

SUR LA RÉPERCUSSION DE QUELQUES COURANTS D'IDÉES GÉOMÉTRIQUES EN MATIÈRE DE LOGIQUE ET D'ENSEIGNEMENT

1. Le corps de doctrines désigné sous le nom de « logique », corps qui prend une large extension, en posant tant de problèmes nouveaux, est de formation assez récente. L'idée chère à Leibniz d'établir, en vue du contrôle des raisonnements, un symbolisme approprié, idée poursuivie par de Morgan, Boole, Frege et par quelques autres, prit un tour décisif avec Peano.¹ Avec lui, se constituèrent définitivement les opérations et l'algèbre de la logique, dans un esprit voisin de celui de l'algèbre ordinaire. Les progrès se firent alors rapides, devant la nécessité de tirer au clair les antinomies de la théorie des ensembles comme devant les exigences imposées par la coordination rationnelle du monde physique.

L'aspiration commune à une algèbre rapprochait la pensée du mathématicien et la pensée du logicien. Des rapprochements de ce genre pouvaient-ils se multiplier? C'est bien là ce qui s'est produit : la logique actuelle ne se contente plus d'envisager des opérations algébriques; elle fait place à l'idée de fonction et à l'idée de groupe. Je voudrais, dans le présent article, expliquer de quelle manière ces annexions se sont réalisées; et montrer aussi chemin faisant, l'avantage que le géomètre peut y trouver, en vue d'une meilleure coordination de théories familières.

2. Tout le mouvement d'idées dont je vais m'occuper n'aurait peut-être pas vu le jour sans des recherches d'un caractère purement géométrique, voire même encore plus concret. Dans leurs efforts pour résoudre les grands problèmes de la Mécanique céleste, Lagrange, Hamilton et Jacobi n'avaient guère envisagé l'intégration des équations différentielles que sous son aspect quantitatif, en accordant à la réalisation du calcul une large priorité sur l'étude de l'allure des solutions. Henri Poincaré rompit le premier avec cette tendance en s'orientant systématiquement vers l'intégration qualitative. Dans la voie qu'il avait ouverte, M. Hadamard mit bientôt après en évidence, pour les géodésiques *d'une surface à courbures opposées*, des propriétés remarquables. Il y avait dans leur libellé de quoi retenir l'attention du physicien, par des éléments inattendus, fixant une sorte de démarcation, et permettant de concevoir « une déduction mathématique à tout jamais inutilisable » en matière de théorie physique.

Pierre Duhem, que nous venons de citer, a com-

menté les résultats de M. Hadamard dans un passage mémorable que voici :

« Imaginons, dit-il, le front d'un taureau, avec les éminences d'où partent les cornes et les oreilles, et les cols qui se creusent entre ces éminences; mais allongeons sans limite ces cornes et ces oreilles, de telle façon qu'elles s'étendent à l'infini; nous aurons une des surfaces que nous voulons étudier »².

« Sur une telle surface, les géodésiques peuvent présenter bien des aspects différents. Il est d'abord, des géodésiques qui se ferment sur elles-mêmes. Il en est aussi, qui, sans jamais repasser exactement par leurs points de départ, ne s'en éloignent jamais infiniment; les unes tournent sans cesse autour de la corne droite, les autres autour de la corne gauche, ou de l'oreille droite, ou de l'oreille gauche; d'autres plus compliquées font alterner suivant certaines règles les tours qu'elles décrivent autour d'une corne avec les tours qu'elles décrivent autour de l'autre corne, ou de l'une des oreilles. Enfin, sur le front de notre taureau aux cornes et aux oreilles illimitées, il y aura des géodésiques qui s'en iront à l'infini, les unes en gravissant la corne droite, les autres en gravissant la corne gauche, d'autres encore en suivant l'oreille droite ou l'oreille gauche ».

« Malgré cette complication, si l'on connaît avec une entière exactitude la position initiale d'un point matériel sur ce front de taureau et la direction de la vitesse initiale, la ligne géodésique que ce point suivra dans son mouvement sera déterminée sans aucune ambiguïté. On saura très certainement, en particulier, si le mobile doit demeurer toujours à distance finie ou s'il s'éloignera indéfiniment pour ne plus jamais revenir ».

« Il en sera tout autrement si les conditions initiales sont données, non point mathématiquement, mais pratiquement; la position initiale de notre point matériel sera, non plus un point déterminé sur la surface, mais un point quelconque pris à l'intérieur d'une petite tache; la direction de la vitesse ne sera plus une droite définie sans ambiguïté; à nos données initiales pratiquement déterminées correspondra pour le géomètre une infinie multiplicité de données initiales différentes ».

« Imaginons que certaines de ces données géo-

1. Dans la bibliographie qui termine le présent travail, on trouvera sur ce point la citation d'un article de M. A. Padoa.

2. Entendez donc : une surface à courbures opposées, douée de quatre nappes infinies.

métriques correspondent à une ligne géodésique qui ne s'éloigne pas à l'infini, par exemple, à une ligne géodésique qui tourne sans cesse autour de la corne droite. La géométrie nous permet d'affirmer ceci : parmi les données mathématiques innombrables qui correspondent aux mêmes données pratiques, il en est qui déterminent une géodésique s'éloignant indéfiniment de son point de départ... Malgré les limites étroites qui resserrent les données géométriques capables de représenter nos données pratiques, on peut toujours prendre ces données géométriques de telle sorte que la géodésique s'éloigne sur celle des nappes infinies que l'on aura choisie d'avance. On aura beau rendre plus petite la tâche où se trouve la position initiale du point matériel, resserrer le faisceau qui comprend la direction initiale de la vitesse, jamais la géodésique qui demeure à distance finie en tournant sans cesse autour de la corne droite ne pourra être débarrassée de ces compagnes infidèles qui, après avoir tourné comme elle autour de la même corne, s'écarteront indéfiniment. Le seul effet de cette plus grande précision dans la fixation des données initiales sera d'obliger ces géodésiques à décrire un plus grand nombre de tours embrassant la corne droite avant de produire leur branche infinie; mais cette branche infinie ne pourra jamais être supprimée ».

« Si donc un point matériel est lancé sur la surface à partir d'une position géométriquement donnée, avec une vitesse géométriquement donnée, la déduction mathématique peut déterminer la trajectoire de ce point et dire si cette trajectoire s'éloigne ou non à l'infini. Mais pour le physicien, cette déduction est à tout jamais inutilisable. Lorsqu'en effet les données ne sont plus connues géométriquement, mais sont déterminées par des procédés physiques, si précis qu'on les suppose, la question posée demeure et demeurera toujours sans réponse ».

Et il faut bien en conclure, avec Duhem « qu'une foule de problèmes, bien définis pour le géomètre, perdent tout sens pour le physicien ». Les pages qui suivent n'ont pas manqué d'évoquer, à ce point de vue, le problème de la stabilité du système solaire. Pour l'astronome, les positions et les vitesses actuelles des astres ne sont déterminées que par des procédés physiques, lesquels comportent nécessairement certaines erreurs. Dans la multiplicité infinie (bien que progressivement réduite) des données théoriques fournies par l'astronome au géomètre, il se peut que les solutions infiniment voisines d'une solution donnée à l'instant originel ou tout au moins, certaines d'entre elles, finissent par s'en écarter indéfiniment,

à l'exemple de ce qui se produisait dans le problème de M. Hadamard.

« Une déduction mathématique, observe finalement Duhem, n'est pas utile au physicien tant qu'elle se borne à affirmer que telle proposition, rigoureusement vraie, a pour conséquence l'exactitude rigoureuse de telle autre proposition. *Pour être utile au physicien, il lui faut encore prouver que la seconde proposition reste à PEU PRÈS exacte lorsque la première est seulement A PEU PRÈS vraie.* Et cela ne suffit pas encore; il lui faut délimiter l'amplitude de ces deux à peu près; il lui faut fixer les bornes de l'erreur qui peut être commise sur le résultat, lorsque l'on connaît le degré de précision des méthodes qui ont servi à mesurer les données »³.

3. Ces profondes remarques de Duhem, qu'il complète en notant la haute difficulté des « *mathématiques de l'à peu près* », eussent mérité de leur auteur d'importants développements. Au cours de mon enseignement, j'avais été amené, d'une manière indépendante, à former de nombreux exemples de propositions, dont chacune se prêtait à une définition naturelle pour le module de déplacement de l'hypothèse et pour celui de la conclusion.

A mon insu, je reprenais en l'appliquant à des questions diverses l'idée de Duhem. Mais c'est par une voie différente que j'y fus conduit ainsi que je vais maintenant le rappeler. Je m'étais occupé des méthodes directes, en essayant de les adapter à certaines parties de la géométrie infinitésimale, depuis longtemps explorées à l'aide du calcul. La certitude d'un résultat obtenu par cet intermédiaire suppose en général, la dérivabilité, jusqu'à un certain ordre, des fonctions introduites : l'interprétation géométrique des équations écrites livre dès lors une conclusion, sans qu'on puisse d'une manière immédiate la considérer comme le fruit d'un système irréductible d'hypothèses. Pour obtenir un tel système, ou si l'on préfère, pour déceler les causes responsables de cet effet, qui est la susdite conclusion, faut-il résoudre un problème d'un genre spécial : un *problème de causalité*.

4. L'examen de ce problème se révèle fécond. On voit spontanément apparaître le pourquoi de la constante intervention des groupes en mathématiques, en même temps que la notion de groupe s'agrège à la logique.

Soit, dans un champ défini de prémisses, une proposition P dont l'énoncé a été préalablement formulé. Supposons P vraie pour un choix des

3. P. Duhem, *La Théorie Physique*, Paris 1906, p. 218-232.

objets qu'elle met en relation. Les modifications auxquelles on peut soumettre ces objets pour passer d'un cas d'exactitude de P à un nouveau cas d'exactitude forment une famille, douée de deux caractères importants :

1^o Avec une modification, elle contient toujours son inverse;

2^o Avec deux modifications, d'ailleurs quelconques, elle contient leur résultante.

Une telle famille est donc un groupe au sens couramment admis. Etant donné la manière dont s'introduit ce groupe, à l'occasion des conditions les plus larges de validité de P, je l'ai dénommé le *domaine de causalité* de P. Ce que je viens de dire pour une proposition isolée s'applique également à un système de propositions, puisque les éléments communs à plusieurs groupes forment un nouveau groupe.

D'une part, apparaît ainsi le rôle logique de la notion de groupe. D'autre part, justifie-t-on la nécessité de placer à la base de l'enseignement la notion de groupe, afin de dégager, dans des théories mathématiques très diverses, les principes qui leur sont communs.

5. Les considérations qui précèdent sont relatives à l'équilibre d'un énoncé propositionnel donné, équilibre maintenu pour certaines modifications des objets que cet énoncé met en relation. Au lieu d'étudier l'état permanent du dit énoncé devant ces modifications, on peut en rechercher les conditions de variance. De la sorte, on introduit en logique le *point de vue de la théorie des fonctions*. Restons dans un champ de prémisses bien défini. Une hypothèse H, laquelle peut être en réalité tout un système de suppositions, y détermine une conclusion C. Et l'on se propose d'étudier C comme une fonction de H; il est superflu de dire que le mot fonction est pris ici dans son sens le plus moderne, qui s'attache à la correspondance entre deux éléments de nature quelconque.

Le cas le plus simple, celui aussi qui s'adapte le plus fidèlement à la citation finale de Duhem, est celui où chacun des termes H et C peut être envisagé comme un élément d'un ensemble distancé : cela signifie qu'en prenant deux éléments H_1 et H_2 de la collection des H, on sait leur assigner une distance, c'est-à-dire un nombre positif lorsque ces éléments sont distincts, nul quand ils sont confondus, nombre qui si l'on veut, donne lieu en outre⁴, lorsqu'on envisage trois éléments pris deux à deux, à l'inégalité du triangle. Dans ces conditions très larges, qu'il serait d'ailleurs possible d'étendre, un sens précis est détenu par la locution « *module de déplacement de l'hypothèse* »,

4. Cette condition, remplie dans beaucoup d'applications, n'est pas nécessaire.

et l'on peut, d'une manière analogue, fixer le sens de la locution « *module de déplacement de la conclusion* ».

6. Nous avons introduit ces notions dans le cadre qui présente pour les besoins actuels la plus grande importance. Mais on peut encore, avec M. Jean-Louis Destouches, les adapter aux espaces à voisinages de M. Maurice Fréchet. On doit à cet éminent géomètre la mise en lumière d'une liste imposante de notions fondamentales qui sont devenues des guides nécessaires de la pensée mathématique contemporaine. Il a dégagé ces notions en analysant les progrès du Calcul fonctionnel, instauré par M. Vito Volterra sous l'inspiration du passage du fini à l'infini et enrichi par M. Jacques Hadamard de profondes contributions. Chose remarquable, cette analyse ramène au cœur des mathématiques, pour permettre d'en éclairer les principes universels. Le point de départ réside dans la considération des ensembles abstraits, c'est-à-dire formés d'éléments de nature quelconque, éléments dont on étudie les relations de voisinage⁵.

On est conduit, dans cette voie, à développer sous le nom de Topologie abstraite, une discipline des plus importantes. A la base, est la notion d'*espace*. Un ensemble abstrait est élevé, si l'on peut dire, à la dignité d'espace, lorsqu'on sait faire correspondre, à chacune de ses parties, le système de ses points d'accumulation⁶ : l'adjonction à la dite partie, ou si l'on préfère, au sous-ensemble considéré, de ses points d'accumulation, constitue une opération primordiale, à laquelle on donne le nom de fermeture. En postulant qu'un ensemble fini est sa propre fermeture, qu'un ensemble obtenu comme fermeture est aussi sa propre fermeture, que la fermeture et la réunion d'ensembles, en nombre fini, sont des opérations commutables, on peut pousser déjà fort loin le développement d'une Topologie formelle, distinguant entre autres les ensembles fermés (ceux qui sont leur propre fermeture), les ensembles ouverts (complémentaires d'ensembles fermés), étudiant d'autre part, pour des ensembles quelconques, points intérieurs et points frontières (cf. Kuratowski, Topologie, ch. I).

Notamment, tout ensemble distancé D peut se considérer comme un espace au sens précédent. Soit E un ensemble partiel de D. Un point *a* de D sera dit point d'accumulation de points de E si l'on peut lui attacher une suite indéfinie de points de E, points dont les distances au point *a* tendent vers zéro. Ayant défini la notion de point d'ac-

5. Voir la bibliographie.

6. On convient en général de se restreindre à ceux qui appartiennent à l'espace,

mulation, nous pouvons en déduire celle de fermeture d'un ensemble E prélevé sur D , et par suite, faire vraiment de D un espace. On peut donc dire indifféremment ensemble distancé ou espace distancé.

7. Ces explications préliminaires étant bien comprises, envisageons comme nous l'avions annoncé l'élément hypothèse H comme un point d'un premier espace distancé S , l'élément conclusion C comme un point d'un second espace distancé T . La dépendance du second élément vis-à-vis du premier s'interprète à ce point de vue comme une transformation ponctuelle θ ; ainsi que l'a noté M. Jean-Louis Destouches, la stabilité n'est autre que la continuité : il est bon de compléter cet énoncé en notant que cette continuité concerne essentiellement la transformation, permettant de passer de S vers T ⁷. On peut citer des exemples de propositions qui sont stables alors que la réciproque est instable. En théorie des fonctions d'une variable, pente nulle dans un intervalle implique constance, est une proposition stable, dont la réciproque est vraie, mais instable.

Il est intéressant d'envisager la transformation inverse de θ . A un point du second espace, c'est-à-dire à un élément conclusion C , correspond en général dans le premier espace un ensemble de points, lequel représente la réunion des diverses hypothèses possibles dont l'une détermine la conclusion C . Appelons H l'une d'elles, et $\{H\}$ l'ensemble de toutes les hypothèses H impliquant la conclusion C . Nous écrirons $C = \varphi(H)$, ce qui symbolise la proposition d'hypothèse H et de conclusion C . Il peut arriver que φ soit continue pour chaque élément H de l'ensemble $\{H\}$. Nous dirons alors qu'il y a stabilité sur $\{H\}$.

Faisons observer chemin faisant que l'ensemble $\{H\}$ représente, dans l'espace S des hypothèses, le *domaine de causalité* de la conclusion C , abstraction faite d'un mode de composition de deux éléments de $\{H\}$. Cette représentation ne peut d'ailleurs être conçue sans qu'on ait au préalable défini avec précision les éléments de cet espace, et assigné une distance à chaque couple de ces éléments.

8. Montrons que moyennant la stabilité sur $\{H\}$ de la proposition $C = \varphi(H)$ (n° 7), l'ensemble $\{H\}$ est fermé, quant à l'espace (S) des hypothèses, c'est-à-dire contient ses points d'accumu-

7. Il peut arriver que l'hypothèse soit représentée par un point de l'espace S , la conclusion, par un ensemble de points de l'espace T . Il y aura stabilité si cet ensemble est fonction continue du point considéré de l'espace S , c'est-à-dire si les deux ensembles de T provenant de points arbitrairement voisins de l'espace S ont un écart (au sens de Hausdorff) qui peut être rendu arbitrairement petit. Un exemple d'un pareil cas est ici donné au début du n° 10.

lation, dans un sens conforme aux définitions posées à la fin du n° 6. Lorsqu'à un point p de l'espace (S) , on peut attacher une suite de points de $\{H\}$ dont les distances à p tendent vers zéro, nous avons dit que p est point d'accumulation de l'ensemble $\{H\}$. Cela posé, l'hypothèse représentée par le point p implique nécessairement la conclusion C , sans quoi, il ne pourrait y avoir continuité, donc stabilité sur $\{H\}$.

9. En conservant l'hypothèse de stabilité sur $\{H\}$ de la proposition $C = \varphi(H)$, étudions maintenant l'ensemble $\{H\}$ comme fonction du point C , lorsque la transformation menant d'un point H quelconque de S à un point C du second espace (soit l'espace T), conserve la convergence des suites⁸. Supposons qu'un point p de S puisse s'obtenir comme limite d'une suite de points appartenant respectivement aux ensembles

$$\{H_1\}, \dots, \{H_2\}, \dots, \{H_n\}, \dots$$

domaines de causalité respectifs des conclusions

$$C_1, \dots, C_2, \dots, C_n, \dots$$

Alors, d'après l'hypothèse sur la conservation de la convergence des suites, la suite des C_n admet dans T un point limite unique q . La stabilité ne peut exister sur l'ensemble antécédent de q dans S que si p appartient à cet ensemble autrement dit si l'on a $q = \varphi(p)$. En effet p peut s'obtenir comme limite d'hypothèses déterminant des conclusions arbitrairement voisines de la conclusion q , la stabilité exige donc que l'hypothèse p détermine la conclusion q .

Le résultat ainsi démontré peut encore s'énoncer en disant que l'ensemble $\{H\}$ antécédent d'une conclusion C jouit de la semi-continuité supérieure d'inclusion, toutes les fois qu'il y a stabilité de C sur cet ensemble $\{H\}$. Le fait que C admet $\{H\}$ comme antécédent s'appellera la *pleine réciproque* des $C = \varphi(H)$. Si chacune de ces propositions est stable, pour tout H de $\{H\}$, la pleine réciproque est semi-stable, au sens qui s'attache à la semi-continuité que nous venons de mettre en évidence. Au cas où $\{H\}$ se réduit à un élément unique, on retrouve la continuité sur cet élément, et par suite la proposition stable $C = \varphi(H)$ a une réciproque unique $H = \psi(C)$ qui est elle-même stable.

10. Nous avons déjà noté la part d'arbitraire comportée par la définition de l'espace S et par celle de l'espace T . On en pourra constater la répercussion sur la stabilité de certaines propositions.

8. Cette propriété est automatiquement réalisée, quand la continuité de $C = \varphi(H)$ s'accompagne de la compacité (en soi) des espaces S et T .

Supposons que l'espace S soit l'ensemble des systèmes de quatre points d'un plan π . A chaque point de l'espace S , correspond dans le plan π un faisceau de coniques, et par suite une conique K lieu des centres des coniques du faisceau F . Dans l'espace S , considérons les points attachés aux quatre sommets d'un parallélogramme P du plan π : la conique K correspondante du plan π se décompose en le couple des deux droites parallèles aux côtés de P menées par son centre. En réalité, toute conique non dégénérée menée par les sommets de P a son centre au centre de P . Chaque parallèle à une paire de côtés de P menée par ce point est lieu de centres pour la conique du faisceau réduite à cette paire de côtés. Les six coefficients de l'équation de K dans le plan π déterminent un point d'un espace projectif à cinq dimensions. Prenons-le pour notre espace T . On peut alors établir sans peine la continuité dans le passage de S à T . Il y aura donc stabilité.

En revanche, la stabilité se trouverait compromise si l'attention s'en tenait à la considération des points dont l'un est centre d'une conique non dégénérée du faisceau F . En effet, en partant d'un quadrilatère initial qui soit un parallélogramme P , nous aurions pour les coniques véritables passant par ses sommets un seul et même centre, le centre de ce parallélogramme. Par contre, les coniques passant par les sommets d'un quadrilatère (non parallélogramme) voisin de P auraient leurs centres sur une hyperbole K . A chaque point de l'espace S , nous ferions ainsi correspondre, dans le plan π , un ensemble de centres, soit C , ensemble réduit, pour le point de S provenant de P , à un point unique de π . Cet ensemble C ne serait pas en dépendance continue du point de S considéré. Il n'y aurait donc plus stabilité.

La disparition de la stabilité est ici le fait de l'intervention d'une classe non compacte, classe obtenue en excluant d'un certain faisceau ponctuel F ses coniques dégénérées. Les atteintes portées à la continuité dans des conditions de ce genre sont bien familières. Rappelons l'exemple de la fonction $x : x$; envisagée pour $x > 0$, elle a la valeur 1; la fonction $(x + \epsilon) : x$ envisagée de même pour $x > 0$ peut prendre, si petit soit le nombre positif ϵ , des valeurs arbitrairement grandes. D'où un effet d'instabilité à rapprocher du précédent, en tant qu'il provient aussi de l'intervention d'une classe non compacte⁹.

11. Des exemples familiers appellent l'attention sur un cas important, dans la pratique : celui de

9. On pourrait d'ailleurs, tout aussi bien, se placer ici sous l'égide du non-complet.

propositions ambiguës, c'est-à-dire tantôt vraies, tantôt fausses, lesquelles sont stables dans leurs cas d'exactitude, instables dans leurs cas d'exception.

Soit X la proposition envisagée. Son ambiguïté disparaît, autrement dit X acquiert une valeur logique bien déterminée quand on fixe dans un espace abstrait S la position d'un point M . On imagine donc une spatialisation permettant d'estimer comparativement l'ensemble V des points de S pour lesquels a lieu l'exactitude de X et l'ensemble $S - V$ pour lesquels a lieu l'inexactitude de X .

Comme ci-dessus, la spatialisation mise en œuvre n'est pas un processus admettant une réalisation unique. Il faut prévoir qu'il peut au contraire affecter des formes variées.

Le choix du point M dans S représente le faisceau d'hypothèses qu'il faut adjoindre à quelques autres déjà formulées pour que la valeur logique de X soit entièrement fixée. Or les hypothèses déjà exprimées sont en quelque sorte immuables, tandis que les hypothèses restantes, lesquelles se fixent avec le choix du point M , présentent la part correspondante d'arbitraire.

Etudions les déplacements MM' qui, dans l'espace S , maintiennent le point représentatif des hypothèses supplémentaires sur l'ensemble V . Ils maintiendront fixe la conclusion impliquée par la réunion des hypothèses initiales et des hypothèses supplémentaires. Pour ces déplacements, il y a permanence de la proposition, qui conserve sa valeur logique. Deux formes seulement de conclusion nous intéressent ici : X vraie, X fausse. Tout se passe donc comme si l'espace T se réduisait à deux points.

12. Etudions, avant de poursuivre, quelques exemples. Soient donnés dans l'espace euclidien à trois dimensions deux points distincts A et B ; prenons-y un nouveau point M . L'énoncé X suivant :

A, B, M déterminent un plan

nous donne un exemple de proposition ambiguë, vraie quand M est en dehors de la droite AB , fausse quand M est sur cette droite. Ici, nous spatialisons dans l'espace même où nous avons pris les points A, B, M . C'est l'ensemble des points étrangers à la droite AB qui forme V . Cet ensemble est un ensemble ouvert. Autrement dit, tout point où X est vrai est entouré d'une sphère, centrée en ce point, et dont le rayon peut être pris assez petit pour que X reste vrai dans toute cette sphère. C'est ce qu'on peut encore exprimer sous la forme suivante :

En chacun des points où X est vraie, cette pro-

position possède la stabilité à conclusion fixe ou stabilité de permanence¹⁰.

Cela tient à ce que, dans l'espace euclidien auquel nous avons eu recours, l'ensemble V est un ensemble ouvert, tandis que son complémentaire $S-V$ est un ensemble fermé dépourvu de points intérieurs.

13. Envisageons encore une courbe algébrique plane d'ordre n . Son équation va contenir

$$N = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

coefficients arbitraires. Considérons les valeurs de ces coefficients comme les coordonnées d'un point dans un espace projectif à $N-1$ dimensions, soit S . A chaque point de S correspond dans le plan une courbe algébrique d'ordre n . Cette courbe ne pourra présenter de points multiples que s'il existe entre les coefficients de son équation certaines relations, représentées dans l'espace S par des variétés algébriques¹¹. Ces variétés seront des ensembles fermés, dépourvus de points intérieurs.

Si donc nous considérons la proposition X suivante :

la courbe algébrique la plus générale d'ordre n est dépourvue de points multiples;

son énoncé sera stable (stabilité de permanence) dans les cas d'exactitude, instable dans les cas exceptionnels.

Il se peut que pour des valeurs particulières de n , valeurs qui seront formées du produit de deux entiers consécutifs $K-1$ et K et pour un choix convenable des précédents coefficients, la courbe n'ait pas de singularité tangentielle, autrement dit n'ait pas de tangente multiple. Mais alors la courbe a nécessairement des singularités ponctuelles. Il y a des courbes arbitrairement voisines du même degré qui sont dépourvues de singularités ponctuelles : la classe de l'une de ces courbes, soit $n(n-1)$, dépassera notablement la classe K de la courbe initiale. Supposons par exemple que celle-ci soit du 6^e ordre et de 3^e classe. Il y aura des courbes du 6^e ordre arbitrairement voisines et de classe 30. Cette discontinuité de la classe va de pair avec ce fait que l'absence de singularités tangentielles pour la courbe initiale est instable à l'encontre de l'absence de singularités ponctuelles qui est stable.

14. J'ai signalé d'autres exemples du même genre, notamment celui qui concerne l'intersection de trois surfaces algébriques d'ordres respec-

tifs m, n, p . Soit S l'espace projectif dans lequel les coordonnées homogènes d'un point sont les coefficients (complètement indéterminés) dans les équations des trois surfaces. La proposition X d'après laquelle les surfaces auraient à distance finie mnp points communs distincts (réels ou imaginaires) n'est en défaut que sur un système de variétés algébriques de l'espace S . Elle possède encore la stabilité de permanence dans ses cas d'exactitude, l'instabilité dans ses cas d'exception.

15. Il est facile de systématiser. Il suffit à cet effet de retenir les particularités communes aux exemples qui précèdent. On est conduit à formuler sur les deux ensembles V et $S-V$, dont la réunion donne l'ensemble S , les hypothèses qui permettront d'affirmer que X est stable sur V , instable sur $S-V$.

Nous continuons à supposer qu'on sache définir dans S la distance de deux points quelconques. Nous ferons en outre l'hypothèse que S ne présente pas de point isolé : autrement dit, étant donné un point de l'ensemble S , on peut trouver d'autres points de S qui soient situés de celui-ci à une distance arbitrairement petite (hypothèse de densité).

Cela posé, pour que dans S , l'inexactitude de X ne puisse se produire qu'au titre *instable*, il suffit de supposer qu'étant donné un point quelconque m de $S-V$, il existe des points de V distants de m d'une longueur arbitrairement petite. On ne pourra d'après cela trouver aucun point m de $S-V$ tel qu'en prenant la longueur ϵ suffisamment petite, chaque point de S distant de m de moins de ϵ appartienne à $S-V$. En ce cas, nous dirons que, relativement à S , l'ENSEMBLE $S-V$ EST DÉPOURVU DE POINTS INTÉRIEURS¹². C'est en faisant cette hypothèse (laquelle équivaut à l'hypothèse en italiques au début du présent alinéa) que nous assurerons l'instabilité de X dans ses cas d'exception.

Pour assurer la stabilité de X dans ses cas d'exactitude, il suffit maintenant d'introduire une hypothèse impliquant que la borne inférieure des distances d'un point quelconque de V aux points de $S-V$ soit positive, sans jamais s'annuler. Or on atteint ce résultat comme conséquence de l'hypothèse suivante :

A l'ensemble $S-V$ appartient chaque point p de S auquel s'attache une suite indéfinie de points de $S-V$ dont les distances à p tendent vers zéro.

Cette dernière hypothèse pourra se formuler, conformément aux définitions du n° 6, en disant que $S-V$ est fermé (relativement à S).

12. Cela revient à poser, pour un ensemble d'un espace distancié la notion de *point intérieur*. Un point p sera dit point intérieur de l'ensemble s'il en fait partie, et si tous les points de l'espace qui sont à une distance suffisamment petite de p font également partie de l'ensemble.

10. On peut dire aussi avec M. J. L. Destouches : stabilité en valeur logique. Voir le fasc. n° 393 des Act. Hermann, p. 44.

11. Soit $f(X, Y, T) = 0$ l'équation de la courbe algébrique dans le plan donné. Les relations envisagées exprimeront qu'il existe au moins une solution commune aux trois équations $f_x = 0, f_y = 0, f_T = 0$.

Finalement, toutes les fois que S étant distancié et dépourvu de points isolés, l'ensemble $S - V$ est dépourvu de points intérieurs et en outre est fermé, la proposition X vraie sur V , fausse sur $S - V$ possédera la stabilité de permanence dans ses cas d'exactitude (soit sur V) et sera par contre instable dans ses cas d'exception (donc sur $S - V$).

J'ai tenu à reprendre la question sous cette forme, car un exposé que j'avais donné au Congrès international de Philosophie scientifique se ressentait trop du souvenir des exemples donnés aux nos 12, 13, 14, exemples qui avaient guidé ma recherche. J'écrivais dans le recueil cité :

« Si S est de plus ou bien compact en soi, ou même simplement séparable, et si $S - V$ est un ensemble fermé dépourvu de point intérieur, en chaque point M de l'ensemble V , l'exactitude de X sera stable, sa non-exactitude de X sera stable... »

Dans ce libellé, la condition de compacité, aussi bien que la condition de séparabilité sont tout à fait superflues. Je ne les introduisais en fait que pour soumettre la topologie de l'espace S à certaines exigences la rapprochant à quelque titre de la topologie d'un des espaces de nos exemples précédents : prudence injustifiée !

16. Pour illustrer cette remarque, je vais montrer l'utilité que présente l'abandon de la compacité ou pareille matière. Reprenons les exemples de propositions ambiguës X , obtenus en considérant une ou plusieurs courbes, une ou plusieurs surfaces algébriques, dont les degrés sont préalablement assignés. Supposons qu'au lieu de laisser tout à fait arbitraires les coefficients des équations de ces courbes ou de ces surfaces, nous nous astreignons à choisir ces coefficients dans un certain domaine de rationalité. Pour fixer les idées, prenons celui des nombres rationnels ordinaires, et supposons que les coefficients soient quelconques dans ce domaine.

Des résultats précédemment obtenus dans chacun de nos exemples initiaux, on conclut sans difficulté que les énoncés considérés chacun dans le champ restreint qui vient d'être défini seront encore stables en cas d'exactitude, instables dans leurs cas d'exception.

Il serait moins facile de prélever sur l'Analyse classique des exemples rompant avec les espaces séparables. Quel que soit l'intérêt pratique de la notion de séparabilité dans l'étude des espaces distanciés, il est cependant à retenir que cette notion n'a aucun rôle dans les considérations qui précèdent.

Nous nous en tiendrons à ces remarques en ce qui concerne la stabilité de permanence.

En revanche l'exemple du n° 10 avait clairement montré comment des considérations de stabilité

peuvent se trouver liées à des hypothèses de compacité, mises en œuvre pour permettre à la continuité de s'exercer.

17. Il nous reste à souligner, en terminant, la portée de quelques-unes des idées rencontrées au cours du présent exposé. Un problème du plus haut intérêt pratique est posé depuis déjà quelques lustres : refondre l'enseignement de l'Analyse mathématique, dans un esprit nouveau, qui soit à la fois substantiel, éducatif, soucieux des contacts entre l'Analyse et d'autres branches de la Science.

En demandant à cet enseignement d'être substantiel, on émet le vœu d'y voir s'incorporer facilement les théories que nul ne doit ignorer, en raison de leur usage très courant.

En demandant à cet enseignement d'être éducatif, on émet le vœu d'y voir apparaître l'unité méthodologique, permettant de grouper tous développements autour de quelques principes d'application permanente.

En imposant à cet enseignement le souci des contacts de l'Analyse avec les autres branches de la Science, — s'inspirant en cela du bel exemple donné dans sa chaire de Toulouse par le professeur Adolphe Buhl —, on émet le vœu que jamais ne soit oublié le caractère indissociable de l'Analyse et des théories physiques.

La coordination rationnelle et harmonieuse ainsi désirée, selon un sens conforme aux vues de Cournot, dans son fameux traité de l'enchaînement des idées fondamentales dans les Sciences et dans l'Histoire, devra satisfaire encore à d'autres conditions. L'une d'elles est très importante par essence même, puisqu'il s'agit d'Analyse mathématique; le fait de raisonner sur des collections infinies, ne devra jamais être pour l'esprit une cause de trouble, les circonstances au premier abord les plus paradoxales s'éclairant à la lumière des principes généraux qu'on aura pris comme point de départ.

Or, la réalisation d'un tel programme serait difficile sans prendre en considération les points de contact rappelés ci-dessus, lesquels s'établissent entre la pensée du mathématicien est la pensée du pur logicien, en prolongement du sillon tracé par Peano. Quelques leçons d'un caractère très général trouveront donc place utile au début du cours, leçons où l'on ne craindra pas de mettre en évidence l'idée de fonction sous sa forme la plus large : la correspondance entre deux éléments de nature abstraite; l'idée à peine différente du recours à des espaces; l'idée de groupe; toutes idées communes à la mathématique d'une part, à la logique d'autre part. Ces idées seront illustrées par des exemples variés, dont la diversité confir-

mera le caractère universel des notions introduites.

A la suite de ces préliminaires, les théories particulières pourront être développées en profondeur, avec une aisance plus grande. Leur mise en ordre sera facilitée. En même temps qu'elle prélude à la formation des algorithmes, la notion de groupe offre en effet un cadre à la classification des théorèmes pris isolément, tandis que la stabilité donnera prise sur les propositions à conclusion variable; notamment, pour les propositions ambiguës, les exemples où se vérifient les conditions envisagées au n° 15, se prêteront d'une manière naturelle à l'application d'un procédé pour l'estimation comparative de cas normaux et des cas exceptionnels. Dans la voie indiquée, cette estimation se fait par voie topologique, mais on peut imaginer aussi un tout autre processus qui la réalise suivant un mode statistique. Soit S l'ensemble abstrait tel que le choix d'un point de S achève de fixer la valeur logique de la proposition X . La comparaison de l'ensemble V des points où X est vraie à l'ensemble total S se fera par un processus de mesure. Le système de vues que nous venons de développer accorde donc d'emblée aux considérations statistiques la part importante qui doit nécessairement leur revenir dans une tentative de cette nature.

Il resterait à montrer comment ce système peut être concilié avec les desiderata qui se présentent en matière de théorie physique. Les réflexions de Pierre Duhem, rappelées au début de cet exposé, donnent à cet égard une indication suffisante. Cette indication est d'ailleurs précisée par les développements qui, d'une manière indépendant, m'ont récemment permis de montrer que, dans une théorie physique, relative à la physique du continu, un schème déterministe n'est autre qu'un théorème d'unicité soumis à une condition essentielle, celle d'être stable. M. Jean-Louis Destouches a prolongé mes remarques à ce sujet, notamment du côté de la Mécanique ondulatoire.

Enfin, faudrait-il préciser la position de notre système de vues devant les problèmes s'attachant à des collections infinies. C'est là un point trop important pour qu'on puisse en donner idée en quelques lignes. Je me contenterai donc de renvoyer le lecteur à mon récent article du tome XII de la Revue roumaine « *Mathematica* » (Cluj). La conclusion qui s'en dégage est que les paradoxes

naissent du fait d'envisager isolément certains problèmes infinis, toutes difficultés s'aplanissant par la mise en parallèle de problèmes, susceptibles de se rallier à une même classe, dominée par un groupe, lequel vient encore ici délimiter le domaine de validité des propriétés que l'on a en vue.

Là encore, se confirme cette manière de relativité universelle, qui trouve son expression dans l'idée de groupe. Tels sont, à grands traits, les principes directeurs qui semblent aujourd'hui prévaloir en matière de coordination didactique. Mais sans doute ne sont-ils que partiels: dès maintenant semble s'avérer la nécessité d'organiser davantage la place que nous avons assignée ici-même aux considérations statistiques, pour satisfaire aux exigences de la Physique du discontinu.

Georges Bouligand,

Professeur à l'Université de Poitiers,
Maître de recherches.

BIBLIOGRAPHIE

- G. BOULIGAND: La causalité des théories mathématiques. *Act. scient. et ind.* Hermann, fasc. n° 184. — Sur la stabilité des propositions. *Bull. Ac. Roy. Sc. de Belg.*, t. 21, p. 277 et s.; p. 776 et s. — Sur les conditions de variance des propositions, *C. R.*, t. 200, 1935, p. 1509. — Quelques aspects de l'étude des propositions mathématiques. *Act. scient. et ind.*, Hermann, fasc. n° 393 (actes du Cong. intern. de Philos. scient.), p. 34-40. — Problèmes bien posés et problèmes à conditions surabondantes, année 1936 du *Bull. Soc. Roy. des Sc. de Liège*, p. 116-120. — Quelques constatations sur le rôle des correspondances et des groupes dans la comparaison de deux collections infinies, *Mathematica* (Cluj), t. 12, 1936, p. 146-159.
- A. BUHL: Notice sur ses travaux. Toulouse, Privat, 1935.
- Jean-Louis DESTOUCHES: Définition de la stabilité des propositions, *C. R.*, t. 201, 1935, p. 182. — Les espaces abstraits en logique et la stabilité des propositions, *Bull. Ac. Roy. des Sc. de Belg.*, t. 21, p. 780. (Voir aussi le tome 22 du même recueil). — Rôle des espaces abstraits en logique, stabilité des propositions, légalité et semi-légalité. *Act. sc. et ind.*, Hermann, fasc. n° 393, p. 41-50.
- Maurice FRÉCHET: Les espaces abstraits. Paris, 1928.
- Gustave JUVET: L'axiomatique et la théorie des groupes. — *Act. sc. et ind.*, Hermann, fasc. n° 393, p. 28-33.
- C. KURATOWSKI: Topologie. Varsovie, 1933.
- Max MORAND: Sur les principes de la Physique. Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège 1931-32.
- A. PADOA: Ce que la logique doit à Peano. Fasc. 395, des *Act.* Hermann, p. 31-37.
- Pierre SERGESCU: Sur quelques aspects des Mathématiques contemporaines. *Actes du 3^e Congr. intern. d'Hist. des Sc.*, Lisbonne, 1934.
- P. S. Les idées présentées ci-dessus peuvent être utilement appliquées à l'enseignement élémentaire de la géométrie: voir par exemple les ouvrages de MM. ESTÈVE et MITAULT (Gauthier-Villars).