Ueber die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung.

(Von Herrn *H. von Helmholtz.*)

Wenn ich in diesem Aufsatze vom Princip der kleinsten Wirkung spreche, so möchte ich darunter nicht allein die ursprüngliche 1744 von ***P. L. M. de Maupertuis*** *) veröffentlichte Form desselben verstanden wissen, die übrigens erst viel später, wohl durch *Lagrange*, präcise Bestimmung der Variationsbedingungen und vollständigen Beweis empfangen hat; sondern ich will unter diesem Namen, als dem ältesten und bekanntesten, die verschiedenen transformirten Formen desselben Satzes mitbegreifen, welche später durch *Sir W. Rowan Hamilton* **) daraus entwickelt sind. Dieser hat die zwei Differentialgleichungen aufgestellt, welche später *C. G. J. Jacobi* in eine zusammenzuziehen lehrte, in denen die gemeinsame Quelle dieser Transformationen und noch vieler möglichen anderen liegt, während dadurch die physikalischen Voraussetzungen, von denen die Rechnung ausgeht, gar nicht verändert werden.

Die genannten Forscher haben das Princip der kleinsten Wirkung zunächst nur auf die Mechanik wägbarer Körper angewendet und die Bewegungen eines Systems entweder ganz frei beweglicher oder durch feste Verbindungen an einander geketteter Massenpunkte dadurch dargestellt. Die physikalischen Voraussetzungen, von denen sie ausgingen, waren also wesentlich gegeben durch *Newton*s Bewegungsgesetze und die Art, wie man der Erfahrung entsprechend die Wirkung fester Verbindungen von Massenpunkten mechanisch zu definiren pflegte. Weiter zeigte sich aber, sobald man erst gelernt hatte *Maupertuis*' Integral richtig zu behandeln, dass die Gültigkeit des Gesetzes von

---

*) Histoire de l'Acad. des Sciences de Paris. 1744. Avril 15. — Histoire de l'Acad. Royale de Berlin. 1746. p. 267.

**) Philosoph. Transact. 1834. T. II, p. 247—308; 1835. T. I, p. 95—144.

der Constanz der Energie vorausgesetzt werden müsse *). Dies musste anfangs als eine erhebliche Beschränkung für den Gültigkeitsbereich des Princips der kleinsten Wirkung erscheinen, bis die neueren physikalischen Untersuchungen feststellten, dass auch das Gesetz von der Constanz der Energie allgemeingültig ist, und jene scheinbare Einschränkung also in der That nichts einschränkt. Nur muss man für den untersuchten Vorgang vollständig alle Formen kennen, in denen Aequivalente von Energie auftreten, um sie mit in Rechnung zu ziehen. Andererseits konnte es fraglich erscheinen, ob mitspielende andere physikalische Vorgänge, welche nicht einfach auf Bewegungen wägbarer Massen und auf *Newton*s Bewegungsgesetze zurückzuführen sind, in denen sich aber doch Energiequanta bethätigen, auch unter das Princip der kleinsten Wirkung begriffen werden dürfen.

Als die für die hier beabsichtigten Untersuchungen bequemste Form des Princips der kleinsten Wirkung werde ich eine von *Hamilton*s Formen wählen, welche zulässt, dass auf das betreffende mechanische System, dessen innere Kräfte nur conservative sind, noch äussere von der Zeit abhängige Kräfte einwirken, deren Arbeit besonders berechnet wird. Wenn wir mit F die potentielle Energie des Systems, mit L die lebendige Kraft desselben bezeichnen, so ist die Function (*Hamilton*s Principalfunction), deren Zeitintegral bei der normalen Bewegung zwischen den Endlagen ein Minimum wird:

$$H = F - L,$$

während die Energie des Systems

$$E = F + L$$

ist. Hierin ist F nur von den Coordinaten abhängig, während L eine homogene Function zweiten Grades der Geschwindigkeiten ist.

Jene Function H ist dieselbe, durch deren Differentialquotienten *Lagrange* die nach aussen gewendeten Kräfte des bewegten Systems ausgedrückt hat. Da diese Function in allen hierher gehörigen Problemen eine wichtige Rolle spielt, möchte ich für sie eben wegen dieser Beziehung zu den Kräften den Namen des ***kinetischen Potentials*** vorschlagen. Es ist schon eine ganze Reihe entsprechender Namen für verschiedene specielle Ca-

---

*) *Maupertuis* selbst hat dies nicht gesehen; er hält sein Princip für allgemeiner als das der Erhaltung der lebendigen Kräfte. Histoire de l'Acad. de Berlin. 1746. p. 285. — *C. G. J. Jacobi* erörtert diesen Punkt im Anfang der Vorlesung VI über Dynamik.

pitel der Physik vorgeschlagen worden. So gehört hierher Herrn *F. E. Neumanns* Potential zweier elektrischer Ströme, Herrn *R. Clausius* *) *elektrodynamisches Potential;* Herr *J. W. Gibbs* **) nennt in der Thermodynamik dieselbe Function, die ich freie Energie genannt hatte, *Kräftefunction für constante Temperatur,* Herr *P. Duhem* ***) dagegen dieselbe das *thermodynamische Potential.* Es sind also Vorgänge genug für die Wahl des neuen Namens vorhanden.

Das Princip der kleinsten Wirkung kann dann so ausgesprochen werden: *Der für gleiche Zeitelemente berechnete Mittelwerth des kinetischen Potentials ist auf dem wirklichen Wege des Systems ein Minimum (beziehlich für längere Strecken ein Grenzwerth) im Vergleich mit allen anderen benachbarten Wegen, die in gleicher Zeit aus der Anfangslage in die Endlage führen.* Für die Ruhe geht das kinetische Potential über in den Werth der potentiellen Energie (beziehlich des Potentials im bisherigen Sinne). Für diese brauchen wir nicht den Mittelwerth zu nehmen, da die während der Bewegung verschiedenen Werthe hier einander alle gleich werden. Für die Ruhe sagt unser Gesetz dann also einfach aus, dass *die potentielle Energie für das Gleichgewicht ein Minimum sein müsse* †).

Jacobi hat gezeigt, dass die Function H auch explicite die Zeit enthalten könne, ohne die Bildung der Variation und die daraus folgende Differentialgleichung unmöglich zu machen. Ich habe dies benutzt, um zu H noch eine Summe $\sum_{\mathfrak{a}}[P_{\mathfrak{a}}.p_{\mathfrak{a}}]$, hinzuzufügen, in welcher $p_{\mathfrak{a}}$ die Coordinaten sind, und $P_{\mathfrak{a}}$ die in Richtung der Coordinate $p_{\mathfrak{a}}$ wirkende Kraft bedeutet, letztere in dem unten näher zu erörternden Sinne genommen. Die $P_{\mathfrak{a}}$ werden als gegebene Functionen der Zeit, aber unabhängig von den Coordinaten betrachtet. In dieser Form liefert der Minimalsatz bei der Variation *Lagranges* Gleichungen für die Kräfte $P_{\mathfrak{a}}$, und damit ist dann auch die ganze Reihe specieller Untersuchungen, die sich auf die Bewegungsgleichungen von *Lagrange* gründen, unter das etwas modificirte Princip der kleinsten Wirkung aufgenommen. Wo es nöthig ist dieses modificirte Princip von

*) Dieses Journal Bd. 82, S. 85. Auch in *Wiedemanns* Annalen Bd. I, S. 36.

**) Transact. Connecticut Academy III, p. 108—248; 343—524. *Sillimans* Journal 1878. XVI. p. 441—458.

***) Le Potentiel Thermodynamique. Paris 1886.

†) Zu bemerken ist, dass schon *Euler* auf diesem Wege das Princip der kleinsten Wirkung zu begründen suchte, aber er nahm den Mittelwerth von F, nicht von $(F-L)$. Histoire de l'Acad. Royale de Berlin. 1751. p. 175.

dem ursprünglichen zu unterscheiden, will ich es den ***Minimalsatz des kinetischen Potentials*** nennen. Die von *Lagrange* gegebene Form der Bewegungsgleichungen ist namentlich dadurch von Wichtigkeit, dass wir sie auch auf Fälle anwenden können, wo allerlei noch nicht rationell aufzulösende Vorgänge, Reibung, galvanischer Widerstand u. s. w. mitwirken, und wo zwischen diesen und den durch *Lagrange*s Formel zusammengefassten conservativen Kräften des bewegten Systems Gleichgewicht bestehen muss.

Von anderen Arbeitsäquivalenten kommen nun neben der potentiellen und actuellen Energie wägbarer Massen, namentlich noch die thermischen, elektrodynamischen und elektromagnetischen in Betracht. Die Wärmebewegung ist bisher allerdings nur als ein besonders verwickelter Fall der Bewegung ausschliesslich wägbarer Atome betrachtet worden. Da aber von warmen Körpern gleichzeitig Aetherwellen ausstrahlen, so wird diese Beschränkung, die unter einfacheren Voraussetzungen in der That *Carnot*s Gesetz abzuleiten gestattet, wie die Herren *Clausius* *) und *Boltzmann* **) gezeigt haben, doch nur als eine zunächst ausreichende Hypothese zu betrachten sein; die Mitwirkung anderer Kräfte, z. B. elektrodynamischer, kann nicht mit Sicherheit ausgeschlossen werden.

Dass dagegen thatsächlich die bekannten Gesetze der reversiblen Wärmevorgänge in der Form von *Lagrange*s Bewegungsgleichungen, also auch des Minimalsatzes des kinetischen Potentials ausgedrückt werden können, habe ich in meinen Aufsätzen über *die Statik der monocyklischen Bewegungen* ***) nachgewiesen. Dabei zeigt sich aber, dass die Temperatur, welche die Intensität der thermischen Bewegung misst, in viel verwickelterer Form in die zu integrirende Function eintritt, als es die Geschwindigkeiten thun, wenn man den Werth der lebendigen Kraft ponderabler Systeme bildet. Ich habe in den citirten Aufsätzen gezeigt, dass dergleichen Formen unter gewissen beschränkenden Voraussetzungen auch für Systeme wägbarer Massen durch Elimination gewisser Coordinaten entstehen können, und dass also in dem Auftreten solcher verwickelterer Formen kein Widerspruch gegen die Anwendung von *Lagrange*s Bewegungsgleichungen liegt. Wohl aber wird es nothwendig, wenn man die allgemeinen Eigenschaften der Systeme, die durch das Princip der kleinsten Wirkung regiert werden,

*) *Poggendorff* Annalen. 1871. Bd. 142. S. 433—461.
**) Wiener Sitzungsberichte 1866. Bd. LIII. Abth. II, S. 195—220.
***) Dieses Journal Bd. 97, S. 112—123.

kennen lernen will, die ältere engere Annahme fallen zu lassen, wonach die Geschwindigkeiten nur in dem Werthe der lebendigen Kraft und zwar in Form einer homogenen Function zweiten Grades vorkommen, und zu untersuchen, wie sich die Sache verhält, wenn H eine Function der Coordinaten und Geschwindigkeiten von beliebiger Form ist.

Dafür, dass auch die *chemischen Kräfte,* wo wir sie zwingen können, nur auf reversible Weise zu arbeiten, dem *Carnot*schen Gesetze folgen, haben zwar erst in einer kleinen Zahl von Fällen experimentelle Bestätigungen gewonnen werden können, diese aber fallen um so mehr auf als sie messbare Beziehungen zwischen Processen von anscheinend ganz verschiedener Natur herausstellen *).

Endlich haben die Beobachtungen über die elektromagnetischen und elektrodynamischen Fernwirkungen geschlossener elektrischer Ströme zu Ausdrücken für die ponderomotorischen und elektromotorischen Kräfte geführt, die sich durchaus den von *Lagrange* für die Mechanik wägbarer Körper gegebenen anschliessen. Der erste, welcher eine solche Formulirung der elektrodynamischen Gesetze gegeben hat, war Herr *F. E. Neumann* **) senior. Bei ihm treten als Geschwindigkeiten die elektrischen Strömungen auf, d. h. die Menge der Elektricität, die in der Zeiteinheit durch ein von materiellen Theilchen des Leiters umgrenztes Flächenelement hindurchgeht. Später haben dann die Herren *W. Weber* und *Clausius* andere Formen gegeben, in denen relative oder absolute Geschwindigkeiten elektrischer Quanta im Raume statt der Stromgeschwindigkeiten eintreten. Für geschlossene Ströme stimmen die Folgerungen aus diesen verschiedenen Formulirungen durchaus überein. Für ungeschlossene differiren sie. Soweit in diesem letzteren Gebiete Thatsachen gewonnen sind, zeigt sich, dass das *Neumann*sche Gesetz unzureichend ist, wenn man bei seiner Anwendung nur die in den Leitern vorgehenden Elektricitätsbewegungen in Rechnung zieht. Man muss vielmehr auch die von *Faraday* und *Maxwell* in Betracht genommenen Bewegungen der Elektricität in Isolatoren, wie sie bei entstehender oder vergehender dielektrischer Polarisation derselben eintreten, berücksichtigen.

*) S. meine drei Aufsätze über die Thermodynamik chemischer Vorgänge. Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1882, 2. Febr., 27 Juli. 1883, 31. Mai. — Eine gute Zusammenstellung des bisher gebrachten Materials in dem oben citirten Buche von *P. Duhem.*

**) S. meine Arbeiten über die Theorie der Elektrodynamik. Dieses Journal Bd. 72, S. 57; Bd. 75, S. 35; Bd. 78, S. 273.

Unter das so erweiterte *Neumann*sche Gesetz fügen sich auch die bisher sicher beobachteten Wirkungen ungeschlossener Ströme.

Aber auch hier besteht eine Abweichung in der Form der Functionen, verglichen mit denen für wägbare Massen. Für die elektrodynamischen Erscheinungen treten die Geschwindigkeiten der Elektricität in einer Function zweiten Grades auf, deren Coefficienten aber, selbst bezogen auf rechtwinkelige Coordinaten, nicht Constanten werden, wie es die Massen in dem Werthe der lebendigen Kraft ponderabler Systeme sind. Zweitens treten lineare Functionen der Geschwindigkeiten ein, sobald permanente Magnete in Wirkung treten.

Es waren gerade Untersuchungen über die Form des kinetischen Potentials, welches *Maxwells* Theorie der Elektrodynamik fordert, die mich auf die vorliegenden vorbereitenden Untersuchungen geführt haben.

Auch die Lehre vom Licht hat sich in allen Hauptsachen unter die Hypothese subsumiren lassen, dass der Aether ein Medium von ähnlichen Eigenschaften sei, wie die festelastischen wägbaren Körper. Die bekannten Schwierigkeiten in der Theorie der Reflexion und Refraction werden noch leichter besiegt durch *Maxwells* elektromagnetische Hypothese. Aber man mag der einen oder der andern Meinung folgen, so würde man das Princip der kleinsten Wirkung für die Lichtbewegung als gültig betrachten müssen, wenigstens soweit ihre Erscheinungen durch jene Theorien erklärt werden.

Daraus ergiebt sich schon jetzt, dass der Gültigkeitsbereich des Princips der kleinsten Wirkung weit über die Grenze der Mechanik wägbarer Körper hinausgewachsen ist, und dass *Maupertuis'* hoch gespannte Hoffnungen von seiner absoluten Allgemeingültigkeit sich ihrer Erfüllung zu nähern scheinen, so dürftig auch die mechanischen Beweise und so widerspruchsvoll die metaphysischen Speculationen waren, welche der Autor selbst für sein neues Princip damals anzuführen wusste.

Es ist schon jetzt als höchst wahrscheinlich zu betrachten, dass es das allgemeine Gesetz aller reversiblen Naturprocesse sei, und was die irreversiblen betrifft, wie z. B. Erzeugung und Leitung von Wärme, so scheint deren Irreversibilität nicht im Wesen der Sache, sondern nur auf der Beschränktheit unserer Hülfsmittel zu beruhen, die es uns nicht möglich machen ungeordnete Atombewegungen wieder zu ordnen, oder die Bewegung aller in Wärmebewegung begriffenen Atome genau rückwärts gehen zu machen.

Jedenfalls scheint mir die Allgemeingültigkeit des Princips der kleinsten Wirkung so weit gesichert, dass es als heuristisches Princip und als Leitfaden für das Bestreben, die Gesetze neuer Klassen von Erscheinungen zu formuliren, einen hohen Werth in Anspruch nehmen darf.

Es hat ausserdem den Vorzug die sämmtlichen Bedingungen, welche für die untersuchte Klasse von Erscheinungen von Einfluss sind, in den engsten Rahmen einer Formel zusammenzufassen, und dadurch einen vollständigen Ueberblick über alles Wesentliche zu geben.

Bei dieser Lage der Sache hielt ich es für nützlich für das verallgemeinerte Princip eine Uebersicht des Beweises und der allgemeinen Folgerungen zusammenzustellen, die, wo sie nur bekannte Methoden auf etwas erweiterte Annahmen anzuwenden hatte, ganz kurz gehalten sein konnte. Ich habe mich dabei bestrebt, namentlich diejenigen Folgerungen hervorzuheben, welche beobachtbare Verhältnisse betreffen, und die, zusammengefasst, wiederum im Stande sind, als Kennzeichen für die Gültigkeit des Princips in dem betreffenden Gebiete zu dienen.

In § 1 ist mit möglichster Freiheit für die Natur der Function H der Minimalsatz des kinetischen Potentials entwickelt, und *Lagrange*s Bewegungsgleichungen daraus hergeleitet. Die Eliminationen sind besprochen, durch welche auch für Systeme wägbarer Körper solche allgemeinere Formen eintreten können.

In § 2 wird die Constanz der Energie aus unserer Form des Princips abgeleitet und der Werth der Energie aus dem Werthe des kinetischen Potentials zu berechnen gelehrt. Er ist:

$$E = H - \sum_{\mathfrak{a}} \left[q_{\mathfrak{a}} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{a}}} \right],$$

wo $q_{\mathfrak{a}}$ die Geschwindigkeiten sind. Dabei zeigt sich, dass nicht umgekehrt in jedem Falle, wo die Constanz der Energie gewahrt ist, auch das Princip der kleinsten Wirkung gelte. Das letztere sagt also mehr aus, als das erstere, und was es mehr aussagt, zu finden ist unsere Aufgabe. Gleichzeitig werden einige mechanische und physikalische Vorgänge specificirt, um sie als erläuternde Beispiele sowohl für den Inhalt der beiden ersten Paragraphen als auch der folgenden herbeiziehen zu können, und daran die Tragweite des Princips anschaulich zu machen.

§ 3 behandelt dann die entgegengesetzte Aufgabe, nämlich H aus E abzuleiten. Das muss durch Integration der oben stehenden Differentialgleichung geschehen und bringt also willkürliche Integrationsconstanten hinein, welche homogene Functionen ersten Grades der q_α sein müssen. Dieser Schritt ist insofern von Bedeutung, als es nun möglich sein wird aus der vollständigen Kenntniss der Abhängigkeit der Energie von den Coordinaten und Geschwindigkeiten das kinetische Potential und somit die ganzen Bewegungsgesetze des Systems zu finden, vorausgesetzt, dass das Princip der kleinsten Wirkung gültig ist. Die nach q_α linearen Glieder, welche „verborgenen Bewegungen" entsprechen, werden sich wohl meist ohne Schwierigkeit finden lassen.

§ 4 behandelt die Wechselbeziehungen zwischen den Kräften, die das System gleichzeitig nach verschiedenen Richtungen hin ausübt, und seinen Beschleunigungen und Geschwindigkeiten. Diese umfassen eine Reihe der interessantesten Verknüpfungen physikalischer Erscheinungen, wie z. B. die zwischen *Ampères* elektromagnetischen und elektrodynamischen Gesetzen einerseits und dem Inductionsgesetz andererseits; eine Reihe thermodynamischer Gesetze, z. B. das Verhältniss zwischen der Steigerung des Drucks einer eingeschlossenen Masse durch Temperaturerhöhung zu der Temperaturerhöhung durch Compression; das entsprechende Verhalten bei thermoelektrischen und elektrochemischen Processen. Auch lässt sich schliesslich wiederum nachweisen, dass das Princip der kleinsten Wirkung jedesmal gültig ist, wenn die in § 4 aufgezählten Wechselbeziehungen der Kräfte bestehen. Dieser Beweis ist aber auf eine spätere Mittheilung verschoben.

In § 5 werden *Hamiltons* Theoreme für die allgemeine Form kurz recapitulirt, und in § 6 werden die daraus herfliessenden Reciprocitätsgesetze für die durch kleine Anstösse nach Ablauf einer bestimmten Zeit erfolgenden Aenderungen der rechtläufigen und rückläufigen Bewegung gegeben. Es fallen darunter reciproke Verhältnisse, die ich selbst für Schall und Licht in früheren Arbeiten, aber nur für ruhende Systeme, nachgewiesen hatte.

In § 7 endlich werden die Bewegungsmomente statt der Geschwindigkeiten eingeführt, was eine andere Form des Variationsproblems und neben den schon bekannten geänderten Darstellungen der Werthe der Kräfte auch ein anderes Reciprocitätsgesetz der hin- und rückläufigen Bewegung ergiebt.

§ 1.

Formulirung des Princips.

Ich nehme an, dass der augenblickliche Zustand des betrachteten Körpersystems durch eine genügende Anzahl von einander unabhängiger

Coordinaten p_α vollständig gegeben sei; die Geschwindigkeiten ihrer Aenderung bezeichne ich mit:

$$(1.)\qquad q_\alpha = \frac{dp_\alpha}{dt}.$$

Ich bezeichne ferner mit P_α die Kraft, mit welcher das bewegte Körpersystem auf Aenderung der Coordinate p_α hinwirkt, so dass $(-P_\alpha)$ die äussere Kraft ist, welche auf das System einwirken muss in Richtung der Coordinate p_α, damit die vorausgesetzte Bewegung des Systems in der angenommenen Weise vor sich gehen kann.

Diese von *Lagrange* eingeführten Kräfte P_α sind im Allgemeinen Aggregate von Kraftcomponenten, die selbst auf verschiedene Theile des Systems einwirken können, und dadurch ihrer Grösse und Zusammensetzung nach definirt sind, dass $(P_\alpha . dp_\alpha)$ die Arbeit ist, welche die Kraft P_α nach aussen hin leistet, wenn die Aenderung der Coordinate p_α in $(p_\alpha + dp_\alpha)$ eintritt, während P_α keine Arbeit leistet, wenn p_α unverändert bleibt, während beliebige Veränderungen der übrigen Coordinaten $p_\mathfrak{b}$ eintreten.

Wir setzen im Folgenden voraus, dass die Grössen P_α als Functionen der Zeit, aber unabhängig von den Coordinaten, während der Periode $t = t_0$ bis $t = t_1$ gegeben seien. H sei eine Function der Coordinaten und Geschwindigkeiten, von der wir zunächst nur verlangen, dass sie in allen Lagen des während der genannten Zeitperiode durchlaufenen Weges endliche erste und zweite Differentialquotienten nach den p_α und q_α habe. Wir bilden nunmehr das Integral:

$$(1^a.)\qquad \Phi = \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \{H + \sum_\alpha [P_\alpha \cdot p_\alpha]\},$$

in welchem die p_α so variirt werden sollen, dass ihre Variationen δp_α für $t = t_0$ und $t = t_1$ gleich Null, in den Zwischenzeiten aber beliebige differentiirbare Functionen der Zeit seien. Dann folgt nach bekannten Methoden der Variationsrechnung, dass

$$(1^b.)\qquad \delta\Phi = 0$$

wird, wenn während der Dauer der Bewegung:

$$(1^c.)\qquad 0 = P_\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right].$$

Dies sind bekanntlich die Bewegungsgleichungen des Systems in der von *Lagrange* gegebenen Form.

Elimination von Coordinaten. In den ursprünglichen Anwendungen des Princips auf die Bewegungen eines freien Systems materieller Punkte war, wie ich schon in der Einleitung bemerkte, H von der Form:

$$H = F - L,$$

worin F nur Function der $p_\mathfrak{a}$, L eine homogene Function zweiten Grades der $q_\mathfrak{a}$ sein soll, deren Coefficienten von den $p_\mathfrak{a}$ abhängen. Für ein freies System ist die Anzahl der Coordinaten $p_\mathfrak{a}$ dreimal so gross, als die der vorhandenen Massenpunkte.

Nun kann aber in vielen Fällen eine Verminderung in der Anzahl der Coordinaten eintreten, ohne dass die in den Gleichungen (1^a.), (1^b.) und (1^c.) gegebenen Formen der Darstellung dadurch geändert würden.

Am meisten behandelt ist unter diesen Fällen bisher derjenige, wo die Bewegungsfreiheit des Systems durch sogenannte *feste Verbindungen,* die sich mathematisch als Gleichungen zwischen den Coordinaten ausdrücken lassen, eingeschränkt ist. Die oben angegebene Zusammensetzung der Function H aus F und L und die Beschaffenheit der beiden letzteren Functionen wird dadurch nicht geändert, die Zahl der veränderlichen Coordinaten kann aber erheblich vermindert werden.

Eine andere bemerkenswerthe Verminderung in der Anzahl der Coordinaten tritt ein, wenn einzelne derselben, die wir mit dem Index $\mathfrak{b}$ bezeichnen wollen, nur mit ihrem Differentialquotienten $q_\mathfrak{b}$ in den Werth von H eintreten, und die entsprechenden Kräfte $P_\mathfrak{b}$ dauernd gleich Null sind. Unter diesen Umständen werden die den Werth der $P_\mathfrak{b}$ ausdrückenden Gleichungen (1^c.) reducirt auf:

$$(2.)\qquad 0 = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{b}}\right],$$

oder:

$$(2^a.)\qquad \frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{b}} = -c_\mathfrak{b}.$$

Diese Gleichungen, welche nach den q_a (beziehlich $q_\mathfrak{b}$) linear sind, kann man benutzen um die $q_\mathfrak{b}$ durch die übrigen Geschwindigkeiten und durch die $p_\mathfrak{a}$ auszudrücken, und sie dann aus dem Werthe von H zu eliminiren. Den durch diese Elimination entstandenen Ausdruck des Werthes von H bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}$. Dann ist

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_\mathfrak{a}} = \frac{\partial H}{\partial p_\mathfrak{a}} + \sum_\mathfrak{b}\left[\frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{b}} \cdot \frac{\partial q_\mathfrak{b}}{\partial p_\mathfrak{a}}\right].$$

Also mit Berücksichtigung von (2^a.):

$$\frac{\partial H}{\partial p_a} = \frac{\partial}{\partial p_a}\{\mathfrak{H} - \sum_b [c_b \cdot q_b]\}.$$

Setzen wir:

$$(2^b.) \qquad \mathfrak{H} - \sum_b [c_b \cdot q_b] = H',$$

so finden wir:

$$\frac{\partial H}{\partial p_a} = \frac{\partial H'}{\partial p_a},$$

und ebenso:

$$\frac{\partial H}{\partial q_a} = \frac{\partial H'}{\partial q_a},$$

$$(2^c.) \qquad P_a = -\frac{\partial H'}{\partial p_a} + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial H'}{\partial q_a}\right].$$

Es tritt also in diesem Falle die Function H', welche von den q_b und p_b frei ist, aber nunmehr Glieder enthält, die nach den q_a linear sind und aus den Werthen der q_b herrühren, für die Bildung der Bewegungsgleichungen (2^c.) ganz an die Stelle der ursprünglichen Function H.

Beispiele hierfür wären Drehungen eines Kreisels um seine Symmetrieaxe, wenn deren Richtung, aber nicht seine Drehungsgeschwindigkeit um diese Axe geändert werden kann. Ferner Bewegung eines Systems bezogen auf ein in Drehung begriffenes rechtwinkeliges Coordinatensystem, z. B. das des Erdkörpers.

Dieser in der Mechanik der wägbaren Körper gegebenen Analogie gemäss, wollen wir einstweilen auch andere Fälle physikalischer Vorgänge in denen die Function H Glieder, die nach den Geschwindigkeiten linear sind, enthält, bezeichnen als *Fälle mit verborgener Bewegung,* wenn auch zur Zeit noch Fälle dazu gehören, wo die Existenz einer solchen verborgenen Bewegung nicht zweifellos nachzuweisen ist, wie bei der Wechselwirkung zwischen Magneten und elektrischen Strömen. Für die Magnete ist sie bekanntlich von *Ampère* schon angenommen; sie zeigt ihren Einfluss auch bei der elektromagnetischen Drehung der Polarisationsebene des Lichts, wie Sir *W. Thomson* bemerkt, obgleich dabei keine wahrnehmbaren elektrischen Ströme mitwirken.

Diese Fälle unterscheiden sich von denen, wo H die Geschwindigkeiten nur in Gliedern zweiten Grades enthält, wesentlich dadurch, dass die Bewegung nicht unter gleichen Bedingungen rückläufig vor sich gehen kann, wenn nicht die verborgenen Bewegungen gleichzeitig umgekehrt werden.

Noch verwickeltere Formen der Function H können andere Eliminationen, wenigstens für beschränkte Klassen von Bewegungen, hervorbringen; ich habe solche Fälle in meiner ersten Abhandlung über die monocyklischen Bewegungen *) besprochen. Wir können die Bedingungen jener Elimination hier noch etwas allgemeiner fassen. Man nehme an, dass eine Gruppe von Coordinaten $p_\mathfrak{c}$ vorkommt, deren entsprechende $q_\mathfrak{c}$ im Werthe der lebendigen Kraft nur mit einander multiplicirt, aber nicht mit den ausserhalb dieser Gruppe stehenden $q_\mathfrak{b}$ in Producte vereinigt vorkommen, so dass alle $\frac{\partial^2 H}{\partial q_\mathfrak{c} . \partial q_\mathfrak{b}} = 0$; und dass ferner die Kräfte $P_\mathfrak{c}$ immer gleich Null bleiben. Unter diesen Umständen sind Bewegungen des Systems möglich, bei denen die $p_\mathfrak{c}$ dauernd constant, also die $q_\mathfrak{c} = 0$ bleiben. Die Bewegungsgleichungen für diese Klasse von Bewegungen vereinfachen sich dadurch, dass, wenn alle $q_\mathfrak{c} = 0$, auch alle

$$\frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{c}} = 0$$

werden. Wir erhalten somit aus (1^c.):

$$(3.) \qquad 0 = \frac{\partial H}{\partial p_\mathfrak{c}},$$

$$(3^a.) \qquad P_\mathfrak{b} = -\frac{\partial H}{\partial p_\mathfrak{b}} + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{b}}\right].$$

Wenn nun die Gleichungen (3.), deren Anzahl gleich der der $p_\mathfrak{c}$ ist, ausreichen diese Grössen als Functionen der $p_\mathfrak{b}$ und $q_\mathfrak{b}$ auszudrücken, so kann man mittels der gewonnenen Werthe die $p_\mathfrak{c}$ aus H eliminiren, wobei im Allgemeinen H eine verwickeltere Function der $q_\mathfrak{b}$ werden wird, welche wir mit $\mathfrak{H}$ bezeichnen wollen. Dann ist nach den Principien der Differentialrechnung:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_\mathfrak{b}} = \frac{\partial H}{\partial p_\mathfrak{b}} + \sum_\mathfrak{c}\left[\frac{\partial H}{\partial p_\mathfrak{c}} \cdot \frac{\partial p_\mathfrak{c}}{\partial p_\mathfrak{b}}\right],$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_\mathfrak{b}} = \frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{b}} + \sum_\mathfrak{c}\left[\frac{\partial H}{\partial p_\mathfrak{c}} \cdot \frac{\partial p_\mathfrak{c}}{\partial q_\mathfrak{b}}\right];$$

also wegen der Gleichungen (3.) wiederum:

$$(3^b.) \qquad \frac{\partial H}{\partial p_\mathfrak{b}} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_\mathfrak{b}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{b}} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_\mathfrak{b}}.$$

Die Bewegungsgleichungen (3^a.) reduciren sich also auf:

*) Dieses Journal Bd. 97, S. 120—122.

$$(3^c.) \qquad P_{\mathfrak{b}} = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_{\mathfrak{b}}} + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_{\mathfrak{b}}}\right],$$

in denen nur noch die $p_{\mathfrak{b}}$ und $q_{\mathfrak{b}}$ vorkommen, und das $\mathfrak{H}$ im Allgemeinen nicht mehr gleich der Summe einer Function der Coordinaten und einer homogenen Function zweiten Grades nach den Geschwindigkeiten ist.

Wenn aber das ursprüngliche H eine solche war, und also keine verborgenen Bewegungen Einfluss hatten, so sind die Gleichungen (3.) nach den $q_{\mathfrak{b}}$ vom zweiten Grade; die Werthe der $p_{\mathfrak{c}}$ können also unverändert bleiben (auch wenn sie mehrdeutig sein sollten), wenn sämmtliche $q_{\mathfrak{b}}$ ihr Vorzeichen gleichzeitig ändern, woraus folgt, dass auch in diesem Falle die Gesammtbewegung rückläufig vor sich gehen kann.

In der Mechanik der wägbaren Massen würden wir solche Probleme, in denen die Function H die Geschwindigkeiten $q_{\mathfrak{a}}$ in Gliedern vom ersten, oder von höherem Grade enthält, als *unvollständige Probleme* bezeichnen können, insofern ein Theil der möglichen Bewegungen ausgeschlossen ist, und ein Theil der zur Lagenbestimmung des Systems nöthigen Coordinaten in der Function H nicht vorkommt, und gewisse Kräfte dauernd gleich Null gesetzt, also nicht mehr beliebig bestimmbar sind.

Functionaldeterminante der Bewegungsmomente. Die in den vorigen Ableitungen vorkommenden Grössen $\frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{a}}}$ wollen wir der Kürze wegen bezeichnen:

$$(3^d.) \qquad s_{\mathfrak{a}} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{a}}}$$

und die $s_{\mathfrak{a}}$ die *Bewegungsmomente* nennen. Bei der Bewegung eines freien Systems, welches auf rechtwinkelige Coordinaten bezogen ist, entsprechen sie dem Product aus Masse und Geschwindigkeit, dessen Differentialquotient nach der Zeit *Newton*s Maass der entsprechenden Kraftcomponente ist:

$$X = \frac{d}{dt}\left[m \cdot \frac{dx}{dt}\right].$$

In den zusammengesetzteren Fällen ist der Einfluss, den die Trägheit der mitbewegten Massen bei einer bestimmten Art von Bewegung ausübt, nach der Lage der Massen verschieden. So ist z. B. bei einer Rotationsbewegung eines festen Körpers das Bewegungsmoment gleich dem Trägheitsmoment, multiplicirt mit der Winkelgeschwindigkeit. In diesem Sinne nun messen die Grössen $s_{\mathfrak{a}}$ den Einfluss, den die Trägheit der mitbewegten Massen hat, und ihre Beschleunigung nimmt einen entsprechenden Theil der Bewegungskraft in Anspruch, wie die Gleichungen (1^c.) zeigen.

In der Mechanik wägbarer Körper sind die $s_\mathfrak{a}$ in den ursprünglichen vollständigen Problemen lineare homogene Functionen der $q_\mathfrak{a}$, deren Coefficienten im Allgemeinen Functionen der $p_\mathfrak{a}$ sind, und man hat also ein System linearer Gleichungen:

$$(3^e.) \qquad s_\mathfrak{a} = \Sigma\left[\frac{\partial s_\mathfrak{a}}{\partial q_\mathfrak{b}} \cdot q_\mathfrak{b}\right],$$

welche, nach den $q_\mathfrak{b}$ aufgelöst, diese als lineare homogene Functionen der $s_\mathfrak{a}$ darstellen. Diese Darstellung würde nicht möglich sein, wenn die Determinante der Grössen $\frac{\partial s_\mathfrak{a}}{\partial q_\mathfrak{b}}$, beziehlich der $\frac{\partial^2 H}{\partial q_\mathfrak{a} . \partial q_\mathfrak{b}}$ identisch gleich Null wäre. Letzterer Fall kann nun aber nicht eintreten, ohne dass die lebendige Kraft für gewisse Bewegungen bei endlichen Geschwindigkeiten Null würde. Es ist nämlich, da L eine wesentlich positive, homogene Function zweiten Grades von den $q_\mathfrak{a}$ ist:

$$2L = \sum_\mathfrak{a}[q_\mathfrak{a} . s_\mathfrak{a}].$$

Wenn die genannte Determinante Null wäre, würden sämmtliche $s_\mathfrak{a}$ und demgemäss auch L Null sein können, ohne dass die $q_\mathfrak{a}$ Null zu sein brauchten.

Die Bedingung, dass die Determinante der Gleichungen (3^e.) nicht identisch gleich Null sei, kann auch so ausgesprochen werden: *Zwischen den Grössen $s_\mathfrak{a}$ und $p_\mathfrak{a}$ soll mit Ausschluss der $q_\mathfrak{a}$ keine identische Gleichung bestehen*, und deshalb können die $q_\mathfrak{a}$ immer als Functionen der $s_\mathfrak{a}$ und $p_\mathfrak{a}$ dargestellt werden.

Dieses Verhältniss wird dadurch nicht geändert, dass wie im Falle der verborgenen Bewegungen einzelne $s_\mathfrak{a}$ constant oder auch, wie im Falle der eliminirten $p_\mathfrak{c}$, gleich Null gesetzt werden. Der Werth der verbleibenden $s_\mathfrak{a}$ wird durch jene Veränderungen nicht geändert. Da auch für die elektrischen Bewegungen und die reversiblen Wärmebewegungen dasselbe gilt, soweit deren physikalische Gesetze bisher ermittelt werden konnten: so liegt bisher keine physikalische Veranlassung vor die Ausnahmsfälle zu berücksichtigen, wo die Determinante der Gleichungen (3^e.) etwa gleich Null werden sollte; und es wird deshalb im Folgenden die Voraussetzung gemacht werden, dass jene Determinante nicht identisch gleich Null werden könne, sondern höchstens für besondere Werthe der $p_\mathfrak{a}$.

Wenn diese Bedingung festgehalten wird, lässt sich das Variationsproblem in solcher Weise aussprechen, dass auch die im Anfang dieses Paragraphen abgesondert hingestellten Gleichungen:

$$(1.) \qquad q_a = \frac{dp_a}{dt}$$

mit in dasselbe aufgenommen werden.

Es sei, wie oben, H eine Function der p_a und q_a, die P_a Functionen der Zeit. Man setze:

$$(1^d.) \qquad \Phi_1 = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ H - \sum_a \left[\left(q_a - \frac{dp_a}{dt} \right) \cdot \frac{\partial H}{\partial q_a} + P_a . p_a \right] \right\},$$

und verlange, dass

$$(1^e.) \qquad \delta \Phi_1 = 0$$

werde für beliebige Variationen der p_a und q_a, welche beide als unabhängige Variable zu behandeln sind. Für die Zeiten t_0 und t_1 sollen die $\delta p_a = 0$ sein, die δq_a bleiben auch dann willkürlich.

Die Variation nach q_b ergiebt:

$$(1^f.) \qquad 0 = \sum_a \left[\frac{\partial^2 H}{\partial q_a . \partial q_b} \cdot \left(\frac{dp_a}{dt} - q_a \right) \right],$$

woraus die Gleichungen (1.) sich ergeben, da die Determinante der $\frac{\partial^2 H}{\partial q_a . \partial q_b}$ nicht identisch gleich Null sein soll.

Die Variation nach den p_a ist, wie oben, auszuführen und ergiebt dasselbe Resultat.

Wenn man die in (1^d.) vorkommende Function der p_a und q_a bezeichnet:

$$E = H - \sum_a \left[q_a \cdot \frac{\partial H}{\partial q_a} \right],$$

(es ist dies die Energie, wie der nächste Paragraph zeigen wird), so wird:

$$(1^g.) \qquad \Phi_1 = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ E - \sum_a \left[s_a \cdot \frac{dp_a}{dt} + P_a . p_a \right] \right\}.$$

Ich führe diese Form hier an, da wir auf eine analoge Form am Schlusse stossen werden, und beide, wenn man ihnen in physikalischen Untersuchungen begegnet, ehe man sicher weiss, welche Grössen als p_a, q_a und s_a anzusprechen sind, sehr fremdartig aussehen können.

Andererseits sind es gerade diese Formen, welche die vollständigste Fassung des Problems in sich vereinigen.

§ 2.

Verhältniss zum Princip von der Constanz der Energie.

Wenn man die Bewegungsgleichungen (1^c.) der Reihe nach mit $q_\mathfrak{a}$ multiplicirt und addirt, erhält man:

$$\Sigma[P_\mathfrak{a} . q_\mathfrak{a}] = -\Sigma\left[\frac{\partial H}{\partial p_\mathfrak{a}} \cdot q_\mathfrak{a}\right] + \frac{d}{dt} \Sigma_\mathfrak{a}\left[q_\mathfrak{a} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{a}}\right] - \Sigma_\mathfrak{a}\left[\frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{a}} \cdot \frac{dq_\mathfrak{a}}{dt}\right]$$
$$= -\frac{d}{dt}\left\{H - \Sigma\left[q_\mathfrak{a} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{a}}\right]\right\}.$$

Setzen wir, wie vorher:

$$(4.) \qquad E = H - \Sigma\left[q_\mathfrak{a} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{a}}\right],$$

so können wir schreiben:

$$(4^a.) \qquad \Sigma[P_\mathfrak{a} . q_\mathfrak{a}] . dt + \frac{dE}{dt} \cdot dt = 0.$$

Hierin ist die voranstehende Summe die Arbeit, welche die Kräfte $P_\mathfrak{a}$ im Zeittheilchen dt nach aussen hin abgeben, und es ergiebt sich also, dass die Grösse E fortdauernd in dem Maasse abnimmt oder wächst, als jene Kräfte positive oder negative Arbeit leisten. Daraus folgt, dass E den Energievorrath des Systems bezeichnet, ausgedrückt durch seine Coordinaten $p_\mathfrak{a}$ und Geschwindigkeiten $q_\mathfrak{a}$.

Daraus geht hervor, dass das Princip der kleinsten Wirkung, genommen in der Form des § 1, das Princip von der Constanz der Energie immer einschliesst.

Andererseits ist das Princip der kleinsten Wirkung nicht nothwendig gültig in allen denkbaren Fällen, welche dem Gesetze von der Constanz der Energie unterworfen sind. Man kann zu dem Systeme der Gleichungen (1^c.) mannigfaltige Zusätze machen, welche die Ableitung der Gleichung (4^a.) durchaus nicht stören, wohl aber die Zusammenfassung in die Variationsform aufheben. Man addire z. B. zu derjenigen der Gleichungen (1^c.), welche in ihren Gliedern den Index $\mathfrak{a}$ hat, ein Glied $(\varphi . q_\mathfrak{b})$ und zu der mit dem Index $\mathfrak{b}$ das Glied $(-\varphi . q_\mathfrak{a})$, worin φ irgend eine Function der Coordinaten sei. Wenn wir dann zur Ableitung der Gleichung der Energie die erstgenannte Gleichung mit $q_\mathfrak{a}$, die zweite mit $q_\mathfrak{b}$ multipliciren, heben sich die Zusatzglieder weg, und die Constanz der Energie wird nicht gestört. Dagegen lässt sich die entsprechende Variation:

$$\varphi[q_\mathfrak{b} . \delta p_\mathfrak{a} - q_\mathfrak{a} . \delta p_\mathfrak{b}]$$

nur wenn φ allein von den Variabeln $(q_{\mathfrak{a}}.p_{\mathfrak{b}})$ und $(q_{\mathfrak{b}}.p_{\mathfrak{a}})$ abhängt, als vollständige Variation einer Function der $p_{\mathfrak{a}}$ und $q_{\mathfrak{a}}$ unter dem Zeitintegral betrachten.

Wenn die in den Zusatzgliedern angenommene Function φ unabhängig von den Geschwindigkeiten ist, würde die entsprechende Bewegung nicht umkehrbar sein. Wir könnten das φ aber zu einer linearen Function der Geschwindigkeiten machen; dann könnte die ganze Bewegung auch rückläufig vor sich gehen.

Da man in jedes beliebig gewählte Paar von Gleichungen aus dem Systeme (1^c.) solche Glieder einstellen kann, so ist eine grosse Mannigfaltigkeit solcher Fälle denkbar, in denen das Gesetz von der Constanz der Energie gültig ist, aber nicht das der kleinsten Wirkung.

Daraus ergiebt sich also, dass das letztere Princip, wo es gilt, noch einen besonderen Charakter der vorhandenen conservativen Naturkräfte ausspricht, der nicht schon durch ihre Bestimmung als conservative Kräfte gegeben ist. Diesen deutlicher an das Licht zu stellen ist der Zweck der nachfolgenden Untersuchung.

Erläuternde Beispiele.

Da es im Folgenden wiederholt wünschenswerth sein wird Beispiele anzuführen, an denen die Tragweite der gewonnenen Sätze anschaulich wird: so erlaube ich mir gleich hier einige geeignete Fälle so weit nöthig zu charakterisiren, auf die ich mich nicht nur für den Inhalt dieses und des vorigen Paragraphen, sondern auch später kurz beziehen kann:

I. *Beispiel des Kreisels.* Der Kreisel sei ein Rotationskörper in Cardanischer Befestigung; der äussere Ring a mag um eine verticale Axe drehbar sein, den Drehungswinkel von einer bestimmten Verticalebene im Raume an gerechnet nennen wir α; der zweite Ring b drehe sich im ersten in horizontaler Axe, den Winkel zwischen den Ebenen der Ringe a und b bezeichne ich mit β. Die Drehungsaxe des Kreisels liege im Ringe b rechtwinklig zu der Drehungsaxe zwischen a und b. Der Winkel zwischen einem bezeichneten Meridian des Kreisels und der Ebene von b sei γ, das Trägheitsmoment des Kreisels um seine Rotationsaxe sei $\mathfrak{A}$, das um eine seiner Aequatorialaxen sei $\mathfrak{B}$; das der Ringe werde vernachlässigt. Dann ist die lebendige Kraft des Kreisels:

$$(4.)\quad \begin{cases} L = \frac{1}{2}\mathfrak{A}.\left[\frac{d\gamma}{dt}+\cos\beta\cdot\frac{d\alpha}{dt}\right]^2+\frac{1}{2}\mathfrak{B}.\left[\sin^2\beta.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right], \\ H = -L. \end{cases}$$

Daraus ergeben sich die Kräfte A, B, C, mit denen die Winkel α, β, γ sich zu vergrössern streben:

$$(4^a.)\qquad A = -\frac{d}{dt}\left\{\mathfrak{A}.\cos\beta.\left[\frac{d\gamma}{dt}+\cos\beta\cdot\frac{d\alpha}{dt}\right]+\mathfrak{B}.\sin^2\beta\cdot\frac{d\alpha}{dt}\right\},$$

$$(4^b.)\qquad B = -\mathfrak{A}.\sin\beta.\left[\frac{d\gamma}{dt}+\cos\beta\cdot\frac{d\alpha}{dt}\right]\frac{d\alpha}{dt}+\mathfrak{B}.\sin\beta.\cos\beta.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2-\mathfrak{B}\cdot\frac{d^2\beta}{dt^2},$$

$$(4^c.)\qquad C = -\frac{d}{dt}\left\{\mathfrak{A}.\left[\frac{d\gamma}{dt}+\cos\beta\cdot\frac{d\alpha}{dt}\right]\right\}.$$

Die Kraft A ist einfach ein Drehungsmoment, welches den Kreis a zu drehen strebt, ebenso B für den Kreis b. C aber strebt den Kreisel relativ zu b zu drehen, muss also seinen Stützpunkt an b haben.

Wenn die Kraft C fehlt, ergiebt sich aus ($4^c.$):

$$(4^d.)\qquad -\mathfrak{A}.\left[\frac{d\gamma}{dt}+\cos\beta\cdot\frac{d\alpha}{dt}\right] = c.$$

Hieraus ergiebt sich der Werth von H' nach ($2^b.$):

$$(4^e.)\qquad H' = +\frac{1}{2}\frac{c^2}{\mathfrak{A}}-\frac{1}{2}\mathfrak{B}.\left[\sin^2\beta.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right]+c.\cos\beta\cdot\frac{d\alpha}{dt}$$

und die Werthe der Kräfte, übereinstimmend aus ($4^a.$), ($4^b.$) und ($4^e.$) abgeleitet:

$$(4^f.)\qquad \begin{cases} A = \dfrac{d}{dt}\left[c.\cos\beta-\mathfrak{B}.\sin^2\beta\cdot\dfrac{d\alpha}{dt}\right], \\[2ex] B = c.\sin\beta\cdot\dfrac{d\alpha}{dt}+\mathfrak{B}.\sin\beta.\cos\beta.\left(\dfrac{d\alpha}{dt}\right)^2-\mathfrak{B}\cdot\dfrac{d^2\beta}{dt^2}. \end{cases}$$

Das erste constante Glied im Werthe von H' kann weggelassen werden, da es schliesslich nur in die willkürliche Constante des Werthes von E eintritt; das letzte Glied ist das lineare, welches im Werthe von L fehlt.

II. ***Beispiel: Elektrodynamische Wirkung von geschlossenen Stromkreisen nach dem Potentialgesetz*** *).

Wir wollen unter $J_{\mathfrak{b}}$ die Stromintensität des $\mathfrak{b}^{\text{ten}}$ Stromkreises verstehen und unter $p_{\mathfrak{a}}$ Coordinaten der ponderablen Massen, deren lebendige Kraft wir vernachlässigen. Die Function H ist von der Form:

$$(5.)\qquad H = -\frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{b}}\sum_{\mathfrak{c}}[Q_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}.J_{\mathfrak{b}}.J_{\mathfrak{c}}],$$

worin die $Q_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ Functionen der $p_{\mathfrak{a}}$ sind, und jeder von beiden Indices $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ sich nach einander auf alle Stromkreise bezieht. Die inducirten elektro-

*) Siehe unter Anderen meine Arbeit dieses Journal Bd. 72, S. 70—72.

motorischen Kräfte, die ich mit $\mathfrak{E}_\mathfrak{b}$ bezeichnen will, sind:

$$(5^a.)\qquad \mathfrak{E}_\mathfrak{b} = -\sum_\mathfrak{c}\left[\frac{d}{dt}(Q_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}.J_\mathfrak{c})\right],$$

$$(5^b.)\qquad P_\mathfrak{a} = \tfrac{1}{2}\sum_\mathfrak{b}\sum_\mathfrak{c}\left[\frac{\partial Q_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}}{\partial p_\mathfrak{a}}\cdot J_\mathfrak{b}\cdot J_\mathfrak{c}\right].$$

Wenn ein permanenter Magnet mitwirkt, dessen Lage durch die Coordinate p_0 gegeben ist, so kommt zu H noch eine Reihe linearer Glieder hinzu, die ich mit h bezeichnen will, von der Form:

$$(5^c.)\qquad h = \sum_\mathfrak{b}[R_\mathfrak{b}.J_\mathfrak{b}],$$

wo die $R_\mathfrak{b}$ Functionen der Coordinaten $p_\mathfrak{a}$ und p_0 sind. Die Berechnung der Kräfte geschieht hieraus nach denselben Methoden. Die gesammte elektrodynamische Energie ist:

$$E = H - \sum_\mathfrak{b}\left[J_\mathfrak{b}\cdot\frac{\partial H}{\partial J_\mathfrak{b}}\right] = -H.$$

Die Function h verschwindet daraus, da:

$$h - \sum_\mathfrak{b}\left[J_\mathfrak{b}\cdot\frac{\partial h}{\partial J_\mathfrak{b}}\right] = 0.$$

Dass das hier vorkommende $E = -H$, wie die lebendige Kraft ponderabler Massen, eine nothwendig positive Grösse für geschlossene Ströme ist, habe ich in meinen elektrodynamischen Arbeiten gezeigt *). Ausserdem ist E eine homogene Function zweiten Grades der $J_\mathfrak{a}$, und es lassen sich daher dieselben Betrachtungen anwenden, wie sie am Ende von § 1 ausgeführt sind, wonach die Determinante der Grössen $\frac{\partial^2 H}{\partial J_\mathfrak{a}.\partial J_\mathfrak{b}}$ nicht identisch gleich Null werden kann.

III. *Beispiel. Thermodynamik.* Die Gesetze der reversiblen thermischen Processe können bei Wahl passender Coordinaten dargestellt werden **) in der Form:

$$(6.)\qquad \begin{cases} P_\mathfrak{a} = -\dfrac{\partial}{\partial p_\mathfrak{a}}[\mathfrak{F} - L] - \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\partial L}{\partial q_\mathfrak{a}}\right], \\ \dfrac{dQ}{dt} = -\vartheta\cdot\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vartheta}\right], \end{cases}$$

$$(6^a.)\qquad E = \mathfrak{F} - \vartheta\cdot\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vartheta} + L.$$

*) Dieses Journal Bd. 72, S. 86 ff. und S. 125.

**) Siehe dieses Journal Bd. 97, S. 112—117. Die lebendige Kraft der sichtbaren Bewegungen L ist hinzugefügt, um die hier wünschenswerthe Vollständigkeit zu bewahren.

Darin ist $\mathfrak{F}$ die von mir als „freie Energie" bezeichnete Function der Coordinaten p_a und der absoluten Temperatur ϑ, L ist die lebendige Kraft der sichtbaren Bewegungen der schweren Massen, also Function der p_a und q_a, nach letztern homogen vom zweiten Grade, unabhängig von ϑ; dQ ist die Wärmemenge, die im Zeitelement dt von aussen in den Körper eindringt, d. h. die Arbeit, welche von aussen her einwirkende und nur Wärmebewegung hervorbringende Kräfte ausgeübt haben.

Dieselbe Form mit geänderten Variablen erhalten wir, indem wir setzen:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vartheta} = -S,$$

dann mit s irgend eine Function von S bezeichnen, und ferner setzen:

$$(6^b.) \quad \begin{cases} \vartheta \cdot \dfrac{\partial S}{\partial s} = \eta, \\ H = \mathfrak{F} - \vartheta \cdot \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vartheta} - \eta . s. \end{cases}$$

Drücken wir nun H und s als Functionen der p_a und des η aus, so lassen sich die obigen Gleichungen schreiben [l. c. Abhdl. I. Gl. (1^d.)]:

$$(6^c.) \quad \frac{dQ}{dt} = +\vartheta \cdot \frac{dS}{dt} = \eta \cdot \frac{ds}{dt},$$

$$(6^d.) \quad P_a = -\frac{\partial}{\partial p_a}[H-L] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial q_a}\right],$$

$$(6^e.) \quad E = H - \eta \cdot \frac{\partial H}{\partial \eta} + L.$$

Auch diese Gleichungen haben wie die ersten (6.), (6^a.) ganz die Form (s. l. c. § 3), wie die für die Bewegung monocyklischer Systeme, deren kinetisches Potential $(H-L)$ ist, und für welche η die Geschwindigkeit, s das Bewegungsmoment der monocyklischen Bewegung bezeichnet.

Bezeichnen wir mit $P_{(\eta)}$ die in Richtung der Geschwindigkeit η ausgeübte Kraft, so ist:

$$(6^f.) \quad P_{(\eta)} . \eta . dt = -dQ.$$

Die Analogie mit den Ausdrücken von *Lagrange* bleibt hier also gewahrt, in welcher Weise auch die Entropie S von dem Bewegungsmoment s der monocyklischen Bewegung abhängen mag. Die Möglichkeit der Koppelung gleich warmer Körpersysteme zu einem grösseren System und die kinetische Gastheorie führen in diesem Falle dazu anzunehmen, dass:

$$\vartheta = s.q,$$

$$S = -\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vartheta} = C.\log s$$

sei. Danach wäre für jedes gegebene Körpersystem die Temperatur proportional der lebendigen Kraft der Wärmebewegung zu setzen, wie vor mir auch schon die Herren *Clausius* und *Boltzmann* wahrscheinlich zu machen gesucht haben*). Die späteren Anwendungen unseres Beispiels sind unabhängig von der Frage nach der Beziehung zwischen den Functionen S und s.

Die Wärmebewegung ist wahrscheinlich als ein besonders weit gehendes Beispiel von Elimination von Coordinaten p_c aufzufassen, H kann deshalb eine verwickelte Function von ϑ oder η sein. Dass aber auch viel zusammengesetztere Bewegungsweisen, die den inneren Molecularbewegungen der warmen Körper schon viel ähnlicher sind, zu den gleichen Gesetzen führen können, haben meine Untersuchungen über die zusammengesetzten monocyklischen Systeme gezeigt.

§ 3.

Das kinetische Potential aus dem Werthe der Energie herzuleiten.

Bei den physikalischen Untersuchungen ist meist leichter und sicherer zu erkennen, welches die Umstände sind, die auf den Energievorrath irgend eines Körpersystems Einfluss haben, und danach den Werth der Function E zu bestimmen, als die gesammten Gesetze der Veränderungen und aus diesen das kinetische Potential zu finden. Wir kommen also nun zur Untersuchung darüber, in wie weit das letztere aus dem Werthe des Energievorraths bestimmt werden könne.

Wir setzen voraus, dass die Grösse E als Function der p_a und q_a gefunden sei. Für die Form dieser Function ergiebt sich aus Gleichung (4.):

$$(4.) \qquad E = H - \sum_{a} \left[q_a \cdot \frac{\partial H}{\partial q_a} \right].$$

---

*) Ich habe in einer Mittheilung an die Berliner Akademie (Sitzungsberichte 8. December 1884) diesen Satz bestimmter ausgesprochen, aber dann erkannt, dass ein Schritt im Beweise nicht gesichert werden konnte, sondern noch eine weitere einschränkende Bedingung erfordere, deren physikalische Bedeutung ich noch nicht so zu interpretiren weiss, wie ich hoffe, dass es geschehen kann. Ich muss daher die von Herrn *L. Boltzmann* gegen jenen Aufsatz gemachten Einwände (Wiener Sitzungsberichte (2) Abth., XCII. Bd., 8. October 1885) als in dieser Beziehung berechtigt anerkennen.

Daraus folgt:

$$(7.)\qquad \frac{\partial E}{\partial q_{\mathfrak{b}}} = -\sum_{\mathfrak{a}}\left[q_{\mathfrak{a}}\cdot\frac{\partial^2 H}{\partial q_{\mathfrak{a}}.\partial q_{\mathfrak{b}}}\right].$$

Bei der zur Bildung der Bewegungsgleichungen nöthigen Variation der in Gleichung (1^a.) gegebenen Function Φ musste vorausgesetzt werden, dass die ersten und zweiten Differentialquotienten von H längs des von dem Systeme durchlaufenen Weges stets endlich bleiben. Danach folgt aus Gleichung (7.), dass, wenn sämmtliche $q_{\mathfrak{a}} = 0$, auch alle $\frac{\partial E}{\partial q_{\mathfrak{a}}}$ gleich Null werden.

Andere Beschränkungen der Function E, die durch die physikalische Bedeutung gegeben sind, mögen hier nur kurz erwähnt werden.

1) Die vorkommenden Coordinaten können sich bei einem freien System nur auf die relative Lage der Massen des Systems beziehen, weil überall im Raume bei gleicher relativer Lage der Massen zu einander der gleiche Bewegungsvorgang muss vorgehen können.

2) Der Werth von E muss für endliche Entfernungen der Massen und endliche Geschwindigkeiten ein endliches Minimum haben; sonst wäre der Arbeitsvorrath des Systems unendlich gross. Also muss für unendlich wachsende $q_{\mathfrak{a}}$ der Werth von E eine nothwendig positive Grösse werden. Welche unzulässige Folgerungen aus der gegentheiligen Annahme fliessen, habe ich für die elektrodynamische Theorie von Herrn *W. Weber* zu zeigen gesucht *).

Aus der Gleichung (4.) ergiebt sich zunächst leicht, dass, wenn H als eine Summe von homogenen ganzen Functionen der $q_{\mathfrak{a}}$ verschiedenen Grades dargestellt werden kann, dasselbe für E der Fall ist. Bezeichnen wir eine homogene Function n^{ten} Grades der $q_{\mathfrak{a}}$ mit $P_{\mathfrak{n}}$ und ist:

$$(7^a.)\qquad H = \sum_{\mathfrak{n}}[P_{\mathfrak{n}}],$$

so ist:

$$(7^b.)\qquad E = \sum_{\mathfrak{n}}[(1-\mathfrak{n}).P_{\mathfrak{n}}],$$

oder:

$$E = P_0 - P_2 - 2P_3 \text{ etc.}$$

Die Glieder ersten Grades P_1 fallen im Werthe von E weg, P_0 ent-

*) Dieses Journal Bd. 72, S. 85, § 4 bis § 7; Bd. 75, S. 35—62. — *Helmholtz* gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen Bd. I, S. 684.

spricht der potentiellen, von der Bewegung unabhängigen Energie, die wir oben mit F bezeichnet haben, P_2 dem $(-L)$. Höhere Glieder kommen in den Problemen für die Mechanik wägbarer Körper nur in den durch Elimination gewisser Coordinaten p_c veränderten Fällen vor.

Uebrigens lässt sich die gestellte Aufgabe auch lösen, ***wenn E eine ganz willkürliche Function der Geschwindigkeiten ist,*** die nur der schon oben gestellten Bedingung genügt, dass alle $\frac{\partial E}{\partial q_a}$ nach Gleichung (7.) sich dem Werthe Null nähern, wenn die $q_a = 0$ werden. Es wird für unseren Zweck ausreichen die oben gemachte Bestimmung festzuhalten, wonach die Coefficienten in dem Gleichungssystem (7.) endlich sein sollen, obgleich auch Fälle zulässig wären, wo jene Coefficienten integrirbar unendlich würden.

Wir wollen zur Lösung unserer Aufgabe statt der q_a in den Werthen des E und des H setzen:

$$(8.) \qquad q_a = x . \mathfrak{q}_a,$$

und unter x einen veränderlichen Factor verstehen, bei dessen Aenderung sich zwar die absoluten Werthe der q_a, nicht aber ihre gegenseitigen Verhältnisse ändern.

Die Functionen H und E bezeichne ich, nachdem diese Substitution gemacht ist, mit H' und E'. Dann ist:

$$(8^a.) \qquad \frac{\partial E'}{\partial x} = \sum_a \left[\mathfrak{q}_a \cdot \frac{\partial E}{\partial q_a}\right].$$

Da nach der bei Gleichung (7.) gemachten Festsetzung alle $\frac{\partial E}{\partial q_a} = 0$, wenn alle $q_a = 0$, dies aber eintrifft nach Gleichung (8.), wenn $x = 0$, so ergiebt sich, dass:

$$(8^b.) \qquad \frac{\partial E'}{\partial x} = 0, \quad \text{wenn} \quad x = 0,$$

und zwar wird das $\frac{\partial E'}{\partial x}$ für sehr kleine x dem x selbst nach unseren Annahmen proportional werden müssen, wenn nicht einer höheren Potenz des x. Andererseits haben wir:

$$\frac{\partial H'}{\partial x} = \sum_a \left[\mathfrak{q}_a \cdot \frac{\partial H}{\partial q_a}\right],$$

also:

$$(8^c.) \qquad x \cdot \frac{\partial H'}{\partial x} = \sum_a \left[q_a \cdot \frac{\partial H}{\partial q_a}\right] = -E' + H',$$

und daher:

$$(8^d.) \qquad \frac{\partial E'}{\partial x} = -x \cdot \frac{\partial^2 H'}{\partial x^2}.$$

Wenn für die Differentialgleichung (8^c.):

$$(8^c.) \quad E' = H' - x \cdot \frac{\partial H'}{\partial x}$$

noch eine zweite Lösung existirt, die wir mit H'' bezeichnen wollen, so ist:

$$0 = H' - H'' - x \cdot \frac{\partial}{\partial x}[H' - H''],$$

d. h.

$$\log(H' - H'') = \log x + \log C$$

oder:

$$H' - H'' = x.C,$$

worin C eine Function der q_α sein kann. Dieselbe kann aber nur homogen ersten Grades sein, wenn $(H' - H'')$ auch als Function der q_α, die von x frei ist, soll dargestellt werden können.

Nun brauchen wir nur noch ein particuläres Integral der Gleichung (8^c.) zu finden.

Ein solches erhalten wir, wenn wir zunächst die Gleichung (8^c.) für $x = 0$ schreiben:

$$E_0 = H_0,$$

und diese von (8^c.) abziehen:

$$(E' - E_0) = (H' - H_0) - x \cdot \frac{\partial}{\partial x}[H' - H_0].$$

Durch x^2 dividirt, giebt dies:

$$-\frac{1}{x^2} \cdot (E' - E_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{H' - H_0}{x}\right].$$

Nach den zu (8^b.) gemachten Erörterungen ist die links stehende Grösse auch für $x = 0$ endlich, und wir erhalten also durch Integration zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$:

$$(8^f.) \quad H' - H_0 = -\int_0^1 \frac{E' - E_0}{x^2} \cdot dx + H_1,$$

worin die Integrationsconstante H_1, wie bemerkt, irgend welche homogene Function ersten Grades der q_α sein kann.

Es ist also E eindeutig mittels der Gleichung (4.) aus H abzuleiten, während bei der Herleitung von H aus E die hinzuzufügende Function H_1, die den „verborgenen" Bewegungen entspricht, unbestimmt bleibt. Ob solche Glieder ersten Grades sich einmischen, wird bei speciellen Aufgaben meistens aus den Bedingungen, unter denen die Bewegung rückläufig vor sich gehen kann, zu ermitteln sein.

Wenn man also bei dem betreffenden Probleme weiss, welche physikalischen Grössen im Werthe von E als Coordinaten, und welche als Geschwindigkeiten zu behandeln sind, so kann man der Regel nach die hier gestellte Aufgabe lösen. Aber es kommen auch gegentheilige Fälle vor, wo die Entscheidung über die genannte Frage unsicher erscheint.

§ 4.

Die allgemeinen Eigenthümlichkeiten der Kräfte bewegter Systeme.

Es ist bekannt, dass die nach aussen wirkenden Kräfte *ruhender Systeme,* die dem Gesetz der Constanz der Energie genügen, gewisse gesetzmässige Beziehungen zu einander zeigen, die sich in den Gleichungen:

$$\frac{\partial P_{\mathfrak{a}}}{\partial p_{\mathfrak{b}}} = \frac{\partial P_{\mathfrak{b}}}{\partial p_{\mathfrak{a}}}$$

aussprechen, und dass, wenn diese Gleichungen erfüllt sind, sich der Werth der potentiellen Energie finden lässt.

Ebenso lassen sich auch *für bewegte Systeme,* welche dem Minimalsatze der kinetischen Energie unterliegen, ähnliche Beziehungen aufstellen, welche sich unmittelbar aus *Lagrange*s Ausdrücken für die Kräfte ergeben. Diese sind dabei nicht bloss, wie in den ruhenden Systemen, als Functionen der Coordinaten $p_{\mathfrak{a}}$, sondern auch als solche der Geschwindigkeiten $q_{\mathfrak{a}}$ und der Beschleunigungen:

$$(9.)\qquad q'_{\mathfrak{a}} = \frac{dq_{\mathfrak{a}}}{dt}$$

aufzufassen. Gleichung (1^c.):

$$(1^c.)\qquad P_{\mathfrak{a}} = -\frac{\partial H}{\partial p_{\mathfrak{a}}} + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{a}}}\right]$$

ergiebt unmittelbar:

$$P_{\mathfrak{a}} = -\frac{\partial H}{\partial p_{\mathfrak{a}}} + \sum_{\mathfrak{b}}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial q_{\mathfrak{a}}.\partial p_{\mathfrak{b}}}\cdot q_{\mathfrak{b}}\right] + \sum_{\mathfrak{b}}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial q_{\mathfrak{a}}.\partial q_{\mathfrak{b}}}\cdot q'_{\mathfrak{b}}\right].$$

A. Kräfte und Beschleunigungen.

Wie man sieht, sind, in dieser Form dargestellt, die Kräfte lineare Functionen der Beschleunigungen. Der Coefficient des $q'_{\mathfrak{b}}$ im Werthe der Kraft $P_{\mathfrak{a}}$ kann also geschrieben werden:

$$(9^a.)\qquad \frac{\partial P_{\mathfrak{a}}}{\partial q'_{\mathfrak{b}}} = \frac{\partial^2 H}{\partial q_{\mathfrak{a}}.\partial q_{\mathfrak{b}}} = \frac{\partial P_{\mathfrak{b}}}{\partial q'_{\mathfrak{a}}},$$

d. h. also: *Wenn die Beschleunigung $q'_{\mathfrak{b}}$ die Kraft $P_{\mathfrak{a}}$ um einen gewissen Be-*

trag grösser macht, so macht die gleich grosse Beschleunigung $q'_{\mathfrak{a}}$ die Kraft $P_{\mathfrak{b}}$ um den gleichen Betrag grösser. Ob ein solcher Einfluss in einem gegebenen Falle vorkommt oder nicht, hängt davon ab, ob die Grösse $\frac{\partial^2 H}{\partial q_{\mathfrak{a}} . \partial q_{\mathfrak{b}}}$ verschieden von Null oder gleich Null ist. Null ist die genannte Grösse zum Beispiel für die Bewegungen eines vollkommen freien Systems wägbarer Massenpunkte, wenn sie auf rechtwinkelige Coordinaten bezogen werden. Jede einzelne Kraftcomponente wirkt beschleunigend nur in Richtung derjenigen Coordinate, auf die sie sich bezieht.

Bei dem Kreisel im Beispiel I des § 2 haben wir:

$$\frac{\partial A}{\partial \beta''} = \frac{\partial B}{\partial \alpha''} = 0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial \gamma''} = \frac{\partial C}{\partial \alpha''} = -\mathfrak{A} . \cos\beta,$$

$$\frac{\partial C}{\partial \beta''} = \frac{\partial B}{\partial \gamma''} = 0,$$

worin α'', β'', γ'' die Beschleunigungen der Winkel α, β, γ bezeichnen.

Im Beispiel II für die elektrodynamischen Wirkungen ist:

$$\frac{\partial P_{\mathfrak{a}}}{\partial J'_{\mathfrak{b}}} = \frac{\partial \mathfrak{E}_{\mathfrak{b}}}{\partial q'_{\mathfrak{a}}} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_{\mathfrak{b}}}{\partial J'_{\mathfrak{c}}} = \frac{\partial \mathfrak{E}_{\mathfrak{c}}}{\partial J'_{\mathfrak{b}}}.$$

Die erstere Gleichung sagt aus: Da die ponderomotorische Kraft der Stromkreise nicht von der *Beschleunigung* der Ströme abhängt, so kann auch die inducirte elektromotorische Kraft nicht von der *Beschleunigung* der Stromleiter abhängen (wohl aber in beiden Fällen von den Geschwindigkeiten). Die letztere Gleichung sagt aus, dass, wenn bei der gegebenen Lage und Form der Stromkreise *b* und *c* Steigerung der in *b* wirkenden Kraft $\mathfrak{E}_{\mathfrak{b}}$ durch elektrodynamische Induction $J_{\mathfrak{c}}$ ansteigen macht, die gleiche Steigerung der Kraft $\mathfrak{E}_{\mathfrak{c}}$ dasselbe für $J_{\mathfrak{b}}$ bewirkt.

Im Beispiel III für die thermodynamischen Wirkungen fallen diese Wechselbeziehungen fort, da die lebendige Kraft L der schweren Massen nicht von der Temperatur abhängt, und also Producte $\vartheta . q_{\mathfrak{a}}$ im Werthe von $(\mathfrak{F} - L) = H$ nicht vorkommen.

B. Beziehungen zwischen Kräften und Geschwindigkeiten.

Aus den Gleichungen (7.) folgt weiter:

$$\frac{\partial P_{\mathfrak{a}}}{\partial q_{\mathfrak{b}}} = -\frac{\partial^2 H}{\partial p_{\mathfrak{a}} . \partial q_{\mathfrak{b}}} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_{\mathfrak{b}} . \partial q_{\mathfrak{a}}} + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial q_{\mathfrak{a}} . \partial q_{\mathfrak{b}}}\right].$$

Also:

$$(9^b.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial P_a}{\partial q_b}+\dfrac{\partial P_b}{\partial q_a}=2\cdot\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\partial^2 H}{\partial q_a.\partial q_b}\right] \\ \qquad\qquad\qquad =2\cdot\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\partial P_a}{\partial q'_b}\right]=2\cdot\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\partial P_b}{\partial q'_a}\right]. \end{cases}$$

In der sehr grossen Zahl von Fällen, wo:

$$(9^c.)\quad \frac{\partial P_a}{\partial q'_b}=\frac{\partial P_b}{\partial q'_a}=\frac{\partial^2 H}{\partial q_a.\partial q_b}=\text{Const.},$$

folgt daraus:

$$(9^d.)\quad \frac{\partial P_a}{\partial q_b}=-\frac{\partial P_b}{\partial q_a},$$

d. h. ***wenn Steigerung der Geschwindigkeit*** q_b ***bei gleichbleibender Lage und gleichbleibenden Beschleunigungen die Kraft*** P_b ***wachsen macht, so wird entsprechende Steigerung von*** q_b ***die Kraft*** P_a ***verringern.*** In den zu A angeführten Beispielen sind schon die Fälle bemerkt, in denen die Vorbedingung ($9^c.$) erfüllt ist. Sie zeigen am besten die ausgedehnte Bedeutung dieses Satzes, aber auch dass man die Erfüllung der Vorbedingung controlliren muss, ehe man statt des allgemein richtigen Satzes ($9^b.$) den einfacheren ($9^d.$) anwendet.

Beispiel I. Wenn eine Kraft, welche den Winkel β vergrössert, d. h. die Axe des Kreisels von der Verticale zu entfernen strebt, grössere Präcessionsbewegung α unterhält, so wird eine Kraft, welche die Präcessionsbewegung zu beschleunigen strebt, die Axe der Verticallinie zuführen.

Beispiel II. Elektrodynamisches Inductionsgesetz nach Lenz. Die Bewegung zweier Stromkreise gegen einander, welche durch die ponderomotorischen elektrodynamischen Kräfte unterstützt wird, bringt elektromotorische inducirte Kräfte hervor, die den Strömen entgegenwirken.

Die entsprechende Beziehung gilt für Bewegung eines Magneten gegen einen Stromleiter.

Beispiel III. Thermodynamisch. ***Wenn Steigerung der Temperatur den Druck eines Körpersystems steigert, wird Compression desselben die Temperatur steigern.***

Für diesen Fall können wir die Gleichung ($9^d.$) nach Multiplication beider Seiten mit η, mit Beziehung auf die Bezeichnungen und Erläuterungen von § 2 zu diesem Beispiel, schreiben:

$$(9^e.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial q_\alpha}[P_{(\eta)}.\eta] = -\dfrac{\partial P_\alpha}{\partial \log \eta}, \\ \text{oder nach } (6^f.): \\ \dfrac{\partial}{\partial q_\alpha}\left[\dfrac{dQ}{dt}\right] = +\dfrac{\partial P_\alpha}{\partial \log \eta}. \end{cases}$$

Nun ist nach (6^c.):

$$\frac{dQ}{dt} = \eta\cdot\frac{ds}{dt} = \eta\cdot\sum_\alpha\left[\frac{\partial s}{\partial p_\alpha}\cdot q_\alpha\right] + \eta\cdot\frac{\partial s}{\partial \eta}\cdot\frac{d\eta}{dt}.$$

Also ist:

$$(9^f.)\quad \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left[\frac{dQ}{dt}\right] = \eta\cdot\frac{\partial s}{\partial p_\alpha}.$$

Nach (6^d.) war:

$$P_\alpha = -\frac{\partial}{\partial p_\alpha}[H-L] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\right],$$

und da L unabhängig von η, so ist:

$$(9^g.)\quad \frac{\partial P_\alpha}{\partial \eta} = -\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha . \partial \eta} = \frac{\partial s}{\partial p_\alpha},$$

wodurch in Verbindung mit (9^f.) die Richtigkeit der Gleichung (9^e.) bestätigt wird, und somit auch die Anwendbarkeit unseres allgemeinen Satzes. Dabei könnte jede beliebige unter den Functionen η der Gleichung (6^b.) als Geschwindigkeit angesehen werden, nur muss dann entsprechend $\frac{d\eta}{dt}$ als Beschleunigung gelten. Auch die Temperatur ϑ gehört in die Reihe der integrirenden Nenner η, so dass also auch:

$$\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left[\frac{dQ}{dt}\right] = \frac{\partial P_\alpha}{\partial \log \vartheta}.$$

Da bei dieser Anwendung $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ sein soll, so ist $\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left[\frac{dQ}{dt}\right]$ die Geschwindigkeit, mit welcher Wärme eintritt, wenn der Parameter p_α mit der Geschwindigkeit q_α wächst, während ϑ constant bleibt. Dies giebt die oben gegebene Formulirung des Satzes.

Dieselben Betrachtungen lassen sich auch auf die reversiblen Theile thermoelektrischer und elektrochemischer Vorgänge anwenden.

Peltiers Phänomen. Wenn Erwärmung einer Stelle einer geschlossenen Leitung einen elektrischen Strom hervorbringt, so wird derselbe Strom dort Kälte entwickeln (abgesehen von der Wärmeentwickelung durch den Leitungswiderstand).

Elektrochemisch: Wenn Erwärmung eines constanten galvanischen Ele-

ments die elektromotorische Kraft steigert, wird der Strom in demselben Wärme latent machen *).

Die obigen Formeln zeigen aber nicht nur den Sinn der Aenderung an, sondern geben auch gleichzeitig Aufschluss über die Quantitäten, um die es sich handelt.

C. Beziehungen zwischen den Kräften und Coordinaten.

Endlich folgt aus Gleichung (9.):

$$(9^h.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial P_a}{\partial p_b} - \dfrac{\partial P_b}{\partial p_a} = \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\partial^2 H}{\partial q_a . \partial p_b} - \dfrac{\partial^2 H}{\partial q_b . \partial p_a}\right] \\ \qquad\qquad = \frac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\partial P_a}{\partial q_b} - \dfrac{\partial P_b}{\partial q_a}\right]. \end{cases}$$

Für den Fall der Ruhe, wo die rechte Seite Null wird, ergiebt sich hieraus das allgemeine Gesetz aller conservativen Kräfte:

$$(9^i.)\quad \frac{\partial P_a}{\partial p_b} = \frac{\partial P_b}{\partial p_a}.$$

Dieselbe Bedingung ist aber auch erfüllt, wenn zeitweilig die Bewegung so vor sich geht, dass die rechte Seite von Gleichung (9^h.) gleich Null ist. So können wir das Gesetz (9^i.) auch anwenden um für die Kräfte warmer Körper, beziehlich monocyklischer Systeme eine Kräftefunction zu bilden, falls nur während der Bewegung eine der Functionen η der Gleichung (6^b.) constant bleibt. Wenn wir dabei die lebendige Kraft der geordneten Bewegungen L vernachlässigen, ist nach Gleichung (6^d.) einfach:

$$P_a = -\frac{\partial H}{\partial p_a},$$

also unsre Gleichung (9^i.) erfüllt. In diesem Falle sind wir aber fast immer, wenn wir uns mit der Mechanik irdischer Körper beschäftigen, die mehr oder weniger Wärme enthalten. Trotzdem die Körper innerlich heftig bewegt sind, können wir z. B. für die Theorie ihrer elastischen Wirkungen vermöge des hier aufgewiesenen Gesetzes Kräftefunctionen der Molecularkräfte bilden und anwenden, als ob ihr Gleichgewichtszustand der eines stabilen Gleichgewichts in absoluter Ruhe wäre.

Ich will hier noch bemerken, dass die in den Gleichungen:

$$(9^a.)\quad \frac{\partial P_a}{\partial q'_b} = \frac{\partial P_b}{\partial q'_a},$$

*) Siehe meine Abhandlungen zur Thermodynamik chemischer Vorgänge. Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1882, 2. Febr., S. 24—26; 1882, 27. Juli, S. 825—835.

$$(9^b.)\quad \frac{\partial P_a}{\partial q_b} + \frac{\partial P_b}{\partial q_a} = 2\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial P_b}{\partial q'_a}\right],$$

$$(9^h.)\quad \frac{\partial P_a}{\partial p_b} - \frac{\partial P_b}{\partial p_a} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial P_a}{\partial q_b} - \frac{\partial P_b}{\partial q_a}\right]$$

ausgesprochenen gegenseitigen Beziehungen der Kräfte in Verbindung mit dem Umstande, dass die P_a lineare Functionen der q'_a sind, was man schreiben kann:

$$(9^k.)\quad \frac{\partial^2 P_a}{\partial q'_b . \partial q'_c} = 0,$$

und mit den früher gegebenen Definitionen:

$$(1.)\quad q_a = \frac{dp_a}{dt},$$

$$(9.)\quad q'_a = \frac{dq_a}{dt}$$

genügend sind, um nachzuweisen, dass ein *kinetisches Potential* besteht, dass die Kräfte P_a in der von *Lagrange* angegebenen Weise durch die Differentialquotienten desselben ausgedrückt und dass die Bewegungsgleichungen auf das Princip der kleinsten Wirkung reducirt werden können.

Die hier zusammengestellten Beziehungen der Kräfte enthalten also eine vollständige Charakteristik derjenigen Bewegungen, welche dem Princip der kleinsten Wirkung unterliegen.

Der Beweis für diesen Satz lässt sich mit den bis jetzt vorbereiteten Hülfsmitteln der Analysis für den Fall, dass nicht mehr als drei Coordinaten p_a vorkommen, unmittelbar geben. Dazu werden aber Sätze aus der Theorie der Potentialfunctionen im Raume von drei Dimensionen gebraucht. Will man auf mehr Coordinaten p_a übergehen, so braucht man die entsprechenden Sätze für eine grössere Zahl von Coordinaten. Dieselben lassen sich bilden, soweit sie für unseren Beweis nöthig sind. Da dies aber eine Sache von selbständigem Interesse ist, so schien es mir nicht passend sie hier nur nebensächlich abzuthun, und ich ziehe deshalb vor, den genannten Beweis bei einer andern Gelegenheit zu geben.

Andere allgemeine Eigenthümlichkeiten der unter dem Principe der kleinsten Wirkung ablaufenden Bewegungen werden in den nächsten Paragraphen beschrieben werden.