LA MATHÉMATIQUE

LES MATHÉMATIQUES

LA MATHÉMATIQUE MODERNE

M.-L. GUERARD DES LAURIERS

la mathématique

les mathématiques

la mathématique moderne

DOIN, Editeur*
8, Place de l'Odéon - Parie 6

II
.GSSif-

Celle élude a éli publiée pnr la Revue Itinéraires (numéro 156 - sept.-oct. 1971) ; elle est reproduite, avec quelques modilications, en accord avec le Directeur de la Revue.

Imprimé en France.

Introduction

L'homme moderne entend être su courent de tooL A tort ou ù raison 7 Laissons de côté cette question. Cette exi-

retrouvent analogiquement les mêmes en (tes entités (mathé¬ matiques) différentes, plutôt que sur la concrétude propre de chacune de ces entités1. Secondairement, et par voie de consé¬ quence, « ex parte communication» », en ce sens que les différentes branches des mathématiques (traditionnelles ou nou¬ velles) sont exposées en employant des algorithmes qui ont la même structure, bien que les symboles flgurnnt dans ces algo¬ rithmes paraissent avoir des signiflcations différentes, chacune de celles-ci correspondant à telle branche ou à telle théorie.

Ajoutons qu'au point de vue de l'épistémologie générale, il

1. La remise en question de la finalité des mathématiques.

2. La finalité de la mathématique moderne telle qu'elle est avouée.

importantes. Présentons, sur ce point, quelques observations.

3. La finalité de la mathématique telle qu'elle est en droit.

ni comme étant « le réel ». Nous disons bien coupi. Que de théorétique propre & le mathématique n'alt pas formelle-nt pour objet le « réel », qu'il convienne par conséquent n discerner et d'en assigner les finalités subordonnées, Joie connaître ertonbeur de l'ésprit, cela on l'a toujours admis même on' l'a toujours dit. Les Boorbaklstes le disent égale-| mais leur assertion acquiert une portée nouvelle —et»'

2 A- La remise en question de l'essence de la mathématique considérée à partir de

Nous considérerons d'abord l'essence elle-même de In mathé¬matique. Ensuite, les données qui sont liées intrinsèquement à celte essence, savoir : l'unité de la mathématique, le type des entités que spécifie la mathématique.

1. La remise en question des notions primitives.

Le qualicatif c mathématique », e l'(cs) ùtre(s) mallièninlique(s) », désignent, selon la philosophie traditionnelle. In nature des entités qui procèdent de l'esprit lorsque celui-ci considère la réalité au point de vue de la quantité, et la ‹ pose dans le nombre › pour la comprendre. L'ctre mathématique a, dans cette vue, deux fondements, réellement distincts et indis¬sociables : d'une part l'acte de l'esprit, sans lequel ne pourrait exister l' ‹ unité d'une pluralité ›, en quoi consiste le nombre : d'autre part la multiplicité en acte ou en puissance, soit extramentale et en fait sensible, soit inlra-mentalc et immanente nu

deux points. Nous en confirmerons ensuite la portée en nous plaçint h un point de vue synthétique.

A. La rapport da la mathématique à la réalité est amenuisé ou écarté.

« C'est par un abus de langage qu'on a pu écrire de expressions telle que '8 pommes + 7 pommes = 15 pomme; qui n'appartiennent en fait, ni au langage mathématique ni c langage usuel. On n'écrit donc pas '8 pommes + 7 pommes = 15 pommes'. On écrit : le nombre de pommes est (8 + 7) : '8 -t 7 – 15' » ([6], 9).

Nous contestons que l'expression « contestée » n'appartient pas an langage courant. On n'emploie pas cette expression courannnantr-parce qu'il est Inutile d'exprimer, au sein d'un gftnipej une chose qui est objet de perception immédiate pour les membres du groupe. Si par exemple à la lin d'un repas, on réunit dans un même récipient les 7 pommes qui restent dans une première coupe et les 8 pommes qui restent dans une seconde coupe, quiconque pensera, sauf les Bourbakistes en tant que cerveaux quoique non en tant que commensaux : « 8 pommes et 7 pommes, ça fait 15 pommes l › Et si quiconque le pense, il est inutile de le communiquer et partant de l'exprimer. Le Bourbakiste, en tant que tel, est d'un autre avis. Mais si on accepte le purisme qu'il prétend imposer, c'est également un ‹ abus de langage › de dire « 8 pommes ». Il faut dire : 8 est l'attribut d'une classe dont cet ensemble [mais qu'est-ce qu'un ensemble 7 I] de pommes est un cas particulier, [ou une réali¬ sation, ou... ?] ». Ou bien, et mieux sans doute : * La classe dont cet ensemble de pommes est une... pommiflcalion, a pour nombre : 8 ». Voilé qui simplifie, et agrémente, le « langage courant ».

Lee Bourbakistes répondraient probablement que le langage mathématique n'est pas le langage courant, et que même U doit ne pas l'être. Noos reviendrons, dans la troisième partie, sur ce point qui ressortit é la pédagogie. Observons pour le

par exemple celle de fonction " Le continu se trouve s

(10) « Ce que les Anglo-Saxons ont longtemps appelé le théorème fondamental du calcul (•) (sous-entendu : différentiel ou Intégral) n'a sans doute plus l'importance de jadis.

(*) Si f est une application continue du segment (a. b] dans la droite réelle, l'application $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ admet f pour dérivée. › ({13], 18) (ef. note 52).

B. La subordination de la réalité mathématique à l'activité du sujet est, dans la présentation ‹ moderne », majorée.

Nous disons « présentation », car la présente observation ne s'applique guère qu'à l'utilisation ou à la communication de la mathématique ; non à la véritable mathématique, actuellement élaborée par les mathématiciens en acte. Pour ceux-ci, le rap¬port de ln réalité mathématique à l'acte de l'esprit est ce qu'il est. La nature ne peut en être discernée et précisée que dans une réflexion a posteriori ; et si l'errance peut s'introduire dans cette réflexion, toute altération du rapport Ini-même est impossible, puisqu'il résulte de la confrontation immédiate entre l'esprit et la réalité.

La présentation moderne de la mathématique est nouvelle en ceci qu'elle accorde un rôle prépondérant à la « représen¬tation ». Telle est la donnée originelle d'où découlent, nous le verrons, deux conséquences fort importantes au point de vue auquel nous nous plaçons, celui du rapport que soutient la réalité mathématique avec l'adivilé du sujet.

M. M.L. Vcndendriesscbe affirme : « Il ne s'agit pas d'étu¬dier ces applications (d'un ensemble sur un autre), mais sim¬plement de les représenter » ([4), 52). Et c'est effectivement résulter, non par un raisonnement abstrait, mais en construi¬sant un ' arbre1 qui représente toutes les situations possibles ([8], 90). Et, plus généralement, et qui plus est. on a tendance h substituer aux équations algébriques elles-mêmes leurs repré¬sentations graphiques, aux relations, leurs t graphes »...

Celte manière de procéder présente des avantages trop manifestes pour qu'il soit besoin d'y insister. Les enfants peu¬vent mettre A profit les ressources, si vives pour eux, de l'ima¬gination, et parlant de la forme de mémoire qui lui correspond , pour la plupart, mieux adéquatement c en acte ». ils peuvent étudier avec goût et avec fruit. Mais l'emploi systématique de ces méthodes, lequel équivaut en fait à l'éviction complète des méthodes dites ‹ traditionnelles », nous parait présenter deux écueils très graves.

L'écueil principal, dont le second, qnoiquï çfà^Spparent. n'est qu'un aspect dérivé, conaiüe ën ce que l'acte p'fiflWà.de l'intelligence raisonnable, acte qui consiste précisément A rn'i sonner, n'apptftatt plus : ni quant h l'exercice, ni quant aux conditions, encore moins quant A la nature.

Reprenons l'exemple — vécu — proposé par M. A. Ilou-manet". t Sur 35 élèves, 13 ont donné une lionne réponse cor¬rectement jusliflée, 9 ont indiqué la réponse correcte sans jus-tidcation, ou une partie de la réponse, 13 n'ont pas répondu ou ont répondu d'une façon incorrecte ».

Or si on considère ce qu'ont fait, selon le témoignage de M. R. lui-même, les 13 premiers élèves, on observe qu'ils ont tout simplement et spontanément mis en œuvre les deux normes

— Le malfaiteur n'avait pas de complice et il n'avait pas la clé de l'appartement, ou le malfaiteur avait un complice et il avait la clé de l'appnrtemcnt.

autres — entre mitres sans plus — la dernière. Il y aurait beaucoup d'observations secondaires à présenter sur la construction de l' « arbre » telle que la présente M. 1t. Bornons-nous à l'essentiel.

1.' ‹ arbre » montre, dans un cas simple, le fonctionnement d'un cerveau électronique. Et comme la fabrication de l' ‹ arbre » a. en fait, constitué le * corrigé » de l'exercice propose, le professeur a, en tait cl quoi qu'il en veuille, enseigné mu élèves lie se comporter comme un cerveau électronique ; el il ne leur a pas enseigné l'art de raisonner. On n'enseigne pas un art V Oui, c'est vrai. Mais on dégage les principes d'un art en vue d'en permettre un meilleur exercice à quiconque en csl capable. Or tous les êtres humains sont capables de raisonner, puisque tel est le propre de l'intelligence rationnelle ; et si on prolonge la scolarité, si on y densifie le progtfennne icientifique, c'est cela que d'abord 1l faudrait aflÿt^fflW8SjgjjMjes, ou mieux leur faire découvrir : le*-prin<3pea du râtaiHWWpfe

Us 13 premiers élève. d(f ». R. ont raisonné Juste. Tl teflF était utile de le savoir & titre de confirmation, bien que 1rs plus Intelligents d'entre eux n'en doutassent probablement aucunement. Mais 1l est encore plus probable qu'aucun de ces i:i élèves n'a pris conscience île la nature de l'acle de raisonner qu'il avait spontanément posé ; il est fort probable qu'aucun n'.i découvert, au moins ce jour-là. ce qu'il avait cependant le droit de savoir et que seul pouvait montrer un maître ; maître humble ou savant, mais maître a penser ; el non a jouer, fûl-cc à la

lement. Ils l'auront découvert, par induction et pa
au moins certains d'entre eux. Et ceux-là, les meil
lieront pas, si déjà ce n'est fait, à se divertir des ·
M. II. ; ils auront appris à raisonner, malgré l'
scolarité, el ils snuront de surcroît ‹ nourrir ›
électroniques. Quant aux 13 derniers élèves, ils n
vraiment raisonner, ni construire un ‹ arbre › sa
ni se servir eux-mêmes des machines à l'ulilisali
les feront servir les 13 premiers élèves. Bilan ? a
probablement : la formation d'une petite nri
l'intellect logique... bercée à partir de la classe di

appliquer la première

Le mieux qu'on puisse faire, ou le moins mal. est dis lors d'induire à l'aclc de la découverte l'élève on le disciple, en guidant sa réflexion ‹i lui. supposé qu'on en soit capable, dans tel cas concret où il y a effectivement un t medium › a découvrir.

Et le pire que l'on puisse faire, c'est de réduire un Ici cas concret nu schéma d'une situation ; et cela de telle façon que celle situation puisse cire « résolue » par la stricte application de règles univoques ; dans ces conditions en effet, aucun « me¬ dium » n'apparait plus, et il est évidemment impossible d'in¬ duire l' « nuire › à découvrir ce qu'en fait on ne lui présente que dissimulé. Tel est, en substance, l'écueil de la présentation

La ‹ fausse supposition », dont on usait naguère pour ‹ ré¬ soudre un problème par l'arithématiquc », revenait au fond à assigner un ‹ medium » qui permit d'effectuer l'une après l'autre, séparément, chacune des opérations requises à la réso¬ lution. L'élève devait trouver ce medlom pour po^rtfô^jUiscr le seul instrument opératoire dont il disposiL L'algèbre accroît la puissance de l'instrument ; mais, par le fait même, il dispense de rechercher le ‹ medium › qu'il rend inutile. On dira, déjà on s dit, que ce e medium › n'était ni cherché ni tromé par les

consistance qne celle que ces mêmes absolus sonl aptes à leur

de choisir comme étant primitives ; il forge ces notions à partir de la réalité, et en demeurant radicalement subordonne à la réalité. C*est pourquoi, corrélativement, l'acte de la con¬naissance même ‹ proprement mathématique * est en droit, tl doit demeurer en fait, radicalement normé par l'art de raison¬ner, lai-même ordonné & la découverte de la vérité.

La représentation sensible.

La seconde des difficultés qui résultent de la prépon¬dérance accordée à la représentation sensible par la ‹ mathé¬matique moderne » tient à ce que les réalités intelligibles, et les entités mathématiques, ne sont pas adéquatement représen¬tâmes.

C'est, on le voit, un corollaire de la première difficullé.

données qui leur sont en un sens innées ; car. si elles ne l'étaient, elles leur demeureraient étrangères à jamais. Il con¬vient, en usant certes de représentations, de viser à faire com¬prendre, dès la classe de 6* et même bien avant, qu'il existe des réalités ‹ intelligibles › et qu'elles sont distinctes de leur représentation, que la représentation d'une telle réalité ne lui est jamais adéquate, et enfin que certaines réalités ne peuvent avoir aucune représentation sensible. L'enfant pressent ces vérités, confusément mais par connaturalité ; cl, bien conduit, l'enseignement de la mathématique peut aider h les dégager et à en prendre conscience. Cela suppose évidemment que cet enseignement ne soit pas véhiculé dans une débauche de signes de laquelle la réflexion proprement intelligible ne peut éclore que fort difficilement, parce qu'elle demeure pour ainsi dire diluée dans la viscosité, alors que, difficile, elle devrait être mise en lumière d'une manière privilégiée.

2. La remise en question sous-jacente au bourbakisme s'étend, inéluctablement, aux notions subor¬données.

L'unité qui est propre à lu mathématique est. contidirie dans un cas typique. L'ensemble N des entiers nafarett^'bt l'en¬semble Z des entiers rationnels.

Lorsqar«me ISpérotion est effectuée sur «les nombres, l'opé¬ration Jane lè r6le de l'Idée et le nombre celui du concept ; cnr une telle opération est un acte, et P « idée simple est un geste intellectuel » ([13], 50), ou plus précisément l'expression d'un

L'acte de soustraire est, & dire vrai, mentionne au début, afln de donner un contenu intuitif, et pour autant de justifier, la notion de e différences équivalentes », mais il est aussitôt ramené & un « concept » : celui de l'ensemble ou du sous-ensemble constitué par de telles différences équivalentes entre elles. L' * acte-idée › est donc, dans cette présentation, un présupposé utile ; mais c'est un présnpposé pré-mathématique, lequel ne doit plus intervenir dans les définitions opérationnelles

Que, deuxièmement, l'irréductible rançon de cet indéniable bénéfice est l'éviction, complète, «le l'acte nu profit du concept ; l'unité entre l'cnscniblc X et l’ensemble Z. entre l'entier c naturel › et l’entier ‹ négatif ». ne procède donc pas d’un « acte-idée › ; cette unité tient nu savant agencement de concepts qui, s’ils dérivent il est vrai d'un « acte-idée », ne peuvent, par le fait même qu'ils en sont seulement dérivés, en avoir la simplicité.

Que, troisièmement, l'entier négatif se trouve ainsi caractérisé au point de vue de l'extension et de l’opération : préci-

›| concept plutôt

iflce trop colié-
perstructure ne

b) Notre seconde exigence s'énonce alors : Une relation n'aura droit de cité en mathématiques (le pluriel est ici employé, pro¬bablement par inadvertance] que. si, pour tout couple (x, y), la réponse A la question : ' le couple (x, y) vérifie-t-il la relation ? ' ne peut être que oui ou non... Remarquons que cette deuxième exigence est parfaitement satisfaite pour les relations de parenté » ((13)], él).

On voit donc que le paragraphe a) précise exclusivement

€ relation ». l*ar contre, supposé

fort surpris d'observer que le mot « relation » flgnfa.daps ce même énoncé. C'est-à-dire que té taoV éitépre nbn oe)3rWtt^ai1 figure au lieu et place 0h iû'xitfinlttbn devait être explicilfe. Cela rend impOUiblt rtt'rfMff qfflt Soit défini. F.l cela rend romplc de ce que, récapitulant ces deux paragraphes a) et h), on soit aux prises ttvec une tautologie, plus précisément avec la définition non prédicative• que voici, lîne relation « a droit de cité »...

* élément. « Au commencement, est l'cnscin-blé.- › La relation csl un ensemble do flèche*. Ainsi l'Image de lu flèche parait, comme telle, véhiculer un certain contenu intuitif ? Mai* elle est immédiatement interprétée de manière i introduire une « définition › purement enscmblistc, estimée clic seule être propre¬ment mathématique.

(35) Poincaré a appelé « prédicative » la définition dans laquelle le « dcflnlens » peut être légitimement le prédirai du * deflnien dum ›, cl donc ne le contient pas. La définition non prédicative est celle dnns laquelle figure le terme que précisément elle est censée ie même de cela, elle m n réalité définir. tic définition pro¬

posée pour la relation

La relation est one entité dont la compréhension est difllcilc. Car l esprit humain, conditionné en son exercice par les sens, considère dabord chaque chose comme étant un « sujet ». Or la relation comporte deux extrêmes, deux , sujets ». Il ne sera donc pas Inutile de montrer en quoi consiste le vice de la définition (D), sur un exemple dnns lequel la difficulté adventice que constitue la coin-

prédicative. :
signiflcandi
auquel tient

impliquée
une enlili

forme cl le c modus signiOcamli >. mais qui sont prédicatifs cl qui permettent de faire la triangulation intelligible de (D), elle-même.

(D) La relation (1) est le sous-ensemble des couples (x, y) pour lesquels la réponse & la question : « le couple (x, y) vérilie-t-il la relation (2) 7 > est « oui ».

(D') La relation (1) est le sous-ensemble des couples (x, y), étant entendu que ce sous-ensemble est un ensemble de relations (2').

‹D") La relation (1) consiste en ce que cbacnn des couples (x, y) qui appartiennent h un certain sous-ensemble [de l'en-la signification, un ‹ ensemble de flèches >, c'esl-A-dire si on remonte de l'image A la réalité, un « ensemble de ' relations (2') ». Ainsi, (D') fait tout simplement dire A Evariste ce qu'il « bien envie de dire >, et ce qu'il faut lui faire dire si on veut lui éviter de proposer l'énoncé non prédicatif (D) au titre de définition.

Evariste.doit ll est vrai consentir, au moins provisoirement, A ce que « relations (2') » soit en (D') au pluriel, et non pas au singulier comme « relation (2) » l'est en (D). Et ce change¬ment est d'importance, puisqu'il implique, comme nous l'allons voir, que Ton renonce au propos essentiel du bourbnkisme. sa¬voir : ‹ Au commencement est l'ensemble ».

(D) vise en effet A définir ‹ relation (1) » comme étant un sons-ensemble de couples (x, y), et par conséquent comme un

(2') », il faut préciser quelle est la nature du rapport entre (1) et (2'), entre l'universel et soit le singulier soit l'ensemble des singuliers.

En l'occurrence, la chose est aisée, du moins si on en laisse de cité les implications métaphysiques ". Si, par exem¬ple, t relation (2) » est la relation ‹ double », prise de x vers y, les couples : (4, 2), (12, 6), etc..., vérifient cette relation. Les « relations (2') » sont alors : la relation * double » dans le couple (4, 2), la relation e double › dans le couple (12, G), etc... C'est toujours spécifiquement la même relotion, savoir « dou¬ble », dont on considère comme différentes les unes des outres les réalisations dans les différents couples. Celte relation, uni¬que qnant i son espèce et à sa définition, est-elle effectivement ‹ multipliée », du fait qu'elle est 4 vérifiée › par plusieurs

au pluriel 4 relations (2') », ainsi que nous l'avons Tait provi¬soirement en (D'). Si on ne l'admet pas, il faut écrire au sin¬gulier 4 relation (2") » ; et il faut en conséquence donner :i l'énoncé la forme (D").

que (D") précise quel est le domaine dans lequel tabshte une relation, et que (D") ne constitue aucunement la définition de cette relation.

Nous pouvons maintenant rendre compte, en noos référant au dédoublement entre <D') et (D"), dédoublement observé dans le domaine du « prédicatif >, de la viciosité qui alTecte l'énoncé (D).

D'une port, (D) est présenté comme étant une définition de la relation. Dans celte vue, (D) ne peut, nous l'avons observé,

'un formalisme analy-
particulier celle de

assigner, chacune respectivement, en procédant par
s successives ; d'autre part, elles montrent que, si la
it réciproque, c'est en vertu même de sa définition,
yons pas qu'il y ait là un « théorème › ([14], 95).
nation, en elle-même, importe peu. Nous ne la rclc-
arce qu'elle nous parait symptomatique. Le caractère

2B. La remise en qoestion de l'essence de la mathématique, considérée au point de vue de la métaphysique.

Pourquoi la mathématique, et quelle en est la nature l Telles sont les queslions, aussi importantes en elles-mêmes que par leurs répercussions, soulevées par la ‹ mathématique moderne ›. Nous avons, dans ce qui précède, examiné et décrit la situation du Bourbaki, en vue de déceler les réponses qu'il apporte è ces questions. Polarisées par l'esprit, ordonnées à en manifester la grandeur, les notions essentielles de la mathématique, qu'elles soient primitives ou subordonnées, sont elles-mêmes conçues

d'abord les données primitives de la mathématique, ensuite les données également importantes mais subordonnées ; notre propos étant de montrer que la manière de concevoir les secondes découle de la manière de concevoir les premières. Nous confirmerons ainsi les unes par les autres, en vertu de leur unité organique, les conclusions auxquelles nous avons été conduit en examinant d'abord l'essence et puis l'unité de la mathématique. Et. comme nous venons de l'expliquer, nous ferons principalement état des déclarations qui ont en Bourbaki valeur de principe, et des données les plus primitives de la métaphysique.

1. Les entités mathématiques, les connexions qn'elles soutiennent entre elles, et partant la relation et l'unité, sont conçues, en bourbakisme, comme étant « fermées ».

posteriori, la cohérence de Bourbaki

A. Le caractàre fermé » de l'entité mathématique est dévoilé par la manière de concevoir le rapport entre les fondements et l'axlomatique.

résultats antérieurement acquis » •. L'auteur de ce entend ne pas insister sur la ‹ philosophie de la scie thématique › ((1], 34). Il ne conviendrait donc pas mettre ce texte è une critique rigoureuse semblable dont a fait l'objet la définition (D). Mais il est légi discerner, dans cette déclaration t non formelle », le ment de la pensée, en ayant d'ailleurs la certitude que

B. L« caractère fermé › de l'entité mathématique est expliqué par le fait que I' ensemble • est lui-même conçu comme étant une entité fermée › en vue d'être posé, conformément à I' ensemblIsme ›, comme constituant le fondement de toute axiomatlque.

isoiremenl f)

classe des classes [qui lui sont] équivalentes >. On en com¬ prendra la signification en se reportant aux « sept pommes > dont il a déjù été question (cf. page 20). < Sept » n'est pas. et selon le bourbakisme ne peut pas être, un < nombre «le pom¬ mes >. e Sept » est le nombre d'une e classe > dont cet ensemble de pommes constitue une réalisation. Quelle « clas¬ se » T la même pensera-t-on que si, au lieu et place de pom¬ mes, U y avait d'autres objets quels qu'ils soient. Mais cette manière de concevoir suppose que l'on se réfère nu concret, et que l'on ait résolu la question soulevée par le rapport con¬ cret — abstrait

Russell vise è écarter cette question en supposant considérées

Nous ne voyons donc pas comment ‹ la nature île la déduction logique, et son caractère relatif » pourraient être « voilés par la notion métaphysique de vérité ». ("est qu'en elTet, les normes de la déduction logique expriment une vérité qui requiert ele-mfme comme étant son fondement la nfrité métaphysique. En sorte que. le caractère relalir de la déduction logique étant considéré comme un fait, il suffit, pour en montrer

2. Les connexions entre les entités mathématiques, non moins que ces entités elles-mêmes, sont conçues, en bourbakisme, comme étant coupées d'avec l'acte de l'esprit qui les crée, et comme étant isolées de l'opération dont elles sont en réalité l'expression.

« faillite » que leur dlitinction cesse d'être fondée. Alors, l'égalité n'est pins l'expression d'un jugement : elle se dégrade en synonymie. El II n'y a plut d'acte de juger ; ou, pour re¬prendre le terme de la lettre des I.O. de 1945, il n'y a plus A'opiralion, « opération › désignant concrètement ou point de vne mathématique la même réalité que c acte » au point de vue métaphysique.

Le bourbakisme est donc « en désaccord avec la lettre › : nous n'avons pas à prouver ce qui est explicitement avoué. Mais il faut bien comprendre que ce désaccord n'est pas un accident résultant d'un affrontement entre deux procédés pédagogiques

•ieutemenl

prendrait-il pas spontanément le « signe » comme position de repli, ai le maître déclare ‹ avoir envie » île le faire ? *

Force est donc d'observer qu'en ce qui concerne aspect de la communication, celui qui est propre à ment, le signe éclipse pour ainsi dire la notion, dont ment il remplace la définition. L'intelligence se trouve trainte en fait, pour exercer son acte, de se subon signe qu'elle devrait en droit prendre pour instr comme un tel acte ne peut, en raison de sa nature, mesuré, il risque d'étre, en réalité, écarté.

l'acte île découvrir.

Objeclera-l-on qu'en mathématiques « ail ‹ ",enl est le signe l » ; en sorte que, loin de sous-mesu ugibilité, le signe en est, en l'occurrence, le principe ,

C'est vrai, mais il faut l'entendre.

Il fant entendre qne ‹ le signe est au commencement ›, en ce sens gn'il est une composante intégrante de l'octe de découvrir, déni ÜF'Qüvde la mathématique comme d'ailleurs dans tout aotrtTw* cét acte, en tant qu'il ressortit & l'esprit, se trouve différencié de tont antre par le c jugement négatif » qui lui est concomitant : le génie consiste ri'obord à écarter les ques¬tions parasites*. Mais ce même acte de découvrir a égalemenl

l'expression,
ît », en tant

d'appeler « éducation de la créativité » un exercice visuel el graphique qui développe seulement dans les sens et dans la mémoire sensible une certaine agilité. C'est abuser de l'cnlanl. en flattant ses penchants, que de favoriser de sa part une sorte de déhanche dans l'usage du signe. Cet actionismc détourne en quelque sorte la sève mentale vers la périphérie, et parasite l'acte de la véritable réflexion, lequel, lui et lui seul, achemine les mieux doués & l'authentique création. Le productivisme que provoque la surenchère accordée nu signe risque de dévorer

parc* qu'en conséquence, ne manqueront pas d'en pâlir la plu¬ part de ceux à qui les méthodes nouvelles sonl imposées, sans qu'ils puissent en discerner ni les limitations internes ni |a véritable portée.

3. La position bourbakienne, concernant la nature des entités mathématiques, rend compte de ce qu'implique en fait cette même position concer¬ nant le rapport entre la mathématique et la mé¬ taphysique.

Concevoir l'ensemble des entités mathématiques connue une sorte d'univers « fermé ». résorber l'opération mathématique dans l'ensemble des résultats qui lui sont associés, et aliéner ainsi l'acte de juger, sont, nous venons de le voir, en étroite connexion : le premier reconduit au second comme nu prin¬ cipe prochain de son explication. Nous confirmerons In cohé- rence interne du bourbakisme en observant que ces « pré¬ misses » rendent compte effectivement de certaines assertions qui de prime abord paraissent sans portée, alors qu'à la ré¬ flexion elles engagent une manière de concevoir le rapport qui existe entre la mathématique et la réalité. Nous allons examiner deux cas que nous considérons comme typiques ; le premier se référé principalement & la manière de concevoir, en mathé¬ matique, les entités, l'autre principalement à l'acte de juger.

A. L'assimilation, fallacieuse, de l'égalité à l'identité, mani¬ feste qu'en bourbakisme, l'entité mathématique est conçue d'une manière fermée.

Concevoir l'entité mathématique comme étant ‹ fermée › induit 4 confondre l'égalité avec l'identité, c'est-à-dire 4 con- fondre l* ‹ un » mathématique avec P « un » métaphysiqueirver que la distinction entre ‹ égalité » et « identité » y lujours été reconnue, et doit y être maintenue. Et cela parce cette distinction est en fait présupposée par la mathémale telle qu'elle est concrètement. Si, par exemple, on veut ilir que « Toute fonction symétrique rationnelle des racines îe équation algébrique est une fonction rationnelle des coefcnts de cette équation », on montre que, pour l'expression sidérée, l'invariance numérique qui constitue l'hypothèse *aine l'invariance formelle qui implique immédiatement la clusion. Or l'invariance formelle est & l'invariance numéce que l'identité est fi l'égalité. Une égalité n'est pas tou-

résulte des considérations d'ordre métaphysique ci-dessus rappelées.

On voit donc que les principes abstraits, dont s'inspire effectivement quoique implicitement la systématisation bourbaklenne, notamment le caractère fermé attribué à l'entité mathé¬matique, entraînent par voie de conséquence des affirmations que la présentation moderne pose en fait sans d'ailleurs les

B. La définition de la « relation » manifeste à la fois l'existence et la vlclosité des postulats qui sont sous-jacents è la systématisation bourbakienne.

bourbakisn

2C. Récapitulation. Retour sur l'unité de la mathématique.

Nous pouvons récapituler celle seconde partie, consacrée à la remise en queslion de l'essence de la mathématique, en considérant de nouveau la nature de l'unité.

‹ L'un » est, au point de vue intelligible, la première manifestation de l'essence ; et il se retrouve, analogiquement, dans l'être et dans ses modes. Nous avons vu, dans la première section de cette deuxième partie, que, considérée A partir de la mathématique, l'unité de la mathématique doit être référée è l' ‹ acte-idée » plutôt qu'aux concepts cl au langage (pp. 41 sv.). Nous avons donc été amenés A cette conclusion en nous plaçant au point de vue particulier de la quantité ; nous allons voir qu'au point de vue plus général de l'ètre, elle ne laisse pas d'être également fondée.

1. La réalité et l'unité de la mathématique, d'après la « philosophla perennis ».

A. La réalité de la mathématique est fondée sur la quantité considérée comme un mode de l'être.

Qu'est-ce que la mathématique ? Selon Aristole, et selon la philosophie c classique », cette discipline se définit, comme thématique entendue au premier sens. Cet objet, ou ‹ objel formel quo ». est la quantité, abstraite de In réalité ; cette quantité abstraite est dans l'esprit, sans laisser d'être référée i la réalité.

3. « Mathématiques › (ta mathematica) désigne les entités mathématiqnes singulières, en tant que celles-ci sont respec¬tivement et immédiatement référées ê la réalité dont elles sont abstraites ; par exemple tel nombre, référé implicitement il l'un des ensembles concrtts dont il est le nombre

B. L'unité de la mathématique eat fondée sur la spécifi¬cation de l'acte par lequel l'esprit abstrait la « quantitas ut quantitas » de la « quantités ut accldens •-

Celle manière de voir peut être conservée, à la condition toutefois d'entendre l'abstraction qui figure dans In définition du sens (2) d'une manière plus « active » que ne le faisait l' « acte » est ‹ un › dans la multiplicité de ses itérations. Ainsi, selon la vue traditionnelle, les deux fondements de l'unité, distingués l'un de l'autre formellement, et définis chacun respectivement, constituent ensemble le principe concret de l'unité réelle ; mais, cela, seulement en vertu de l'actc qui en réalise la corrélation. Le fondement prochain de l'unité est donc bien, pour la mathématique, l'acte de l'esprit, ccltii-ri élant considéré selon sa spécification.

2. La développement organique de la conception classique. De l' « un » à « l'un » par le « multiple ».

acte serait-il l' « acte-idée › ([13], 50), dont M. A. Revus tence d'une concordance en quelque sorte spontanée entre l'acte intellectuel d'Aristote et le « geste intellectuel › de M. A. Itcvuz. Nous allons le préciser, non sans retrouver à un autre point de vue la tension entre le « traditionnel » et le 4 moderne » que nous avons maintes fois observée.

Suivons le cheminement, pour ainsi dire cyclique sinon génétique, que suggère le titre de celte étude « De la mathé¬ matique d'Aristote À la mathématique moderne, en passant par les mathématiques ›. Voilé, « du point de vue de Sirius », les justes proportions que prend l'aventure. Voyons d'un peu plus près, car précisément on ne revient pas exactement au même

A. La genèse du Bourbaki n'a pas laissé de répondre à un vœu de l'esprit.

L'exigence de développement, inhérente à Ionie science, fit prévaloir les « la malhemalica › sur la « mathématique ›.

Aristote jeta les fondements de l'épistémologie scientifique en se plaçant au point de vue de l'être. La rigueur métaphysique

théories de la phy-
i inconsidérément la
rtiori celle dn Bour-

démarche réflexive de ses théoriciens prétend la Taire cire.

B. Bourbaki, tel qu'il est en fait, précise et approfondit l'épistémologie réaliste.

Examinons d'abord l'unité de la mathématique moderne en son authentique réalité, donc en tant qu'elle est [ondée sur l' e acte-idée ». Nous entendons par 14, du point de vue formel

n'est pas sans fondement ; il s'intégre dans le développement de la mathématique : il demeurera, même quand la mode de l' ‹ ensemblisroe » passera.

C. Le bourbaklsme, tel qu'il m voudrait être, réduit la mathé¬ matique i un jeu ésotérique.

Noua devons examiner, en second lieu l'unité de la ‹ ma¬ thématique moderne », telle que la caractérisent les auteurs plus attentifs en fait à la systématisation qu'à l'intelligibilité.

3. - A bas l'ensemblistne ! » — Et, alors : « Vive Bourbaki ! ».

Concluons en rappelant quel est l'ordre véritable. Lui

de la mathématique, par
Etatiques.

3a La remise en question de la pédagogie mise en ouvre dans l'enseignement des ma-

Nous examinerons celte remise en question, d'abord au point de vue du contenu de l'enseignement, ensuite au point de vue de ceux à qui l'enseignement est proposé. Nous terminerons en indiquant les importantes questions que nous parait impliquer la nouvelle présentation.

Nous nous plaçons, dans cette troisième partie comme dans les deux premières, au point de vue des réformateurs ‹ savunts ›. Nous visons donc A dégager les principes qui peuvent aider le lecteur à juger par lui-nième, en tenant compte évidemment d'une expérience qui peut être fort diverse.

1. La remise en question de la pédagogie, au point de vue du contenu de l'enseignement.

« Répéter › constitue un aspect important de la pédagogie ; cela, non seulement à l'intérieur d'un groupe restreint, mais

l' ‹ esprit de la réforme › tout en le trahissant.

B. Le nouvel ordre d'exposition implique, en partant de « situations familières », que les axiomes de la mathéma¬tique aolent conçus comme étant • ouverts ». Cela est en contradiction, au point de vue épistémologique, avec la conception bourbaklenne de la mathématique.

ment formés l Nous n'examinons pas cet aspect de la question. Les réformateurs ont, selon nous, raison, de ne pas se laisser arrêter par des difficultés qui ne tiennent pas à la nature même de la réforme.

Partir de * situations familières a implique que la mathématique ait un statut inductif, et que les axiomes soient conçus comme étant * ouverts ›.

Choisir une manière de présenter la mathématique im¬plique, pour cette présentation, le choix d'une méthode ap¬propriée.

La mathématique proprement dite étant introduite à la faveur d'une « situation », elle constitue un ‹ moment », et plus précisément la a medium » d'une induction. C'est-à-dire qu'il faut ae reporter à cette « situation › dont l'analyse n servi de point de départ, et confronter avec elle le modèle mathématique

C. Le nouvel ordre d'exposition, résolvant la « mathématique dans la « logique › ou dans le ‹ signe », et justifiant la « mathématique » par l' « utile », Implique, entre l'Idéalisme et le pragmatisme, un compromis dont la non-cohérence se manifeste par la mutuelle contamination des disciplines en présence.

I.e nouvel ordre d'exposition manifeste le dualisme épistémologique que les réformateurs déclarent être sous-jacent à la nouvelle mathématique.

‹ En droit, l'esprit est libre de procéder ù son gré au choix

gemment accueillants et lucidement critiques ? « Parvus error in principio fit magnum in fine » ; et toute erreur, lût ou lard, devient toujours l'origine d'un mol. Mieux vaudrait que les théoriciens du bourbakisme s'en rendissent compte dés main-

2. La remise en question de la pédagogie au point de vue de ceux à qui l'enseignement est proposé.

égard une vérité de toujours, la réforme requiert, quant h l'application, des maîtres en acte et des élèves dociles (‹ doci- biles ›).

B. la rwniao en question du but de l'enseignement.

Le but visé par la nouvelle pédagogie à l'égard de cens à qui l'enseignement est proposé est de former des ‹ télés bien faites › plutôt que des t têtes bien pleines ».

f Du fait de la prolongation de la scolarité obligatoire, la mission de l'école primaire n'est plus d'enseigner les connaissances indispensables dans la vie courante mais surtout de former les esprits, de donner à chacun la capacité de s'adapter aux conditions largement imprévisibles de l'avenir. » ([5], 7-)

« Aucun élève ne devrait quitter le lycée snns avoir une

IVuton former loue les esprits, en les exerçant il la même discipline ?

A qui doit-on, ou peut-on, confier la tiche de former des

A ces trois questions, les réformateurs répondent, « posilis ponendis », de la mime façon. La mathématique moderne serait en effet le moyen privilégié pour former l'esprit, pour former tout esprit, en particulier pour former les mailrcs 6 qui il incombera de former des esprits. On peut l'admettre, sous les Conditions que nons avons plusieurs fois précisées, s'il s'agit de « (ohnef l'esprit » à la mathématique. Mais partir de ce pré¬ supposé en vue de réformer l'enseignement du premier degré, étant coupée d’avec la réalité. Et si cet écueil n'exisle pas pour les très jeunes enfants, il se présente inéluctablement au cours de la scolarité prolongée, fût-elle du premier degré.

Les maîtres à qui cet enseignement est confié pourront-ils assumer le perfectionnement qu'apporte la nouvelle mathématique, tout en en rectifiant les présupposés au point de vue épistémologique 7 La situation actuelle ne permet pas de l'espérer ; elle donne par conséquent & craindre que la c réforme › ne déforme, plos qu’elle ne peut former.

3. Questions d'ordre général soulevées par renseignement de la ^mathématique nouvelle

La mathématique moderne, la manière de l’enseigner, font encore l’objet de vives discussions. Nous ne signalerons que pour mémoire les « objections » qui ont été faites ou que l’on peut faire, et qui par leur nature sont « accidentelles » ; c'est-à-dire qu’elles ne tiennent pas précisément è la c réforme › en elle-même, mois bien au fait que la mathématique ‹ moderne › se présente comme étant une chose e nouvelle ». Nous préciserons ensuite les questions d’ordre général qui ont déjA affleuré au cours de celte étude, et qui nous paraissent liées à l’esprit de la mathématique moderne el aux méthodes de la pédagogie nouvelle.

A. Questions accidentelles, c’est-à-dire attenantes au changement comme tel, soulevées par l’enseignement de la mathématique nouvelle ».

Le changement comporte par essence d’être non rigoureusement déterminé, et par suite de pouvoir être diversement in-

Initions avec lesquelles on prétendait établir par exemple que lu longueur d'un côté d'un triangle est inférieure à la somme îles longueurs des deux autres » (<13;. 03 - fil).

C'esl vrai, mais :'i quel prix ? D'où vient celle ‹ évidente simplicité » ?

Nous allons voir qu'elle lient à ce que les dites ‹ notions de base › reposent toutes sur la seule opposition de contra¬diction ; laquelle fonde un type de simplicité qui, compare aux autres types, est le plus simple mais aussi le plus pauvre, el qui, au vrai, est l'univocité.

Créées au titre d'instruments pur la philosophie. 1rs ‹ rnléijuries de l'opposition * constituent le critère propre qui permet de comparer entre elles les dil/érenles philosophies.

Deux questions, celle de la multiplicité et celle du change¬ment, dominent la philosophie de la nature ; elles se retrouvent, analogiquement du moins, en métaphysique. L'esprit incarné, qui comprend en composant et en divisant, pose ces questions en fonction de ce qui, dans ln réalité, correspond à sa propre activité, c'eal-A-dire en fonction des rapports qui existent soit entre les choses elles-mcmes soit entre les choses el lui-méinc. Et l'esprit forge, en vue d'étudier ces rapports, un instrument qui doitévidemment être conforme A la nature de l'objet consi¬déré, être par conséquent une qualification du rapport roinnie tel. Cet instrument, dont l'esprit use spontanément, ce sont les « catégories de l'opposition », savoir : la contradiction, la rela¬tion, la contrariété, la privation n.

celle clause csl artificielle ; et elle permet une e résolution-type *. que les éléves retiendront de mémoire. On a dénoncé, non sans emphase, cet inconvénient pour les problèmes dn « premier degré › : le réservoir el les robinets, l'âge du père el celui du fils, les déplace¬ments relatifs de deux mobiles etc. Il est non cohérent de fnlre. t propos du ‹ second degré », ec qu'on a critiqué pour le « premier » : d'autant que les élèves à qui on enseigne le ‹ second degré » devraient normalement être capables de visualiser l'abstrait intelligiblement, et partant de le comprendre directement.

(78) Noos nous référons à la liste donnée par Aristote. Non pas précisément parce qu'elle est de lui. mois parce qu'elle est la pi»» complète. U e contrariété » et la , privation › sc réfèrent A la théo¬rie do changement. L'opposition de e contradiction » ressortit origi¬nellement h l'acte de Juger. La e relation » se retrouve dans chacun des modes de l'être. Elle ne se réduit pas A un simple rapport établi

effectivement

ilction ». L'unioociti el l# timplicllé sont ainsi défl-
:s, quant b leur nature, d'une manière précise. Formellement, es s'excluent mutuellement. Concrétement, elles peuvent, dans e même conjoncture mais è différents point de vue. se réaliser nultanément.

mathématique nouvelle est plus simple que la mathématique iditionnetle, en ce sens que le Bourbaki univocise toutes les lions de base entre elles, au moyen d'un artifice conceptuel.

U notion de « simplicité » étant ainsi précisée : en quel sens ‹ mathématique moderne › est-elle « simple » J

Etant fondée sur l' ‹ opposition de contradiction ». la moderne » exclut ipso facto la véritable re-

La ‹ simplicité », dont parle à juste titre M. A. Revuz pour les notions de base de la « mathématique moderne », est donc une simplicité d'univocité. Elle peut se réclamer de Canlor. non de Gnlois : elle n'est pas la véritable simplicité, laquelle en l'occurrencc ne peut procéder que de l'ade-idée.

Qu'en est-il à cet égard de la ‹ mathématique traditionnelle › ? Comparée aux autres disciplines, étnnt mise à part la logique, la mathématique a toujours été considérée comme étant la science de l'univocité, parce que métaphysiquement « toute quantité est également quantité ». Toutefois, en ce qui

C. La « mathématique nouvelle • est destinée à devenir, à la faveur de contraintes d'ordre social, la norme de toutes les formes du savoir.

La t mathématique moderne » se Irouue imposée à la manière d'une mode, mais aussi comme norme universelle de la pensée.

Cela est vrai, même dans renseignement élémentaire ; le-

Toutes choses égales d'ailleurs, il n'y aurait pas à s'émouvoir de ce que l'enseignement de In mathématique, que celle-ci soit traditionnelle ou nouvelle, ne profilai guère qu'aux futurs mathénwÛcféiia. N'est-ce pas également vrai, proportionnelle¬ment, Sis «ritres enseignements 7 Celui, par exemple, de la UfUrâfiffe^on dé l'histoire, on du dessin 7

. Mais fl n'eat pas vrai que ‹ toutes choses soient égales d'ailleurs › pour l'enseignement ‹ traditionnel » et pour l'en¬seignement « moderne » de la mathématique. Il y a, de l'un & l'autre, une sorte d' « inflation ». Et la critique qu'on en peut faire ne lient pas à ce que cette inflation puisse être utile

D. Là « mathématique moderne › annexée par l'entreprise technicienne, conduit à considérer l'homme comme subor¬ donné à la société.

Le* principes dont s'inspire l'enseignement lel qu'il est ac- tuellemenl organisé, sont manifestés par la pathologie des enseignés.

l-es rapports entre un individu et le groupe dont il fait partie sont manifestés par des comportements et par des régies qu'il est aisé d'observer. C'est donc cela que d'abord il faut considérer, pour découvrir les principes qui sont elTeclivement appliqués bien qu'ils demeurent cachés.

L'accroissement du pourcentage, au sein de la population scolaire, des ‹ inadaptés » et des « retardés », le foisonnement pour ainsi dire endémique de nouveaux types d'inadnplés, celui par exemple qui résulte de la prolongation de la scolarité du premier degré, sont des falls nouueaux. I-a cause, non certes nnlquémals principale, la (anse qui, négativement mais radi- caleînett, ftbd compte de celte dégradation, c'est que rensei¬ gnement n'est plus conçu comme étant au service de l'éducation

en sn .source même, l'oplion dont nous avons déjà précisé (pp. 102-101) les répercussions en nous plaçant nu point de vue des rapports de société ; il va en elTet s'agir de l'option entre deux conceptions de l'homme, el non plus seulement entre deux manières de concevoir le rapport qui existe entre l'homme el la société.

E. L'Inspiration bourbakienne sous-jacente à l'épistémologie ito.ta'* mathématique moderne >. induit l'esprit à l'affir- NMtodMm de sol-méme.

t' « option » qui. en mathématique. décide de l'épistémo¬logie. et l'option qui. concrétement, fonde l'engagement de la nie. sont, quant à la structure, en rapport d'homologie. Elles sont donc, en (ait. e décidées » de la même manière par le même

effet, ‹

gcnec ontologique d'un antécédent, il serait contradictoire d'affirmer qu'il pût ne procéder de « rien ».

Voilé donc précisée l'économie de l'acte qui, ‹ ex parte subjecU », constitue le fondement par excellence de l'enlilé mathématique ; et qui. par le fait meme, est la norme en quelque sorte immanente de tout autre acte ordonné à saisir une telle entité, en particulier de l' « option › en tant que celle-ci est un acte exercé. - ,

Liste bibliographique des documents auxquels Il est renvoyé au cours de l'étude.

(1) Le Courrier de la Recherche pédagogique. N* 19. Juillet 1993 ; Institut pédagogique national. », rue d'Ulm. Paris 6*. — (Le colloque de Royaumont).
(2) Le Courrier de la Recherche pédagogique. N* 27, mars 1966.
(3) Le Courrier de la Recherche pédagogique. N* SI, Juillet 1997.
(4) U Courrier de la Recherche pédagogique. N* SS. mars 1968.
[6] Bibliothèque d'information sur l'enseignement mathématique. n* 1 ; A.P.M.E.P, 89. nie d'Ulm. Paris B*. — (La charte de Chambéry).
[6) Bibliothèque d'information sur l'enseignement mathématique. N- S. — (Première étape vers une réforme de l'enseignement mathématique dans les classes élémentaires).
[7) Madame Toursnor. Vers une éducation mathématique moderne A l'école élémentaire. — Bulletin de la Société française de pédagogie. N* 165. Juillet 1968.
[8] Mathématique en 6*. Expérimentation et nouveau* programmes. — Institut pédagogique national. 1969.
[9] Mathématiques. Collection Qtntmssa-Revuz. — Classes de 6' et de 5*. Paris. Nathan, 1969.
[10] Z. P. Dusses. E. W. Goldiso. Les premiers pas en mathématiques. — O.C.D.L, 65. rue Claude Bernard. Paris B'.
[11) Z. P. Disses. Comprendre la mathématique. — OJC.D.L.
[121 Lucienne Paul. L'aspect moderne des mathématiques. Paris. Blanchard. 1957.

Table analytique des matières