des Variations, nous réservant de parler dans le suivant, des perfectionnemens qu'il a apportés à ce calcul même : outre les solutions de divers problèmes de détail, il a donné, sur les minimums et maximums, trois mémoires principaux; le premier, intitulé : *Problematis Isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis*, se trouve dans le tom. VI, pag. 123, des Commentaires de l'Académie de Pétersbourg; le second, intitulé : *Curvarum Maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis*, se trouve dans la même collection, tom. VIII, pag. 159; enfin, le troisième est celui que nous avons déjà indiqué pag. 1 de cette dissertation. Nous nous arrêterons fort peu sur les deux premiers travaux, parce que les méthodes qui y sont exposées sont reprises beaucoup plus en grand et beaucoup perfectionnées dans le dernier; nous nous contenterons d'en indiquer la marche et les principales applications.

Les Bernouilli n'avaient pas établi, dans le problème, les diverses distinctions qu'il comporte; c'est d'abord à quoi s'attache Euler, qui détermine deux classes de maximums, l'absolue et la relative, mais sans leur imposer encore ces dénominations; ensuite il subdivise cette dernière en un nombre quelconque d'autres, suivant que les courbes cherchées sont affectés d'une, deux, ou d'un nombre quelconque de propriétés communes. Il montre, dans le cas du maximum ou minimum relatif, la réciprocité existant entre les propriétés communes et celle dont on demande le maximum ou minimum; il établit que deux élémens de la courbe suffisent pour la solution du problème absolu, mais qu'il en faut considérer 3, 4, etc. suivant qu'on donne 1, 2, etc. propriétés communes; puis, il expose la méthode suivante: étant donnés deux élémens d'une courbe, et leur point de rencontre venant à subir un changement infiniment petit, il faut déterminer le changement que subissent en même temps l'arc total, l'abcisse et l'ordonnée; puis, étant donnée une expression dont il faut rechercher le maximum ou minimum, expression composée en fonctions de l'arc ou des coordonnées, il faut voir ce qu'elle devient après ce changement; en égalant ce second état à l'état primitif, on a la condition du maximum ou minimum; l'équation obtenue se transforme facilement en une autre, dont les deux termes sont uniformément composés l'un en quantités relatives au premier élément de la courbe, l'autre en quantités relatives au second, d'où suit le principe de Jean Bernouilli, savoir, que l'expression que renferme un de ces termes est une expression constante.

Euler énonce ce principe d'une seconde manière plus rapprochée de celle à laquelle nous sommes accoutumés, en disant que la différentielle de cette expression est nulle; mais on sent que c'est absolument le même principe. En effet, soit X une quantité variable relative à un élément de la courbe, cette même quantité deviendra $X+dX$ pour l'élément suivant. Or, pour le maximum ou minimum, il faut que $X=X+dX$, c'est-à-dire, $dX=o$, ou $X=$ constante. Cette méthode très-simple est appliquée par Euler à la recherche des courbes, qui rendent maximum ou minimum les quantités

$\int x^n ds$, $\int x^m y^n ds$, $\int \frac{ds^m dy^n}{dx^{m+n-1}}$, x, y, s étant l'abcisse, l'ordonnée et l'arc.

Passant à la seconde classe de maximums et minimums, il y a à considérer les variations de deux points au lieu d'un; soient v, v' ces deux variations, les conditions du maximum mises en équations, comme nous venons de l'indiquer, conduisent aux résultats $Pv-Qv'=o$ $Rv-Sv'=o$, d'où on tire $QR=PS$: or, on peut toujours ramener Pv et Rv à être des quantités constantes, c'est-à-dire, avoir $Q=P+dP$ et $R=S+dS$, valeurs qui, substituées dans notre dernière équation, conduisent après une intégration à la suivante $P+aR=o$, a étant une quantité constante; on voit ici le premier germe de la multiplication par des constantes pour résoudre les problèmes de maximums relatifs; cette théorie sera exposée en entier dans l'analyse du grand ouvrage d'Euler sur ce sujet: toute l'opération se réduit donc maintenant à rechercher la valeur des quantités P et R; Euler en donne un grand nombre d'exemples et en dresse une table: ainsi, il suppose que la propriété donnée soit $\int Tdx$, ou $\int Tds$, ou $\int Tdy$, et T étant fonction de x, ou de y, ou de s, ou de x et y, ou de x et s, ou de x, y, s, etc. ces exemples généraux sont éclaircis eux-mêmes par d'autres exemples plus particuliers, dans lesquels on spécifie positivement la nature de la fonction T; à l'occasion d'un de ces exemples, Euler remarque

que la table qu'il vient de dresser ne suffit pas dans le cas où la formule proposée est affectée d'intégrales, et il en dresse une autre pour ces sortes de cas; il y montre la valeur de P pour les propriétés, $\int Tdx \int Vdx$, $\int Tdx \int Vdy$, $\int Tdx \int Vds$, etc.

Quant à la troisième classe, c'est-à-dire, à celle où on a deux propriétés communes, on arrive par la même voie à l'équation $P+aR+bS=o$, a et b étant des constantes; Euler applique encore ce résulta à des exemples où on donne des fonctions de x, y, s, dx, dy, ds, et ne va pas plus loin.

Quelque générale que paraisse cette méthode, il est cependant facile de voir qu'elle laisse à désirer 1.° Elle n'a point été appliquée aux fonctions des coefficiens différentiels des variables supérieurs au premier; 2.° à celles qui sont données par leurs différentielles; 3.° elle mène à des formules qui peuvent être généralisées. C'est à suppléer à ces imperfections, qu'Euler consacre son second mémoire, dans lequel il expose une manière plus générale de rechercher les différentielles, qui doivent être égalées à zéro et dans lequel il adopte une notation particulière pour indiquer les différentielles successives, soit des variables, soit de la fonction; mais, comme sa méthode n'est autre que celle qu'il a depuis étendue et perfectionnée dans son grand ouvrage, tout en renonçant cependant à sa notation, nous ne croyons pas nécessaire d'entrer dans les détails de ce mémoire, qui mène à plusieurs formules assez compliquées, et nous passons de suite à l'analyse de son beau travail publié en 1744, et qui est aussi général qu'on peut le désirer. Nous énoncerons d'abord les considérations générales dont il fait précéder sa méthode, nous expòserons ensuite cette méthode, et nous indiquerons, en les éclaircissant par des exemples, tous les cas qu'il examine, et autant que possible les formules finales auxquelles il parvient.

Dans son premier Chapitre, il établit 1.° la distinction de la méthode en absolue et relative; 2.° la nécessité d'indiquer une limite pour que le problème ait un sens, et le choix qu'il fait pour limite d'une portion déterminée d'abcisse; 3.° les diverses natures et compositions de la fonction dont on cherche le maximum ou minimum; 4.° le privilége qu'ont dans certains cas les portions quelconques d'une courbe de jouir de la propriété maximum ou minimum dont jouit la courbe entière, et les cas dans lesquels ce privilége n'existe pas; 5.° la condition du maximum ou minimum, savoir, que l'état primitif et l'état subséquent de la fonction soient égaux, ou, en d'autres termes, que la différentielle de la fonction soit nulle; 6.° enfin, sa notation, sa ponctuation et son mode de différentiation : ce dernier article étant le seul de ceux que je viens d'énumérer dont le détail n'ait pas encore été exposé, je vais le faire connaitre.

Soient x et y deux quantités variables, et soient p, q, r, etc. d'autres quantités telles que $dy=pdx$ $dp=qdx$, $dq=rdx$, $dr=sdx$, etc, on aura les valeurs suivantes : $dy=pdx$, $d^2y=qdx^2$, $d^3y=rdx_3$, $d^4y=sdx^4$, etc., dx étant supposée constante. Cela posé, la valeur de certaines fonctions, comme, par exemple, l'arc $w=\int\sqrt{dx^2+dy^2}$ devient $\int dx\sqrt{1+p^2}$, le rayon osculateur $-\frac{(dx^2+d^2y)^{3/2}}{dxd^2y}=-\frac{(1+p^2)^{3/2}}{q}$ la soustangente $\frac{y}{p}$, la sousnormale py, la tangente $\frac{y\sqrt{.+p^2}}{p}$, la normale $y\sqrt{1+p^2}$

Soit maintenant F la valeur d'une fonction pour un point dont les coordonnées sont x et y, soient $F' F'' F''' F^{\text{IV}}$ etc. les valeurs immédiatement subséquentes de cette fonction et $F_{,}$ $F_{,,}$ $F_{,,,}$ F_{IV} etc. les valeurs immédiatement antécédentes; soient de même y_{IV} $y_{,,,}$ $y_{,,}$ $y_{,}$ y y' y'' y''' y^{IV}, etc. $p_{,,,}$ $p_{,,}$ $p_{,}$ p p' p'' p''', etc.

$q_{,,}\ q_{,}\ q\ q'\ q''$ etc., les valeurs correspondantes des ordonnées de leurs coefficiens différentiels, on trouvera facilement les relations suivantes.

$F_{III}=F_{IV}+dF_{IV}$, $F_{II}=F_{,,,}+dF_{,,,}$, $F_{,}=F_{,,}+dF_{,,}$, $F=F_{,}+dF_{,}$, $F'=F+dF$, $F''=F'+dF'$, $F'''=F''+dF''$, $F^{IV}=F'''+dF'''$, etc.

$$p_{III}=\frac{y_{II}-y_{III}}{dx}\quad p_{II}=\frac{y_{I}-y_{II}}{dx}\quad p_{I}=\frac{y-y_{I}}{dx}\quad p=\frac{y'-y}{dx}$$

$$p'=\frac{y''-y'}{dx}\quad p''=\frac{y'''-y''}{dx}\quad p'''=\frac{y^{IV}-y'''}{dx}\ \text{etc.}$$

$$q_{II}=\frac{y-2y_{I}+y_{II}}{dx^2}\quad q_{I}=\frac{y'-2y+y_{I}}{dx^2}\quad q=\frac{y''-2y'+y}{dx^2}\quad q'=\frac{y'''-2y''+y'}{dx^2}\quad q''=\frac{y^{IV}-2y'''+y''}{dx^2},\ \text{etc.}$$

$$r=\frac{y'''-3y''+3y'-y}{dx^3},\quad s=\frac{y^{IV}-4y'''+6y''-4y'+y}{dx^4}\quad t=\frac{y^{V}-5y^{IV}+10y'''-10y''+5y'-y}{dx^5},\ \text{etc. etc.}$$

Par la même notation si $\int Zdx$ est la fonction donnée pour le point dont l'abcisse est x, et par conséquent Zdx pour l'élement dont l'abcisse est dx, on aura $Z'dx$, $Z''dx$, $Z'''dx$, et pour les élémens suivans, $Z_{,}dx$, $Z_{,,}x$, $Z_{,,,}dx$, etc. pour les précédens, et de là, la valeur de la fonction correspondante à l'abcisse $x+X$, sera $\int Zdx+Zdx+Z'dx+Z''dx+Z'''dx,+$, etc. jusqu'à ce qu'on arrive au point dont l'abcisse est $x+X$.

Toutes ces conventions bien déterminées, supposons qu'une quelconque des ordonnées que nous avons considérées, par exemple, y' prenne un accroissement infiniment petit, que nous nommons ω, toutes les autres ordonnées n'en seront nullement affectées, et d'entre les quantités dont nous venons de rapporter les valeurs, celles-là seulement prendront un accroissement qui contiennent y' dans leur expression : ainsi, p deviendra $=\frac{y'+\omega-y}{dx}$ et prendra, par conséquent, un accroissement $\frac{\omega}{dx}$; de même $p'=\frac{y''-y'}{dx}$ deviendra $\frac{y''-y'-\omega}{dx}$ et prendra, par conséquent un accroissement $-\frac{\omega}{dx}$; cherchant de même les accroissemens des autres quantités affectées de y', on forme le Tableau suivant :

Quant.	Accr.	Quant.	Accr.	Quant.	Accr.	Quant.	Accr.	Quant.	Accr.
y'	$+\omega$	p	$+\frac{\omega}{dx}$	$q_{,}$	$+\frac{\omega}{dx^2}$	$r_{,,}$	$+\frac{\omega}{dx^3}$	$s_{,,,}$	$+\frac{\omega}{dx^4}$
		p'	$-\frac{\omega}{dx}$	q	$-\frac{2\omega}{dx^2}$	$r_{,}$	$-\frac{3\omega}{dx^3}$	$s_{,,}$	$-\frac{4\omega}{dx^4}$
				q'	$+\frac{\omega}{dx^2}$	r	$+\frac{3\omega}{dx^3}$	$s_{,}$	$+\frac{6\omega}{dx^4}$
						r'	$-\frac{\omega}{dx^3}$	s	$-\frac{4\omega}{dx^4}$
								s'	$+\frac{\omega}{dx^4}$

Quant. $t_{IV}\ t_{,,,}\ t_{,,}\ t_{,}\ t\ t'$

Accr. $+\frac{\omega}{dx^5}$, $-\frac{5\omega}{dx^5}$, $+\frac{10\omega}{dx^5}$, $-\frac{10\omega}{dx^5}$, $+\frac{5\omega}{dx^5}$, $-\frac{\omega}{dx^5}$ etc., et .

Maintenant, rien n'est plus facile que la solution du problème : on veut savoir quel accroissement prendra la fonction proposée qand y' devient $y'+\omega$, on différentiera cette fonction, et on remplacera les accroissemens dy', dp, dq, etc. par les valeurs que nous venons de leur trouver, savoir, $\omega, \frac{\omega}{dx}, -\frac{2\omega}{dx}$. etc. l'équation ainsi obtenue, égalée à o, donnera la condition du maximum et minimum absolu.

Exemple. Soit $F=y'\sqrt{1+p^2}$, $dF=dy'\sqrt{1+p^2}+\frac{y'pdp}{\sqrt{1+p^2}}$; remplaçant dy' et dp par leurs valeurs, nous aurons $dF=\omega\left\{\sqrt{1+p^2}+\frac{y'p}{dx\sqrt{1+p^2}}\right\}$

Entrons maintenant avec Euler dans son second Chapitre, pour examiner les divers cas que présente le problème. $\int Zdx$ est toujours l'expression de la fonction dont on cherche le maximum ou minimum.

Premier cas. Soit $Z=f(x,y)$: ce cas est celui du calcul différentiel ordinaire.

La fonction $\int Zdx$, qui s'étend à la courbe entière, est composée des fonctions partielles $Z_{''}dx$ $Z_{'''}dx$ $Z_{''}dx$ $Z_{'}dx$ Zdx, etc. etc., et l'accroissement de cette fonction est la somme des accroissemens des fonctions partielles ; mais on a $dZ=Mdx+Ndy$, $dZ'=M'dx+N'dy'$ $dZ''=M''dx+N''dy''$, $dZ_{'}=M_{'}dx+N_{'}dy_{'}$ etc., d'où il est facile de voir que par la règle que nous venons de donner, l'accroissement cherché doit se réduire à $N'\omega dx$, qui, par la condition du maximum ou minimum, donne l'équation $N'=o$: or, comme $N'=N+dN$, et que dN peut être négligé devant N, l'équation se réduit à $N=o$.

Remarque. Il se peut que quelquefois $N=\infty$ et cette valeur, qui est aussi, dans certains cas, la condition cherchée, conduit à d'autres courbes.

Exemple. $\int(ax-y^2)ydx$, $Z=(ax-y^2)y$, $dZ=aydx+(ax-3y^2)dy$, $M=ay$ $N=ax-3y^2$, mais $N=o$: donc $y^2=\frac{1}{3}ax$, équation d'une parabole. Pour savoir s'il y a lieu à maximum ou à minimum, prenons l'équation de toute autre ligne ; par exemple, $y=o$ équation de la ligne droite, alors $\int(ax-y^2)ydx$ deviendra o : donc pour la parabole, c'est un maximum.

Second cas. Soit $Z=f(x,y,p)$, on aura $dZ=Mdx+Ndy+Pdp$, $dZ'=M'dx+N'dy'+P'dp'$, $dZ''=M''dx+N''dy''+P''dp''$, etc. etc. ; mais les seules quantités affectées par l'accroissement de y' sont, d'après notre table, dy', dp, dp', qui deviennent ω, $\frac{\omega}{dx}, -\frac{\omega}{dx}$; donc l'équation de condition est $\left(N'\omega+(P-P')\frac{\omega}{dx}\right)dx=o$, ou $N+\frac{P-P'}{dx}=o$; mais $P-P'=dP$, de plus N', peut être remplacé par N : donc enfin, $N-\frac{dP}{dx}=o$.

Remarque. Si x n'entre pas dans la fonction, ou si $M=o$, on a $dZ=Ndy+Pdp$; mais l'équation $N-\frac{dP}{dx}=o$, donne $Ndy+Pdp=Pdp+pdP=d.Pp$: donc $Z+C=Pp$.

Si, au contraire, $N=o$, l'équation de condition donne $dP=o$, $P=C$.

Si, à la fois, $M=o$, $N=o$, $dZ=Cdp$, $Z+D=Cp$; d'où $p=a$, $dy=adx$, ligne droite.

Dans le cas où $M=o$, l'équation de condition se déduirait immédiatement de l'expression $dZ=Ndy+Pdp$, si on avait $Pdp+pdP=o$; en effet, en égalant dZ à o, on aurait alors $Ndy-pdP=o$, ou $N-\frac{dP}{dx}=o$ parce que $dy=pdx$: on demande donc, dit Euler, une méthode générale et dégagée de toute considération géométrique, qui montre que, dans le cas dont nous parlons, on a pour le maximum ou minimum $Pdp=-pdP$.

Exemple. $\int\frac{dx\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{x}}$; fonction trouvée dans le problème de la brachystochrone pour la gravité uniforme et proportionnelle à la racine carrée de la hauteur du point de départ.

$$Z=\frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{x}}\quad dZ=-\frac{dx\sqrt{1+p^2}}{2x\sqrt{x}}+\frac{pdp}{\sqrt{x(1+p^2)}}\quad M=-\frac{\sqrt{1+p}}{2x\sqrt{x}}\quad N=o\quad P=\frac{p}{\sqrt{x(1+p^2)}}$$ de là,

$P=$const.$=\frac{p}{\sqrt{x(1+p^2)}}=\sqrt{\frac{1}{a}}$, d'où $dy=dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$; Cycloïde.

Exemple 2.^{e} $\int\frac{ydy^3}{dx^2+dy^2}=\int\frac{yp^3dx}{1+p^2}$, fonction trouvée lorsqu'on cherche le solide de révolution qui éprouve le moins de résistance d'un fluide dans lequel il se meut dans le sens de l'axe.

$$Z=\frac{yp^3}{1+p^2}\quad dZ=\frac{dyp^3}{1+p^2}+\frac{ydp(3p^2+p^4)}{(1+p^2)^2}:\quad M=o\quad N=\frac{p^3}{1+p^2}\quad P=\frac{y(3p^2+p^4)}{(1+p^2)^2};$$ appliquant la formule $Z+C=Pp$, trouvée pour le cas où $M=o$, nous aurons $\frac{yp^3}{1+p^2}+C=\frac{p^3y(3+p^2)}{(1+p^2)^2}$; ou $a(1+p^2)^2=2p^3y$, d'où on tire après diverses transformations $x=\frac{a}{2}\left\{\frac{3}{4p^4}+\frac{1}{p^2}+1+l.p\right\}$.

Troisième cas. Soit $Z=f(x,y,p,q)$ ou $dZ=Mdx+Ndy+Pdp+Qdq$.

Les lettres affectées par l'accroissement ω sont dans ce cas $y'\,p\,p'\,q_{\prime}\,q\,q'$ et l'équation qu'on obtient par la même méthode est $\omega\left\{N-\frac{P_{\prime}}{dx}+\frac{P}{dx}+\frac{Q'}{dx^2}-\frac{2Q}{dx^2}+\frac{Q'}{dx^2}\right\}dx=o$, qui réduite, donne

$$N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}=o$$

Remarque. Soit $N=0$ $C-P+\frac{dQ}{dx}=0$; si de plus $P=0$, on a $Cx+D-Q=0$. Soit $M=0$, $dZ=Ndy+Pdp+Qdq$; l'équation de condition peut facilement devenir $Ndy-pdP+p\frac{d^2Q}{dx}=0$; combinant ces deux équations et intégrant le résultat, on aura $Z-Pp+p\frac{dQ}{dx}-Qq=D$ Soit à la fois $M=0=N$, la dernière équation trouvée devient $Z-Cp-Qq=D$ en faisant attention que la précédente donne

$$-Pp+p\frac{dQ}{dx}=Cp$$

On pourrait immédiatement déduire l'équation de condition de l'équation donnée, si on savait *à priori* démontrer les relations suivantes $Pdp=-pdP$, $Qdq=\frac{pd^2Q}{dx}$ et quand on aurait $M=0$, en effet, alors $dZ=0=Ndy-pdP+p\frac{d^2Q}{dx}$ d'où on tire évidemment $0=Ndy-dy\frac{dP}{dx}+dy\frac{d^2Q}{dx^2}=N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}$

Exemple. $\int\frac{(1+p^2)^2dx}{q}$: fonction répondant à la courbe qui contient le plus petit espace entr'elle sa développée et son rayon de courbure en un point quelconque.

$Z=\frac{(1+p^2)^2}{q}$ $dZ=\frac{4pdp(1+p^2)}{q}-\frac{dp(1+p^2)^2}{q}$; d'où $M=0=N$, $P=\frac{4p(1+p^2)}{q}$ $Q=-\frac{(1+p^2)^2}{q^2}$; l'équation $Z-Cp-Qq-D=0$, donne $\frac{(1+p^2)^2}{q}=D+Cp-\frac{(1+p^2)^2}{q}$: on en tirera facilement

$$x=\frac{a+bp}{1+p^2}+b\int\frac{dp}{1+p^2}+c=\frac{a+bp+cp^2}{1+p^2}+b \text{ arc } (tg=p)$$

$$y=\frac{f+(a-c)p+(b+f)p^2}{1+p}+(c-a) \text{ arc } (\text{tg.}=p)$$ a, b, c, f étant des constantes.

En éliminant l'arc $(tg=p)$ entre ces deux équations et faisant quelques changemens de constantes, on arrive finalement à l'équation $\sqrt{by-ax}=\sqrt{\frac{bp-a}{1+p^2}}$, d'où, nommant s l'arc de la courbe, on tire

$s=2\sqrt{by-ax}$, équation de la cycloïde.

Quatrième cas. Soit $Z=f(x,y,p,q,r,s,t$, etc.$)$ ou $dZ=Mdx+Ndy+Pdp+Qdq+Rdr+Sds+Tdt+$, etc. En suivant la même marche que ci-dessus, on arrive à l'équation finale

$$N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\frac{d^4S}{dx^4}-\frac{d^5T}{dx^5}+\text{etc.}=0$$

équation qui fournit diverses intégrales suivant que quelqu'une des variables x, y, z, etc. n'est pas contenue dans Z.

La méthode que nous venons d'exposer d'après Euler peut fournir aux remarques suivantes :

1.° Elle serait simplifiée par une démonstration *à priori* des équations $Pdp = -pdP$

$$Qdq = \frac{pd^2Q}{d^2x}, \quad Rdr = -p\frac{d^3R}{dx^3}, \quad Sds = p\frac{d^4S}{dx^4}, \text{ etc.}$$

2.° Elle ne fournit pas de moyens directs de distinguer le maximum du minimum.

3.° Elle exige, pour avoir l'équation finale de condition qu'on néglige les quantités infiniment petites, qui distinguent les fonctions N, P, Q, etc. des mêmes fonctions accentuées.

Le Chapitre III est tout plein de sagacité et de génie : nous regrettons que l'époque fixée pour l'impression de ce Mémoire, nous force de sacrifier les développemens que nous voulions donner à ce Chapitre et aux suivans, et de nous restreindre à indiquer simplement la marche du raisonnement et du calcul.

Il s'agit d'abord, de rechercher l'accroissement d'une fonction qui contient des fonctions intégrales ou indéterminées, et, pour cela, il recherche l'accroissement même d'une formule intégrale provenant de celui d'une ordonnée quelconque; après quoi, il examine successivement les cas suivans :

1.° Que la fonction du maximum ou minimum soit fonction d'une intégrale, et que cette intégrale le soit des variables.

2.° Que la fonction proposée contienne les variables et une intégrale fonction de ces variables.

3.° Que cette intégrale soit non-seulement fonction des variables, mais encore d'une autre intégrale fonction elle-même des variables.

4.° Que cette intégrale soit fonction d'elle-même et des variables.

Le Chapitre IV contient l'application des méthodes et formules trouvées à un grand nombre de questions, en particulier, à la recherche de la différentielle d'une fonction formée du produit, du quotient, ou de toute autre combinaison de deux ou plusieurs intégrales; il établit le Théorème, que cette différentielle est la somme des différentielles de chaque intégrale multipliées chacune par un coefficient constant. Ces considérations servent de passage à l'examen des questions de maximums et minimums relatifs qui présentent un résultat tout-à-fait semblable, et forment les deux derniers Chapitres de l'ouvrage que nous analysons. Les problèmes de ce genre y sont résolus par les considérations suivantes : 1.° Il faut faire varier une, deux ou plusieurs ordonnées suivant qu'il y a une, deux ou plusieurs propriétés communes indiquées. 2.° La méthode absolue s'appliquera ici, parce que la courbe jouissant du maximum ou du minimum entre toutes les courbes, en jouit, à plus forte raison, entre toutes celles donées d'une propriété commune. 3.° Il faudra appliquer cette méthode non-seulement à la fonction donnée, mais encore à la propriété commune, parce que l'une et l'autre doivent rester les mêmes pour la courbe dans l'état primitif et pour cette même courbe après l'accroissement, c'est-à-dire, que les différentielles de l'une et de l'autre doivent être nulles. 4.° D'après cela, la propriété commune devant être traitée précisément comme la fonction donnée, on peut leur faire changer de rôle, c'est-à-dire, faire de la propriété commune la fonction *et vice versâ*. Ces considérations conduisent au même Théorème que celui établi à la fin du Chapitre IV, et que nous venons de rapporter.

Tel est l'exposé de la méthode originale d'Euler; on voit qu'elle fournit le moyen de résoudre toute question, quelque compliquée qu'elle soit, et qu'elle pose et éclaircit les principes généraux que toute méthode complette doit faire ressortir dans le problème dont nous nous occupons : nous verrons dans peu comment ce grand homme renonça au rôle de créateur qu'il s'était acquis par cet ouvrage pour prendre celui de commentateur d'une méthode qui avait le double avantage, 1.° d'être plus simple, tant en abrégeant les calculs, qu'en leur donnant une rigueur plus satisfaisante; 2.° d'être entièrement analytique; 3.° d'établir d'importantes relations sur les limites entre lesquelles doit avoir lieu le maximum ou minimum demandé. — Remarquons de plus ici, que nous ne trouvons pas de procédé général pour distinguer le maximum du minimum; dans son calcul différentiel, Euler avait bien établi le principe et fourni quelques critères pour les cas qui ne sortent pas du calcul différentiel, nous verrons dans la suite quels perfectionnemens on a apportés à cette théorie, et ce qu'il reste encore à faire sous ce rapport.

CHAPITRE V.

MÉTHODE DE *LAGRANGE* OU CALCUL DES VARIATIONS.

Euler avait formé le vœu qu'on trouvât une méthode purement analytique d'arriver à la solution des problèmes qui l'avaient si long-temps occupé: cette découverte était réservée à l'illustre Lagrange, qui le publia dans le second volume des Mémoires de Turin, et étendit ses applications aux plus importans problèmes de Dynamique. Euler s'empressa d'adopter cette nouvelle méthode, et avec ce désintéressement qu'inspire le vrai génie, il la substitua à ses propres recherches, et s'en rendit le commentateur dans les Mémoires de Pétersbourg. Dans un premier Mémoire, il l'appliqua à toutes les questions traitées dans son ouvrage déjà analysé; dans un second, il donna une explication des principes de ce calcul, basée sur les simples considérations du calcul différentiel: à la fin de son premier Mémoire, il donnait l'énoncé d'un théorème remarquable sur les rapports entre les équations du maximum et du minimum, et les conditions d'intégrabilité des équations différentielles. Quelques Géomètres s'élevèrent contre la méthode de Lagrange; Fontaine et Borda publièrent, en 1767, dans les Mémoires de l'Académie de Paris, des considérations tendant à la modifier. Lagrange leur répondit dans le Tome IV des Mémoires de Turin. Depuis lors, ce calcul a été universellement adopté sous le nom de calcul de variations qu'Euler lui avait imposé. Plusieurs Géomètres se sont occupés à l'agrandir et à le perfectionner. Lagrange l'a exposé en entier dans sa dernière leçon sur le calcul des fonctions. Borda, Laplace, Poisson se sont occupés des limites assignées aux fonctions dont on s'occupe; Laplace, Legendre et Lagrange, des moyens de distinguer les maximums des minimums; M.r Lacroix l'a exposé en entier dans son grand ouvrage sur le calcul intégral; M.r Gergonne a cherché à obtenir les résulats qu'il fournit par des procédés uniquement dépendans du calcul différentiel ordinaire. Enfin, divers auteurs, surtout dans les applications de ce calcul à la mécanique, ont montré l'usage qu'on pouvait faire des coefficiens indéterminés pour résoudre plusieurs questions qu'il fait naître. Nous ne nous proposons point d'entrer ici dans le détail de tous ces travaux; nous voulons seulement faire connaître les méthodes, exposer les résultats, et mettre le lecteur à portée de se faire une idée complète de l'état actuel de la science sous ce rapport: nous diviserons ce Chapitre, d'après les points de vue divers sous lesquels on peut considérer le calcul des variations.

§. I.er *Définition et Principes fondamentaux du Calcul des Variations et de ses Applications à la recherche des Maximums et Minimums.*

Dans le calcul différentiel ordinaire, lorsqu'on s'occupe de l'accroissement que prend une variable quelconque, que nous représenterons par l'abcisse ou l'ordonnée d'une courbe, on a coutume de ne considérer qu'une seule courbe; mais on pourrait aussi demander de déterminer pour une même abcisse, l'accroissement de l'ordonnée lorsqu'on passerait d'une courbe à une autre, et appelant y cette ordonnée, il faudrait exprimer par un signe particulier l'accroissement qui, dans le cas ordinaire, est nommé dy; la caractéristique δ a été consacrée à cet usage, et la quantité qui en est affectée, se nomme *variation*, en réservant le nom de différentielles pour les quantités affectées de la caractéristique d; les opérations et la marche du calcul seront, du reste, parfaitement semblables pour une des caractéristiques et pour l'autre, et le calcul des variations est celui qui donne le développement et les propriétés des quantités diversement affectées des deux caractéristiques: or, comme, dans les questions de maximums et minimums, la question se réduit (pour suivre notre emblème géométrique) à égaler à zéro, l'accroissement de la fonction considérée lorsqu'on passe d'une courbe à une courbe infiniment voisine, il suffira de chercher la variation de la fonction proposée et de l'égaler à zéro; c'est ce que nous ferons rapidement dans le Chapitre suivant, en considérant diverses natures de fonctions; mais auparavant, nous devons indiquer ici quelques principes fondamentaux, qui nous serviront dans toute la suite du calcul.

Premier principe. La différentielle de la variation d'une fonction est égale à la variation de la différentielle; la même chose a lieu pour la variation de la somme et pour la somme de la variation, et, dans les deux cas, quel que soit l'ordre de la variation, de la différentielle ou de la somme.

Ainsi, symboliquement $\delta^m d^n V = d^n \delta^m V$, et $\delta^m \int^n V = \int^n \delta^m V$.

Ce théorème résulte évidemment de l'indépendance des caractéristiques, et Lagrange l'a regardé comme suffisamment démontré par cette considération; on peut, du reste, l'établir directement.

Second principe. Soit une fonction composée de telle manière qu'on voudra, on obtiendra sa variation en cherchant la différentielle, et en substituant partout la caractéristique δ à la caractéristique d; ainsi soit $V = f(x, y, p, q, r$, etc.), de manière que $dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr +$, etc.

On aura $\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r +$, etc.

Ceci résulte clairement de ce que nous avons dit plus haut sur la nature de ces caractéristiques.

3.° Quand la fonction est une intégrale de la forme $\int U$ ou $\int V dx$, en prenant pour V une fonction de x, y, et de leurs coefficiens différentiels, on a $\delta \int V dx = V\delta x + \int \left\{ \delta V - \frac{dV}{dx} \delta x \right\} dx$, en effet, $\delta \int V dx = \int \delta V dx = \int \delta V . dx + \int V \delta . dx = \int \delta V . dx + \int V d . \delta x$; intégrant par parties ce dernier terme on a $\int V d . \delta x = V\delta x - \int dV \delta x$; donc $\delta \int V dx = V\delta x + \int \left\{ \delta V - \frac{dV}{dx} \delta x \right\} dx$; ce théorème réduit la recherche de la variation d'une fonction intégrale quelconque $\int V dx$, à celle de la fonction V, qui est donnée.

4.° Si $U = Vdxdy$ et que par conséquent V soit fonction de trois variables x, y, z, dont deux indépendantes et de leurs coefficiens différentiels, on aura alors

$$\delta . \int V dx dy = \int V \delta x dy + \int V \delta y dx + \int \left\{ \delta V - \frac{dV}{dx} \delta x - \frac{dV}{dy} \delta y \right\} dx\, dy$$

En effet, $\delta\int^{2} V dx\, dy = \int^{2} \delta . V dx\, dy = \int^{2} \delta V . dx dy + \int^{2} V \delta . dx dy +$

$$= \int^{2} \delta V . dx\, dy + \int^{2} V dx d\delta y + \int^{2} V dy d.\delta x$$

Intégrant par parties ces deux derniers termes, on trouve

$$\int^{2} V dx d.\delta y = \int V dx \delta y - \int^{2} \frac{dV}{dy}\, dx\, dy\, \delta y$$

$$\int^{2} V dy d.\delta x = \int V dy \delta x - \int^{2} \frac{dV}{dx}\, \delta y\, dx\, \delta x$$

Substituant

$$\delta . \int^{2} V dx dy = \int V dx \delta y + \int V \delta x dy + \int^{2} \left\{ \delta V - \frac{dV}{dx} \delta x - \frac{dV}{dx} \delta y \right\} dx\, dy$$

On voit encore ici que, connaissant dV et par conséquent δV, on aura le développement demandé par une simple substitution.

5.° On trouverait de même pour $U = V dx dy dz$

$$\delta \int^{3} V dx dy dz = \int^{2} V dy dz \delta x + \int^{2} V dx dz \delta y + \int^{2} V dx dy \delta z$$

$$+ \int^{3} \left\{ \delta V - \frac{dV}{dx} \delta x - \frac{dV}{dy} \delta y - \frac{dV}{dz} \delta z \right\} dx\, dy\, dz$$

et ainsi de suite.

On n'a guère coutume de s'occuper de fonctions plus compliquées que celles de la forme $V dx dy$.

Euler, pour lier la méthode des variations aux principes du calcul différentiel, a abandonné, dans son second mémoire, la caractéristique δ, et opéré le développement en considérant 1.° V comme fonction de x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. 2.° y comme fonction de x et d'une autre variable t, qui prend un accroissement dt, et x comme constant par rapport à t; cela posé, $\frac{dV}{dx}$ sera le coefficient ordinaire, $dt \frac{dV}{dt}$ sera la variation : il faudra donc faire $\delta \int V dx = \int \frac{dV}{dt} dx$, puis chercher la valeur $\frac{dV}{dt}$; le résultat après les réductions convenables, sera le développement demandé.

Lagrange a adopté le même principe dans ses Leçons sur le calcul des fonctions; il y suppose $y = \phi(x, i)$, et cherche les différentielles, soit par rapport à x, soit par rapport à i, en notant par des indices différens ces deux sortes d'opérations; la dernière constitue la variation.

M.r Gergonne prend une voie un peu différente; il ne considère pas y ou $f(x)$ comme devenant

$\phi(x,i)$, mais comme devenant $f(x)+i\phi(x)$, ou $y+iY$, Y étant $=\phi(x)$: de cette manière, la variation consiste à ajouter à chaque différentielle de y, la différentielle correspondante du terme iY.

Ces divers procédés reviennent, en définitif, à faire que la différentiation de x porte non point sur cette variable dans son état primitif, mais déjà différentiée dans un autre sens, ou modifiée par quelque accroissement indépendant de celui de x; je reviens à la Géométrie pour me faire comprendre. Si l'équation d'une courbe quelconque fournit une relation entre x et y, cette dernière variable sera différentiée lorsque la première prendra un accroissement; mais si vous voulez passer à une autre courbe, vous n'aurez plus à agir sur la fonction de x, que vous appelez y, mais sur cette fonction modifiée ou différentiée de manière à être l'ordonnée de la seconde courbe, et non de la première; vous changerez ainsi la relation existant entre les deux variables.

§. II. *Développement de la variation de diverses formules intégrales indéterminées.*

Il nous faut maintenant appliquer les méthodes que nous venons d'exposer, à la recherche du développement des variations. Le premier cas dont nous nous occuperons, sera traité en détail, et en suivant les méthodes différentes; dans les suivans, nous supprimerons les calculs, en nous contentant d'en indiquer la marche, et nous ferons constamment usage de la caractéristique δ. Nous renvoyons pour les détails à l'ouvrage de M.r Lacroix, au premier Mémoire d'Euler sur le calcul des variations, à la dernière Leçon de Lagrange, et au Mémoire de M.r Gergonne.

Premier cas. Soit demandé la variation de $\int V dx$, V étant fonction de $x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. ou suivant la notation déjà employée de x,y,p,q, etc., c'est-à-dire ayant $dV=Mdx+Ndy+Pdp+Qdq+$ etc.

1.° *Par la caractéristique δ.*

Nous avons vu plus haut que $\delta\int V dx = V\delta x+\int\left\{\delta V dx - dV\delta x\right\}$

Or, $\delta V = M\delta x+N\delta y+P\delta p+Q\delta q+$ etc., de là substituant

$$\int\left\{\delta V dx - dV\delta x\right\}=\int\left\{Ndx(\delta y-p\delta x)+Pdx(\delta p-q\delta x)+Qdx(\delta q-r\delta x)+\text{ etc.}\right.$$

Or, $p=\frac{dy}{dx}$, donc $\delta p=\delta.\frac{dy}{dx}=\frac{d\delta y-p\delta dx}{dx}$ $\delta p-q\delta x=\frac{d\left\{\delta y-p\delta x\right\}}{dx}$ de même

$\delta q-r\delta x=\frac{d^2(\delta y-p\delta x)}{dx^2}$ $\delta r-s\delta x=\frac{d^3(\delta y-p\delta x)}{dx^3}$ etc. donc faisant $\delta y-p\delta x=\theta$, et substituant

$$\int\left\{\delta V dx-dV\delta x\right\}=\int\left\{N\theta dx+Pd\theta+Q\frac{d^2\theta}{dx}+R\frac{d^3\theta}{dx^2}+\text{ etc.}\right\}$$

Intégrant par parties,

$$\int P d\theta = P\theta - \int \theta dP; \int Q\frac{d^2\theta}{dx} = Q\frac{d\theta}{dx} - \frac{\theta dQ}{dx} + \int \frac{\theta d^2 Q}{dx}$$

$$\int R\frac{d^3\theta}{dx^2} = R\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{dRd\theta}{dx^2} + \frac{\theta d^2 R}{dx^2} - \int \frac{\theta d^3 R}{dx^2}, \text{ etc. etc.}$$

Substituant et réunissant tous les termes affectés du signe $\int$, on trouve enfin

$$\begin{aligned} \delta \int V dx = V\delta x &+ \left\{ P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \text{etc.} \right\} \theta \\ &+ \left\{ Q - \frac{dR}{dx} + \text{etc.} \right\} \frac{d\theta}{dx} \\ &+ \left\{ R - \text{etc.} \right\} \frac{d^2\theta}{dx^2} \\ &+ \text{etc.} \\ &+ \int \left\{ N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.} \right\} \theta dx \end{aligned}$$

Lorsqu'avec Euler on suppose x constant par rapport à la caractéristique δ, c'est-à-dire que $\delta x = 0$, alors le terme $V\delta x$ s'en va, et θ se réduit à la valeur δy.

2.° *Par les différentielles* dt.

La variation est $d.\int \frac{V dx}{dt} = \int \frac{d.V dx}{dt} = \int \frac{dV}{dt} dx + \int V \frac{ddx}{dt} = V\frac{dx}{dt} + \int \left\{ \frac{dV}{dt}dx - dV\frac{dx}{dt} \right\}$

Si x était constant, cette variation se réduirait à $\int \frac{dV}{dt} dx$

$$\text{Or } \frac{dV}{dt} = M\frac{dx}{dt} + N\frac{dy}{dt} + P\frac{dp}{dt} + Q\frac{dq}{dt} + R\frac{dr}{dt} + \text{etc.}$$

$$\int \left\{ \frac{dV}{dt}dx - dV\frac{dx}{dt} \right\} = \int \left\{ Ndx\left(\frac{dy}{dt} + p\frac{dx}{dt}\right) + Pdx \left\{\frac{dp}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right\} + Qdx \left\{\frac{dq}{dt} - r\frac{dx}{dt}\right\} + \text{etc. etc.} \right\}$$

Il n'est pas nécessaire que je pousse plus loin ce calcul qu'on voit facilement être parfaitement semblable au précédent et qui mène au même résultat en posant $\theta = \frac{dy}{dt} - p\frac{dx}{dt}$, ce qui, nommant Θ la somme de tous les termes affectés de θ donne l'équation $\frac{d.\int V dx}{dt} = V\frac{dx}{dt} + \Theta$

Répétons ici que dans le cas où x serait constant par rapport à t on devrait supprimer le terme $V\frac{dx}{dt}$ et réduire θ à la valeur $\frac{dy}{dt}$

3.° *Par la méthode de Mr.* Gergonne.

Soit $\int Vdx$ une formule intégrale dont on demande la variation et V une fonction de x, y, y', y', etc.

y' y'' etc. étant les coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc., tellement que

$$dV=\frac{dV}{dx}dx+\frac{dV}{dy}dy+\frac{dV}{dy'}dy'+\frac{dV}{dy''}dy''+\text{ etc.}$$

Que y devienne $y+iY$, y' deviendra $y'+iY'$ et ainsi de suite, de manière que V deviendra lui-même

$$V+i\left(Y\frac{dV}{dy}+Y'\frac{dV}{dy'}+Y''\frac{dV}{dy''}+Y'''\frac{dV}{dy'''}+\text{ etc.}\right)+\frac{i^2}{2}\left\{\text{ etc. }\right\}+\text{ etc.}$$

$$\text{et }\int Vdx\text{ deviendra }\int Vdx+i\int\left\{Y\frac{dV}{dy}+Y'\frac{dV}{dy'}+\text{ etc.}\right\}dx+\text{ etc.}$$

et par conséquent la variation sera $i\int\left(Y\frac{dV}{dy}+Y'\frac{dV}{dy'}+Y''\frac{dV}{dy''}+\text{ etc.}\right)dx$

$$\text{Or }\int Y'\frac{dV}{dy'}=Y\frac{dV}{dy'}-\int Y\left(\frac{dV}{dy'}\right)'$$

$$\int Y''\frac{dV}{dy''}=Y'\frac{dV}{dy''}-Y\left[\frac{dV}{dy''}\right]'+\int Y\left[\frac{dV}{dy''}\right]''$$

$$\int Y'''\frac{dV}{dy'''}=Y''\frac{dV}{dy'''}-Y'\left[\frac{dV}{dy'''}\right]'+Y\left[\frac{dV}{dy'''}\right]''-\int Y\left[\frac{dV}{dy'''}\right]'''$$

etc. etc.

Substituant, la variation que nous nommerons W, devient

$$W=\left\{\frac{dV}{dy'}-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'+\left(\frac{dV}{dy'''}\right)''-\text{ etc.}\right\}iY\,dx$$

$$+\left\{\frac{dV}{dy''}-\left(\frac{dV}{dy'''}\right)'+\text{ etc.}\right\}iY'\,dx$$

$$+\left\{\frac{dV}{dy'''} - \text{etc.}\right\} iY''' dx$$

$$+ \text{ etc.}$$

$$+\int\left\{\frac{dV}{dy} - \left(\frac{dV}{dy'}\right)' + \left(\frac{dV}{dy''}\right)'' - \text{etc.}\right\} iY\, dx$$

Il est facile de s'assurer que cette formule est identique avec celles que nous avons trouvées par les autres méthodes pour le cas où x est constant, comparons en effet la valeur de dV donnée ici avec la valeur $dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq +$ etc.; nous voyons évidemmment en nous rappelant ce que signifient $y'\, y''\, p\, q$ etc., que

$$M = \frac{dV}{dx} \quad N = \frac{dV}{dy} \quad P = \frac{dV}{dy'} \quad Q = \frac{dV}{dy''} \quad R = \frac{dV}{dy'''} \text{ etc.}$$

Substituant donc ces valeurs, rétablissant la notation leibnitzienne, et remarquant que la quantité iY n'est autre chose que la variation de y, que cet accroissement que nous avons nommé θ, nous aurons

$$W = \left\{P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2 R}{dx^2} - \text{etc.}\right\} \theta dx$$

$$+ \left\{Q - \frac{dR}{dx} + \text{etc.}\right\} d\theta$$

$$+ \left\{R - \text{etc.}\right\} \frac{d^2\theta}{dx}$$

$$+ \text{ etc.}$$

$$+ \int \left\{N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} + \text{etc.}\right\} \theta dx$$

comme ci-dessus.

Cette nouvelle méthode ramène avec clarté et élégance le calcul des variations au simple calcul différentiel; peut-être pourrait-on lui reprocher de ne pas définir suffisamment la valeur de Y et d'entremêler diverses notations.

Second cas. Que V soit fonction non-seulement de x, y, p, q, etc., mais encore d'une nouvelle variable z non indépendante, et de ses coefficiens différentiels p', q' en sorte que

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}$$
$$+ N'dz + P'dp' + Q'dq' + R'dr' + \text{etc.}$$

Il suffira d'ajouter à la variation déjà trouvée des termes correspondans en z, p', q', etc., savoir :

$$\left\{ P' - \frac{dQ'}{dx} + \frac{d^2R'}{dx^2} - \text{etc.} \right\} \theta'$$

$$+ \left\{ Q' - \frac{dR'}{dx} + \text{etc.} \right\} \frac{d\theta'}{dx}$$

$$+ \left\{ R' - \text{etc.} \right\} \frac{d^2\theta'}{dx^2}$$

$$+ \text{ etc.}$$

$$+ \int \left\{ N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} + \text{ etc.} \right\} \theta' dx$$

θ' étant égal à $\delta z - p'\delta x$

Il en serait précisément de même, s'il y avait une troisième, une quatrième variable, et ainsi de suite.

Troisième cas. Que V soit fonction non-seulement de x, y, p, q, etc., mais encore d'une formule intégrale

$$\Pi = \int V'dx \text{ telle que } V' = f(x, y, p, q, \text{etc.})$$

Avant d'indiquer la manière de trouver la variation de $d\int Vdx$ dans ce cas-ci, remarquons que les formules du premier cas nous fournissent le développement de toutes les fonctions de la forme $\int \left\{ dx\delta V - dV\delta x \right\}$; il suffit en effet pour cela de retrancher à ces formules le terme $V\delta x$.

Cela posé, nous avons, d'après les notations convenues,

$dV = Mdx + Ndy + Pdp + \text{etc.} + Ld\Pi = d\varphi + Ld\Pi$ pour abréger, d'où l'on tire

$\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + \text{etc.} + L\delta\Pi = \delta\varphi + L\delta\Pi$

De même,

$dV' = M_0 dx + N_0 dy + P_0 dp + \text{etc.}$

$\delta V' = M_0 \delta x + N_0 \delta y + P_0 \delta p + \text{etc.}$

Delà

$$\delta \int Vdx = V\delta x + \int \left\{ dx\delta V - dV\delta x \right\} = V\delta x + \int \left\{ dx\delta\varphi - d\varphi\delta x \right\} + \int \left[Ldx\delta\Pi - L\delta x d\Pi \right]$$

Or $\delta\Pi = \delta \int V'dx = V'\delta x + \int \left[dx\delta V' - dV'\delta x \right]$, donc substituant et faisant $\int Ldx = H$

$$\delta \int Vdx = V\delta x + \int \left[dx\delta\phi - d\phi\delta x \right] + \int \left(HV'\delta x + H \int \left(dx\delta V' - dV'\delta x \right) - HV'\delta x \right)$$

$$= V\delta x + \int \left[dx\delta\phi - d\phi\delta x \right] + \int H \int \left(dx\delta V' - dV'\delta x \right)$$

$$= V\delta x + \int \left[dx\delta\phi - d\phi\delta x \right] + H \int \left(dx\delta V' - dV'\delta x \right) - \int H \left(dx\delta V' - dV'\delta x \right)$$

Développant les termes $\int \left(dx\delta\phi - d\phi\delta x \right)$ et $\int \left(dx\delta V' - dV'\delta x \right)$, substituant dans le dernier les valeurs de $\delta V'$ et dV', puis faisant une nouvelle intégration par parties, on obtient finalement

$$\delta \int Vdx = V\delta x + H \int \left(N_0 - \frac{dP_0}{dx} + \frac{d^2Q_0}{dx^2} - \text{etc.} \right) \theta dx$$

$$+ H \left[P_0 - \frac{dQ_0}{dx} + \text{etc.} \right] \theta$$

$$+ H \left[Q_0 - \text{etc.} \right] \frac{d\theta}{dx}$$

$$+ \text{etc.}$$

$$+ \int \left[(N - N_0H) - \frac{d\left\{ P - P_0H \right\}}{dx} + \frac{d^2\left\{ Q - Q_0H \right\}}{dx^2} - \text{etc.} \right] \theta dx$$

$$+ \left[(P - P_0H) - \frac{d\left\{ Q - Q_0H \right\}}{dx} + \text{etc.} \right] \theta$$

$$+ \left[(Q - Q_0H) - \text{etc.} \right] \frac{d\theta}{dx}$$

$$+ \text{etc.}$$

Ecrivons, pour plns de simplicité, cette formule sous la forme qu'elle prend avant les intégrations par parties, nous aurons

$$\delta \int V dx = V\delta x + H \int dx \left\{ N_0\theta + P_0 \frac{d\theta}{dx} + Q_0 \frac{d^2\theta}{dx^2} + R_0 \frac{d^3\theta}{dx^3} + \text{etc.} \right\}$$

$$+ \int dx \left\{ (N - N_0H)\theta + (P_0 - P_0H) \frac{d\theta}{dx} + (Q_0 - Q_0H) \frac{d^2\theta}{dx^2} + \text{etc.} \right\}$$

Si la fonction V comprenait une nouvelle intégrale $\Pi' = \int V'' dx$ et telle que $dV = d\phi + L d\Pi + L' d\Pi'$ et $dV'' = \overline{M}dx + \overline{N}dy + \overline{P}dp + \overline{Q}dq + \text{etc.}$

Il faudrait poser $\int L' dx = H'$, ajouter à l'équation que nous venons de trouver le terme

$$+H'\int dx \left\{ \overline{N}\theta + \overline{P}\frac{d\theta}{dx} + \overline{Q}\frac{d^2\theta}{dx} + \text{etc.} \right\}$$

et enfin ajouter respectivement aux facteurs $N - N_o H, P - P_o H, Q - Q_o H$, etc. les termes $-N\overline{H}' - P\overline{H}' - \overline{Q}H'$ etc.

Quatrième cas. Que V soit fonction de x, y, p, q, etc. et d'une formule intégrale $\Pi = \int V' dx$.
Que V' soit lui-même fonction de x, y, p, q et d'une autre formule intégrale $X = \int V'' dx$
Enfin, que V'' soit fonction seulement de x, y, p, q, etc.

Nous avons, dans ce cas,

$dV = Mdx + Ndy + Pdp +$ etc. $+ Ld\Pi = d\phi + Ld\Pi$
$\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p +$ etc. $+ L\delta\Pi = \delta\phi + L\delta\Pi$
$dV' = M_o dx + N_o dy + P_o dp +$ etc. $+ L_o dX = d\phi_o + L_o dX$
$\delta V' = M_o \delta x + N_o \delta y + P_o \delta p +$ etc. $+ L_o \delta X = \delta\phi_o + L_o \delta X$
$dV'' = M_{,} dx + N_{,} dy + P_{,} dp +$ etc.
$\delta V'' = M_{,} \delta x + N_{,} \delta y + P_{,} \delta p +$ etc.

Or, posant $\int L dx = H$, $\int L_o dx = H_o$, $\int H L_o dx = K$, on trouve

$$\delta\int V dx = V\delta x + \int \left\{ dx\delta\phi - d\phi\delta x \right\} + \int H \int \left\{ dx\delta\phi_o - d\phi_o\delta x \right\} + HH_o \left\{ \left\{ dx\delta V'' - dV''\delta x \right\} \right.$$
$$\left. - H\int H_o \left\{ dx\delta V'' - dV''\delta x \right\} - K\int \left\{ dx\delta V'' - dV''\delta x \right\} + \int K \left\{ dx\delta V'' - dV''\delta x \right\} \right.$$

Tous ces termes sont de forme que nous savons développer, d'après les formules précédentes.
Si on n'exécute pas les intégrations par parties, la formule finale sera

$$\delta\int V dx = V\delta x + \left\{ HH_o - K \right\} \int dx \left\{ N_{,}\theta + P_{,}\frac{d\theta}{dx} + Q_{,}\frac{d^2\theta}{dx^2} + \text{etc.} \right\}$$
$$- H\int H_o dx \left\{ N_{,}\theta + P_{,}\frac{d\theta}{dx} + Q_{,}\frac{d^2\theta}{dx^2} + \text{etc.} \right\}$$
$$+ \int K\ dx \left\{ N_{,}\theta + P_{,}\frac{d\theta}{dx} + Q_{,}\frac{d^2\theta}{dx^2} + \text{etc.} \right\}$$
$$+ H\int dx \left\{ N_o\theta + P_o\frac{d\theta}{dx} + Q_o\frac{d^2\theta}{dx^2} + \text{etc.} \right\}$$
$$- \int H\ dx \left\{ N_o\theta + P_o\frac{d\theta}{dx} + Q_o\frac{d^2\theta}{dx^2} + \text{etc.} \right\}$$
$$+ \int dx \left\{ N\theta + P\frac{d\theta}{dx} + Q\frac{d^2\theta}{dx^2} + \text{etc.} \right\}$$

Si on exécute les intégrations, et qu'on pose

$N-HN_\circ-(HH_\circ-K)\,N_{,}=\nu \qquad P-HP_\circ-(HH_\circ-K)P_{,}=\pi$

$Q-HQ_\circ-(HH_\circ-K)Q_{,}=\varkappa \qquad R-HR_\circ-(HH_\circ-K)R_{,}=\rho$ etc.

Il est facile de voir qu'on aura

$$\delta\int V\delta x = V\delta x + \int\left\{\nu-\frac{d\pi}{d\pi}+\frac{d^2\varkappa}{dx^2}-\frac{d^3\rho}{dx^3}+\text{etc.}\right\}\theta dx$$
$$+\left\{\pi-\frac{d\varkappa}{dx}+\frac{d^2\rho}{dx^2}-\text{etc.}\right\}\theta$$
$$+\left\{\varkappa-\frac{d\rho}{dx}+\text{etc.}\right\}\frac{d\theta}{dx}$$
$$+\left\{\rho-\text{etc.}\right\}\frac{d^2\theta}{dx^2}$$
$$+\text{etc.}$$

Cinquième cas. Que V soit fonction, non-seulement de x, y, p, q, etc.; mais encore de la propre fonction $\Pi=\int Vdx$

On a $dV=Mdx+Ndy+Pdp+$ etc. $+\,Ld\Pi=d\phi+Ld\Pi$

$\delta V=M\delta x+N\delta y+P\delta p+$ etc. $+\,L\delta\Pi=\delta\phi+L\delta\Pi$

Delà $\delta\int Vdx=\delta\Pi=V\delta x+\int[\,\delta Vdx-dV\delta x\,]$

$=V\delta x+\int[\,dx\delta\phi-d\phi\delta x\,]+\int[\,Ldx\delta\Pi-L\delta xd\Pi\,]$

Posons pour abréger $\delta\Pi=u$; $V\delta x-\int L\delta xd\Pi+\int(dx\delta\phi-d\phi\delta x)=w$, nous aurons $u=w+\int uLdx$, d'où $du=dw+uLdx$; pour séparer les variables et intégrer posons $u=\alpha\beta$ et $du=\alpha d\beta+\beta d\alpha$, nous aurons $\alpha d\beta+\beta d\alpha=dw+\alpha\beta Ldx$; supposons que les variables α et β soient telles qu'on ait séparément $\alpha d\beta=\alpha\beta Ldx$, $\beta d\alpha=dw$ on tire de la première équation $\beta=e^{\int Ldx}$ qui substituée dans la seconde donne $\alpha=\int e^{-\int Ldx}dw$ et par conséquent $u=\delta\Pi=e^{\int Ldx}\int e^{-\int Ldx}dw$, posant $\int Ldx=H$ et remettant pour dw sa valeur on a enfin

$$\delta\int Vdx=e^{H}\int e^{-H}\left\{Ld\Pi\delta x-d.\,V\delta x\right\}$$
$$+e^{H}\int e^{-H}dx\left\{N\theta-P\frac{d\theta}{dx}+Q\frac{d^2\theta}{dx^2}-\text{etc.}\right\}$$

Ces deux termes étant développés, et l'intégration par parties étant faite, et ayant posé.

$e^{-H}M=\mu \quad e^{-H}N=\nu \quad e^{-H}P=\pi \quad e^{-H}Q=\varkappa, \quad e^{-H}V=\bar{V}$ etc.

on trouve finalement:

$$\delta\int Vdx = -e^{H}\left(\overline{V}\delta x - \int d\overline{V}\delta x + \int\left\{\mu\delta x\,dx + \nu\delta x\,dy - \frac{dy}{dx}\frac{d.\pi\delta x}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}\frac{d.\varpi\delta x}{dx} - \text{etc.}\right\} \atop + \delta x\left\{\pi\frac{dy}{dx} + \varpi\frac{d^2y}{dx^2} + \rho\frac{d^3y}{dx^3} + \text{etc.}\right\}\right).$$

$$+e^{H}\left(\begin{array}{ll}\int\left\{\nu - \frac{d\pi}{dx} + \frac{d^2\varpi}{dx^2} - \frac{d^3\rho}{dx^3} + \text{etc.}\right\}\theta dx \\ +\left\{\pi - \frac{d\varpi}{dx} + \frac{d^2\rho}{dx^2} - \text{etc.}\right\}\theta \\ +\left\{\varpi - \frac{d\rho}{dx} + \text{etc.}\right\}\frac{d\theta}{dx} \\ +\left\{\rho - \text{etc.}\right\}\frac{d^2\theta}{dx^2} \\ + \text{etc.}\end{array}\right)$$

Ce cas est identique avec celui dans lequel on demande de trouver $\delta\Pi$ lorsque Π est donné seulement par une équation différentielle du premier ordre. Supposons en effet que dans le cas que nous venons de traiter nous posions simplement $\Pi = \int V$, nous tirerons $\delta\Pi = \int\delta V = \int(L\delta\Pi + \delta\phi)$, si de plus nous remarquons que l'équation différentielle proposée peut toujours être mise sous la forme $d\Pi - L\Pi - \phi + a = o$; ϕ étant une fonction quelconque de x, y, p, q, etc.; il en résultera $d^2\Pi - Ld\Pi - d\phi = o$, ou $d\delta\Pi - L\delta\Pi - \delta\phi = o$ ou transposant les deux derniers termes et intégrant $\delta\Pi = \int(L\delta\Pi + \delta\phi)$, ce qui est bien le même résultat que ci-dessus.

Sixième cas. Que V soit fonction, non-seulement de x, y, p, q etc. et de la propre fonction $\Pi = \int V dx$, mais encore d'une seconde intégrale $\Pi_o = \int V_o dx$ et V_o fonction de x, y, p, q etc.

Pour abréger les calculs, nous supposons que δx est nul, et par conséquent $\delta\Pi = \int\delta V dx$; on a ici
$\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + \text{etc.} + L\delta\Pi + L_0\delta\Pi_0 = \delta\phi + L\delta\Pi + L_0\delta\Pi_0$.
$\delta V_0 = M_0\delta x + N_0\delta y + P_0\delta p + \text{etc.}$

Delà $\delta\Pi = \int\delta\phi dx \;\; \int Ldx\delta\Pi + \int L_0 dx\delta\Pi_0$ et posant $\delta\Pi = u$

$$du = dx\left(\delta\phi + L\delta\Pi + L_0\delta\Pi_0\right), \text{ posant } \delta\phi + L_0\delta\Pi_0 = \varpi$$

$$du = Ludx + \varpi dx$$

Intégrant, comme dans le cas précédent, $u = e^{\int Ldx}\int e^{-\int Ldx}\varpi dx = e^{H}\int e^{-H}\varpi dx$

Rétablissant pour ϖ sa valeur, dans cette valeur remplaçant $\delta\Pi_0$ par $\int\delta V_0 dx$, et faisant enfin $\int e^{-H} L_0 dx = H_0$, on obtient

$$\delta \int V dx = e^{H} H_0 \int dx \left\{ N_0 \delta y + P_0 \frac{d\delta y}{dx} + Q_0 \frac{d^2 \delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right\}$$

$$- e^{H} \int H_0 dx \left\{ N_0 \delta y + P_0 \frac{d\delta y}{dx} + Q_0 \frac{d^2 \delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right\}$$

$$+ e^{H} \int e^{-H} dx \left\{ N \delta y + P \frac{d\delta y}{dx} + Q \frac{d^2 \delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right\}$$

Septième cas. On peut encore supposer que tout étant, du reste, comme dans le sixième cas, la fonction V_0 contient elle-même la formule Π_0, ce qui est une combinaison des deux précédens ; le calcul ne présente aucune difficulté nouvelle, et nous renvoyons à Euler ceux qui voudront en voir le détail : nous n'irons pas plus loin dans l'examen de ces suppositions, qu'on pourrait multiplier à l'infini.

Huitième cas. Le temps, qui nous presse, nous force de renvoyer aussi au grand ouvrage de M.r Lacroix pour le calcul et le développement final de $\delta \int^2 V dx dy$. (*Voy.* Lacr., vol. 2 et 3.)

§. III. *Des équations de condition du maximum et minimum, et de leurs rapports avec les conditions d'intégrabilité des formules différentielles.*

Nous avons déjà vu que la condition du maximum ou du minimum consistait dans la nullité de la variation de la fonction, il suffira donc, dans chaque cas particulier, d'égaler à zéro le développement de cette variation : or, la simple inspection des formules données dans le paragraphe précédent, montre qu'elles sont composées de deux parties, l'une entièrement dégagée du signe d'intégration, l'autre affectée d'un ou plusieurs signes d'intégration. Ces deux portions doivent, à cause de leur indépendance, être séparément égalées à zéro; la dernière est l'équation de condition du maximum ou minimum, la première est relative aux limites dans lesquelles le problème est proposé. Comme ces résultats peuvent ne pas paraître évidens par eux-mêmes, nous allons les établir par des considérations analogues à celles qu'emploie Lagrange.

Supposons, en effet, que la fonction donnée soit U, et que la variation soit $\delta U = \mu + \int \nu \theta dx = 0$, on tire de là $\delta dU = d\mu + \nu \theta dx$, et il faut que l'intégrale de cette quantité soit nulle : or, $d\mu$ étant une différentielle exacte, quel que soit du reste de la valeur de θ qui y est contenu, son intégrale est une quantité fixe et invariable, qui, par elle-même, n'est pas nulle; au contraire, le second terme $\nu \theta dx$ n'est point, par lui-même, une différentielle exacte, il ne peut le devenir qu'en donnant des valeurs particulières à θ, qui est une quantité essentiellement indéterminée ; il faut donc nécessairement qu'on ait séparément $\nu = 0$: quant à la quantité déterminée μ, il est clair qu'en vertu de sa nature même, elle se rapporte aux limites fixes assignées au problème, et pour qu'on obtienne l'égalité à zéro de la variation dont μ fait partie, il faudra, suivant les règles des intégrales définies, donner à μ les valeurs qu'elle revêt aux différentes limites, retrancher ces valeurs l'une de l'autre, et poser la différence égale à zéro ; appelant donc $\mu_{\prime}$, μ_0, suivant la notation reçue ces deux valeurs limites, nous aurons séparément les équations $\nu = 0$ $\mu_{\prime} - \mu_0 = 0$;

la première est la seule dont nous ayons à nous occuper ici ; appliquant ce résultat au premier cas du paragraphe précédent, l'équation $v=0$ devient $N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+$ etc. $=0$, où nous reconnaisuoissons l'équation donnée par Euler dans son premier ouvrage sur cette matière.

S'il y avait deux variables non indépendantes, on aurait pour équation du maximum ou minimum $\int v\theta dx+\int v'\theta' dx=0$; et comme, en général, θ et θ' ne sont pas nuls, il faut que séparément $v=0$ $v'=0$, et l'une quelconque de ces deux égalités est une suite nécessaire de l'autre : si une des quantités θ était nulle, on aurait $\delta y=p\delta x$, ou $\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{dy}{dx}$, alors les variations se confondraient avec les différentielles, et se réduiraient au simple terme $V\delta x$.

L'équation $v=0$ est la même que celle qu'on trouve lorsqu'on cherche les conditions d'intégrabilité de la fonction Vdx ; ce théorème qu'Euler énonce à la fin de son premier mémoire sur le calcul des variations, et qui se confirme par la recherche directe des équations de condition mentionnées, a été démontré simplement par Condorcet de la manière suivante.

Si la fonction U est une différentielle exacte que nous nommerons dU_0, il est clair que δU en sera aussi une, savoir $d.\delta U_0$: or, $\delta U=d\delta U_0=\mu+\int v\theta dx$; ce dernier membre ne peut pas être une différentielle exacte, tant qu'il contient des signes d'intégration : il faut donc que les termes affectés de ce signe disparaissent, c'est-à-dire, qu'on ait $v=0$.

M.r Lacroix montre aussi qu'il résulte de cette équation, que si on pose $P-\int Ndx=N'$ $Q-\int N'dx=N''$ $R-\int N''dx=N'''$, etc., tous les termes de la suite Ndx, $N'dx$, $N''dx$, $N'''dx$, etc., sont intégrables par eux-mêmes : il est facile de voir que les remarques faites dans le Chapitre précédent sur les intégrales obtenues dans cette équation lorsqu'on pose $N=0$ $P=0$ $Q=0$, etc. entrent comme cas particulier dans ce dernier théorème.

Nous avons maintenant à rechercher les conditions de maximum ou minimum lorsqu'il s'agit du maximum ou minimum relatifs. Nous avons vu comment Euler y était arrivé par la considération des courbes ; la simple analyse doit nous conduire au même résultat : et en effet, supposons que la fonction donnée dont on cherche le maximum ou minimum soit U, et que la propriété commune, ou, plus généralement, la fonction dont la valeur doit être la même dans toute l'étendue des limites assignées soit U' ; on aura d'abord $\delta U=0$ par la condition du maximum ou minimum ; on aura ensuite $\delta U'=0$, parce que la valeur de U' étant constante entre les limites, sa variation est nulle entre ces mêmes limites : de là résulte, que les fonctions U et U' jouent absolument le même rôle dans le problème, et qu'il existe entr'elles une réciprocité telle qu'on pourrait prendre U' pour la fonction donnée, et U pour la propriété commune, puisque la condition semblable pour l'une et l'autre est que leur variation soit nulle : quelle que soit, par conséquent, l'équation de condition demandée dans laquelle les fonctions U et U' seront liées et réunies, il faudra qu'elles y jouent le même rôle, et que les équations $\delta U=0$ $\delta U'=0$ soient satisfaites : or, cela a lieu en posant l'équation $\alpha\delta U+\beta\delta U'=0$, α et β étant des coefficiens constans arbitraires, faisant $\frac{\beta}{\alpha}=C$, on a $\delta U+C\delta U'=0$, conformément aux résultats déjà indiqués précédemment ; s'il y avait une seconde propriété commune ou une troisième fonction U'', il faudrait opérer de même, et poser $\delta U + C\delta U' + C'\delta U'' = 0$, et ainsi de suite. En général donc, il faudra à la fonction donnée ajouter les propriétés communes multipliées chacune par un coefficient constant arbitraire, chercher la variation de cette somme, et égaler à zéro cette variation.

Les résultats seront les mêmes, lorsque deux fonctions données seront liées entr'elles par multiplication ou division ; soit, par exemple, $V = UU'$, on aura $\delta V = U\delta U' + U'\delta U = 0$, mettant pour U et U' les valeurs constantes qu'elles obtiennent aux limites du problème, et notamment C la constante $\frac{U}{U'}$, on aura $\delta U + C\delta U' = 0$: pour le cas de la division, il faut changer le signe de l'un des termes; en effet, soit $V = \frac{U}{U'}$, on tire $\delta V = \frac{U'\delta U - U\delta U'}{U'^2} = 0$, d'où $\delta U - C\delta U' = 0$.

§. IV. *Des Equations relatives aux limites du problème,*

Nous avons vu que l'équation relative aux limites du problème pouvait se mettre sous la forme $\mu_, - \mu_0 = 0$; mais comme les quantités $\mu_,$ et μ_0 contiennent, comme facteurs des fonctions de θ, nous la mettrons sous la forme $K_, - K_0 + \iota_, \Theta_, - \iota_0 \Theta_0 = 0$, $\Theta_,$ et Θ_0 représentant ce que deviennent ces fonctions aux deux limites du problème, et $\iota_,\ \iota_0$, ce que deviennent les facteurs qui multiplient θ et ses différentielles : chacun de ces quatre facteurs est composé lui-même de plusieurs membres très-distincts, et ne doit point être considéré comme une seule et même quantité ; $K_,$ et K_0 sont les termes uniquement affectés de δx : pour le faire comprendre, nous allons transcrire ici l'équation aux limites pour la variation de $\int V dx$

$$\begin{aligned} K_, - K_0 + \iota_,\Theta_, - \iota_0\Theta_0 = V_,\delta x_, - V_0\delta x_0 &+ \left\{ P_, - \frac{dQ_,}{dx} + \frac{d^2R_,}{dx^2} - \text{etc.} \right\} \theta_, = 0 \\ &- \left\{ P_0 - \frac{dQ_0}{dx} + \frac{d^2R_0}{dx^2} - \text{etc.} \right\} \theta_0 \\ &+ \left\{ Q_, - \frac{dR_,}{dx} + \text{etc.} \right\} \frac{d\theta_,}{dx} \\ &- \left\{ Q_0 - \frac{dR_0}{dx} + \text{etc.} \right\} \frac{d\theta_0}{dx} \\ &+ \left\{ R_, - \text{etc.} \right\} \frac{d^2\theta_,}{dx^2} \\ &- \left\{ R_0 - \text{etc.} \right\} \frac{d^2\theta_0}{dx^2} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

Cette équation est satisfaite, soit que les quantités θ, $\frac{d\theta}{dx}$, $\frac{d^2\theta}{dx^2}$, etc., soient successivement égales à o, soit que les facteurs dont elles sont affectées soient égaux à zéro ; nous verrons dans quels cas l'une ou l'autre de ces égalités a lieu ; quoi qu'il en soit, les équations particulières dans lesquelles se divise dans chaque cas cette équation générale, servent à déterminer les constantes arbitraires introduites par l'intégration de l'équation $v=0$.

L'équation des limites n'avait point été remarquée avant le calcul des variations ; Euler se contentait d'indiquer, d'après le nombre des constantes arbitraires à déterminer quel était le nombre de points par lesquels la courbe devait passer, et montrait que ce nombre était moindre s'il y avait des relations données entre les variables. Lagrange établit cette équation dans son premier mémoire sur les variations. Borda, dans un mémoire de l'Académie des Sciences de Paris, de 1767, reprit cette équation, et la démontra par une décomposition de la courbe en élémens successifs, assez semblable à celle qu'emploie Euler dans son ouvrage ; il montra qu'il y avait quelques modifications à apporter aux résultats obtenus par Lagrange, dans les applications qu'il avait données de sa théorie. Lagrange, dans son second mémoire, répondit d'abord aux attaques que Fontaine avait dirigées contre sa méthode, et montra ensuite comment on pouvait obtenir, par son moyen, les mêmes résultats qu'avait obtenus Borda. Enfin, M.r de Laplace, dans son mémoire inséré dans les *Acta nova Eruditorum* 1772, reprit ce sujet, et y appliquant l'algorithme des fluxions, généralisa les résultats de Borda ; il montra comment il fallait généralement traiter l'expression obtenue par celui-ci lorsque le premier point de la courbe était pris pour origine des coordonnées.

Cela étant posé, nous allons passer successivement en revue les diverses modifications que subit l'équation des limites suivant les diverses hypothèses qu'on peut faire sur ces limites ; nous suivrons une marche inverse de celle que les auteurs ont coutume de suivre ; ils prennent ordinairement la variation telle qu'on la trouve dans les suppositions les plus simples qu'on puisse faire sur les limites, et cherchent ensuite, par des méthodes plus ou moins ingénieuses, quelles additions ou modifications il faut y faire lorsqu'on change ces suppositions ; nous prendrons, au contraire, l'expression générale trouvée plus haut, et nous la simplifierons suivant les diverses hypothèses.

Prenons d'abord simplement la variation de $\int V dx$.

1.° Que y et x soient données aux deux limites, et, par conséquent, leurs différentielles, alors on a $\delta y=0$ $\delta x=0$, et, par conséquent, $\theta=0=\frac{d\theta}{dx}=\frac{d^2\theta}{dx^2}=$ etc. ; d'où l'on voit que l'équation aux limites se satisfait elle-même, et qu'elle n'indique aucune nouvelle condition à remplir par la fonction aux limites de l'intégrale : ce cas est représenté géométriquement par une courbe dont les limites sont des points fixes ; les variables et leurs différentielles peuvent être connues ou indépendamment, ou plutôt par des relations qui les lient, et alors, ces relations et les valeurs aux limites qui en résultent servent à déterminer les constantes arbitraires du problème.

2.° Que x soit seul donné aux limites, alors $\delta x=0$; il faudra retrancher, comme nous l'avons déjà dit plus haut, les termes $K_{\prime}$ et K_0, et réduire θ à la valeur δy ; puis, on égalera séparément à o les coefficiens qui affectent δy, et chacune de ses différentielles, les équations qui en résulteront détermineront les constantes arbitraires : ce cas répond en Géométrie à celui où l'on supposerait pour limites des lignes perpendiculaires à l'axe des abcisses ; on sent que les mêmes raisonnemens s'appliqueraient au cas où on poserait y seul constant aux limites, *mutatis mutandis*.

3.° Que quelques-unes des variables et de leurs différentielles soient données aux limites indépendamment ou par des relations, on réduira alors ces variables et différentielles au plus petit nombre possible par la voie de l'élimination, et on égalera ensuite séparement à zéro les coefficiens de toutes celles qui resteront ; les équations ainsi obtenues, jointes à celles qui fournissent les relations données, détermineront les constantes arbitraires : ce cas répond, en Géométrie, à celui où les limites seraient des lignes dont les équations seraient connues.

Il est fort aisé de s'assurer, en général, que le nombre des équations obtenues suffira toujours pour déterminer toutes les constantes arbitraires.

Les suppositions que nous venons de faire sont les seules qu'on puisse imaginer : les résultats auxquelles elles conduisent, s'appliquent, sans aucune difficulté, aux cas traités dans le §. II, qui peuvent tous se ramener, pour l'équation des limites, à la forme $K_{,}-K_{0}+\iota_{,}\Theta_{,}-\iota_{0}\Theta_{0}$, $\Theta_{,}$ et Θ_{0} comprenant non-seulement θ et ses différentielles, mais aussi θ' θ'', etc. et leurs différentielles s'il y a une troisième, une quatrième, etc. variables.

La considération des limites fait naître un nouveau cas, que je n'ai pas voulu traiter dans le §. II, avant d'avoir suffisamment expliqué ce qu'étaient ces limites ; c'est celui où la quantité V est elle-même fonction des coordonnées de ces limites et de leurs différentielles ; de manière que $x_{,}$ x_{0} $y_{,}$ y_{0} étant ces coordonnées, on ait, en supposant cependant $dx_{,}$ dx_{0} constans,

$$\delta V = L_{,}\delta x_{,} + L_{0}\delta x_{0} + l_{,}\delta y_{,} + l_{0}\delta y_{0} + l'_{,}d\delta y_{,} + l'_{0}d\delta y_{0} + l''_{,}d^{2}\delta y' + l''_{0}d^{2}\delta y_{0} + \text{etc.} + V\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + \text{etc.}$$

Il est clair qu'il faudra ajouter à la variation $\delta\int Vdx$ ou $\delta\int Vdxdy$ tous les termes de la première ligne multipliés par dx ou $dxdy$, et précédés du signe $\int$, après avoir cependant fait sortir de ce signe les variations $\delta x_{,}$ δx_{0}, $\delta y_{,}$ δy_{0}, et leurs différentielles qui sont indépendantes de x et y, et les avoir réduits à $\delta x_{,}\int L_{,}dx$ $\delta x_{0}\int L_{0}dx$ $\delta y_{,}\int l_{,}dx$ $\delta y_{0}\int l_{0}dx$ etc. etc.

Si l'un des points extrêmes est pris pour origine des coordonnées, la variation de ce point affectera les quantités x et y ; mais nullement p,q,r,s, etc. ; les coordonnées de ce point qui étaient o deviennent δx, δy, d'où suit que la coordonnée variée δx devient $\delta x \pm \delta x_{,}$, et la coordonnée δy devient $\delta y \pm \delta y_{,}$; or $\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p +$ etc. donc ici $\delta V = M(\delta x \pm \delta x_{,}) + N(\delta y \pm \delta y_{,}) + P\delta p +$ etc. ; d'où suit que l'addition à faire à l'expression $\delta\int Vdx$ est $\pm$ $(\delta x_{,}\int Mdx + \delta y_{,}\int Ndx)$: c'est Borda qui le premier a signalé cette addition que MM. Laplace, Legendre et Lacroix ont démontrée depuis d'une manière plus abrégée qu'il ne l'avait fait ; j'y ai mis le signe $\pm$ parce que la variation de l'origine des cordonnées peut se faire dans le sens des coordonnées positives et négatives indifféremment.

S'il y avait dans la question deux variables non indépendantes, l'équation aux limites serait

$$\mu_{,}+\mu'_{,}-\mu_{0}-\mu'_{0}=0 \quad \text{ou} \quad K_{,}-K_{0}+\iota_{,}\Theta_{,}+\iota'_{,}\Theta'_{,}-\iota_{0}\Theta_{0}-\iota'_{0}\Theta'_{0}=0$$

§. V. *Des moyens de distinguer le maximum du minimum.*

Avant la découverte d'une méthode générale de traiter les questions de maximum et minimum, les auteurs qui étaient appelés à s'en occuper, employaient dans chaque cas particulier, des moyens spéciaux de s'assurer s'ils étaient en possession d'un maximum ou d'un minimum ; ces moyens peuvent, en général, se classer sous les chefs suivans.

1.^{e} La nature même de la question, qui exclut nécessairement l'une ou l'autre des alternatives : ainsi, l'application d'une théorie quelconque à la ligne qui joint un point à un autre, ne peut conduire qu'à un minimum ; ainsi encore, la comparaison des surfaces de divers triangles qu'on peut construire sur une même base, la somme des deux autres côtés étant donnée, ne peut conduire qu'à un maximum.

2.° La substitution dans l'expression de la fonction donnée d'une valeur quelconque, comparable avec celle qu'on a obtenue pour le maximum ou minimum : si, après la substitution, la valeur substituée est plus petite, il y a maximum ; dans le cas contraire, il y a minimum. (*Voy.* ci-dessus, page 22.)

3.° Une démonstration directe conduisant non à une équation, mais à une inégalité qui montre un terme plus grand et un autre plus petit, et indique le maximum ou le minimum, suivant que le premier ou le second de ces termes contient la fonction dont on s'occupe.

4.° Dans les questions géométriques, la recherche du côté que présente la courbe trouvée à une ligne quelconque prise pour axe ; si c'est la concavité, il y a maximum par rapport à cet axe pour les ordonnées abaissées de cette courbe ; dans le cas contraire, il y a minimum. (*Voy.* ci-dessus, page 12.)

Il y a des questions dans lesquelles il y a lieu à la fois à maximum et à minimum, comme dans celle qui mène à l'équation de la chaînette ; la distinction entre les deux cas, revient à faire les ordonnées positives dans l'un, négatives dans l'autre : ainsi, lorsque la chaînette est suspendue au-dessous de son axe, il y a maximum d'abaissement du centre de gravité, et les ordonnées de la courbe sont négatives ; lorsqu'au contraire, elle est située en voûte au-dessus de l'axe, il y a minimum d'abaissement, et les ordonnées sont positives.

Dès que le calcul différentiel fut inventé et appliqué aux problèmes d'isopérimétrie, la condition qui distingue le maximum du minimum dans tous les cas fut reconnue et déterminée, elle est la même dans le calcul des variations ; mais comme, dans l'application, elle peut conduire à de longs et pénibles calculs, et présente quelquefois des difficultés insurmontables, les Géomètres se sont appliqués à la simplifier et à trouver des expressions moins compliquées que celles auxquelles une voie directe aurait conduit ; mais ils n'ont pas encore réussi à obtenir des résultats entièrement satisfaisans ; Euler, Legendre, Lagrange se sont particulièrement occupés de cette recherche, et nous exposerons les résultats de leurs travaux, après avoir fait connaître la condition générale qui en est la base.

Le premier accroissement de la fonction étant nul, le second prend sa place, et comme il conserve toujours le même signe, quelque soit celui de l'accroissement, comme, de plus, il peut être rendu plus grand que la somme de tous les autres, il suit que, s'il est positif, il indique une augmentation que la fonction a reçue, et, par conséquent, un minimum pour l'état primitif de cette fonction ; dans le cas contraire, il indique un maximum : il paraît donc qu'il suffirait de chercher la variation seconde de la fonction, et de voir quel est le signe dont cette variation est affectée pendant toute l'étendue de l'intégrale ; et, en effet, c'est ce que l'on fait dans quelques cas particuliers, mais il est facile de voir quelle serait la longueur des calculs : pour y suppléer, Euler et Lagrange ont montré quelles conditions particulières suffisaient pour que l'expression de la variation seconde fût constamment positive ou négative quand la fonction ne contenait que les variables, et cela, sans espérer tout le développement de cette variation. Ce dernier Géomètre, et avant lui, M.^{r} Legendre, ont étendu ces recherches aux autres cas, et sont arrivés à quelques résultats qui sont plus simples que la marche naturelle et offrent cependant encore des difficultés.

Etablissons d'abord le théorème le plus général que M.r Legendre ait posé dans cette matière.

Théorème. Soient $x, y, p, q, r, — u$ les variables et les coefficiens différentiels de y; soit u le dernier de ces coefficiens qui entre dans la fonction proposée, la fonction $\int V dx$ sera un maximum, si $\frac{d^2 V}{du^2}$ est négatif, et un minimum s'il est positif.

Premier cas. Que V soit fonction seulement de x et y, et qu'ici, comme dans les cas suivans, les variations de x soient nulles.

La variation seconde se réduit au terme $\int dx \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^2 V}{dy^2} \delta y^2 \right\}$ et le théorème est évident.

Second cas. Que V soit fonction de x, y et p :

La variation seconde sera, d'après le théorème de Taylor,

$$\int dx \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^2 V}{dy^2} \delta y^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2 V}{dy dp} \delta y dp + \frac{1}{2} \frac{d^2 V}{dp^2} \delta p^2 \right\} = \int dx \; (F \delta y^2 + 2 G \delta y \delta p + H \delta p^2)$$

pour abréger : après l'intégration par parties, la quantité hors du radical sera de la forme $\alpha \delta y^2$ dont la différentielle est $d\alpha \delta y^2 + 2 \alpha dx \delta y \delta p$, d'où suit

$$\Delta = \text{constante} + \alpha \delta y^2 + \int dx \left\{ \left[F - \frac{d\alpha}{dx} \right] \delta y^2 + 2 \left[G - \alpha \right] \delta y \delta p + H \delta p_2 \right\};$$ déterminant α par l'équation $\left\{ F - \frac{d\alpha}{dx} \right\} H - (G - \alpha)_2 = 0$, déterminant la constante arbitraire qui résulte de cette équation de manière qu'après avoir pris l'intégrale définie la quantité $(\alpha \delta y_2)_1 - (\alpha \delta y_2)_0$ soit du même signe que H, on aura finalement $\Delta = (\alpha \delta y_2)_1 - (\alpha \delta y_2)_0 + \int H dx \left(\delta p + \frac{G - \alpha}{H} \delta y \right)^2$ quantité dont le signe d'après les conventions faites, dépend de celui de H ou de $\frac{d_2 V}{dp^2}$.

Troisième cas. Que V soit fonction de x, y, p et q.

la variation seconde sera

$$\Delta = \int dx \left\{ \frac{d^2 V}{2 d^2 y} \delta y^2 + \frac{d^2 V}{2 dy dp} 2 \delta y \delta p + \frac{d_2 V}{2 dp_2} \delta p^2 + \frac{d_2 V}{2 dy dq} 2 \delta y \delta q + \frac{d_2 V}{2 dp dq} 2 \delta p \delta q + \frac{d_2 V}{2 dq_2} \delta q^2 \right\}$$

$$= \int dx \; (F \delta y^2 + G \delta y \delta p + H \delta p^2 + 2 I \delta y \delta q + 2 K \delta p \delta q + L \delta q^2)$$

Après l'intégration par parties, la fonction hors du signe sera de la forme $\alpha \delta y^2 + 2 \beta \delta y \delta p + \gamma \delta p^2$ dont la différentielle est

$$d\alpha \delta y^2 + 2 d\beta \delta y \delta p + d\gamma \delta p^2 + 2 \alpha dx \delta y \delta p + 2 \beta dx \delta p^2 + 2 \beta dx \delta y \delta q + 2 \gamma dx \delta p \delta q$$

donc substituant, on a $\Delta =$ constante $+\alpha\delta y^2 + 2\beta\delta y\delta p + \gamma\delta p_2 + \int dx \left\{ \left\{ F - \frac{d\alpha}{dx} \right\} \delta y^2 + \right.$

$$\left. +2\left\{ G - \alpha - \frac{d\beta}{dx} \right\} \delta y\delta p + 2\left\{ I - \beta \right\} \delta y\delta q + \left\{ H - 2\beta - \frac{d\gamma}{dx} \right\} \delta p_2 + 2\left[K - \gamma \right] \delta p\delta q + L\delta q^2 \right\}$$

Faisant tout ce qui est entre les $\{ \} = L \{ \delta q + \mu\delta p + \lambda\delta y \}^2$, développant et comparant terme à terme on trouve les équations suivantes:

$$L\mu = K - \gamma\,;\; L\lambda = I - \beta\,;\; L\mu^2 = H - 2\beta - \frac{d\gamma}{dx}\,;\; L\mu\lambda = G - \alpha - \frac{d\beta}{dx}\,; L\lambda^2 = F - \frac{d\alpha}{dx}$$

qui servent à déterminer $\alpha\ \beta\ \gamma\ \mu\ \lambda$, et qui étant du troisième ordre, donnent trois constantes arbitraires au moyen desquelles dans l'intégrale définie on rend la portion hors du signe $\int$ de même signe que L; cela convenu, on trouve $\Delta = (\alpha\delta y^2 + 2\beta\delta y\delta p + \gamma\delta p^2)_1 - (\alpha\delta y^2 + 2\beta\delta y\delta p + \gamma\delta p^2)_0 + \int L dx\, (\delta q + \mu\delta p + \lambda\delta y)_2$ expression dont le signe dépend de celui de L, c'est-à-dire, de $\frac{d^2V}{dq_2}$

On voit facilement comment cette méthode s'appliquerait à un cas plus compliqué. M.r Legendre montre qu'elle conduit au même résultat quand on ne fait pas $\delta x = 0$.

Lagrange a ramené la condition contenue dans le théorème précédent à des équations de condition plus générales; il a montré que pour le second cas que nous avons considéré, il fallait que $FH - G^2 > 0$, et pour cela que F et H fussent de même signe; c'est cette condition qui est remplie par l'équation ci-dessus rapportée $\left\{ F - \frac{d\alpha}{dx} \right\} H - (G - \alpha)^2 = 0$: quant au troisième cas, faisant $FH - G^2 = P$ $KF - GI = Q$ $LF - I^2 = R$ $PR - Q^2 = T$, il a montré qu'il fallait avoir $T > 0$, et, par conséquent, P et R de même signe. On peut lire les détails de cette méthode dans l'ouvrage de M.r Lacroix; il a montré de plus, que, pour être exacte, il faut s'assurer que dans l'étendue de l'intégrale, aucune des quantités F, G, H, etc. ne passe par l'infini, laquelle condition est très-embarrassante, et donne naissance à de grandes difficultés

PARTIE SECONDE.

DES APPLICATIONS A LA MÉCANIQUE DU PROBLÈME DES MAXIMUMS ET MINIMUMS.

Nous avons vu dans l'historique présenté au Chapitre troisième de la première Partie de cet Essai que la première impulsion donnée aux profondes recherches sur les problèmes dont nous nous occupons, provient d'une question de mécanique proposée par Jean Bernouilli aux géomètres ses contemporains; depuis lors, le nombre de ces questions s'est singulièrement augmenté, et le but principal de notre dissertation est de les exposer avec quelque détail; les calculs se trouveront simplifiés, en ce que nous ne serons point obligés de rappeler, comme dans les traités de mécanique, les théories générales qui ont été exposées dans la première partie; nous entrerons aussi dans quelques détails de plus que ne le font la plupart de ces traités, et nous ferons habituellement usage du calcul des variations, toutes les fois qu'il ne se présentera pas de voie plus courte pour arriver à la solution des problèmes que nous examinerons.

CHAPITRE PREMIER.

DE L'EMPLOI DES OEFFICIENS INDÉTERMINÉS DANS LES APPLICATIONS DU CALCUL DES VARIATIONS A LA MÉCANIQUE.

Nous avons vu déjà quel était l'usage des coefficiens indéterminés dans les questions de maximums et de minimums relatifs; les résultats obtenus peuvent s'étendre au cas où il y a dans un problème donné, des relations quelconques entre les variables et leurs coefficiens différentiels; ces relations, qui doivent demeurer les mêmes dans toute l'étendue de l'intégrale, ne diffèrent point au fond de ce que nous avons appelé des propriétés communes, et, par conséquent, il faudra les traiter de la même manière: soit donc $\int U$ la fonction proposée, $L=0$ $A=0$ $B=0$, etc. des relations données entre les variables, on aura l'équation $\delta\int U+\lambda\delta\int L+\alpha\delta\int A+\beta\delta\int B=0$, mettant le signe δ après le signe $\int$, intégrant par parties tout ce qui peut l'être, égalant séparément à zéro tous les coefficiens des variations qui restent sous le signe $\int$, on obtiendra des équations, par le moyen desquelles on éliminera les coefficiens λ, α, β, etc., et on aura les équations définitives du problème.

Nous allons éclaircir la chose par l'exemple le plus simple tiré de la Mécanique analytique.

Soient demandées les équations d'équilibre d'un point matériel assujetti à se mouvoir sur une surface donnée.

Soient X, Y, Z, les sommes des composantes des forces relatives à trois axes rectangulaires, soit $L=0$ l'équation de la surface et λ un coefficient indéterminé; l'équation d'équilibre sera d'après les principes de la statique et d'après ce que nous venons de dire $X\delta x+Y\delta y+Z\delta z+\lambda\delta L=0$; or, $\delta L=\frac{dL}{dx}\delta x+\frac{dL}{dy}\delta y+\frac{dL}{dz}\delta z$; substituant et égalant séparément à zéro la somme des termes respectivement multipliés par δx, δy, δz, on trouve $X+\lambda\frac{\delta L}{dx}=0$ $Y+\lambda\frac{dL}{dy}=0$ $Z+\lambda\frac{dL}{dz}=0$

Eliminant λ, on obtient enfin $Y\frac{dL}{dx} - X\frac{dL}{dy} = 0$ $Z\frac{dL}{dx} - X\frac{dL}{dz} = 0$ $Y\frac{dL}{dz} - Z\frac{dL}{dy} = 0$ pou les équations d'équilibre.

Cet exemple n'offre pas d'intégrations par parties à exécuter; mais en général cette opération est nécessaire; or, supposons que nous l'ayons exécutée dans la recherche de la variation d'une formule intégrale, donnée comme équation de condition dans le problême, par exemple, $\int \lambda\delta.Ldx$, supposons en même temps que nous ayons traité λ comme variable, nous arriverons à la formule

$$\begin{aligned}\delta\int\lambda Ldx = \lambda L\delta x &+ \left\{P\lambda - \frac{d(Q\lambda)}{dx} + \frac{d^2(R\lambda)}{dx^2} - \text{etc.}\right\}\theta \\ &+ \left\{Q\lambda - \frac{d(R\lambda)}{dx} + \text{etc.}\right\}\frac{d\theta}{dx} \\ &+ \left\{R\lambda - \text{etc.}\right\}\frac{d^2\theta}{dx^2} \\ &+ \text{etc.} \\ &+ \int\left\{-Ld\lambda\delta x + \left[N\lambda - \frac{d(P\lambda)}{dx} + \frac{d^2(Q\lambda)}{dx^2} - \text{etc.}\right]\theta dx\right.\end{aligned}$$

La supposition que λ devient constant, nous conduit de suite aux conditions connues des maximums et minimums, dans les problèmes purement géométriques; mais dans les problèmes de mécanique, cette supposition n'est plus permise, et, par conséquent, on trouvera des termes affectés des différentielles de λ; cette remarque, due à Mr. Ampère, est fondée sur ce que dans ces problèmes les équations d'équilibre que l'on cherche contiennent des fonctions des forces X, Y, Z, et que, d'après l'observation de Lagrange, le coefficient λ représente la force à substituer à la condition exprimée par l'équation qui en est affectée, pour pouvoir considérer le mobile comme libre; ce coefficient varie donc avec les forces, relation qui doit être représentée par des équations entre ces forces et le coefficient: que, par exemple, on n'ait que deux forces X et Y, appliquées à chaque molécule d'un corps, l'équation générale d'équilibre deviendra, en se souvenant que $\theta = \delta y - p\delta x$,

$$\begin{aligned}\lambda L\delta x + [P\lambda - \text{etc.}]\,\theta + \int\Big\{&\left[Xdm - Ld\lambda - pdx\left[N\lambda - \frac{d(P\lambda)}{dx} + \text{etc.}\right]\right]\delta x \; + \\ &+ \left[Ydm + dx\left[N\lambda - \frac{d(P\lambda)}{dx} + \text{etc.}\right]\right]\delta y\Big\}\end{aligned}$$

Egalant séparément à zéro les coefficiens de δx et δy sous le signe $\int$, on a les deux équations:

$$X\,dm - Ld\lambda - pdx\left\{N\lambda - \frac{d(P\lambda)}{dx} + \text{etc.}\right\}$$

$$N\lambda - \frac{d(P\lambda)}{dx} + \text{etc.} = -\frac{Ydm}{dx}$$

Cette dernière équation, substituée dans la première, la change en la suivante : $Xdm - Ld\lambda + pYdm = 0$. Mr. Ampère applique ces résultats à la chaînette, dont il démontre plusieurs propriétés curieuses : voyez plus bas.

CHAPITRE II.

DU PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION.

Les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière avaient été depuis Descartes l'objet de l'étude d'un grand nombre de géomètres qui cherchaient à les rapporter à des lois plus générales de la nature; Newton les expliqua par la considération des forces attractives et répulsives qui agissaient sur les molécules lumineuses à la surface des corps, et perpendiculairement à cette surface ; Fermat et Leibnitz eurent recours à un principe métaphysique sur la simplicité des moyens que la nature emploie pour produire ses effets ; ils en conclurent que la lumière, pour arriver d'un point à un autre, prenait le chemin le plus court, et le parcourait dans le temps le plus court, et supposant que sa vîtesse était moindre dans les milieux plus denses, ils arrivèrent à résoudre le problème : mais cette dernière hypothèse étant contestée, il fallut renoncer à cette explication ou la modifier : c'est ce que fit M. de Maupertuis, dans un Mémoire de l'Académie des Sciences, 1744, en établissant que la lumière prend le chemin pour lequel la quantité d'action est la moindre, entendant par quantité d'action une quantité proportionnelle à la somme des espaces, multipliés chacun par la vîtesse avec laquelle ils sont parcourus ; de ce principe, il déduisit avec la plus grande facilité les lois optiques ; et sans remonter aux théories des causes finales, pour établir cette base de son raisonnement, il avança que c'était un principe métaphysique : depuis lors, il en fit usage pour démontrer les lois du choc des corps dans les mémoires de Berlin, et répondit à des objections qu'avait élevées contre lui le Chevalier d'Arcy. Euler, dans le mémoire publié aussi en 1744, et dont nous avons donné l'analyse très-au long, insère une addition où il établit que dans les trajectoires décrites en vertu de forces centrales, l'intégrale de la vîtesse multipliée par l'élément de la courbe, savoir $\int v ds$ est toujours un maximum ou minimum ; il rechercha, en vertu de ce principe, la nature des courbes décrites dans divers cas qu'il se proposa, et trouvant que les résultats s'accordaient parfaitement avec ceux que fournissent les méthodes ordinaires, il conclut que le principe était vrai : cependant il demanda aux métaphysiciens de lui fournir des argumens qui en établissent à priori la vérité : Lagrange reprit le même sujet, à la suite de son premier mémoire sur le calcul des variations ; il étendit encore le principe, au mouvement d'un grand nombre de corps soumis, soit à des forces centrales, soit à des actions mutuelles ; prenant pour chaque corps le produit de sa masse m, par la quantité correspondante $\int v ds$, puis, formant la somme $\Sigma \int m v ds$, il pose en principe que $\delta \Sigma m \int v ds = 0$, et développant cette équation dans chaque cas particulier, il en tire les équations propres à résoudre le problème : enfin, dans la Mécanique analytique, il donne une démonstration directe et purement mathématique de ce fameux principe auquel il donne le nom de *principe de la moindre action*, et par la même voie dont il avait déjà fait usage, il en déduit les équations du mouvement dans plusieurs cas particuliers : M. de la Place a de nouveau fait usage de ce principe, dans un travail sur les lois de la double réfraction, inséré dans les mémoires de l'Institut pour 1809.

Nous allons donner la démonstration de ce principe :

Problème. Quelles sont les conditions nécessaires pour qu'on ait l'équation $\delta\Sigma m\int v ds=0$, toutes ces lettres et signes ayant les significations connues ?

L'indépendance des caractéristiques permet de présenter l'équation proposée sous la forme $\Sigma m\delta.\int v ds=0$; cela étant, remarquons que $ds=vdt$, donc on a

$$\delta\int v ds=\delta\int v^2 dt=\delta\int\left\{\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt}\right\}, \text{ puisque } v^2=\frac{dx^2+dy^2+dz}{dt^2}$$

$$=2\int\left\{\frac{dx}{dt}\,d\delta x+\frac{dy}{dt}\,d\delta y+\frac{dz}{dt}\,d\delta z\right\}$$

$$=2\left\{\frac{dx}{dt}\,\delta x+\frac{dy}{dt}\,\delta y+\frac{dz}{dt}\,\delta z\right\}-2\int\left\{\frac{d^2x}{dt}\,\delta x+\frac{d^2y}{dt}\,\delta y+\frac{d^2z}{dt}\right\}\delta z$$

Dans le problème qui nous occupe les points extrêmes sont donnés et fixes ; donc $\delta x=0=\delta y=\delta z$ et l'équation se réduit à la suivante en rétablissant le Σm, et ôtant le signe $\int$

$$\delta\Sigma m v^2 dt=-2\quad\Sigma m\left\{\frac{d^2x}{dt}\,\delta x+\frac{d^2y}{dt}\,\delta y+\frac{d^2z}{dt}\,\delta z\right\}$$

ou

$$\delta\Sigma m v^2=-2\Sigma m\left\{\frac{d_2x}{dt_2}\,\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y+\frac{d_2z}{dt^2}\,\delta z\right\}$$

Or, le principe des vitesses virtuelles conduit à l'équation

$$\Sigma m\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right\}=\Sigma m\,(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z),$$ dans laquelle X, Y, Z sont les forces accélératrices décomposées suivant trois axes rectangulaires.

Donc enfin, $\delta\Sigma m v^2=-2\Sigma m(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)$

Or, on aura $\delta\Sigma m v^2=0$ dans deux cas différens.

1.° Lorsque le système ne sera mis en mouvement par aucune force accélératrice, alors $X=0=Y=Z$

2.° Lorsque $\delta\Sigma m v^2=2\Sigma m(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)$, car alors les deux valeurs de $\delta\Sigma m v^2$ ne peuvent se concilier qu'en posant $\delta\Sigma m v^2=0$; or, on prouve en mécanique par le principe de la conservation des forces vives que

$$d\Sigma m v^2=2\Sigma m\,(X dx+Y dy+Z dz)$$

et que, par conséquent, lorsque $Xdx+Ydy+Zdz$ est une différentielle complète, on a aussi

$$\delta\Sigma m v^2=2\Sigma m(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)$$

Mais cette condition est remplie lorsque les forces accélératrices données, tendent toujours vers des centres fixes, et sont fonctions des distances à ces centres, et aussi, lorsque les attractions et répulsions mutuelles qui peuvent leur être assimilées, sont fonctions des distances des corps qui composent le système : donc encore, dans ce cas, le principe de la moindre action a lieu.

La démonstration que nous venons de donner fournit plusieurs remarques importantes :

1.° Nous avons considéré, dans nos opérations, l'élément dt comme constant, ce qui revient à supposer que les relations entre les divers corps du système sont indépendantes du temps ; sans cette circonstance, le principe n'a pas lieu.

2.° L'équation $\delta\Sigma mv^2 = 0$ donne pour Σmv^2 un maximum ou un minimum en même temps que pour $\Sigma mv^2 dt = \Sigma mvds$; donc le principe de la moindre action a lieu toutes les fois que la somme des forces vives est un maximum ou un minimum.

3.° La nature même de la question indique qu'il n'y a pas lieu ici à maximum, mais à minimum.

4.° Lorsque $X = 0 = Y = Z$, l'équation $d\Sigma mv^2 = 2\Sigma m\ (Xdx + Ydy + Zdz)$, donne $\Sigma mv^2 =$ constante. Donc alors $\int \Sigma mv^2 dt = \int Cdt = Ct$; mais $\int \Sigma mv^2 dt$ étant un minimum, il suit que t est aussi un minimum; par conséquent, lorsque les forces accélératrices sont nulles, le temps employé est le plus court : c'est sur cette dernière conséquence seulement, que s'appuyèrent Fermat et Leibnitz, pour expliquer la réfraction de la lumière.

5.° Le deuxième cas dans lequel le principe a lieu aurait pu être déduit du théorème de la p. 39; en effet, dans l'équation $\int \delta \Sigma mv = -2\int \Sigma m (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$, faire le second membre égal à zéro, c'est annuller toute la partie du développement de $\int \delta \Sigma mv^2$ qui est sous le signe $\int$, c'est-à-dire, d'après ce théorème que $\delta \Sigma mv^2$ est une différentielle exacte; mais lorsque le temps est supposé constant, et que v n'est fonction que des coordonnées des points de la courbe, on peut remplacer δ par d; donc alors $d\Sigma mv^2$ est une différentielle exacte ; mais $d\Sigma^2 mv^2 = 2\Sigma m (Xdx + Ydy + Zdz)$, donc ce dernier facteur est une différentielle exacte, ce qui a lieu dans les cas des forces centrales.

Les applications de ce principe sont nombreuses et importantes; car, par son moyen, on peut résoudre tous les problèmes de Dynamique auxquels il est applicable ; nous avons déjà mentionné quelques-unes de ces applications ; Maupertuis en déduit les lois de la réflexion et de la réfraction, ainsi que celles du choc des corps ; Euler en a tiré les équations des trajectoires, dans un grand nombre de problèmes sur les forces centrales; depuis lors il l'a appliqué à la recherche des courbes que forment dans divers cas un fil flexible et un fil élastique (Mém. de Berlin, 1748). Lagrange enfin, comme nous l'avons dit, en a montré les conséquences dans toute leur généralité; nous allons en exposer ici deux des plus remarquables, l'une servant à déterminer le mouvement des planètes, l'autre à démontrer la loi de la double réfraction.

I. Soit une planète soumise à l'action d'une force centrale, agissant en raison inverse du carré de la distance, et que les diverses lettres conservent la même signification que ci-dessus, l'expression du théorème se réduit à $\int \delta.vds = 0$; or, remarquons que $\delta.vds = \delta v.ds + v\delta ds$, que de plus le mouvement s'opérant en vertu d'une force centrale et dans un plan, on a les équations $\delta v^2 = 2(X\delta x + Y\delta y)$; $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

$dt = \frac{ds}{v}$; par leur moyen après avoir cherché la valeur de $\int(\delta v.ds + v\delta.ds)$, et égalé à zéro les termes

sous le signe $\int$, on obtient $\left[\frac{d^2x}{dt^2} - X\right]\delta x + \left[\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right]\delta y = 0$; il faut égaler séparément à

zéro les facteurs de δx et δy, ce qui donne $\frac{d^2x}{dt^2} = X$; $\frac{d^2y}{dt^2}$ Y; or appelant R la force centrale et r

la distance variable de la planète au centre, on sait qu'on a $X = -R\frac{x}{r}$ et $Y = -R\frac{y}{r}$; d'où

$\frac{d^2x}{dt^2} = -R\frac{x}{r}$, $\frac{d^2y}{dt^2} = -R\frac{y}{r}$; ce sont là les équations du mouvement.

On peut voir la suite du calcul dans le Traité de Mécanique de Mr. Poisson, Tom. I, pag. 361. Voy. aussi dans le même Traité, pag. 465, l'application du principe au même cas, en y employant des coordonnées polaires.

II. Les lois de la réfraction, tant simple que double, ont été ramenées par MM. de la Place (1) et Malus (2) à des équations générales qu'ils ont obtenues par deux méthodes différentes; celle de Malus fait un plus grand usage du calcul des variations que celle de M. de la Place qui paraît un peu plus simple; toutes les deux sont, en définitif, fondées sur le principe de la moindre action; nous allons exposer la marche du calcul de M. de la Place, sans entrer dans de grands détails, et en renvoyant à son mémoire. Soit considérée comme unité de vîtesse, la vîtesse de la lumière dans un premier milieu ou dans le vide, et soit v la vîtesse dans le second milieu : soit r la distance d'un point quelconque du rayon lumineux au point d'incidence, p la perpendiculaire abaissée de ce point sur la surface du second milieu que nous supposerons plane, θ l'angle d'incidence, on aura $r\cos\theta = p$: soient r' p' θ' les mêmes quantités relatives au rayon réfracté, on aura $r'\cos\theta' = p'$; le principe de la moindre action donne $d\int v ds = 0$; mais ici

$\int v ds = r + r'v = \frac{p}{\cos\theta} + \frac{p'v}{\cos\theta'}$; donc $d\left\{\frac{p}{\cos\theta} + \frac{p'v}{\cos\theta'}\right\} = 0$; or, nommant π et π' les angles que forment respectivement les projections des rayons incident et réfracté avec une droite invariable, menée dans le plan et par le point d'incidence, v est fonction de θ' et de π', donc différentiant

$$d\left\{\frac{p}{\cos\theta} + \frac{p'v}{\cos\theta'}\right\} = -\frac{pd\theta\sin\theta}{\cos^2\theta} + \frac{p'vd\theta'\sin\theta'}{\cos^2\theta'} + \frac{p'}{\cos\theta'}\left\{\frac{dv}{d\theta'}d\theta' + \frac{dv}{d\pi'}d\pi'\right\} = 0 \quad (1)$$

D'autre part, si par les points desquels on a abaissé p et p' on mène des plans parallèles à la droite invariable et perpendiculaire au plan de séparation, la distance de ces plans sera égale à

$p\ tang.\,\theta\sin\pi + p'\ tang\,\theta'\sin\pi'$ et comme cette distance est invariable, quelques soient θ, θ', π, π', on a

$\frac{pd\theta\sin\pi}{\cos^2\theta} + pd\pi\ tang\theta.\cos\pi + \frac{p'd\theta'\sin\pi'}{\cos^2\theta'} + p'd\pi'\ tang.\,\theta'\cos\pi' = 0$ (2). Si par les mêmes points on mène deux

(1) Mémoires de l'Institut pour 1809, pag. 300.

(2) Théorie de la double réfraction, pag. 127-140.

autres plans perpendiculaires à la fois au plan et à la droite invariable, leur distance sera p' tang. θ' cos $\pi' +$ p' tang. θ cos π ; par le même raisonnement on obtiendra

$$\frac{pd\theta \cos \pi}{\cos^2\theta} - pd\pi \text{ tang. } \theta \sin \pi + \frac{p'd\theta' \cos. \pi'}{\cos^2\theta'} - p'\, d\pi' \text{tang. } \theta' \sin \pi' = 0 \ (3)$$

Multipliant l'équation (2) par *sin* π l'ajoutant à l'équation (3) multipliée par *cos* π, on obtient une valeur de $\frac{pd\theta}{\cos^2\theta}$ qui substituée dans l'équation (1), donne une autre équation dont tous les termes sont affectés de $d\theta'$ et $d\pi'$; égalant séparément ces termes à o on obtient

$$\sin \theta \cos (\pi' - \pi) = \nu \sin \theta' + \frac{d\nu}{d\theta'} \cos \theta' \ (4)$$

et $\sin \theta \sin \theta' \sin (\pi' - \pi) = -\frac{d\nu}{d\pi}$ (5). Lors que la vîtesse ν devient constante, ces deux équations fournissent la loi de la réfraction simple; car alors $\sin (\pi' - \pi) = 0$, $1 - \sin^2 (\pi - \pi') = \cos^2(\pi' - \pi) = 1$ et p.c. $\sin \theta = \nu \sin \theta'$ Lorsqu'au contraire cette vîtesse dépend de la direction du rayon lumineux par rapport à certaines lignes fixes dans le corps réfringent, comme l'axe d'un crystal, il faudra exprimer qu'elle est fonction de l'angle formé par ce rayon avec cet axe; soit V cet angle, soient comptés π et π' depuis l'intersection avec la face supérieure d'un plan perpendiculaire, mené par l'axe; soit enfin λ l'angle formé avec la face par un plan perpendiculaire à l'axe ou aura $\cos V = \cos \lambda \cos \theta' - \sin\lambda \sin \theta' \cos \pi'$;

d'où posant $\nu = f(\cos V)$ on tire facilement les valeurs de $\frac{d\nu}{d\theta'}, \frac{d\nu}{d\pi'}$ pour les substituer dans les équations (4) et (5); si on suppose plus particulièrement $\nu^2 = \beta^2 + \alpha^2 \cos^2 V$, on obtiendra après de nombreuses transformations et en posant $K = \beta^2 + \alpha^2 \sin^2\lambda$ les équations finales.

$$\text{Tang. } \theta' \sin \pi' = \frac{\sin \theta \sin \pi \sqrt{\beta^2 + \alpha^2}}{\sqrt{\beta^2 K - \sin^2\theta(\beta^2 \cos^2\pi + K \sin^2\pi)}}$$

$$\text{Tang. } \theta' \cos \pi' = \frac{\sin \theta \cos \pi \sqrt{\beta^2 + \alpha^2}}{K\sqrt{\beta^2 K - \sin^2\theta(\beta^2 \cos^2\pi + K \sin^2\pi)}} + \frac{\alpha^2 \sin \lambda \cos \lambda}{K}$$

Or, ce sont précisément là les équations auxquelles Malus est parvenu, en traduisant la loi d'Huyghens en langage analytique, par des calculs qu'il n'entre pas dans mon but de rapporter ici.

CHAPITRE II.

DE LA CYCLOÏDE.

Le fameux problème de la Brachystochrone a été, comme nous l'avons dit, l'origine des recherches faites sur les maximums et minimums; tous les traités de mécanique démontrent la belle propriété dont jouit, sous ce rapport, la Cycloïde; nous ne répéterons ici cette démonstration, que pour bien éclaircir ce que nous avons exposé relativement à la théorie des limites.

Problème. Trouver, entre deux limites données, quelle est la courbe que décrira en moins de temps un corps soumis à l'action de la pesanteur?

La fonction Vdx se trouve en Mécanique $= \dfrac{dx\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{2(x-a)}}$ la pesanteur étant prise pour unité et a l'ordonnée du point de départ du mobile; de la suit $N=0$ $P=\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}\sqrt{2(x-a)}}$; or, l'équation du maximum ou minimum étant $N-\dfrac{dP}{dx}=0$, on trouve $P=\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}\sqrt{2(x-a)}}=\dfrac{1}{\sqrt{C}}$, C étant une constante, de là $p^2=\dfrac{2(x-a)}{C-2(x-a)}$ et $p=\dfrac{(x-a)\sqrt{2}}{\sqrt{C(x-a)-2(x-a)^2}}$, ou $dy=\dfrac{(x-a)dx}{\sqrt{Cb(x-a)-(x-a)^2}}$ en faisant $\sqrt{b}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Or cette équation est l'équation différentielle de la cycloïde; en y faisant $a=0$, on a la forme bien connue $dy=\dfrac{xdx}{\sqrt{cbx-x^2}}$ pour laquelle la cycloïde a une base horizontale et un cercle générateur dont le diamètre est cb.

Le résultat est le même en remplaçant les x par les y; mais le calcul est moins simple; nous allons cependant l'exécuter parce que c'est d'après cette hypothèse que nous calculerons les limites.

$$V=\frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{2(y-a)}}=\frac{\sqrt{1+p^2}}{z};\ z=\sqrt{2(y-a)};\ dz=\frac{dy}{\sqrt{2(y-a)}}=\frac{dy}{z}$$

$$N=-\frac{\sqrt{1+p^2}}{z^3}\ P=\frac{p}{z\sqrt{1+p^2}}:\ \text{donc}\ -\frac{\sqrt{1+p^2}}{z^3}-\frac{d.\left[\frac{p}{z\sqrt{1+p^2}}\right]}{dx}=0$$

$$\text{ou}\quad \left\{ \frac{dx\sqrt{1+p^2}}{z^3} \times \frac{dz}{dx\sqrt{1+p^2}} \right\} + \frac{p}{z\sqrt{1+p^2}}\, d.\frac{p}{z\sqrt{1+p^2}} = o$$

Intégrant $-\frac{1}{2z^2} + \frac{p^2}{2z^2(1+p^2)} = -C$; réduisant, mettant pour z sa valeur, pour p la sienne $\frac{dy}{dx}$, changeant les constantes, on trouve finalement $dx = \frac{ydy}{\sqrt{\beta y - y^2}}$, équation de la cycloïde.

L'équation aux limites se réduit dans le cas que nous examinons à la suivante

$$V_{,}\,\delta x_{,} - V_{\circ}\,\delta x_{\circ} + P_{,}\,\theta_{,} - P_{\circ}\,\theta_{\circ} = o$$

Supposons

1°. Que les limites données soient deux points, l'équation sera satisfaite d'elle-même, car alors $\delta x = o = \delta y$ et par conséquent aussi $\delta x_{,} = o = \delta x_{\circ} = \theta_{,} = \theta_{\circ}$

2.° Que la première limite soit un point et la seconde une droite perpendiculaire à l'axe des abcisses, alors on a $\delta x_{,} = o = \delta x_{\circ} = \delta y_{,}$; mais $\delta y_{\circ}$ n'est pas nul et par conséquent $\theta_{\circ}$ ne l'est pas; il faut donc pour que l'équation soit vérifiée qu'on ait $P_{\circ} = o$, c'est-à-dire que pour le dernier point on a $p = o$, ou $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{o}$; cela nous indique que la tangente de l'angle formé à ce point par la courbe avec la droite est infinie, c'est-à-dire que cet angle est droit.

3.° Que les deux limites soient deux droites perpendiculaires à l'axe des abcisses; alors on a $\delta x_{,} = o = \delta x_{\circ}$; mais $\delta y_{,}$ et $\delta y_{\circ}$ ne sont point nuls et par conséquent il faut qu'on ait séparément $P_{,} = o$ $P_{\circ} = o$; ce qui rend commune aux deux points extrêmes la condition dont nous venons de parler et alors les deux droites limites se terminent dans la partie inférieure de deux cycloïdes renversées contiguës.

4.° Que les limites soient des courbes dont les équations différentielles sont $dy_{,} = \alpha_{,}\, dx_{,}$ $dy_{\circ} = \alpha_{\circ}\, dx_{\circ}$; l'équation aux limites subsistera alors toute entière; substituant pour $\theta_{,}$ et θ_{o} leurs valeurs $\delta y_{,} - p_{,}\delta x_{,}$ et $\delta y_{o} - p_{o}\delta x_{o}$, cette équation se transforme en la suivante.

$$(V_{,} - P_{,}p_{,})\,\delta x_{,} - (V_{\circ} - P_{o}p_{\circ})\,\delta x_{o} + P_{,}\delta y_{,} - P_{,}\delta y_{o} = o$$

Des équations des courbes limites, on tire $\delta y_{o} = \alpha_{o}\delta x_{o}$ $\delta y_{,} = \alpha_{,}\delta x_{,}$, substituant, réduisant et égalant séparément à zéro les coefficiens de $\delta x_{,}$ et δx_{o}, on tire $V_{,} - P_{,}p_{,} + \alpha_{,}P_{,} = o$, $V_{o} - P_{o}p_{o} + \alpha_{o}P_{o} = o$; mais, dans le cas que nous examinons, $V_{,} = \frac{\sqrt{1+p_{,}^2}}{z_{,}}$ $P_{,} = \frac{p_{,}}{z_{,}\sqrt{1+p_{,}^2}}$, etc. nommant pour abréger $z_{,}$ le dénominateur: donc la première de ces équations devient

$$o = \frac{\sqrt{1+p_{,}^2}}{z_{,}} - (p_{,} - \alpha_{,})z_{,}\ \frac{p_{,}}{\sqrt{1+p_{,}^2}} = \frac{1+\alpha_{,}p_{,}}{z_{,}\sqrt{1+p_{,}^2}};$$ pour y satisfaire, il faut poser $1+\alpha_{,}p_{,} = o$, ou $p_{,} = -\frac{1}{\alpha_{,}}$, ce qui indique que la cycloïde coupe à angle droit la première courbe limite: le même résultat a lieu relativement à la seconde, l'équation étant la même.

5.° Jusqu'ici, nous avons fait abstraction de la quantité a, qui entre dans le dénominateur z; si on considère cette quantité comme la première ordonnée, savoir, comme $y_,$ il faudra, d'après ce que nous avons dit, ajouter à l'équation des limites, le terme $-\delta y_, \int I dx_, = -\alpha \delta x_, \int I_, dx$, ce qui change l'équation de la première limite en $V_, - P_, p_, + \alpha_, P_, - \alpha_, \int I_, dx = 0$, sans rien changer à celle de la seconde limite : or, $I_, = \frac{dV}{dy} = N$; de plus, l'équation du maximum ou minimum donne

$Ndx = dP$: donc $\int Ndx = z\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} + C$, et $\int (N_, - N_0)dx = \frac{p'}{z_,\sqrt{1+p_,^2}} - \frac{p_0}{z_0\sqrt{1+p_0^2}}$, d'où

$-\alpha_, \int (N_, - N_0)dx = \frac{\alpha_, p_,}{z_0\sqrt{1+p_0^2}} - \frac{\alpha_, p_,}{z_,\sqrt{1+p_,^2}}$, et enfin

$$V_, - P_, p_, + \alpha_, p_, - \alpha_, \int I_, dx = \frac{1+p_,\alpha_,}{z_,\sqrt{1+p_,^2}} + \frac{\alpha p_0}{z_0\sqrt{1+p_0^2}} - \frac{\alpha_, p_,}{z_,\sqrt{1+p_,^2}} = \frac{1}{z_,\sqrt{1+p_,^2}} + \frac{\alpha_, p_0}{z_0\sqrt{1+p_0^2}} = 0$$

Or, l'équation $\frac{1}{2}\left[\frac{p^2}{z^2(1+p^2)} - \frac{1}{z^2}\right] = -C$, donne $z\sqrt{1+p^2} = \frac{1}{\sqrt{2c}} = b$; donc notre équation devient $\frac{1+\alpha_, p_0}{b} = 0$; mais l'équation de la seconde limite donne $\frac{1+\alpha_0 p_0}{b} = 0$; donc $\alpha_, = \alpha_0$, c'est-à-dire, que les tangentes menées de l'origine et de la fin de la cycloïde aux deux courbes limites sont parallèles entr'elles.

6.° Enfin, on arriverait au même résultat en prenant une des limites pour origine des coordonnées; car alors le terme à ajouter se réduirait à $-\delta y_, \int Ndx$, puisque $m=0$.

La nature de la question montre facilement qu'il y a lieu à minimum dans le problème que nous venons d'examiner; c'est ce que va nous montrer aussi la règle de M.r Legendre : suivant cette règle, il faut chercher la valeur de $\frac{d^2V}{dp^2}$; or, nous avons $\frac{dV}{dp} = P = \frac{p}{z\sqrt{1+p^2}}$, donc

$\frac{d^2V}{dp^2} = \frac{1}{z\sqrt{1+p2}} - \frac{p^2}{(1+p2)z\sqrt{1+p2}} = \frac{1}{[1=p^2]z\sqrt{1+p^2}}$, quantité essentiellement positive; il y a donc lieu à minimum.

Pour déterminer la constante β, c'est-à-dire le diamètre du cercle générateur, il faut intégrer l'équation $dx = \frac{ydy}{\sqrt{\beta y - y^2}}$ ce qui donne $x = -\sqrt{\beta y - y^2} + \frac{\beta}{2}$ arc $\left\{\cos = \frac{\beta - 2y}{\beta}\right\} + C$, puis substituer les valeurs de x et de y, données aux limites; on obtient ainsi une équation de condition dans laquelle β est la seule inconnue.

La cycloïde jouit d'une seconde propriété de maximum ou minimum, relativement à l'espace compris entr'elle, sa développée et deux rayons de courbure; Euler a démontré cette propriété, Mr. Lacroix a répété sa démonstration, et nous l'avons esquissée pag. 24; mais comme elle est assez compliquée, nous allons en donner une autre fondée sur les propriétés connues de la cycloïde.

Lemme. Soit $dx=\dfrac{ydy}{\sqrt{\beta y-y^2}}$ l'équation d'une cycloïde, β étant une constante, je dis qu'on a l'équation $2(1+p^2)^2=C'q+Cpq$, p et q ayant la signification connue, C' et C étant des constantes arbitraires.

En effet, $\dfrac{dy}{dx}=p=\dfrac{\sqrt{\beta y-y^2}}{y}$; $p^2=\dfrac{\beta y-y^2}{y^2}=\dfrac{\beta-y}{y}$; d'où, par une addition et un changement de constante, on tire $yp^2+y=\dfrac{C}{4}p+\dfrac{C'}{4}$, ou $4yp^2+4y=Cp+C'$ (1); une autre propriété de la cycloïde consiste en ce que le rayon de courbure est double de la normale, c'est-à-dire $\dfrac{(1+p^2)^{3/2}}{q}=2y\sqrt{1+p^2}$ d'où on tire $1+p^2=2yq$ et $2(1+p^2)=4yq$: or, l'équation (1) donne $4y=\dfrac{C'+Cp}{1+p^2}$ donc $4yq=\dfrac{C'q+Cpq}{1+p^2}=2(1+p^2)$, d'où enfin $2(1+p^2)^2=C'q+Cpq$: il n'y aurait pas eu besoin de changer les constantes en prenant pour équation de la cycloïde $dx=\dfrac{8ydy}{C\pm\sqrt{C^2+16C'y-64y^2}}$.

Théorème. Cela posé, l'arc élémentaire de la courbe étant $dx\sqrt{1+p^2}$ et le rayon de courbure $\dfrac{(1+p^2)^{3/2}}{q}$, le secteur compris entre cet arc et les rayons de courbure menés de ses extrémités sera $\dfrac{1}{2}dx\left\{\dfrac{(1+p^2)^2}{q}\right\}$, d'où $\int Vdx=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{(1+p^2)^2}{q}dx$, et $V=\dfrac{(1+p^2)^2}{q}$: on peut voir (Lacroix, Calc. Intégr. pag. 793), et on peut s'assurer par le calcul très-simplement que l'équation $N-\dfrac{dP}{dx}+\dfrac{d^2Q}{dx^2}=0$, dans laquelle $N=0$ pour le cas que nous examinons, conduit à l'équation de condition $2[1^2p]^2=C'q+Cpq$: donc la cycloïde est la courbe qui rend cette fonction maximum ou minimum.

En intégrant cette dernière équation on trouverait deux nouvelles constantes arbitraires; il y en aura donc quatre, et il faut que les limites soient assujetties à quatre conditions.

La quantité $\dfrac{d^2V}{dq^2}$ est égale à $\dfrac{2[1+p^2]^2}{q^3}$ et son signe dépend de celui de q, c'est-à-dire $\dfrac{d^2y}{dx^2}$; il faudra donc dans chaque cas déterminer ce signe pour savoir s'il y a lieu à maximum ou à minimum.

CHAPITRE IV.

De la Chainette.

Galilée s'était le premier proposé le problème de chercher la courbe formée par un fil librement suspendu entre ses extrémités; il s'était imaginé que cette courbe était la parabole; un Géomètre nommé Jungius, démontra par expérience, que cette opinion était une erreur; enfin, les frères Bernouilli, Huygens et Leibnitz, déterminèrent l'équation de cette courbe. Jean Bernouilli en particulier étendit le problème au cas où le fil serait d'inégale épaisseur : la courbe ainsi formée a reçu le nom de *chaînette*; or, comme on prouve en mécanique que dans l'équilibre d'un système quelconque de corps, le centre de gravité de ce système, est le plus haut ou le plus bas, il suit que la chaînette jouit d'une propriété remarquable de maximum ou minimum savoir, que la distance de son centre de gravité à un plan horizontal est la plus grande ou la plus petite entre toutes les courbes de même longueur suspendues aux mêmes extrémités; une autre propriété découlant de celle-là, c'est que si on fait tourner la chaînette autour de sa base, le solide engendré aura une surface plus grande ou plus petite que celle d'un solide engendré par toute autre courbe de même longueur et de même base : Nous allons d'après ces données chercher l'équation de la chaînette.

Problème. Quelle est la courbe, telle qu'entre toutes les courbes de même longueur et passant par les mêmes points extrêmes, cette courbe aura son centre de gravité le plus haut ou le plus bas.

Il s'agit ici d'un problème de maximum ou minimum relatif; la propriété commune est la longueur de la courbe, savoir $\int dx\sqrt{1+p^2}$: la fonction donnée est $\frac{\int y dx\sqrt{1+p^2}}{\int dx\sqrt{1+p^2}}$, d'après les principes de mécanique; or, le dénominateur de la fonction étant le même que la propriété commune, il suffit de traiter cette fonction comme si elle n'était composée que de son numérateur et la raison en sera facile à apercevoir en se rappelant ce qui a été dit p. 40 ; soit donc $V=\sqrt{1+p^2}$ $W=y\sqrt{1+p^2}$; on aura pour la

1.re fonction $N=o$ $P=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ $Q=o=R=$etc.

pour là seconde $n=\sqrt{1+p^2}$ $\pi=\frac{py}{\sqrt{1+p^2}}$ $\nu=o=\rho=$ etc.

De la appelant α une constante arbitraire, l'équation de condition du maximum ou minimum est $-\alpha\frac{dP}{dx}+n-\frac{d\pi}{dx}=o$, ou $\alpha\, d\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \sqrt{1+p^2}\, dx - d.\frac{py}{\sqrt{1+p^2}}$ (1). Multipliant par p et intégrant par parties, on trouve

$$\beta + \frac{\alpha p^2}{\sqrt{1+p^2}} - \alpha\sqrt{1+p^2} = y\sqrt{1+p^2} - \int \frac{ypdp}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{yp^2}{\sqrt{1+p^2}} + \int \frac{ypdp}{\sqrt{1+p^2}}$$

Otant les termes qui se détruisent mutuellement, et réduisant, on trouve $\beta = \frac{y+\alpha}{\sqrt{1+p^2}}$; résolvant cette équation par rapport à p, et remettant sa valeur $\frac{dy}{dx}$, on obtient $dx = \frac{\beta dy}{\sqrt{(\alpha+y)^2-\beta^2}}$, (2) d'où

$$x = \beta \log \left(y + \alpha + \sqrt{[y+\alpha]^2 - \beta^2}\right) + \gamma.$$

Pour déterminer la constante γ, supposons que le premier point de suspension soit pris pour origine des coordonnées; nous aurons à ce point $y = 0$, $x = 0$, et $0 = \beta \log [\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}] + \gamma$; donc :

$$x = \beta \log \left\{ \frac{y + \alpha + \sqrt{[y+\alpha]^2 - \beta^2}}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \right\}$$

Quant aux constantes α et β, on les détermine par les considérations du poids et de la longueur de la corde donnée : voyez à ce sujet Poisson I, pag. 197 - 204.

Les équations que nous venons d'établir nous serviront à déterminer les plus importantes propriétés de la chaînette; et d'abord on tirerait aisément la valeur de l'arc de la courbe ou de s, en faisant attention que dans l'équation (1) $dx\sqrt{1+p^2} = ds$, ce qui après une double intégration donneroit s en valeur de y, mais nous pouvons l'obtenir de l'équation (2). En effet,

$$s = \int dy \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}} = \int dy \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{(\alpha+y)^2 - \beta^2}} = \int dy \sqrt{1 + z^2},$$ en posant, pour abréger, $\frac{\beta^2}{(\alpha+y)^2 - \beta^2} = z^2$, d'où $(\alpha+y)^2 - \beta^2 = \frac{\beta^2}{z^2}$ et $\alpha + y = \frac{\beta}{z}\sqrt{1+z^2}$

Delà $dy = -\frac{\beta dz}{z^2}\sqrt{1+z^2} + \frac{\beta dz}{\sqrt{1+z^2}}$; $\int dy\sqrt{1+z^2} = -\beta\int \left\{ \frac{dz}{z^2}(1+z^2) - dz \right\} = -\beta \int \frac{dz}{z^2}$

enfin $s = \frac{\beta}{z} + \gamma = \gamma + \sqrt{(\alpha+y)^2 - \beta^2}$ d'où suit que la chaînette est rectifiable.

La chaînette est quarrable par l'hyperbole, en effet, appelant S une portion de surface de la chaînette, on a ;

$$\int ydx = S = \beta \int \frac{ydy}{\sqrt{(\alpha+y)^2 - \beta^2}} = \beta \left\{ \int d.\sqrt{(\alpha+y)^2 - \beta^2} - \alpha \int \frac{dy}{\sqrt{(\alpha+y)^2 - \beta^2}} \right\}$$

$$= \beta\sqrt{(\alpha+y)^2 - \beta^2} - \alpha x + C$$

Or pour que cette quantité soit un produit exact, il faut que $(\alpha+y)^2-\beta^2=\omega^2$, équation d'une hyperbole ; l'espace de la chaînette sera donc égal au produit d'une ligne constante par une coordonnée ω d'une hyperbole déterminée par l'équation que nous venons d'établir, moins le produit de l'abcisse x par une quantité constante :

Pour prouver maintenant que cette courbe est encore celle qui donne le maximum ou minimum de surface pour le solide de révolution, engendré par la rotation autour de l'axe de suspension, remarquons que la propriété commune est encore ici $\int dx\sqrt{1+p^2}$, et que l'élément de la surface étant $2\pi y dx\sqrt{1+p^2}$; la formule du maximum ou minimum est $\int y dx\sqrt{1+p^2}$ comme dans le cas précédent; le résultat sera donc le même.

Recherchons maintenant l'équation de la courbe lorsqu'on considère le poids de la corde ou de la chaîne non comme uniforme, mais comme une fonction déterminée de l'arc : soit S une fonction de l'arc s, nous poserons avec Euler $\int dx\sqrt{1+p^2}$ pour propriété commune et $x_i=\dfrac{\int x dx S\sqrt{1+p^2}}{\int dx S\sqrt{1+p^2}}$ pour fonction maximum ou minimum; or, le dénominateur de cette dernière fonction étant lui-même une fonction de l'arc s ou de la propriété commune, il suffira d'appliquer les règles que nous avons données aux fonctions $\int dx\sqrt{1+p^2}$ et $\int x dx S\sqrt{1+p^2}$; la première nous donne pour différentielle $d.\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}$: la seconde rentre dans le troisième cas examiné p. 33, et on a $V=Sx\sqrt{1+p^2}$; $dV=dSx\sqrt{1+p^2}+Sdx\sqrt{1+p^2}+\dfrac{Sxpdp}{\sqrt{1+p^2}}$, et en faisant $dS=Ods$, $dV=(Ox\sqrt{1+p^2}+S)ds+\dfrac{Sxpdp}{\sqrt{1+p^2}}=Lds+\dfrac{Sxpdp}{\sqrt{1+p^2}}$

Comparant cette équation avec celle traitée dans le cas dont nous parlons, on a

$$\Pi=s=\int dx\sqrt{1+p^2},\ M=o\ \ N=o\ \ P=\frac{Sxp}{\sqrt{1+p^2}}\ \ Q=o=R=\text{etc.}$$

$$\text{Mais } \Pi=\int V'dx,\ \text{donc } V'=\sqrt{1+p^2},\ \text{d'où } M_o=o\ \ N_o=o\ \ P_o=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\ \ Q_o=o=R_o=\text{etc.}$$

$$\text{Cela posé, la formule finale se réduit à } -H\frac{dP_o}{dx}-\frac{d(P-P_oH)}{dx}=-\frac{dP}{dx}=o$$

C'est là la différentielle de la fonction $\int V dx$; composant maintenant l'équation de condition du maximum ou minimum relatif $\alpha dU'+dU=o$, on trouve ici $\dfrac{\alpha p}{\sqrt{1+p^2}}-\dfrac{Sxp}{\sqrt{1+p^2}}=C$ après avoir intégré par rapport à x; résolvant cette équation par rapport à p, et substituant la valeur $\dfrac{dy}{dx}$, on obtient finalement $dy=\dfrac{Cdx}{\sqrt{(\alpha-Sx)^2-C^2}}$ où il est facile de reconnaître la forme de l'équation de la chaînette; elle devient celle de la chaînette ordinaire lorsque S devient constante.

La chaînette jouit encore de la propriété d'engendrer le solide de moindre surface lorsque l'aire contenue entre la courbe et les ordonnées de deux points est la même, auquel cas la propriété commune n'est plus $\int dx\sqrt{1+p^2}$, mais $\int y dx$; seulement après avoir posé l'équation $dU + \alpha dU' = 0$, il faut supposer nulle la constante arbitraire α.

Si la propriété commune entre plusieurs courbes terminées à deux points est d'engendrer par leur révolution autour de l'axe des solides de même surface, la chaînette jouit encore ici d'un maximum, c'est que lorsqu'on fait la constante $\alpha = \infty$, le solide qu'elle engendre a le plus grand volume; la quantité maximum est ici $\int \pi y^2 dx$ et par conséquent $A = \int y^2 dx$.

Enfin, entre toutes les courbes de même longueur la chaînette est celle qui rend $\int s dx$ un maximum, s étant l'arc de la courbe.

Ces diverses propriétés ont été reconnues par Euler qui les démontre dans son ouvrage précité.

M.r Ampère dans le mémoire dont nous avons déjà parlé s'occupe de la chaînette comme application des résultats qu'il avait obtenus; il établit que cette courbe possède d'autres propriétés curieuses, comme l'égalité entre la normale du solide de révolution qu'elle engendre, et le rayon de courbure de la courbe génératrice au même point. Il s'occupe aussi dans ce mémoire de la développante de la chaînette, et y montre que cette courbe a une tangente constante.

CHAPITRE V.

Des courbes élastiques.

Dans un appendice à son Traité des maximums et minimums, Euler cherche les équations et la nature des courbes formées par un ressort élastique, soumis à l'action de diverses forces; ces courbes sont de plusieurs espèces, mais se rapportent toutes à une équation générale qui les comprend dans son expression; pour arriver à cette équation, Euler part de ce principe déjà adopté par Daniel Bernouilli, que dans la courbure d'une lame élastique homogène, la quantité $\int \frac{ds}{r^2}$ est un minimum, appelant s l'arc de la courbe et r le rayon de courbure; appliquant à cette condition les règles données sur la tractation des problèmes d'isopérimétrie, il obtient l'équation de la courbe qui contient quatre constantes arbitraires et demande donc qu'on détermine les points extrêmes de la courbe et la direction des tangentes à ces points; depuis lors on a suppléé à l'usage du principe que nous venons de citer par la considération d'un polygone, composé de côtés infiniment petits et auquel l'on peut assimiler la courbe en question; mais quel que soit le procédé qu'on emploie pour parvenir à l'équation de la courbe dont Euler donne l'expression générale $dy = \frac{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)dx}{\sqrt{a^4-(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^2}}$, cette courbe possède plusieurs propriétés de maximums et de minimums qui sont très-remarquables et que nous allons démontrer.

° Entre toutes les courbes isopérimètres, l'élastique est celle qui, par sa rotation autour de la ligne
oint les points extrêmes, engendre le solide de plus grande capacité.

propriété commune est ici $\int dx\sqrt{1+p^2}$; la formule du maximum est $\int y^2dx$ d'où on tire pour la pre-

: $M=o=N$; $P=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$; $Q=o=$ etc. et pour la seconde $M'=o$ $N'=2y$ $P'=o$ etc., de là l'é-

ion de condition $dU+\alpha dU'=o$ devient $N-\alpha\frac{dP}{dx}=o$, ou substituant $2ydx=d.\frac{\alpha p}{\sqrt{1+p^2}}$, ou

$=\alpha p\, d.\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$; intégrant $y^2+\beta=\frac{\alpha}{\sqrt{1+p^2}}$; $\sqrt{1+p^2}=\frac{\alpha}{y^2+\beta}$; $p=\frac{\sqrt{\alpha^2-(y^2+\beta)^2}}{y^2+\beta}$

$=\frac{(y^2+b)dy}{\sqrt{\alpha^2-(y^2+\beta)^2}}$, équation qui rentre dans l'équation générale citée plus haut en y changeant les
y, et réciproquement.

° Entre toutes les courbes isopérimètres, l'élastique est celle qui comprend l'aire, dont le centre de
té est le plus haut ou le plus bas.

propriété commune est encore ici $\int dx\sqrt{1+p^2}$; la fonction maximum ou minimum est la distance
ntre de gravité $x_{\prime}=\frac{\int yxdx}{\int ydx}$; cette dernière fonction contient deux formules intégrales qu'on peut
r comme étant absolument indépendantes, d'après les principes établis ailleurs; on a pour la pro-
: commune $P'=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$; pour la formule $\int yxdx$, $N'=x$ $P'=o=$ etc.; enfin pour la formule
$N''=1$ $P''=o$ etc.; donc l'équation de condition est $N'+\alpha N''-\beta\frac{dP}{dx}=o$, ou $xdx+\alpha dx-\beta d.\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=o$
tégrant $x^2+2\alpha x-\frac{2\beta p}{\sqrt{1+p^2}}=\gamma$: résolvant cette équation par rapport à p et substituant la valeur
on trouve finalement $dy=\frac{(x^2+2\alpha x-\gamma)dx}{\sqrt{4\beta^2-(x^2+2\alpha x-\gamma)^2}}$, ce qui est bien une équation de courbe élastique.

n fait dans cette formule $\alpha=o$, c'est-à-dire, si on ne s'occupe plus de la formule intégrale $\int ydx$, l'é-
ion résultante n'en sera pas moins une équation d'élastique, ce qui nous prouve que cette courbe est
re celle pour laquelle $\int yxdx$ est un maximum ou minimum entre toutes les courbes de même longueur.

.° On peut voir dans Euler que cette courbe est aussi une de celles qui, dans une supposition particulière,
ne un arc minimum pour une aire de grandeur donnée; ce problème, dont le calcul est long et com-
ué, conduit à deux solutions dont l'une, comme on devait s'y attendre, donne le cercle et l'autre
astique: on peut même, dans une supposition particulière, satisfaire par une ligne droite.

4.° Une propriété plus remarquable de cette courbe est d'être identique avec celle qu'on a nommé
Lintéaire, c'est-à-dire, celle que forme dans l'état d'équilibre une linge librement suspendu et rempli

d'un liquide; le linge est supposé inextensible, et par conséquent la longueur de la courbe est donnée; on suppose que cette courbe est celle que forme un plan vertical passant par les deux points de suspension par son intersection avec la surface du linge : la hauteur du liquide est aussi donnée et par conséquent l'aire comprise entre la courbure du linge, et le niveau est une seconde propriété commune du problème : enfin dans l'état d'équilibre le centre de gravité de cet espace, doit être le plus bas possible, et par conséquent, la distance de ce centre à un axe horizontal est la quantité qui doit être rendue maximum ou minimum : traduisant ces conditions en symboles algébriques, les propriétés communes sont $\int dx\sqrt{1+p^2}$, $\int ydx$, et la quantité maximum ou minimum est $\dfrac{\int yxdx}{\int ydx}$, d'où il est évident que la courbe qui satisfait est la même que celle trouvée dans le 2.° de ce chapitre : Jaques Bernouilli est le premier qui ait résolu ce problème, il avait cru d'abord que cette propriété appartenait à l'élastique sans qu'il fut besoin de fixer l'aire comme propriété commune, mais il a reconnu depuis que ce n'était qu'avec cette supposition qu'elle satisfaisait.

5.° Ces divers problèmes étant des maximums et minimums relatifs, on pourrait en vertu de la réciprocité que nous avons démontré ailleurs exister entre les propriétés communes et les fonctions maximums ou minimums, énumérer d'autres propriétés de l'élastique déduites de celles que nous venons d'établir mais c'est une chose trop simple pour qu'il soit la peine de s'y arrêter.

CHAPITRE VI.

DE L'ÉQUILIBRE.

Lorsqu'un système de corps est mis en mouvement par des forces accélératrices quelconques, il peut passer par certaines positions où il resterait en équilibre en vertu de ces seules forces accélératrices, s'il y parvenait sans aucune vîtesse acquise; supposons que le système soit dans une de ces positions, et qu'on lui fasse subir un déplacement infiniment petit, nommant δx, δy, δz, les variations des coordonnées d'un point quelconque m du système, le principe des vîtesses virtuelles fournit l'équation $\Sigma m(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)=0$ or, nous avons vu, p. 49, que, dans les mêmes cas où la quantité $Xdx+Ydy+Zdz$ est une différentielle exacte que nous pouvons représenter par $d\varphi$, dans ces mêmes cas, la quantité $X\delta x+Y\delta y+Z\delta z$ peut se changer en celle-ci $Xdx+Ydy+Zdz$; par conséquent, l'équation des vîtesses virtuelles conduit à celle-ci $d\varphi=0$, ce qui indiquera un maximum ou un minimum pour la fonction φ; ainsi, dans les cas dont nous parlons, le système sera en équilibre lorsque la fonction φ sera un maximum ou un minimum; soit, par exemple, la pesanteur, la seule force accélératrice donnée; en la nommant g, et la considérant comme parallèle à l'axe des z on a $\Sigma mgdz=0$; mais nommant M la masse du système entier et $z_{,}$ l'ordonnée de son centre de gravité, on a $\Sigma mz=Mz_{,}$ d'où $\Sigma mdz=Mdz_{,}$, d'où enfin $dz_{,}=0$, donc, dans le cas d'équilibre, l'ordonnée du centre de gravité du système est un maximum ou un minimum; c'est-à-dire, ce centre est le plus haut ou le plus bas possible. Il paraît, d'après ce que nous venons de dire, que l'équilibre est de deux espèces, suivant qu'il répond au maximum ou au minimum de la fonction φ; d'autre part, on sait que l'équilibre se distingue en *stable* et *instantanée*, suivant que le système étant infiniment peu déplacé, tend à se rapprocher de sa position d'équilibre ou à s'en éloigner toujours davantage; il serait intéressant de savoir s'il n'y a point quelque rapport qui lie ces diverses espèces d'équilibre ; et si l'on doit en reconnaître quatre ou seulement deux ; or, Lagrange a démontré que toutes les fois que l'équilibre répondait au minimum de la fonction ϕ, il était stable ; qu'au contraire, toutes les fois qu'il répondait au maximum de cette même fonction, il était instantanée ; ainsi, dans l'exemple que nous venons de traiter, si le centre de gravité est le plus bas possible, l'équilibre est évidemment stable ; au contraire, s'il est le plus haut possible, l'équilibre existe, mais il est instantanée : nous allons chercher à démontrer ce théorème, en abrégeant les calculs de Lagrange d'une manière qui suffit au but que nous nous proposons. Nous arriverons à un énoncé inverse de celui que nous venons de rapporter d'après Lagrange ; c'est-à-dire, nous trouverons la stabilité pour le maximum ; mais on sent que cela ne dépendant que du point qu'on prend pour origine des coordonnées, la nature même de la question n'en est point modifiée ; la différence que nous établissons ainsi tient à ce que nous admettons avec Mr. Poisson, l'équation des forces vives $\Sigma mv^2 = C + 2\phi$ tandis que Lagrange pose $\Sigma mv = C - 2\phi$ Rappelons d'abord la formule suivante qu'on trouve dans le Traité de Mécanique de Mr. Poisson T. II, pag. 290, $d\Sigma mv^2 = 2\Sigma m\ (Xdx + Ydy + Zdz)$, d'où en faisant pour des raisons qu'on verra plus bas $\int (Xdx + Ydy + Zdz = \int P$ on tire (1) $d\Sigma mv^2 - 2d\Sigma m\int P = 0$ Considérons maintenant le point m du système dont les coordonnées sont généralement x, y, z ; supposons que pour la position d'équilibre ces coordonnées sont a, b, c, et que le système étant dans cette position on vienne à le déplacer infiniment peu de manière à faire varier ses coordonnées de quantités infiniment petites x', $y' = b'x'$, $z' = c'x'$, après ce déplacement les coordonnées du point m seront par conséquent $x = a + x'$, $y = b + b'x'$ $z = c + c'x'$, d'où on tire $dx = dx'$, $dy = b'dx'$, $dz = c'dx'$; or, on a généralement $v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$, donc ici substituant

$v^2 = \frac{(1 + b'^2 + c'^2)dx'^2}{dt^2} = \frac{Ndx'^2}{dt^2}$ pour abréger; de là $d\Sigma mv^2 = 2N\Sigma m\ \frac{dx'd^2x'}{dt^2}$ Maintenant appelant A ce que devient la quantité $\int P$ lorsqu'on considère l'état d'équilibre, c'est-à-dire, lorsqu'on y remplace x, y, z, par a, b, c, on aura pour la valeur de cette quantité lorsqu'on y met les coordonnées du point après le déplacement, $A + \left\{ \frac{dA}{da} + b'\frac{dA}{db} + c'\ \frac{dA}{dc} \right\} x' + \left\{ \frac{d^2A}{2da^2} + b'^2\frac{d^2A}{2db^2} + c'^2\frac{d^2A}{2dc^2} + b'\frac{d^2A}{dadb} + c'\frac{d^2A}{dadc} + b'c'\frac{d^2A}{dbdc} \right\} x'^2$ + etc.

Négligeant dans ce développement les puissances supérieures à la seconde parce que x' est une quantité très-petite, nommant N' le coefficient de x'^2 et remarquant que le coefficient de x'^1 est nul puisqu'on a généralement pour l'équilibre $dA = 0$, cette quantité se réduit à $A + N'x'^2$; donc en général,

$$P = Xdx + Ydy + Zdz = 2N'x\,dx',\ \text{et}\ 2\Sigma mP = 2d\Sigma m\int P = 4N'\Sigma mx'dx'$$

l'équation (1) devient par ces résultats $2N\Sigma m\ \frac{dx'd^2x'}{dt^2} - 4N'\Sigma mx'dx' = 0$, divisant tout par $2dx'$ et remplaçant les coefficiens par d'autres plus simples, on obtient finalement $K\ \frac{d^2x'}{dt^2} + K'x' = 0$ équation, qui, intégrée donne $x' = H \sin\left(t\sqrt{\frac{K'}{K}} + h\right)$, H et h étant des constantes arbitraires; de là

$x=a+H\sin\left(t\sqrt{\frac{K'}{K}}+h\right), y=b+b'H\sin\left(t\sqrt{\frac{K'}{K}}+h\right), z=c+c'H\sin\left(t\sqrt{\frac{K'}{K}}+h\right)$;
or, si on remplace ces sinus par leur développement en exponentielles imaginaires, il se présentera deux cas; ou la quantité $\sqrt{\frac{K'}{K}}$ sera réelle, ou elle sera imaginaire; dans le premier cas l'arc $t\sqrt{\frac{K'}{K}}+h$ sera réel, et par conséquent, son sinus sera une fonction périodique du temps, et ne croîtra pas indéfiniment avec lui, il restera au contraire infiniment petit; mais dans le second cas, les exposans provenant de la transformation du sinus seront réels, proportionnels au temps et par conséquent croissant indéfiniment avec lui : en d'autres termes, le premier cas indique un état d'équilibre *stable*, et le 2.d un état d'équilibre *instantanée* : or, en prenant la valeur de $\frac{K'}{K}$ et remarquant que N est essentiellement positif, il est facile de voir que l'équilibre sera stable, lorsque N' sera négatif, et qu'il sera instantanée lorsque N' sera positif; mais dans le développement de la fonction A, le signe de N' détermine celui des termes du second ordre, donc d'après les règles connues, lorsque ces termes sont négatifs, il y a maximum et équilibre stable; lorsqu'au contraire ils sont positifs, il y a minimum et équilibre instantanée. Je dis, *les termes du second ordre*, en effet, N' ne se rapporte qu'au point m, il y aura une quantité correspondante N_0' pour le point m', une quantité N_i' pour le point m'' etc., et on aura proprement $\Sigma mv^2=A+(N'x'^2+N'_0x'^2_0+N'_ix_i'^2+\text{etc.})+R$ et pour le maximum, $\Sigma mv^2=A-(N'x'^2+N'_0x'^2_0+N'_ix_i'^2+\text{etc.})+R$, en nommant R avec Mr. Poisson tous les termes de dimension supérieure à la seconde, termes dont la somme est toujours plus petite, qu'un quelconque des termes de seconde dimension, lorsque les variables restent extrêmement petites : si l'un quelconque des termes devenait égal à A, par exemple, le premier, on aurait l'équation $\Sigma mv^2=-(N'_0x'^2_0+N'_ix_i'^2+\text{etc.})+R<0$, ce qui est absurde; donc aucun des termes du second ordre, ne peut dépasser la valeur de A. Les constantes arbitraires H et h, se déterminent facilement par les valeurs de x' et dx' lorsque $t=0$, supposons que ces valeurs soient a' et a'', on aura $H=\pm\sqrt{a'^2+a''^2}$ et tang $h=\frac{a'}{a''}$.

Nous ne nous arrêterons pas à développer toutes les applications de cette théorie aux divers phénomènes de la nature, on peut avoir autant de cas à examiner qu'on peut faire d'hypothèses sur la nature diverse des forces motrices, et par conséquent de la fonction ϕ, on voit dans le livre IV, Chapitre IV, de l'ouvrage de M.r Poisson le développement du cas où ces forces sont la pesanteur et la poussée d'un fluide, c'est-à-dire, l'application à l'équilibre des corps flottans :

On peut voir aussi dans le même ouvrage T. II, p. 155—160 les recherches du même savant sur la stabilité et l'instabilité du mouvement de rotation, d'un corps autour des axes principaux du corps; j'indique ici ce calcul parce que le raisonnement y est en quelque point semblable à celui que nous venons d'employer, et peut servir efficacement à y jeter du jour; la propriété maximum et minimum réside dans ce dernier cas dans la valeur des momens d'inertie; le mouvement est stable lorsqu'il s'opère autour des axes principaux répondant au plus grand et au plus petit moment d'inertie, il est instable autour du troisième axe.

CHAPITRE VII.

De la résistance des fluides.

La théorie de la résistance des fluides a donné lieu à un grand nombre de questions intéressantes de minimum dont nous regrettons de ne pouvoir donner ici que l'historique en raison du peu de temps que nous avons : Newton indique dans son livre des principes, une propriété du solide qui a depuis été nommé *solide de la moindre résistance*, et qui est tel que mu dans un fluide dans la direction de son axe, il y éprouve la moinde résistance; ce célèbre auteur ne donna point de démonstration de ce qu'il avançait, mais Fatio, l'Hôpital, Jean Bernouilli suppléèrent à son silence, et montrèrent que la courbure du solide devait rendre minimum la quantité $\frac{\int yp^3dx}{1+p^2}$; on en tire $x = \frac{a}{2} \left\{ \frac{3}{4p^4} + \frac{1}{p^2} + 1 + lp. \right\}$ Bouguer a fait sur ce problème et sur d'autres du même genre, des recherches dirigées vers les applications aux vaisseaux.

2.° Euler a recherché la Brachystochrone dans un fluide résistant, c'est-à-dire, la courbe parcourue dans le moins de temps, par un corps pesant dans un milieu résistant, suivant la 2.me puissance de la vîtesse, ce qui revient à trouver la courbe pour laquelle $\int \frac{dx\sqrt{1+p^2}}{\Pi^{1/2}}$ est un minimum, en posant

$$d\Pi = gdx - a\Pi^n dx\sqrt{1+p^2}$$

3.° Il cherche aussi la courbe qui rend un maximun la valeur Π, c'est-à-dire, la courbe sur laquelle le corps se mouvant obtiendra la plus grande rapidité; il examine les cas spéciaux où on a $n=1$ $n=\frac{1}{2}$

4.° Il cherche le solide de moindre résistance en donnant aux courbes la propriété commune $\int ydx$, c'est-à-dire, de couper des aires égales avec l'axe.

5.° Enfin, il généralise encore le problème mentionné dans notre 2.° en posant $d\Pi = gdx + Wdx\sqrt{1+p^2}$ et prenant pour W une fonction quelconque de Π.

Il a été publié dans les mémoires de Pétersbourg 1822, un travail posthume de cet immortel savant, traitant encore de la Brachystochrone dans un milieu résistant.

CONCLUSION.

J'ai terminé l'exposé des plus importantes applications des maximums et des minimums; quiconque a étudié la mécanique sait qu'il est une foule d'autres problèmes, où on peut se proposer de semblables questions; mais je n'ai point voulu les rapporter ici, parce qu'ils ne présentent aucune difficulté, et ne demandent que l'application des premières régles du calcul différentiel; je ne me suis proposé que l'examen de ceux qui sont plus embarrassans, et qu'il est important de rattacher aux théories de l'analyse pure.

NOTE

DES OUVRAGES A CONSULTER SUR L'OBJET DE CE MÉMOIRE.

American Journal of siences V. 1822. p. 82
Ampère Savans étrangers T. I.
An elementary treatise on the geometrical, etc. London.
Annales de mathématiques IV. 338. -- 8bre 1822 p. 61 et 132.
Appollonius, traité des Sections coniques.
Bernouilli (Jaques, œuvres T. II. p. 895
Bernouilli (Jean), œuvres T. I et II.
Borda Mém. de l'Acad. des sciences de Paris 1767.
Cramer Mémoires de Berlin 1752
Elvius Commentaires de Suède T. 3
Euler Commentaires de Petersbourg T. VI et VIII.
---- Nouv. Comm. de Petersbourg T. X et XVI.
—— Mémoires de Petersbourg ——T. VIII
—— Methodus inveniendi curvas, etc. Lausanne 1744.
—— Calcul intégral T. 3
Fontaine (Mémoires de) p. I.
-----Mém. de l'Acad. de Paris 1767.
Gergonne, Annales de Mathématiques 1822
Hermann
Lacroix Calcul différentiel et intégral T. II et III.
Lagrange Mémoires de Turin T. I. II et IV
—— Mémoires de Berlin 1773
—— Mécanique analytique.
—— Théorie des fonctions analytiques.
—— Leçons sur le calcul des fonctions.
Laplace Nova acta eruditorum 1772.
—— Mémoires de l'Institut 1809.
Legendre Mém. de l'Académie de Paris 1786 et 1787.
Leibnitz, Actes de Leipsick 1684
Lhuillier De mutuâ relatione, etc. Varsovie.
—— Isopérimétrie élémentaire. Genève.
—— Principia calculi differentialis C. XX.
Malus Théorie de la double réfraction.
Marsson, les trois coups d'essai géométriques.
Poisson, Traité de Mécanique.
Simpson Miscellaneous tracts p. 98
Taylor Methodus incrementorum.
Tommassini de maximis et minimis.

TABLE.

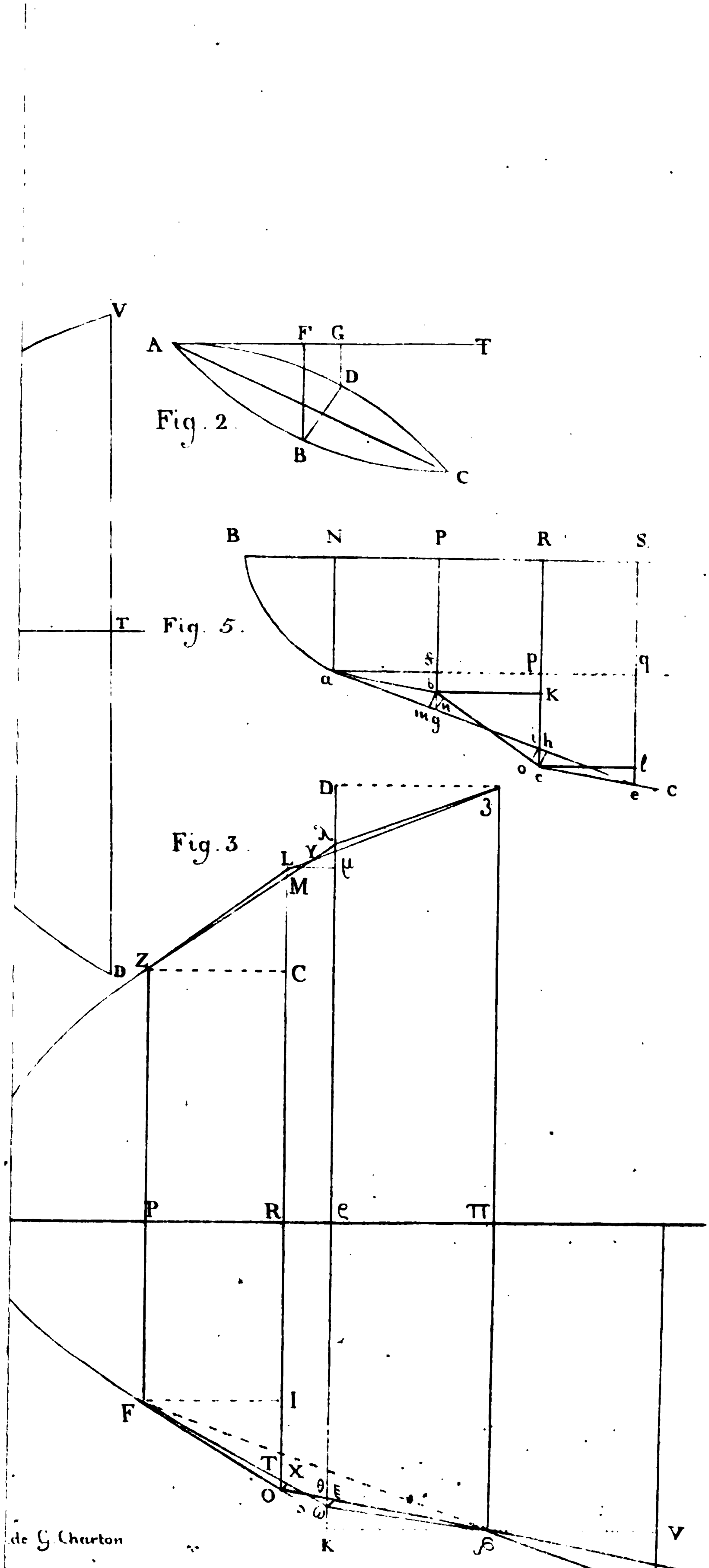


Fig. 2
Fig. 5
Fig. 3
de G. Charton