JOURNAL DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

P. DUHEM

Commentaire aux principes de la Thermodynamique (deuxième Partie)

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 9 (1893), p. 293-473.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1893_4_9_A6_0>

Commentaire aux principes de la Thermodynamique (¹);

Par M. P. DUHEM.

DEUXIÈME PARTIE.

LE PRINCIPE DE SADI CARNOT ET DE R. CLAUSIUS.

CHAPITRE I.

LE CYCLE DE CARNOT ET LES MODIFICATIONS RÉVERSIBLES.

1. *Les modifications virtuelles.* — Revenons d'abord à la notion de modification virtuelle pour la préciser mieux que nous ne l'avons fait au cours de la première Partie.

Imaginons un système qui se trouve dans un état donné, ainsi que les corps étrangers à ce système. On connaîtra l'état de ce système, son mouvement et les actions extérieures qui agissent sur lui, si l'on connaît les valeurs des paramètres

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad a, \quad b, \quad \ldots, \quad l$$

et des quantités

$$\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\beta}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{d\lambda}{dt}.$$

(¹) Voir t. VIII, p. 269.

Pour connaître les forces d'inertie qui agissent sur le système et les coefficients calorifiques du système, il faut, en outre, connaître la valeur de chacune des quantités

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad \frac{d^2\beta}{dt^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^2\lambda}{dt^2}.$$

Lorqu'on envisage non plus une modification réelle d'un système, mais une modification virtuelle, l'ordre dans lequel se succèdent les divers états du système n'existe que dans notre entendement et non point dans le temps; les quantités $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ ne peuvent plus être considérées comme des fonctions du temps. On ne peut donc plus parler des quantités

$$\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\beta}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{d\lambda}{dt},$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad \frac{d^2\beta}{dt^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^2\lambda}{dt^2}.$$

Il semble donc qu'il ne soit plus permis de parler de forces d'inertie ou de coefficients calorifiques pour un système qui subit une modification virtuelle.

En réalité, on peut conserver à ces mots une signification.

Dans les formules qui définissent les forces d'inertie et les coefficients calorifiques d'un système en voie de transformation réelle, remplaçons les quantités

$$\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\beta}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{d\lambda}{dt},$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad \frac{d^2\beta}{dt^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^2\lambda}{dt^2}$$

par des grandeurs

$$u, \quad v, \quad \ldots, \quad w,$$

$$u', \quad v', \quad \ldots, \quad w'$$

quelconques, assujetties seulement aux restrictions que la définition même du système peut imposer aux quantités

$$\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\beta}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{d\lambda}{dt},$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad \frac{d^2\beta}{dt^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^2\lambda}{dt^2};$$

nous aurons de nouvelles expressions qui représenteront, par définition, les forces d'inertie et les coefficients calorifiques du système au cours d'une modification virtuelle; nous pourrons alors parler du *travail effectué par les forces d'inertie* et de la *quantité de chaleur dégagée* par le système au cours d'une modification virtuelle.

Les quantités $u, v, \ldots, w$ doivent varier d'une manière continue au cours de la transformation virtuelle; au contraire, les quantités u', v', ..., w' peuvent présenter des discontinuités.

2. *Des cycles.* — Rappelons la définition d'un cycle fermé, déjà indiquée dans la première Partie de ce travail (Chap. II, n° **1**).

Imaginons qu'un système parte d'un état initial défini par des valeurs

$$\alpha_0, \quad \beta_0, \quad \ldots, \quad \lambda_0, \quad a_0, \quad b_0, \quad \ldots, \quad l_0$$

des paramètres

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad a, \quad b, \quad \ldots, \quad l;$$

son mouvement initial est défini par les valeurs

$$u_0, \quad v_0, \quad \ldots, \quad w_0$$

des vitesses

$$u, \quad v, \quad \ldots, \quad w.$$

Ce système subit une série de modifications *réelles* ou *virtuelles* durant lesquelles les paramètres

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad a, \quad b, \quad \ldots, \quad l$$

et les vitesses

$$u, \quad v, \quad \ldots, \quad w$$

varient d'une manière continue.

Il parvient à un état final dans lequel les quantités variables

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad a, \quad b, \quad \ldots, \quad l, \quad u, \quad v, \quad \ldots, \quad w$$

ont des valeurs

$$\alpha_1, \quad \beta_1, \quad \ldots, \quad \lambda_1, \quad a_1, \quad b_1, \quad \ldots, \quad l_1, \quad u_1, \quad v_1, \quad \ldots, \quad w_1.$$

Si les quantités

$$\alpha_1, \quad \beta_1, \quad \ldots, \quad \lambda_1, \quad a_1, \quad b_1, \quad \ldots, \quad l_1, \quad u_1, \quad v_1, \quad \ldots, \quad w_1$$

sont respectivement égales aux quantités

$$\alpha_0, \quad \beta_0, \quad \ldots, \quad \lambda_0, \quad a_0, \quad b_0, \quad \ldots, \quad l_0, \quad u_0, \quad v_0, \quad \ldots, \quad w_0,$$

on dit que le système a décrit un *cycle fermé* ou simplement un *cycle*.

Si toutes les modifications qui composent un cycle sont des modifications réelles, le cycle est lui-même *réel;* si toutes les modifications qui composent un cycle, ou seulement une partie d'entre elles, sont virtuelles, le cycle est lui-même *virtuel.*

3. *Un cycle réel peut se reproduire indéfiniment.* — C'est ici le lieu d'énoncer une hypothèse qui joue un rôle fondamental dans la constitution de la Thermodynamique :

Hypothèse. — *Soit* S *un système et soit* Σ *l'ensemble des corps étrangers à ce système. Imaginons deux intervalles de temps égaux, l'un compris entre les instants* t_0 *et* t_1, *l'autre compris entre les instants* t'_0 *et* t'_1. *Supposons les conditions suivantes réalisées :*

1° *En deux instants correspondants quelconques des intervalles* (t_0, t_1) *et* (t'_0, t'_1), *le système* Σ *est dans le même état.*

2° *Aux instants* t_0 *et* t'_0, *le système* S *est dans le même état et animé des mêmes vitesses.*

Nous admettrons que, dans ces conditions, en deux instants correspondants quelconques des intervalles (t_0, t_1) *et* (t'_0, t'_1), *le système* S *est dans le même état.*

Cette hypothèse peut s'énoncer sous une forme moins précise peut-être, mais plus brève, en disant que :

La modification subie par le système S *dans l'intervalle de temps* (t_0, t_1) *est déterminée si l'on connaît : 1° l'état des corps extérieurs* Σ *à tout instant de l'intervalle* (t_0, t_1); *2° l'état et les vitesses du système* S *à l'instant* t_0.

Nous ajouterons qu'à l'instant t_0 l'état des systèmes Σ et S peut être défini seulement aux variables près qui fixent la position absolue dans l'espace de l'ensemble de ces deux systèmes.

Considérons un cycle fermé réellement, décrit par le système S. Pendant le parcours de ce cycle fermé, les corps extérieurs Σ ont passé par une suite d'états. A la fin de ce cycle, le système S a repris le même état et les mêmes vitesses qu'au début. Lorsque ce cycle a achevé d'être décrit, faisons reprendre de nouveau aux corps Σ la suite d'états par laquelle ils ont passé durant le parcours de ce cycle. D'après l'hypothèse précédente, le système S décrira de nouveau le cycle.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Un cycle fermé réel peut être indéfiniment reproduit identique à lui-même POURVU QUE L'ON PUISSE DISPOSER ARBITRAIREMENT DES CORPS EXTÉRIEURS AU SYSTÈME.

4. *Modifications adiabatiques, exothermiques, endothermiques.* — Considérons un système qui subit une modification infiniment petite, réelle ou virtuelle, sous l'influence de certains autres systèmes. Par l'effet de cette transformation, le système dégage une quantité de chaleur dQ; les forces d'inertie (I^{re} Partie, Chap. III, n° 3) effectuent un travail $d\tau$. Si la quantité

$$d\mathfrak{Q} = dQ - \frac{1}{E}\,d\tau \tag{1}$$

est égale à o, *la modification infiniment petite considérée est dite adiabatique.*

Une modification finie est dite adiabatique si toutes les modifications infiniment petites qui la composent sont adiabatiques.

Posons

$$\mathfrak{Q} = Q - \frac{\tau}{E}, \tag{2}$$

Q étant la quantité de chaleur dégagée dans une modification et τ le travail des forces d'inertie durant cette modification.

Nous donnerons à la quantité $\mathfrak{Q}$ le nom d'*effet calorifique total de la modification.*

Nous voyons sans peine que l'effet calorifique total d'une modification adiabatique est toujours égal à o. La réciproque de cette proposition n'est pas exacte. L'effet calorifique total d'une modification finie peut être égal à o, sans que l'effet calorifique de chacune des modifications élémentaires qui composent cette modification finie soit égal à o, et, partant, sans que la modification finie soit adiabatique.

Selon que l'effet calorifique total d'une modification sera *positif, nul* ou *négatif*, la modification sera dite *exothermique, athermique* ou *endothermique*.

Ce que nous venons de dire s'applique aussi bien aux modifications virtuelles qu'aux modifications réelles; pour une modification réelle infiniment petite, nous avons

$$d\tau = -\, d\mathfrak{T},$$

$\mathfrak{T}$ étant la force vive du système. L'effet calorifique total d'une modification finie et *réelle* est donc défini par l'égalité

$$\mathfrak{Q} = Q + \frac{1}{E}(\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_0), \tag{2 bis}$$

$\mathfrak{T}_0$ étant la valeur de la force vive du système au début de la modification et $\mathfrak{T}_1$ la valeur de la même force vive à la fin de la modification.

Considérons un cycle.

L'effet calorifique de chacune des modifications élémentaires qui constituent ce cycle est défini par l'égalité

$$d\mathfrak{Q} = dQ - \frac{1}{E}\, d\tau,$$

qui peut encore s'écrire [Ire Partie, Chap. III, *Égalité* (16)]

$$\mathrm{E}\,d\mathfrak{Q} = d\mathfrak{S} - \mathrm{E}\,d\mathrm{U}.$$

En intégrant cette égalité pour le cycle tout entier, et en remarquant que l'énergie interne U du système reprend, à la fin du cycle, la même valeur qu'au commencement, nous trouvons

$$(3) \qquad \mathrm{E}\mathfrak{Q} = \mathfrak{T}.$$

L'effet calorifique total d'un cycle fermé, réel ou virtuel, est équivalent au travail total effectué, durant le parcours du cycle, par toutes les actions extérieures qui agissent sur le système.

Ce théorème nous sera utile au Chapitre suivant.

5. *Modifications isothermiques. Cycle de Carnot.* — On peut fort bien imaginer qu'un système, en chacun des états qu'il traverse au cours d'une modification, ait, en tous ses points, la même température $\mathfrak{S}$, lue sur un thermomètre quelconque; cette température peut d'ailleurs varier de l'un des états traversés dans cette modification à l'état suivant.

Lorsque la température est la même non seulement en tous les points du système pris dans chacun des états dont la suite constitue une modification réelle ou virtuelle, mais encore dans tous les états de cette suite, la modification est dite *isothermique.*

Imaginons un cycle soumis aux conditions suivantes :

1° Ce cycle est composé exclusivement de modifications adiabatiques et de modifications isothermiques;

2° Les modifications isothermiques qui figurent dans ce cycle sont toutes relatives à deux températures différentes, $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}'$ étant supérieur à $\mathfrak{S}$.

Un tel cycle se nomme *cycle de Carnot décrit entre les températures $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$.*

D'après cette définition, un cycle de Carnot peut être réel ou virtuel.

Si un même système décrit successivement plusieurs cycles de Carnot, identiques ou non, mais entre les mêmes températures ϑ et ϑ', il est évident, d'après la définition précédente, que l'ensemble de ces cycles peut être regardé comme un cycle de Carnot unique, décrit entre les températures ϑ et ϑ'.

Soient $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ces cycles de Carnot successifs. Soit Γ le cycle de Carnot formé par leur ensemble.

Soient $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots, \mathfrak{Q}_n$ l'effet calorifique total des modifications produites à la température ϑ dans chacun des cycles $C_1, C_2, \ldots, C_n$; soit χ l'effet calorifique total des modifications produites à la température ϑ dans le cycle Γ.

Soient, de même, $\mathfrak{Q}'_1, \mathfrak{Q}'_2, \ldots, \mathfrak{Q}'_n$ l'effet calorifique total des modifications produites à la température ϑ' dans chacun des cycles C'_1, $C'_2, \ldots, C'_n$; soit χ' l'effet calorifique total des modifications produites à la température ϑ' dans le cycle Γ.

Nous aurons évidemment

$$(4) \qquad \begin{cases} \chi = \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2 + \ldots + \mathfrak{Q}_n, \\ \chi' = \mathfrak{Q}'_1 + \mathfrak{Q}'_2 + \ldots + \mathfrak{Q}'_n. \end{cases}$$

6. *Modifications simultanées indépendantes. Généralisation du cycle de Carnot.* — Soit un système complexe σ, formé par un certain système S et par des corps Σ étrangers à ce système. Ce système σ est isolé dans l'espace. Pendant le temps compris entre les instants t_0, t_1, le système S éprouve une certaine modification M.

Soit, de même, un système complexe σ', formé par un certain système S' et par des corps Σ' étrangers à ce système. Ce système σ' est isolé dans l'espace. Pendant le temps compris entre les instants t'_0, t'_1, le système S' éprouve une modification M'.

Supposons que l'on ait

$$t_1 - t_0 = t'_1 - t'_0.$$

Imaginons maintenant qu'à un instant quelconque τ_0, on place, dans l'espace, le système σ dans l'état et avec les vitesses qu'il présentait à l'instant t_0, le système σ' dans l'état et avec les vitesses qu'il présentait à l'instant t_0, ces deux systèmes σ, σ' étant infiniment éloignés l'un de l'autre.

Nous admettrons l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE. — *Chacun des deux systèmes σ, σ' se modifiera comme s'il était isolé dans l'espace.*

Si l'on combine cette hypothèse avec l'hypothèse énoncée au n° **3**, on voit sans peine que, *dans un intervalle de temps*

$$\tau_1 - \tau_0 = t_1 - t_0 = t'_1 - t'_0,$$

le système S *éprouvera précisément la modification* M *et le système* S' *la modification* M'.

Nous dirons alors que *les modifications* M *et* M' *sont effectuées d'une manière simultanée et indépendante.*

On voit sans peine, en vertu des principes posés dans la première Partie de ce travail, que la quantité de chaleur dégagée par le système complexe (S, S') pendant l'intervalle de temps (τ_0, τ_1) est la somme de la quantité de chaleur dégagée par le système S subissant, en l'absence du sytème σ', la modification M, et de la quantité de chaleur dégagée par le système S' subissant, en l'absence du système σ, la modification M'. Des propositions analogues peuvent s'énoncer du travail effectué par les actions que le système (S, S') subit de la part des corps étrangers (Σ, Σ'); du travail des forces d'inertie appliquées au système (S, S'); enfin de l'effet calorifique total de l'ensemble des deux modifications M, M'.

Si deux cycles fermés C, C_1 sont décrits simultanément et d'une manière indépendante par deux systèmes S et S_1, le système (S, S_1) décrit évidemment un cycle fermé.

Supposons que les deux cycles C et C_1 soient deux cycles de Carnot décrits entre les mêmes températures ϑ et ϑ'. Si l'isotherme décrite par le système S à la température ϑ et l'isotherme décrite par le système S_1 à la même température ϑ sont simultanées; si, de même, les isothermes que les systèmes S et S_1 décrivent à la température ϑ' sont simultanées, le système (S, S_1), lui aussi, décrira un cycle de Carnot entre les températures ϑ et ϑ'. En dehors de ce cas, le cycle fermé décrit par le système (S, S_1) ne sera pas, en général, un cycle de Carnot.

Néanmoins, *par une extension du mot cycle de Carnot, nous conviendrons de dire qu'un système complexe* (S, S_1) *décrit un cycle de Carnot* Γ *entre les températures* ϑ *et* ϑ', *si les deux systèmes infiniment éloignés* S, S_1, *dont il se compose, décrivent, entre les mêmes températures* ϑ, ϑ', *deux cycles de Carnot simultanés et indépendants* C, C_1.

Soient $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}_1$ les valeurs de l'effet calorifique total des modifications décrites à la température ϑ dans chacun des deux cycles C, C_1. Soient, de même, $\mathcal{Q}', \mathcal{Q}'_1$, les valeurs de l'effet calorifique total des modifications décrites à la température ϑ' dans chacun des deux cycles C, C_1.

Par définition, nous dirons que la quantité

$$\chi = \mathcal{Q} + \mathcal{Q}_1 \tag{5}$$

est l'effet calorifique total des modifications produites à la température ϑ dans le cycle Γ; et que la quantité

$$\chi' = \mathcal{Q}' + \mathcal{Q}'_1 \tag{5 bis}$$

est l'effet calorifique total des modifications produites à la température ϑ' dans le cycle Γ.

Naturellement, le nom de cycle de Carnot décrit entre les températures ϑ, ϑ' s'étendrait également à l'ensemble de n cycles de Carnot simultanés, indépendants, décrits entre les températures ϑ et ϑ'.

7. *Des modifications qui sont une suite d'états d'équilibre.* — Lorsqu'un système est en équilibre dans un certain état, il persiste indéfiniment dans cet état, il ne se transforme pas, il semble donc qu'on ne peut, sans contradiction, parler de *modification réelle formée par une suite d'états d'équilibre;* en réalité, on peut donner à ces mots un sens logique.

Un état du système est défini, rappelons-le, par la connaissance des quantités

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad a, \quad b, \quad \ldots, \quad l,$$
$$\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\beta}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{d\lambda}{dt}.$$

Considérons un système qui subit une transformation réelle. A un instant t de cette transformation, ce système est dans un état bien déterminé; les paramètres analogues à $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, a, b, \ldots, l$, qui définissent les propriétés des corps étrangers qui agissent sur le système, ont également des valeurs bien déterminées. Imaginons qu'à partir de l'instant t, on maintienne invariables ces dernières valeurs, en sorte que *les propriétés des corps étrangers au système demeurent indéfiniment ce qu'elles sont à l'instant t*. Si, par suite de cette opération, le système persiste, lui aussi, dans l'état qu'il présentait à l'instant t, nous dirons qu'à cet instant t, il était en équilibre sous l'action des corps étrangers en présence desquels il se trouvait.

Or il serait évidemment impossible que les valeurs prises par les quantités

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad a, \quad b, \quad \ldots, \quad l,$$
$$\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\beta}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{d\lambda}{dt},$$

à l'instant t conviennent encore à ces quantités pour tout instant postérieur à t, si l'on n'avait

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0, \qquad \frac{d\beta}{dt} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{d\lambda}{dt} = 0.$$

Ainsi, pour qu'un certain état d'un système qui subit une transformation réelle puisse être dit état d'équilibre de ce système, il est nécessaire, mais non suffisant, que toutes les vitesses des divers points du système soient nulles dans cet état.

De cette proposition se conclut cette autre :

Considérons un système qui subit une modification réelle; peut-il se faire que l'état présenté par ce système à chaque instant puisse être regardé comme susceptible de devenir un état d'équilibre du système sous l'action des corps étrangers en présence desquels il se trouve, si ces derniers conservaient indéfiniment les propriétés qu'ils possèdent au même instant? Pour cela, il est nécessaire, mais non suffisant, que l'on ait, pendant toute la durée de cette modification,

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0, \qquad \frac{d\beta}{dt} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{d\lambda}{dt} = 0,$$

ou, en d'autres termes,

$$\alpha = \text{const.}, \qquad \beta = \text{const.}, \qquad \ldots, \qquad \lambda = \text{const.}$$

Cette proposition peut s'énoncer abréviativement de la manière suivante :

Pour qu'une modification réelle soit une succession d'états d'équilibre, il est nécessaire, mais non suffisant, que tous les points du système gardent une position invariable dans l'espace pendant toute la durée de cette modification.

Or est-il absurde d'admettre l'existence d'une modification durant laquelle tous les points du système gardent une position invariable? Évidemment non; on est parfois amené, en Physique, à imaginer de semblables modifications. Prenons, par exemple, un récipient renfermant un mélange d'hydrogène et de chlore; la combinaison se produit; une modification, un changement d'état a lieu; cependant, on peut fort bien admettre que la matière qui remplissait chacun des éléments de volume du récipient au début de la combinaison est demeurée dans le même élément de volume pendant toute la durée de la modification.

Les réserves que nous venons de faire ne portent que sur les modifications *réelles;* au cours d'une modification *virtuelle,* les valeurs de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, ne peuvent être regardées comme des fonctions du temps, en sorte que le raisonnement précédent ne s'applique plus. Il est bien vrai que si une modification virtuelle est une suite d'états d'équilibre, on doit avoir, pendant toute la modification,

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad \ldots, \qquad w = 0;$$

mais, comme on n'a pas

$$u = \frac{d\alpha}{dt}, \quad v = \frac{d\beta}{dt}, \quad \dots, \quad w = \frac{d\lambda}{dt},$$

ces égalités n'empêchent nullement les quantités α, β, ..., λ, de changer de valeur au cours d'une telle modification.

D'ailleurs, il est évident qu'une succession quelconque, mais continue, d'états d'équilibre d'un système peut toujours être envisagée comme formant une modification virtuelle de ce système.

8. *Des modifications réversibles.* — Nous arrivons maintenant à l'une des notions les plus importantes et en même temps les plus délicates à définir de toute la Thermodynamique : la notion de *transformation réversible*.

Considérons, pour un même système, deux transformations réelles ou virtuelles S et S'_1, douées des propriétés suivantes :

1° Chacun des états E de la transformation S correspond à un et un seul état E_1 de la transformation S_1 ;

2° Durant les transformations S et S_1, le système parcourt dans le même ordre les états qui se correspondent ; en particulier, l'état initial de la transformation S correspond à l'état initial de la transformation S_1 ; l'état final de la transformation S correspond à l'état final de la transformation S_1 ;

3° A deux états E, E', infiniment voisins en la modification S, correspondent deux états E_1, E'_1, infiniment voisins en la modification S_1 ;

4° Deux états correspondants E et E_1 présentent les propriétés suivantes :

a. Les paramètres α, β, ..., λ, a, b, ..., l, qui déterminent les propriétés du système dans l'état E, sont infiniment voisins des paramètres α_1, β_1, ..., λ_1, a_1, b_1, ..., l_1, qui déterminent les propriétés du système dans l'état E_1.

b. Les quantités $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, ..., $\frac{d\lambda}{dt}$ (ou u, v, ..., w), qui déterminent les vitesses réelles (ou virtuelles) du système dans l'état E, diffèrent infiniment peu des quantités $\frac{d\alpha_1}{dt}$, $\frac{d\beta_1}{dt}$, ..., $\frac{d\lambda_1}{dt}$ (ou u_1, v_1, ..., w_1), qui déterminent les vitesses réelles (ou virtuelles) du système dans l'état E_1.

c. Les quantités $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $\frac{d^2\beta}{dt^2}$, ..., $\frac{d^2\lambda}{dt^2}$ (ou u', v', ..., w'), qui déterminent les accélérations (réelles ou virtuelles) du système dans l'état E, diffèrent infiniment peu des quantités $\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}$, $\frac{d^2\beta_1}{dt^2}$, ..., $\frac{d^2\lambda_1}{dt^2}$ (ou u'_1, v'_1, ..., w'_1), qui déterminent les accélérations réelles (ou virtuelles) du système dans l'état E_1.

d. Les paramètres analogues à α, β, ..., λ, a, b, ..., l, qui déterminent les propriétés des corps extérieurs agissant sur le système, pendant qu'il se trouve dans l'état E, diffèrent infiniment peu des paramètres analogues à α_1, β_1, ..., λ_1, a_1, b_1, ..., l_1, qui déterminent les propriétés des corps extérieurs agissant sur le système pendant qu'il se trouve dans l'état E_1.

De ces conditions relatives aux deux états E et E_1, il résulte que la force vive, les actions extérieures, les forces d'inertie, les coefficients calorifiques ont des valeurs infiniment peu différentes pour le système pris dans l'état E ou dans l'état E_1.

Les deux transformations S et S_1, dont nous venons de fixer les propriétés, constituent deux *transformations infiniment voisines.* Nous donnerons le nom de *transformation variable d'une manière continue* à une suite de transformations dont chacune est infiniment voisine de celle qui la précède et de celle qui la suit.

Soit Σ une transformation réelle ou virtuelle d'un système, cette transformation jouissant des propriétés suivantes :

1° Dans chacun des états qui la constituent, le système est en équilibre sous l'action des corps extérieurs en présence desquels il se trouve;

2° Si la modification est virtuelle, les quantités u, v, ..., w et u', v', ..., w', sont supposées nulles dans tout son parcours;

3° Soient (A) l'état initial et (B) l'état final de la transformation Σ; de (A) à (B), on peut passer par une transformation variable d'une manière continue, *réalisable* sous chacune de ses formes, et ayant pour forme limite la transformation *réelle ou virtuelle* Σ;

4° De (B) en (A), on peut passer par une transformation S' variable d'une manière continue, *réalisable* sous chacune de ses formes, et ayant pour forme limite la transformation *réelle ou virtuelle* que l'on obtient en parcourant la suite d'états d'équilibre Σ, en ordre inverse, de (B) en (A).

Une semblable transformation Σ se nomme une *transformation réversible.*

Une transformation réversible est-elle réalisable? Une transformation réversible étant une succession d'états d'équilibre, nous savons qu'il sera impossible de la réaliser, sauf peut-être dans un cas particulier que nous avons précisé au numéro précédent. Ainsi, en général, *une transformation réversible est une transformation purement virtuelle.*

On pourrait même se demander s'il est possible de constituer des modifications virtuelles qui soient réversibles; à cette question, nous répondrons en admettant l'hypothèse suivante :

Hypothèse fondamentale. — *Il existe des systèmes pour lesquels toute modification, réelle ou virtuelle, qui est une suite continue d'états d'équilibre, est une modification réversible.*

Nous n'étudierons que les systèmes qui jouissent de cette propriété.

Il faut bien se garder de croire que ces systèmes-là existent seuls dans la nature; il est aisé de prouver le contraire; les cycles d'*hysteresis magnétique*, par exemple, sont des modifications non réversibles, bien que ce soient des suites continues d'états d'équilibre.

Établissons quelques propriétés des modifications réversibles qui nous seront utiles par la suite.

Si une modification réversible est réelle, comme elle est une succession d'états d'équilibre, on a, pendant toute la durée de cette modification,

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0, \qquad \frac{d\beta}{dt} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{d\lambda}{dt} = 0;$$

on a donc aussi

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2\beta}{dt^2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^2\lambda}{dt^2} = 0.$$

Si une modification réversible est virtuelle, par définition, on a, à chaque instant,

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \ldots, \quad w = 0,$$
$$u' = 0, \quad v' = 0, \quad \ldots, \quad w' = 0.$$

Ainsi, *dans une modification réversible, réelle ou virtuelle, la force vive et les forces d'inertie sont constamment nulles.*

Soient A, B, ..., L, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ..., $\mathcal{L}$ les actions extérieures auxquelles le système est soumis pendant qu'il se trouve dans un des états qui constituent la modification réversible Σ. Si le système parcourt cette modification de l'état (A) à l'état (B), les actions extérieures effectueront un travail

$$\Theta = \int_{(A)}^{(B)} (A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots + L\,\delta\lambda + \mathcal{A}\,\delta a + \mathcal{B}\,\delta b + \ldots + \mathcal{L}\,\delta l).$$

Si le système parcourt la même modification de (B) en (A), les actions extérieures effectueront un travail

$$\Theta' = \int_{(B)}^{(A)} (A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots + L\,\delta\lambda + \mathcal{A}\,\delta a + \mathcal{B}\,\delta b + \ldots + \mathcal{L}\,\delta l).$$

Les deux intégrales sont prises le long du même trajet Σ, en sorte que l'on a évidemment

$$\Theta + \Theta' = 0.$$

Or, d'après la définition d'une transformation variable d'une manière continue, le travail $\mathfrak{T}$, effectué par les actions extérieures pendant que le système parcourt la modification réelle S, conduite de l'état (A) à l'état (B), a Θ pour limite lorsque la modification S tend vers la modification réversible Σ; le travail $\mathfrak{T}'$, effectué par les actions extérieures pendant que le système parcourt la modification réelle S', conduite de l'état (B) à l'état (A), a Θ' pour limite lorsque la modification S' tend vers la modification réversible Σ renversée.

Nous obtenons donc la proposition suivante :

S *et* S' *étant deux modifications réelles variables d'une manière* *continue, inverses l'une de l'autre, qui ont pour limite commune une certaine modification réversible* Σ, *les travaux* $\mathfrak{T}$ *et* $\mathfrak{T}'$, *effectués par les actions extérieures pendant que le système subit ces modifications, tendent vers des limites égales et de signe contraire lorsque les modifications* S *et* S' *tendent vers la modification* Σ.

Il suffit, dans le raisonnement précédent, de remplacer les actions extérieures

$$A, \quad B, \quad \ldots, \quad L, \quad \mathcal{A}, \quad \mathcal{B}, \quad \ldots, \quad \mathcal{L}$$

par les coefficients calorifiques

$$R_\alpha, \quad R_\beta, \quad \ldots, \quad R_\lambda, \quad \mathcal{R}_a, \quad \mathcal{R}_b, \quad \ldots, \quad \mathcal{R}_l;$$

les mots : *travail des actions extérieures*, par les mots : *quantité de chaleur dégagée par le système*, pour obtenir la proposition suivante :

Les quantités de chaleur Q *et* Q', *dégagées par le système pendant qu'il subit les modifications* S *et* S', *tendent vers des limites égales et de signe contraire lorsque les modifications* S *et* S' *tendent vers la modification réversible* Σ.

Nous terminerons ces généralités sur les modifications réversibles par l'énoncé de deux hypothèses qui nous seront, par la suite, d'un grand usage.

Première hypothèse. — *Si une transformation réversible* Σ *est isothermique, elle peut être regardée comme la limite commune de deux transformations* S *et* S', *inverses l'une de l'autre, variables d'une manière continue, constamment réelles et constamment isothermiques.*

Seconde hypothèse. — *Si une modification réversible* Σ *est adiabatique, elle peut être regardée comme la limite commune de deux transformations* S *et* S', *inverses l'une de l'autre, variables d'une manière continue, constamment réelles et constamment adiabatiques.*

CHAPITRE II.

LE THÉORÈME DE CARNOT ET LA TEMPÉRATURE ABSOLUE.

1. *Les hypothèses de Clausius et de Sir W. Thomson.* — Soient $A, B, \ldots, L, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{L}$ les forces et les influences extérieures qui agissent sur un système pris dans l'un des états dont la suite constitue un cycle de Carnot. Pendant une des modifications élémentaires

$$d\alpha, \quad d\beta, \quad \ldots, \quad d\lambda, \quad da, \quad db, \quad \ldots, \quad dl$$

en lesquelles le cycle peut se décomposer, ces actions effectuent un travail

$$d\mathfrak{T} = A\,d\alpha + B\,d\beta + \ldots + L\,d\lambda + \mathfrak{A}\,da + \mathfrak{B}\,db + \ldots + \mathfrak{L}\,dl;$$

pendant le parcours du cycle entier, elles effectuent un travail

$$\mathfrak{T} = \int (A\,d\alpha + B\,d\beta + \ldots + L\,d\lambda + \mathfrak{A}\,da + \mathfrak{B}\,db + \ldots + \mathfrak{L}\,dl),$$

l'intégrale s'étendant au cycle entier.

Ce travail $\mathfrak{T}$ peut être positif, nul ou négatif.

Les cycles de Carnot pour lesquels $\mathfrak{T}$ est nul et les cycles de Carnot pour lesquels $\mathfrak{T}$ est négatif sont l'objet de deux hypothèses dont l'une est due à Clausius et l'autre à Sir W. Thomson.

Hypothèse de Clausius. — *Si un système décrit un cycle de Carnot* réel *entre les températures $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ ($\mathfrak{S}'$ étant supérieur à $\mathfrak{S}$); si les actions extérieures auxquelles ce système est soumis effectuent, dans le parcours du cycle, un travail total égal à 0, il n'est pas possible que la modification isothermique produite à la température $\mathfrak{S}$ soit endothermique, ni que la modification isothermique produite à la température $\mathfrak{S}'$ soit exothermique.*

Hypothèse de Sir W. Thomson. — *Si un système décrit un cycle* *de Carnot* RÉEL *entre les températures* $\mathfrak{T}$ *et* $\mathfrak{T}'$ ($\mathfrak{T}'$ *étant supérieur à* $\mathfrak{T}$); *si les actions extérieures auxquelles le système est soumis effectuent, dans le parcours du cycle, un travail total négatif, il est impossible que la modification isothermique produite à la température* $\mathfrak{T}$ *soit endothermique.*

Ce n'est pas ici le lieu d'indiquer de quelle manière Clausius et Sir W. Thomson ont été amenés à énoncer ces hypothèses, ni de rappeler les discussions soutenues par Clausius contre les physiciens qui en niaient l'exactitude. Dans les Traités classiques de Thermodynamique, on donne ordinairement ces deux hypothèses comme équivalentes et comme également capables de servir de base à la démonstration de Carnot; pour nous, nous les regarderons comme distinctes et les emploierons toutes deux dans notre exposé.

2. *Addition aux hypothèses de Clausius et de Sir W. Thomson.* — A ces deux hypothèses, nous allons faire une addition essentielle, que nous énoncerons de la manière suivante :

HYPOTHÈSE ADDITIONNELLE. — *Si un cycle de Carnot, décrit entre les températures* $\mathfrak{T}$ *et* $\mathfrak{T}'$ ($\mathfrak{T}'$ *étant supérieur à* $\mathfrak{T}$), EST RÉEL ET N'EST PAS RÉVERSIBLE; *si, dans le parcours de ce cycle, les actions extérieures effectuent un travail nul ou négatif, la modification isothermique produite à la température* $\mathfrak{T}$ *ne peut pas être athermique.*

Combinée avec les hypothèses de Clausius et de Sir W. Thomson, cette hypothèse additionnelle fournit la proposition suivante :

Parmi tous les cycles de Carnot, décrits entre les températures $\mathfrak{T}$ *et* $\mathfrak{T}'$ ($\mathfrak{T}'$ *étant supérieur à* $\mathfrak{T}$), *qui sont* RÉELS ET NON RÉVERSIBLES, *considérons ceux durant le parcours desquels les actions extérieures effectuent un travail nul ou négatif; pour tous ces cycles, la modification isothermique produite à la température* $\mathfrak{T}$ *est exothermique.*

Les hypothèses que nous venons d'énoncer ne sont pas susceptibles d'une vérification expérimentale *directe*. Combinées avec d'autres hypothèses, plus ou moins nombreuses, elles forment le point de départ des théories dont les conséquences éloignées peuvent seules être soumises au contrôle de l'expérience. Une remarque analogue s'appliquerait d'ailleurs à presque toutes les hypothèses que l'on rencontre en Physique.

3. *Diverses espèces de cycles de Carnot.* — Prenons tous les cycles de Carnot virtuels que l'on peut concevoir; parmi ces cycles, cherchons à distinguer tous ceux dont les propriétés sont compatibles d'une part avec le principe de la conservation de l'Énergie, d'autre part avec les trois hypothèses que nous venons d'indiquer.

Parmi tous les cycles de Carnot ainsi distingués se trouveront assurément tous ceux qui sont réalisables et non réversibles. Les propriétés qui appartiennent à tous les cycles ainsi distingués appartiendront en particulier à tous les cycles réalisables et non réversibles.

Jusqu'à nouvel ordre, nous excluons de nos recherches les cycles de Carnot réels, non réversibles, décrits entre les températures $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{Z}'$, correspondant à un travail positif des actions extérieures, et pour lesquels l'effet thermique produit à la température $\mathfrak{Z}$ est égal à o.

Soient toujours $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{Z}'$ les deux températures entre lesquelles est décrit un cycle de Carnot, $\mathfrak{Z}'$ étant supérieur à $\mathfrak{Z}$. Soient $\mathfrak{Q}$ l'effet calorifique total de la modification isothermique produite à la température $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{Q}'$ l'effet calorifique total de la modification isothermique produite à la température $\mathfrak{Z}'$. Les modifications, autres que ces deux-là, dont se compose le cycle sont adiabatiques, en sorte que l'effet calorifique total du cycle se réduit à $(\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}')$.

Les actions extérieures auxquelles le système est soumis effectuent, pendant le parcours du cycle, un travail total $\mathfrak{T}$.

Le principe de la conservation de l'Énergie nous donne [Chap. I, égalité (3)]

$$\mathfrak{T} = E(\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}'). \tag{1}$$

De là, les propriétés suivantes :

1° *Si le travail $\mathfrak{T}$ est nul, les deux quantités $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{Q}'$ sont de signe contraire et de même valeur absolue;*

2° *Si le travail $\mathfrak{T}$ est positif, il y a au moins l'une des deux quantités $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{Q}'$ qui est positive, et, s'il n'y en a qu'une, elle est la plus grande en valeur absolue;*

3° *Si le travail $\mathfrak{T}$ est négatif, il y a au moins l'une des deux quantités $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{Q}'$ qui est négative, et, s'il n'y en a qu'une, elle est la plus grande en valeur absolue.*

Ces propositions résultent de l'application aux cycles de Carnot considérés du principe de la conservation de l'Énergie.

Appliquons-leur maintenant les deux hypothèses de Clausius et de Sir W. Thomson, énoncées au n° **1**, et l'hypothèse additionnelle, énoncée au n° **2**. Nous serons conduit à la conclusion suivante :

Si le travail externe est nul ou négatif, la quantité $\mathfrak{Q}$ est assurément positive; si le travail externe est positif, la quantité $\mathfrak{Q}$ est positive ou négative, mais n'est assurément pas nulle.

De ces propositions il est aisé de conclure que tout cycle de Carnot réalisable qui n'est pas uniquement une succession d'états d'équilibre rentre dans l'une des catégories de la classification suivante :

1° Le travail $\mathfrak{T}$ effectué par les actions extérieures est nul; $\mathfrak{Q}$ est positif; $\mathfrak{Q}'$ est négatif et égal à $\mathfrak{Q}$ en valeur absolue;

2° Le travail $\mathfrak{T}$ effectué par les actions extérieures est négatif; $\mathfrak{Q}$ est positif; $\mathfrak{Q}'$ est négatif et supérieur à $\mathfrak{Q}$ en valeur absolue;

3° Le travail $\mathfrak{T}$ effectué par les actions extérieures est positif, trois cas peuvent alors se distinguer :

a. $\mathfrak{Q}$ est positif; $\mathfrak{Q}'$ est positif ou nul;

b. $\mathfrak{Q}$ est positif; $\mathfrak{Q}'$ est négatif et inférieur à $\mathfrak{Q}$ en valeur absolue;

c. $\mathfrak{Q}$ est négatif; $\mathfrak{Q}'$ est positif et supérieur à $\mathfrak{Q}$ en valeur absolue.

Cette classification est résumée dans le Tableau suivant :

Cycles de premier genre : $\mathfrak{T} = 0$		$\mathfrak{Q} > 0$	$\mathfrak{Q}' < 0$
Cycles de deuxième genre : $\mathfrak{T} < 0$		$\mathfrak{Q} > 0$	$\mathfrak{Q}' < 0$
Cycles de troisième genre : $\mathfrak{T} > 0$	Espèce *a*	$\mathfrak{Q} > 0$	$\mathfrak{Q}' \geqq 0$
	Espèce *b*	$\mathfrak{Q} > 0$	$\mathfrak{Q}' < 0$
	Espèce *c*	$\mathfrak{Q} < 0$	$\mathfrak{Q}' > 0$

Proposons-nous maintenant de comparer les valeurs que prend. pour ces différents cycles, le rapport

$$\rho = \frac{\mathfrak{Q}+\mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}}.$$

$(\mathfrak{Q}+\mathfrak{Q}')$ étant nul pour les cycles de premier genre, négatif pour les cycles de deuxième genre, positif pour les cycles de troisième genre, ainsi que le montre l'équation (2), on voit que le rapport ρ a, pour les diverses catégories de cycles, le signe suivant :

Cycles de premier genre		$\rho = 0$
Cycles de deuxième genre		$\rho < 0$
Cycles de troisième genre	Espèce *a*	$\rho > 0$
	Espèce *b*	$\rho > 0$
	Espèce *c*	$\rho < 0$

4. *Théorème de Carnot.* — L'inspection du Tableau précédent nous montre d'abord que le rapport ρ est plus petit pour un cycle quelconque de troisième genre et d'espèce *c* que pour un cycle quelconque de premier genre, et aussi que pour un cycle quelconque de troisième genre et d'espèce *a* ou d'espèce *b*.

Nous allons démontrer maintenant que, *si l'on considère deux cycles de Carnot, décrits entre les mêmes températures $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{z}'$, l'un de troisième genre et d'espèce c, l'autre de deuxième genre, le rapport ρ n'est assurément pas plus grand pour le premier que pour le second*, ces cycles étant supposés, bien entendu, soumis au principe de la conservation de l'Énergie et aux trois hypothèses précédemment énoncées.

Une démonstration rigoureuse de ce théorème exige que nous distinguions différents cas.

Soient C_1 le premier cycle et C_2 le second cycle. Soient T_1, T_2 les durées de ces deux cycles; nous commencerons par distinguer deux cas selon que les périodes T_1, T_2 sont ou ne sont pas commensurables.

1° *Le rapport $\frac{T_2}{T_1}$ est commensurable.*

Nous poserons

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \tag{2}$$

μ_1, μ_2 étant deux nombres entiers que nous pouvons supposer premiers entre eux.

Soient $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}'_1$, ρ_1 les quantités analogues à $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$, ρ, qui correspondent au cycle C_1 ; soient $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}'_2$, ρ_2 les quantités analogues à $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$, ρ, qui correspondent au cycle C_2. Nous savons que l'on a

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{T}_1 > 0, & \mathfrak{Q}_1 < 0, & \mathfrak{Q}'_1 > 0, \\ \mathfrak{T}_2 < 0, & \mathfrak{Q}_2 > 0, & \mathfrak{Q}'_2 < 0. \end{array}$$

Nous distinguerons deux cas secondaires, selon que les quantités $\mathfrak{T}_1$ et $|\mathfrak{T}_2|$ sont ou ne sont pas commensurables.

A. *Le rapport* $\frac{|\mathfrak{T}_2|}{\mathfrak{T}_1}$ *est commensurable.*

Nous poserons

$$\frac{|\mathfrak{T}_2|}{\mathfrak{T}_1} = \frac{m_2}{m_1}, \tag{3}$$

m_1, m_2 étant deux nombres entiers que nous pouvons supposer premiers entre eux.

Posons

$$\begin{cases} N_1 = m_1 \mu_1, \\ N_2 = m_2 \mu_2. \end{cases} \tag{4}$$

Considérons N_1 cycles identiques au cycle C_1, décrits simultanément et d'une manière indépendante. Leur ensemble formera un cycle de Carnot unique γ_1, dont la durée sera T_1, qui sera décrit entre les températures ϑ et ϑ', et pour lequel les quantités analogues à $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$ auront les valeurs [Chap. I, égalités (5) et (5 *bis*)]

$$N_1 \mathfrak{T}_1, \quad N_1 \mathfrak{Q}_1, \quad N_1 \mathfrak{Q}'_1.$$

Le cycle γ_1 peut être reproduit μ_2 fois de suite (Chap. I, n° **5**).

Ces μ_2 cycles γ_1 successifs pourront être considérés comme un cycle de Carnot unique Γ_1, décrit entre les températures ϑ, ϑ', de durée

$$\Theta_1 = \mu_2 T_1, \tag{5}$$

et pour lequel les quantités analogues à $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$ auront pour valeurs

$$\mu_2 N_1 \mathfrak{T}_1, \quad \mu_2 N_1 \mathfrak{Q}_1, \quad \mu_2 N_1 \mathfrak{Q}'_1.$$

Considérons, d'autre part, N_2 cycles identiques au cycle C_2, décrits simultanément et d'une manière indépendante. Leur ensemble formera un cycle de Carnot unique γ_2, décrit entre les températures $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$, de durée T_2, et pour lequel les quantités analogues à $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$ auront les valeurs

$$N_2 \mathfrak{T}_2, \quad N_2 \mathfrak{Q}_2, \quad N_2 \mathfrak{Q}'_2.$$

Le cycle γ_2 peut être reproduit μ_1 fois de suite. Ces μ_1 cycles γ_2 successifs pourront être considérés comme un cycle de Carnot unique Γ_2, décrit entre les températures $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$, de durée

$$\Theta_2 = \mu_1 T_2, \tag{5 bis}$$

et pour lequel les quantités analogues à $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$ auront pour valeurs

$$\mu_1 N_2 \mathfrak{T}_2, \quad \mu_1 N_2 \mathfrak{Q}_2, \quad \mu_1 N_2 \mathfrak{Q}'_2.$$

Les égalités (2), (5) et (5 *bis*) nous apprennent que la durée Θ_1 du cycle Γ_1 est égale à la durée Θ_2 du cycle Γ_2 ; on peut donc supposer que l'on décrive ces deux cycles simultanément et d'une manière indépendante. Leur ensemble formera un nouveau cycle de Carnot *réel* Γ, décrit entre les températures $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$, et pour lequel les quantités analogues à $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$ auront pour valeurs

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} &= \mu_2 N_1 \mathfrak{T}_1 + \mu_1 N_2 \mathfrak{T}_2, \\ \mathfrak{Q} &= \mu_2 N_1 \mathfrak{Q}_1 + \mu_1 N_2 \mathfrak{Q}_2, \\ \mathfrak{Q}' &= \mu_2 N_1 \mathfrak{Q}'_1 + \mu_1 N_2 \mathfrak{Q}'_2. \end{aligned}$$

En vertu des égalités (4), ces égalités peuvent s'écrire

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{T} &= \mu_1 \mu_2 (m_2 \mathfrak{T}_1 + m_1 \mathfrak{T}_2), \\ \mathfrak{Q} &= \mu_1 \mu_2 (m_2 \mathfrak{Q}_1 + m_1 \mathfrak{Q}_2), \\ \mathfrak{Q}' &= \mu_1 \mu_2 (m_2 \mathfrak{Q}'_1 + m_1 \mathfrak{Q}'_2). \end{aligned} \right. \tag{6}$$

En vertu de l'égalité (3), la première des égalités (6) devient

$$\mathfrak{E} = 0.$$

Le cycle Γ est donc un cycle *réel, non réversible,* de premier genre. D'après l'hypothèse de Clausius, indiquée au n° **1**, et l'hypothèse complémentaire, énoncée au n° **2**, la quantité $\mathfrak{Q}$ doit être positive; en vertu de la deuxième égalité (6), cette dernière condition devient

$$m_2 \mathfrak{Q}_1 + m_1 \mathfrak{Q}_2 > 0$$

ou bien

$$\frac{m_1}{|\mathfrak{Q}_1|} > \frac{m_2}{\mathfrak{Q}_2}.$$

Mais on a, d'après l'égalité (3),

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\mathfrak{E}_1}{|\mathfrak{E}_2|}.$$

On a donc

$$\frac{\mathfrak{E}_1}{|\mathfrak{Q}_1|} > \frac{|\mathfrak{E}_2|}{\mathfrak{Q}_2}$$

ou bien

$$\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{Q}_1} < \frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{Q}_2}.$$

D'autre part, l'égalité (1) donne

$$\mathfrak{E}_1 = E(\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_1'),$$
$$\mathfrak{E}_2 = E(\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}_2').$$

L'inégalité précédente devient donc

$$\frac{\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_1'}{\mathfrak{Q}_1} < \frac{\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}_2'}{\mathfrak{Q}_2}$$

ou

$$(7) \qquad \rho_1 < \rho_2.$$

B. *Le rapport* $\frac{|\mathfrak{T}_2|}{\mathfrak{T}_1}$ *est incommensurable.*

Soient m_1, m_2 deux nombres entiers, premiers entre eux, tels que l'on ait

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{|\mathfrak{T}_2|}{\mathfrak{T}_1} - \varepsilon, \tag{8}$$

ε étant une quantité positive que l'on peut prendre aussi petite que l'on veut.

Construisons le cycle Γ comme dans le cas précédent.

Nous aurons encore, pour ce cycle,

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{T} &= \mu_1 \mu_2 (m_2 \mathfrak{T}_1 + m_1 \mathfrak{T}_2), \\ \mathfrak{Q} &= \mu_1 \mu_2 (m_2 \mathfrak{Q}_1 + m_1 \mathfrak{Q}_2), \\ \mathfrak{Q}' &= \mu_1 \mu_2 (m_2 \mathfrak{Q}'_1 + m_1 \mathfrak{Q}'_2). \end{aligned}\right. \tag{6}$$

La première égalité (6), jointe à l'égalité (8), donne

$$\mathfrak{T} = -\varepsilon m_1 \mu_1 \mu_2 \mathfrak{T}_1.$$

$\mathfrak{T}$ étant négatif, le cycle Γ est un cycle de Carnot *réel, non réversible,* de deuxième genre. L'hypothèse de Sir W. Thomson, énoncée au nº **1**, et l'hypothèse additionnelle, énoncée au nº **2**, nous apprennent que la quantité $\mathfrak{Q}$ est forcément positive, condition qui s'écrit, en vertu de la deuxième égalité (6),

$$m_2 \mathfrak{Q}_1 + m_1 \mathfrak{Q}_2 > 0$$

ou bien

$$\frac{m_1}{|\mathfrak{Q}_1|} > \frac{m_2}{\mathfrak{Q}_2}.$$

Mais l'égalité (8) donne

$$m_2 \mathfrak{T}_1 = m_1 |\mathfrak{T}_2| - \varepsilon m_1 \mathfrak{T}_1;$$

on a donc

$$\frac{\mathfrak{T}_1}{|\mathfrak{Q}_1|} > \frac{|\mathfrak{T}_2|}{\mathfrak{Q}_2} - \varepsilon \frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{Q}_2}.$$

ε est une quantité positive qui peut être prise aussi petite que l'on veut. L'inégalité précédente exige donc que l'on ait

$$\frac{\mathfrak{T}_1}{|\mathfrak{Q}_1|} \geqq \frac{|\mathfrak{T}_2|}{\mathfrak{Q}_2}$$

ou bien

$$\frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{Q}_1} \leqq \frac{\mathfrak{T}_2}{\mathfrak{Q}_2}.$$

L'égalité (1) donnant d'ailleurs

$$\mathfrak{T}_1 = \mathrm{E}(\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}'_1),$$
$$\mathfrak{T}_2 = \mathrm{E}(\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}'_2),$$

on voit que l'on a

$$\frac{\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}'_1}{\mathfrak{Q}_1} \leqq \frac{\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}'_2}{\mathfrak{Q}_2}$$

ou

$$(9) \qquad \rho_1 \leqq \rho_2.$$

2° *Le rapport $\frac{\mathrm{T}_2}{\mathrm{T}_1}$ est incommensurable.*

Imaginons que le cycle C_2 soit l'une des formes d'un cycle de Carnot $\mathfrak{C}_2$, variable d'une manière continue, toujours réel et constamment décrit entre les températures $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$; évidemment, on a toujours le droit de faire cette supposition.

Lorsque le cycle $\mathfrak{C}_2$ varie d'une manière continue, sa durée T_2 demeure constante ou varie d'une manière continue; évidemment, on a toujours le droit de choisir les variations du cycle $\mathfrak{C}_2$ de telle manière que sa durée T_2 ne demeure pas constante.

Lorsque le cycle $\mathfrak{C}_2$ varie d'une manière continue, les quantités $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}'_2$ varient d'une manière continue; comme pour le cycle particulier C_2 aucune de ces trois quantités n'est égale à zéro, nous pouvons toujours limiter les variations du cycle $\mathfrak{C}_2$, de part et d'autre de la forme C_2, de telle sorte que nous ayons constamment

$$\mathfrak{T}_2 < 0, \qquad \mathfrak{Q}_2 < 0, \qquad \mathfrak{Q}'_2 < 0.$$

Le cycle $\mathfrak{C}_2$ sera alors constamment un cycle de second genre.

De plus, tant que le cycle $\mathfrak{C}_2$ variera d'une manière continue, le rapport ρ_2 variera d'une manière continue.

Or nous savons que, si l'on considère un des cycles $\mathfrak{C}_2$ dont la durée T_2 est commensurable avec la durée T_1 du cycle C_1, on aura

$$\rho_2 \geqq \rho_1.$$

Ce que nous venons de dire démontre que l'on aura, pour toutes les formes du cycle $\mathfrak{C}_2$, et en particulier pour la forme C_2,

$$(10) \qquad \rho_2 \geqq \rho_1.$$

Si donc on considère deux cycles de Carnot, réels et non réversibles, tous deux décrits entre les mêmes températures, l'un de 3ème ~~*premier*~~ *genre et d'espèce c, l'autre n'appartenant pas au* 3ème ~~*premier*~~ *genre et à l'espèce c, le rapport ρ relatif au premier est au plus égal au rapport ρ relatif au second.*

Ce théorème peut encore s'énoncer de la manière suivante :

Considérons tous les cycles de Carnot, réels et non réversibles, décrits entre les mêmes températures $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}'$.

Le rapport ρ relatif à ceux qui sont de troisième genre et d'espèce c admet une limite supérieure A, *essentiellement négative.*

Le rapport ρ relatif à ceux qui ne sont pas de troisième genre et d'espèce c admet une limite inférieure A', *essentiellement négative.*

On a

$$A \leqq A'.$$

C'est la première forme du théorème de Carnot. L'emploi des modifications réversibles va nous permettre de donner à ce théorème une forme plus précise.

5. *Théorème de Carnot (suite). Emploi des modifications réversibles.* — Nous allons démontrer en premier lieu que

$$A = A'.$$

Deux températures ϑ et ϑ', cette dernière plus élevée que la première, étant données, imaginons que l'on puisse toujours trouver un système admettant quatre modifications réversibles qui jouissent des propriétés suivantes :

La première est une modification réversible isothermique Σ_{12}, correspondant à la température ϑ' et conduisant le système de l'état 1 à l'état 2.

La deuxième est une modification réversible adiabatique Σ_{23}, conduisant le système de l'état 2, où il a la température ϑ', à l'état 3, où il a la température ϑ.

La troisième est une modification réversible isothermique Σ_{34}, correspondant à la température ϑ et conduisant le système de l'état 3 à l'état 4.

La quatrième est une modification réversible adiabatique Σ_{41}, ramenant le système de l'état 4 à l'état 1.

Nous aurons ainsi constitué un cycle de Carnot réversible, décrit entre les températures ϑ et ϑ'.

Relativement à ce cycle, nous ferons encore l'hypothèse suivante : *Il est possible de le choisir de manière que la modification Σ_{34} ne soit pas athermique.*

D'après l'une des deux hypothèses indiquées à la fin du Chap. I, n° 8, il existe une modification isothermique réelle S_{12}, prenant le système dans l'état 1 avec des vitesses égales à zéro, l'amenant à l'état 2 avec des vitesses égales à zéro, variable d'une manière continue et ayant pour limite la modification Σ_{12}. Il existe de même une modification isothermique réelle S_{21}, prenant le système dans l'état 2 avec des vitesses égales à zéro, l'amenant à l'état 1 avec des vitesses égales à zéro, variable d'une manière continue et ayant pour limite la modification Σ_{21}.

La modification isothermique Σ_{34}, les modifications adiabatiques Σ_{23}, Σ_{41} donnent lieu à des observations analogues.

L'ensemble des modifications

$$S_{12}, \quad S_{23}, \quad S_{34}, \quad S_{41}$$

forme un cycle de Carnot réel, décrit entre les températures ϑ et ϑ', variable d'une manière continue, et ayant pour limite le cycle

$$\Sigma_{12}, \quad \Sigma_{23}, \quad \Sigma_{34}, \quad \Sigma_{41}.$$

De même, l'ensemble des modifications

$$S_{43}, \quad S_{32}, \quad S_{21}, \quad S_{14}$$

forme un cycle de Carnot réel, décrit entre les températures Ξ et Ξ', variable d'une manière continue, et ayant pour limite le cycle

$$\Sigma_{43}, \quad \Sigma_{32}, \quad \Sigma_{21}, \quad \Sigma_{14}.$$

Soient χ_{12}, χ_{34} les quantités de chaleur dégagées par les modifications réversibles Σ_{12}, Σ_{34}; les modifications Σ_{21}, Σ_{43} dégageront respectivement des quantités de chaleur $\chi_{21} = -\chi_{12}$, $\chi_{43} = -\chi_{34}$, en sorte que, pour chacun des deux cycles

$$(\Sigma_{12}, \Sigma_{23}, \Sigma_{34}, \Sigma_{41}) \quad \text{et} \quad (\Sigma_{43}, \Sigma_{32}, \Sigma_{21}, \Sigma_{14}),$$

la quantité analogue à ρ a la même valeur

$$r = \frac{\chi_{12} + \chi_{34}}{\chi_{34}}.$$

Soient $\mathfrak{Q}_{12}$, $\mathfrak{Q}_{34}$ les effets thermiques des modifications S_{12}, S_{34}. Pour le cycle $(S_{12}, S_{23}, S_{34}, S_{41})$ la quantité analogue à ρ a pour valeur

$$\rho_1 = \frac{\mathfrak{Q}_{12} + \mathfrak{Q}_{34}}{\mathfrak{Q}_{34}}.$$

Soient $\mathfrak{Q}_{21}$, $\mathfrak{Q}_{43}$ les effets thermiques des modifications S_{21}, S_{43}. Pour le cycle $(S_{43}, S_{32}, S_{21}, S_{14})$, la quantité analogue à ρ a pour valeur

$$\rho_2 = \frac{\mathfrak{Q}_{21} + \mathfrak{Q}_{43}}{\mathfrak{Q}_{43}}.$$

Par hypothèse, la modification Σ_{34} n'est pas athermique. Supposons, pour fixer les idées, χ_{34} négatif. Les modifications S_{34} et S_{43}

pourront être prises assez voisines des modifications Σ_{34} et Σ_{43} pour que $\mathfrak{Q}_{34}$ ait le même signe que χ_{34} et que $\mathfrak{Q}_{43}$ ait le même signe que χ_{43}. Nous aurons alors

$$\mathfrak{Q}_{34} < 0, \qquad \mathfrak{Q}_{43} > 0,$$

en sorte que ρ_1 se rapportera certainement à un cycle de troisième genre et d'espèce c et ρ_2 à un cycle qui n'est pas de troisième genre et d'espèce c.

Le théorème démontré au numéro précédent nous donnera

$$\rho_1 \leqq \mathrm{A}, \qquad \rho_2 \geqq \mathrm{A}'.$$

Mais, d'autre part, lorsque les deux cycles

$$(\mathrm{S}_{12}, \mathrm{S}_{23}, \mathrm{S}_{34}, \mathrm{S}_{41}) \quad \text{et} \quad (\mathrm{S}_{43}, \mathrm{S}_{32}, \mathrm{S}_{21}, \mathrm{S}_{14})$$

tendent respectivement vers les cycles

$$(\Sigma_{12}, \Sigma_{23}, \Sigma_{34}, \Sigma_{41}) \quad \text{et} \quad (\Sigma_{43}, \Sigma_{32}, \Sigma_{21}, \Sigma_{14}),$$

les deux rapports ρ_1, ρ_2 tendent vers la limite commune r. Comme les quantités A et A′ ne varient pas lorsque les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ sont maintenues invariables, cela ne peut avoir lieu que si l'on a

$$(10) \qquad \mathrm{A} = \mathrm{A}',$$

comme nous l'avions annoncé.

Nous voyons en outre que, *si un cycle de Carnot réversible est décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ ($\mathfrak{T}'$ étant supérieur à $\mathfrak{T}$); si, de plus, l'isothermique décrite à la température $\mathfrak{T}$ n'est pas athermique, le rapport*

$$\rho = \frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}}$$

a, pour ce cycle, la valeur A.

Que devient le rapport ρ pour un cycle de Carnot réversible décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$, si l'isothermique relative à la température $\mathfrak{T}$ est athermique?

Désignons par C_1 ce cycle ; nous avons, par hypothèse,

$$\mathfrak{Q}_1 = 0.$$

Soit C_2 un autre cycle de Carnot réversible, décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$, et pour lequel l'isothermique relative à la température $\mathfrak{T}$ n'est pas athermique. Pour ce cycle, nous aurons, d'après la proposition précédente,

$$\frac{\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}'_2}{\mathfrak{Q}_2} = A.$$

Les deux cycles C_1 et C_2 peuvent être considérés comme virtuels. On peut donc toujours supposer qu'ils soient décrits simultanément d'une manière indépendante. Leur ensemble formera un nouveau cycle de Carnot réversible décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$. L'isothermique décrite à la température $\mathfrak{T}$ correspondra à un effet thermique $\mathfrak{Q}_2$, en sorte qu'elle ne sera pas athermique. L'isothermique décrite à la température $\mathfrak{T}'$ correspondra à un effet thermique $(\mathfrak{Q}'_1 + \mathfrak{Q}'_2)$. D'après le théorème précédent, on aura, pour ce cycle,

$$\frac{\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}'_1 + \mathfrak{Q}'_2}{\mathfrak{Q}_2} = A.$$

Cette égalité ne sera compatible avec la précédente que si l'on a

$$\mathfrak{Q}'_1 = 0.$$

D'où cette proposition :

Si un cycle de Carnot réversible est décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ ($\mathfrak{T}'$ étant supérieur à $\mathfrak{T}$), et si la modification isothermique décrite à la température $\mathfrak{T}$ est athermique, la modification isothermique produite à la température $\mathfrak{T}'$ est aussi athermique.

Dans ce cas, le rapport

$$\frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}}$$

perd tout sens.

Nous allons démontrer maintenant que, *pour aucun cycle réali-*

sable et non réversible décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$, le rapport

$$\rho = \frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}}$$

ne peut atteindre la valeur A.

La valeur A étant essentiellement négative, le rapport ρ ne peut atteindre la valeur A, à moins que le cycle n'appartienne soit au deuxième genre, soit au troisième genre et à l'espèce c. Supposons que, pour un cycle C_1 (nous admettrons, pour fixer les idées, qu'il soit de deuxième genre), on ait

$$\rho_1 = \frac{\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}'_1}{\mathfrak{Q}_1} = A$$

ou bien, puisque l'égalité (1) permet de remplacer $(\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}'_1)$ par $E\varpi_1$,

$$E\varpi_1 = A\mathfrak{Q}_1. \tag{11}$$

Nous avons vu que l'existence de cycles réversibles et réels n'était nullement absurde. Admettons donc que l'on ait constitué un cycle de Carnot C_2, réversible, réel, décrit entre les mêmes températures $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$ que le cycle C_1, et pour lequel la quantité ϖ_2 ne soit pas égale à zéro.

La quantité ϖ_2 sera, dès lors, positive ou négative; nous pouvons toujours la supposer positive, car, si elle était négative, il suffirait de réaliser le cercle réversible C_2 en sens contraire pour qu'elle devînt positive.

En faisant varier d'une manière continue le cycle de Carnot C_2, sans changer ni sa réversibilité, ni les températures entre lesquelles il est décrit, nous pourrons toujours l'amener à satisfaire aux conditions suivantes :

1° La durée T_1 du cycle C_1 et la durée T_2 du cycle C_2 sont commensurables;

2° Les quantités $|\varpi_1|$ et ϖ_2 sont commensurables.

Posons

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \qquad \frac{\varpi_2}{|\varpi_1|} = \frac{m_2}{m_1}, \tag{12}$$

μ_1, μ_2, m_1, m_2 étant quatre nombres entiers.

Au moyen des cycles C_1, C_2, constituons un cycle de Carnot Γ, de la même manière qu'au n° **4**. Pour ce cycle Γ, nous aurons

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{T} &= \mu_1\mu_2(m_2\mathfrak{T}_1 + m_1\mathfrak{T}_2),\\ \mathfrak{Q} &= \mu_1\mu_2(m_2\mathfrak{Q}_1 + m_1\mathfrak{Q}_2),\\ \mathfrak{Q}' &= \mu_1\mu_2(m_2\mathfrak{Q}'_1 + m_1\mathfrak{Q}'_2).\end{aligned}\right.$$

La seconde égalité (12), jointe à la première égalité (13), montre que l'on a

$$\mathfrak{T} = 0.$$

Le cycle Γ est donc un cycle de premier genre.

La quantité $\mathfrak{Q}_2$ ne peut être égale à zéro. En effet, le cycle C_2 est réversible; d'après une proposition démontrée tout à l'heure, la quantité $\mathfrak{Q}_2$ ne pourrait être égale à zéro sans que la quantité $\mathfrak{Q}'_2$ le soit également; l'égalité

$$\mathfrak{T}_2 = E(\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}'_2)$$

donnerait alors

$$\mathfrak{T}_2 = 0,$$

contrairement à l'hypothèse faite.

Puisque, dans le cycle réversible C_2, la quantité $\mathfrak{Q}_2$ n'est pas égale à zéro, nous savons que l'on a

$$\frac{\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}'_2}{\mathfrak{Q}_2} = A$$

ou bien

$$(14)\qquad E\mathfrak{T}_2 = A\mathfrak{Q}_2.$$

Les égalités (11) et (14), jointes à la seconde égalité (13), montrent que, dans le cycle Γ, on a

$$\mathfrak{Q} = \mu_1\mu_2\frac{E}{A}(m_2\mathfrak{T}_1 + m_1\mathfrak{T}_2) = 0.$$

Le cycle Γ serait donc un cycle de Carnot du premier genre, décrit entre les températures $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$, dans lequel l'isothermique décrite à la température $\mathfrak{S}$ serait athermique. Mais, d'autre part, le cycle Γ serait un cycle de Carnot réalisable et il ne serait pas exclusivement composé d'états d'équilibre, puisque le cycle C_2 n'est pas exclusivement composé d'états d'équilibre. L'existence du cycle Γ est, dès lors, en contradiction avec l'hypothèse énoncée au n° **2**. Admettant l'exactitude de cette dernière hypothèse, nous pouvons formuler la proposition suivante :

Pour aucun cycle réalisable et non réversible, le rapport

$$\rho = \frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}}$$

ne peut atteindre la valeur A.

Réunissons maintenant en un seul théorème les diverses propositions démontrées au numéro précédent et au présent numéro :

Soient $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ deux températures, $\mathfrak{S}'$ étant supérieur à $\mathfrak{S}$. Il existe une grandeur négative A, *qui dépend uniquement de ces deux températures $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, et qui jouit des propriétés suivantes :*

1° *Pour tout cycle de Carnot réversible réalisable ou non, décrit entre les températures $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$, on a*

$$\rho = \frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}} = \mathrm{A}; \tag{15}$$

2° *Pour tout cycle de Carnot, décrit entre les températures $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$, qui est réalisable, non réversible, de troisième genre et d'espèce c, on a*

$$\rho = \frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}} < \mathrm{A}; \tag{16}$$

3° *Pour tout cycle de Carnot, décrit entre les températures $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$, qui est réalisable et non réversible, qui n'est pas de troisième genre et d'espèce c, on a*

$$\rho = \frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}} > \mathrm{A}. \tag{17}$$

De cet énoncé sont exclus :

1° Les cycles réalisables et non réversibles pour lesquels on a

$$\mathcal{E} > 0, \qquad \mathcal{Q} = 0;$$

2° Les cycles réversibles pour lesquels on a

$$\mathcal{Q} = 0;$$

pour ces derniers, on a également

$$\mathcal{Q}' = 0.$$

6. *La température absolue.* — La quantité A est une fonction des températures $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$; étudions plus profondément la nature de cette fonction, ou plutôt, de la fonction

$$\psi(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}') = A - 1. \tag{18}$$

Cette fonction, qui n'est définie que pour les valeurs de $\mathfrak{T}'$ supérieures à $\mathfrak{T}$, est négative et supérieure à 1 en valeur absolue.

Moyennant l'égalité (18), l'égalité et les inégalités (15), (16) et (17) peuvent être remplacées par l'égalité et les inégalités

$$\frac{\mathcal{Q}'}{\mathcal{Q}} = \psi(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}'), \tag{15 bis}$$

$$\frac{\mathcal{Q}'}{\mathcal{Q}} < \psi(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}'), \tag{16 bis}$$

$$\frac{\mathcal{Q}'}{\mathcal{Q}} > \psi(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}'). \tag{17 bis}$$

Soient $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}''$ trois températures, rangées par ordre de grandeur croissante; nous allons nous proposer de trouver une relation entre les trois quantités

$$\psi(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}'), \quad \psi(\mathfrak{T}', \mathfrak{T}''), \quad \psi(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}'').$$

Considérons un cycle de Carnot *réversible* décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}''$. Ce cycle prend le corps à la température $\mathfrak{T}''$, dans l'état A″; par une transformation isothermique, il l'amène à l'état B″; puis, par une transformation adiabatique, à l'état B, dont la température est ϑ; une nouvelle transformation isothermique, accomplie à la température ϑ, l'amène à l'état A; une nouvelle transformation adiabatique le ramène à l'état A″.

Supposons que l'effet calorifique de la transformation BA, effet que nous désignerons par $\mathfrak{Q}(\mathrm{BA})$, soit différent de zéro.

Nous aurons alors

$$\frac{\mathfrak{Q}(\mathrm{A''B''})}{\mathfrak{Q}(\mathrm{BA})} = \psi(\vartheta, \vartheta''). \tag{a}$$

En subissant la transformation B″B le corps passe, au moins une fois, par la température ϑ'; soit B′ un état où il présente cette température. De même, en subissant la transformation AA″, le corps passe, au moins une fois, par la température ϑ'; soit A′ un état où il présente cette température. Relions les deux états A′, B′, par une suite d'états d'équilibre du système, ces états correspondant tous à la température ϑ', nous obtiendrons une modification isothermique réversible, A′B′.

Le cycle A′B′BAA′ sera un cycle de Carnot réversible décrit entre les températures ϑ et ϑ'; comme $\mathfrak{Q}(\mathrm{BA})$ n'est pas nul, on aura

$$\frac{\mathfrak{Q}(\mathrm{A'B'})}{\mathfrak{Q}(\mathrm{BA})} = \psi(\vartheta, \vartheta'); \tag{b}$$

$\mathfrak{Q}(\mathrm{A'B'})$ n'est certainement pas nul, puisque $\psi(\vartheta, \vartheta')$ n'est pas nul. Mais on a évidemment

$$\mathfrak{Q}(\mathrm{A'B'}) + \mathfrak{Q}(\mathrm{B'A'}) = 0. \tag{c}$$

$\mathfrak{Q}(\mathrm{B'A'})$ n'est donc pas nul. Dès lors, dans le cycle de Carnot réversible A″B″B′A′A″, décrit entre les températures ϑ' et ϑ'', on aura

$$\frac{\mathfrak{Q}(\mathrm{A''B''})}{\mathfrak{Q}(\mathrm{B'A'})} = \psi(\vartheta', \vartheta''). \tag{d}$$

Les égalités (a), (b), (c), (d) donnent

$$\psi(\vartheta, \vartheta'') = -\psi(\vartheta, \vartheta')\,\psi(\vartheta', \vartheta''). \tag{19}$$

C'est la relation que nous voulions obtenir.

La fonction $\psi(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}')$ n'a de sens, jusqu'ici, qu'autant que $\mathfrak{S}'$ est supérieur à $\mathfrak{S}$.

Lorsque $\mathfrak{S}'$ tend vers $\mathfrak{S}$, par valeurs supérieures à $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{Q}'$ tend évidemment, dans un cycle de Carnot réversible, décrit entre les températures $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$, vers la limite $(-\mathfrak{Q})$; $\psi(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}')$ tend donc vers -1. Nous conviendrons de poser

$$\psi(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}) = -1.$$

Lorsque $\mathfrak{S}'$ sera inférieur à $\mathfrak{S}$, nous définirons $\psi(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}')$ par l'égalité

$$\psi(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}') = -\frac{1}{\psi(\mathfrak{S}', \mathfrak{S})}.$$

D'après ces définitions, l'équation fonctionnelle (19), établie en supposant

$$\mathfrak{S} < \mathfrak{S}' < \mathfrak{S}'',$$

demeurera vraie, quels que soient $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$. De plus, on sera assuré que la fonction $\psi(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}')$ est continue pour toute valeur de $\mathfrak{S}$ et de $\mathfrak{S}'$.

Prenons une température fixe, arbitraire d'ailleurs, $\mathfrak{S}_0$. L'équation fonctionnelle (19) nous donnera

$$\psi(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}') = -\frac{\psi(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}')}{\psi(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S})}.$$

La température $\mathfrak{S}_0$ étant fixe, $\psi(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S})$ devient une fonction de la seule variable $\mathfrak{S}$; posons

$$F(\mathfrak{S}) = -\lambda\psi(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}), \tag{20}$$

λ étant une constante.

L'équation précédente deviendra

$$\psi(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}') = -\frac{F(\mathfrak{S}')}{F(\mathfrak{S})}. \tag{21}$$

La fonction $\psi(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}')$ est une fonction continue de $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$; lorsque $\mathfrak{S}'$ est supérieur à $\mathfrak{S}$, elle est négative et supérieure à 1 en valeur absolue. La fonction $F(\mathfrak{S})$ possède donc les propriétés suivantes :

Elle est essentiellement positive;

Elle varie d'une manière continue avec la température ϑ;

Elle croît toujours en même temps que la température ϑ.

D'après ce que nous avons dit plus haut (Ire Partie, Chap. I, n° 6), au lieu de prendre la quantité ϑ pour déterminer la température des corps, on peut prendre la quantité $T = F(\vartheta)$, dont la valeur pour chaque température ne dépend plus du choix du thermomètre; T porte le nom de *température absolue*.

Si l'on a adopté, pour représenter les températures, la température absolue T, cas auquel on devra poser, dans toutes les formules précédentes,

$$\vartheta = T,$$

on devra aussi, dans toutes les formules, poser

$$F(\vartheta) = F(T) = T.$$

Si l'on se souvient que

$$\psi(\vartheta_0, \vartheta_0) = -1,$$

on voit que l'égalité (20) donne

$$F(\vartheta_0) = \lambda.$$

La température absolue n'est donc pas entièrement déterminée; à une température arbitraire ϑ_0, elle prend une valeur arbitraire λ. Il est d'usage de prendre pour température ϑ_0 la température qui sert de 0 à l'échelle centigrade et, pour λ, l'inverse d'une certaine constante que l'on rencontre dans l'étude des gaz : *le coefficient de dilatation des gaz parfaits*.

On sait que cette définition de la température absolue a été indiquée par Sir W. Thomson et exposée à plusieurs reprises par M. G. Lippmann.

7. *Énoncé définitif du théorème de Carnot.* — La détermination de la fonction $\psi(\vartheta, \vartheta')$, fournie par l'égalité (21), va nous permettre de donner au théorème de Carnot une forme nouvelle et définitive.

Excluons d'abord :

1° Les cycles de Carnot réversibles, décrits entre les températures ϑ et ϑ', dans lesquels la modification produite à la température ϑ est athermique;

2° Les cycles de Carnot réalisables, non réversibles, de troisième genre, décrits entre les températures ϑ et ϑ', pour lesquels la modification produite à la température ϑ est athermique.

Pour les cycles réversibles, réalisables ou non, les égalités (15 *bis*) et (21) donnent

$$\frac{\mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}} = -\frac{F(\vartheta')}{F(\vartheta)}$$

et, puisque $\mathfrak{Q}$ est différent de zéro,

$$\frac{\mathfrak{Q}}{F(\vartheta)} + \frac{\mathfrak{Q}'}{F(\vartheta')} = 0.$$

Pour les cycles réalisables, non réversibles, de troisième genre et d'espèce c, l'inégalité (16 *bis*) et l'égalité (21) donnent

$$\frac{\mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}} < -\frac{F(\vartheta')}{F(\vartheta)}.$$

Mais, dans ce cas, la quantité $\mathfrak{Q}$ est négative; on a donc

$$\frac{\mathfrak{Q}}{F(\vartheta)} + \frac{\mathfrak{Q}'}{F(\vartheta')} > 0.$$

Pour les autres cycles non réversibles, l'inégalité (17 *bis*), jointe à l'égalité (21), donne

$$\frac{\mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}} > -\frac{F(\vartheta')}{F(\vartheta)}.$$

Dans tous ces cycles, la quantité $\mathfrak{Q}$ est positive; on a donc encore

$$\frac{\mathfrak{Q}}{F(\vartheta)} + \frac{\mathfrak{Q}'}{F(\vartheta')} > 0.$$

Revenons maintenant aux deux classes que nous avons exclues.

Pour tout cycle de la première classe, nous savons que l'on a non seulement $\mathfrak{Q} = 0$, mais encore $\mathfrak{Q}' = 0$; nous pouvons donc encore écrire

$$\frac{\mathfrak{Q}}{F(\mathfrak{T})} + \frac{\mathfrak{Q}'}{F(\mathfrak{T}')} = 0.$$

Pour tout cycle de la seconde classe, nous avons

$$\mathfrak{Q} = 0, \qquad \mathfrak{E} > 0.$$

L'égalité (1), qui se réduit ici à

$$\mathfrak{E} = E\mathfrak{Q}',$$

nous donne alors

$$\mathfrak{Q}' > 0.$$

Nous pouvons donc écrire, pour tout cycle de cette classe,

$$\frac{\mathfrak{Q}}{F(\mathfrak{T})} + \frac{\mathfrak{Q}'}{F(\mathfrak{T}')} > 0.$$

En réunissant tous les résultats que nous venons d'obtenir, nous pouvons énoncer, sous la forme générale que voici, le THÉORÈME DE CARNOT :

1° *Pour tout cycle de Carnot réversible, réalisable ou non, décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$, on a*

$$\frac{\mathfrak{Q}}{F(\mathfrak{T})} + \frac{\mathfrak{Q}'}{F(\mathfrak{T}')} = 0. \tag{22}$$

2° *Pour tout cycle de Carnot réel et non réversible, décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$, on a*

$$\frac{\mathfrak{Q}}{F(\mathfrak{T})} + \frac{\mathfrak{Q}'}{F(\mathfrak{T}')} > 0. \tag{23}$$

On peut mettre ces énoncés sous une forme un peu plus explicite en revenant à la définition de l'effet calorifique total d'une modification ou d'un ensemble de modifications.

Soit Q la somme des quantités de chaleur dégagées par le système durant cet ensemble de modifications; si ces modifications sont réversibles, nous avons

$$\mathfrak{Q} = Q,$$

ce qui permet de remplacer l'égalité (22) par l'égalité

$$(22\,bis) \qquad \frac{Q}{F(\mathfrak{S})} + \frac{Q'}{F(\mathfrak{S}')} = 0.$$

Si les modifications considérées sont réelles et non réversibles, désignons par $[\mathfrak{C}]$ la somme des accroissements que la force vive du système a subis durant ces modifications; nous aurons

$$E\mathfrak{Q} = EQ + [\mathfrak{C}],$$

ce qui nous permettra de remplacer l'inégalité (23) par l'inégalité

$$(23\,bis) \qquad \frac{EQ + [\mathfrak{C}]}{F(\mathfrak{S})} + \frac{EQ' + [\mathfrak{C}]'}{F(\mathfrak{S}')} > 0.$$

Ces divers énoncés ne souffrent plus d'exception.

CHAPITRE III.

L'ENTROPIE ET LE THÉORÈME DE CLAUSIUS.

1. *Conditions et hypothèses.* — Le théorème de Carnot a été, on le sait, généralisé par R. Clausius. Toutefois, cette généralisation n'est légitime que moyennant un certain nombre de conditions et d'hypothèses, dont les unes portent sur le système étudié, les autres sur les modifications que subit ce système.

Il ne nous sera pas utile, dans ce Chapitre, de distinguer, parmi les paramètres qui définissent l'état du système, ceux que nous avons désignés par les lettres $a, b, \ldots, l$ de ceux que nous avons désignés par les lettres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$. Par contre, il nous sera nécessaire de mettre particulièrement en évidence, parmi les paramètres qui définissent l'état du système, la température ϑ. Nous supposerons d'ailleurs que *cette dernière a la même valeur en tous les points du système*. Ainsi l'état du système sera défini par les n paramètres

$$\alpha,\quad \beta,\quad \ldots,\quad \lambda,\quad \vartheta.$$

Le système que nous allons étudier ne sera pas soumis seulement à cette restriction d'avoir, en chacun de ses états, la même température en tous ses points, cette température pouvant d'ailleurs varier d'un état à l'autre. Nous le supposerons encore soumis à deux autres restrictions fondamentales :

Première restriction. — *Soit un état quelconque du système, défini par des valeurs*

$$\alpha,\quad \beta,\quad \ldots,\quad \lambda,\quad \vartheta,$$

des paramètres variables; nous admettrons que l'on puisse toujours trouver, au moins d'une manière, un système de corps étrangers, tous portés à la température ϑ, *et tels que le système considéré, demeure indéfiniment en équilibre dans l'état* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$ *si on le soumet à l'action de ces corps étrangers, maintenus invariables et si on le prend avec un ensemble de vitesses initiales égales à zéro,*

L'énoncé de cette restriction ne constitue pas une vaine précaution. On rencontre souvent, en Physique, des systèmes qui n'y sont pas soumis et auxquels, par conséquent, les considérations qui vont suivre ne sont pas applicables. Citons-en quelques exemples :

1° Un corps conducteur est traversé par des courants électriques. Parmi les paramètres variables qui déterminent l'état de ce conducteur figurent :

Les composantes u, v, w du flux électrique en chaque point (x, y, z) du conducteur;

La densité solide ρ de l'électricité en chaque point de la masse du conducteur;

La densité superficielle σ de l'électricité en chaque point des surfaces de discontinuité qui partagent le conducteur ou qui le limitent.

Peut-on, en faisant agir des corps extérieurs convenablement choisis, maintenir le conducteur dont il s'agit en équilibre, de telle sorte que les variables que nous venons d'énumérer aient toutes des valeurs indépendantes du temps? Cela ne sera pas possible, si l'on n'a pas, en tout point de la masse du conducteur, la relation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

et, en tout point d'une surface de discontinuité dont la normale présente les deux orientations N_1, N_2,

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z) = 0. \end{array}\right. \tag{2}$$

En effet, si ces deux relations ne sont pas vérifiées, les paramètres ρ et σ varieront forcément avec le temps t, en vertu des égalités générales

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

$$\begin{array}{l} u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z) = -\dfrac{\partial \sigma}{\partial t}. \end{array}$$

Les relations (1) et (2) caractérisant les courants que l'on nomme *uniformes*, on voit que l'on peut énoncer la proposition suivante, qui a de graves conséquences en Électrodynamique [1] :

Un système de courants non uniformes ne satisfait pas à la restriction précédente.

2° Une chaîne fermée, parcourue par un courant uniforme, renferme un conducteur électrolytique. Parmi les variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S}$ qui définissent l'état de ce système, figurent l'intensité du courant et

[1] P. Duhem, *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t, III, p. 221.

les variables qui déterminent l'état chimique du système; or, en vertu de la définition des électrolytes, connue sous le nom de *loi de Faraday*, un électrolyte traversé par un courant éprouve, pendant chaque intervalle de temps, un changement chimique proportionnel en grandeur à cet intervalle de temps et à l'intensité du courant. Il serait donc contradictoire d'imaginer des corps extérieurs dont l'action maintiendrait le système en équilibre, et, partant, rendrait invariables à la fois l'intensité du courant et l'état chimique de la chaîne. Ainsi, une chaîne parcourue par des courants même uniformes ne satisfait pas à la restriction précédente si elle renferme des électrolytes; cette conclusion est importante en Électrodynamique (1).

L'hypothèse restrictive précédente entraîne un corollaire remarquable :

Corollaire. — *D'un état quelconque* $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$ *du système à un autre état quelconque* $(\alpha', \beta', \ldots, \lambda', \vartheta')$ *on peut toujours passer par une infinité de modifications réversibles.*

En effet, entre les deux états $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$ et $(\alpha', \beta', \ldots, \lambda', \vartheta')$, on peut toujours, d'une infinité de manières, ranger une suite continue d'états du système; au moyen de corps extérieurs convenablement choisis, ces états peuvent être transformés en états d'équilibre; chacune des suites, constituées comme nous venons de l'indiquer, forme alors une suite continue d'états d'équilibre, ou bien, en vertu d'une hypothèse indiquée au Chap. I, n° 8, une modification réversible.

Seconde restriction. — Imaginons qu'à partir d'un certain état $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$ du système, on lui impose une modification virtuelle

$$\delta\alpha, \quad \delta\beta, \quad \ldots, \quad \delta\lambda, \quad \delta\vartheta.$$

Les actions des corps extérieurs qui le maintiendraient en équilibre en l'état $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$ effectuent un travail virtuel

$$A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots + L\,\delta\lambda + \Theta\,\delta\vartheta.$$

(1) P. Duhem, *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. III, p. 220.

Nous admettrons que *les quantités* A, B, ..., L, Θ *sont des fonctions finies, uniformes et continues des paramètres* α, β, ..., λ, ϑ.

Non plus que la précédente, cette restriction n'est inutile à énoncer, car il n'est nullement évident que tous les systèmes étudiés en Physique y soient soumis. En particulier, M. Marcel Brillouin (¹) a donné des déformations permanentes une théorie qui suppose les quantités A, B, ..., L, Θ, fonctions continues, mais non uniformes, des variables α, β, ..., λ, ϑ.

Nous ajouterons l'hypothèse suivante à celle que nous venons d'énoncer :

Le travail virtuel des actions qu'il faut appliquer à un système donné pour le maintenir en équilibre ne dépend pas de la position absolue que le système occupe dans l'espace ni de la variation de cette position.

Il résulte en premier lieu de cette hypothèse que les quantités A, B, ..., L, Θ ne dépendent pas de celles des variables α, β, ..., λ, ϑ, qui fixent dans l'espace la position absolue du système.

Il en résulte, en second lieu, que celles des variations virtuelles $\delta\alpha$, $\delta\beta$, ..., $\delta\lambda$, $\delta\vartheta$ qui correspondent aux variables fixant la position absolue du système dans l'espace ne figurent pas dans la somme

$$A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots + L\,\delta\lambda + \Theta\,\delta\vartheta.$$

Le coefficient de chacune d'elles est identiquement nul.

2. *Coefficients calorifiques du système en équilibre.* — Pour expliquer commodément ce qui va suivre, nous emploierons le langage de la Géométrie à n dimensions, n étant le nombre des paramètres α, β, ..., λ, ϑ, qui définissent l'état du système. Les énoncés auxquels nous parviendrons pourront toujours être représentés par des figures planes s'il n'y a qu'un seul paramètre tel que α, β, ..., λ, et par des figures dans l'espace s'il y en a deux.

(¹) Marcel Brillouin, *Déformations permanentes et Thermodynamique* (*Comptes rendus*, 6, 13, 20 et 27 février 1888).

Un état du système, correspondant à un système de valeurs des coordonnées $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, sera représenté par un *point* dans l'espace à n dimensions. Une modification, correspondant à une série linéaire de valeurs de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, sera représentée par une *ligne*.

Le système étant pris dans un état déterminé $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$ les actions $A, B, \ldots, L, \Theta$ qui le peuvent maintenir en équilibre dans cet état sont, par hypothèse, des fonctions uniformes et continues des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$.

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} A = f_\alpha(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta), \\ B = f_\beta(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ L = f_\lambda(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta), \\ \Theta = f_\vartheta(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta). \end{array}\right.$$

Ces équations (1) sont les *équations d'équilibre du système;* ces équations seront dites *connues* lorsqu'on connaîtra la forme des n fonctions $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$.

Soit U la fonction uniforme et continue de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, qui représente l'énergie interne du système. Posons

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} R_\alpha = \dfrac{\partial U}{\partial \alpha} - \dfrac{f_\alpha}{E}, \\ R_\beta = \dfrac{\partial U}{\partial \beta} - \dfrac{f_\beta}{E}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ R_\lambda = \dfrac{\partial U}{\partial \lambda} - \dfrac{f_\lambda}{E}, \\ C = \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} - \dfrac{f_\vartheta}{E}. \end{array}\right.$$

Les n quantités $R_\alpha, R_\beta, \ldots, R_\lambda$, C définies par ces équations seront des fonctions uniformes de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$. Ce seront [Ire Partie, Chap. III, égalités (12) et (12 *bis*)] les *coefficients calorifiques du système en équilibre*. Parmi ces paramètres, il en est un qui se distinguera des autres par des propriétés particulières; c'est le coefficient C; nous le nommerons la *capacité calorifique du système, relative aux variables* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$.

Comme la quantité U d'une part (Ire Partie, Chap. II, n° **2**, dixième convention) et les quantités A, B, ..., L, Θ d'autre part (ce Chapitre, n° **1**), les quantités R_α, R_β, ..., R_λ, C, ne dépendent pas de celles des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, qui fixent la position absolue du système dans l'espace. De plus, ceux des coefficients calorifiques qui multiplieraient, dans l'expression de dQ, les variations de ces dernières variables sont identiquement nuls.

L'équation

$$(3) \qquad dQ = -(R_\alpha \delta\alpha + R_\beta \delta\beta + \ldots + R_\lambda \delta\lambda + C \delta\vartheta)$$

détermine [Ire Partie, Chap. III, égalité (13)] la quantité de chaleur dégagée par le système tandis qu'il subit la modification réelle ou virtuelle $(\delta\alpha, \delta\beta, \ldots, \delta\lambda, \delta\vartheta)$.

L'équation différentielle

$$(4) \qquad R_\alpha d\alpha + R_\beta d\beta + \ldots + R_\lambda d\lambda + C d\vartheta = 0$$

représente, dans l'espace à n dimensions considéré, une famille d'espaces à $(n-1)$ dimensions (de lignes, dans l'espace à deux dimensions, de surfaces dans l'espace à trois dimensions). Nous admettrons que, *par tout point* $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$ *de l'espace à n dimensions, il passe un et un seul de ces espaces à* $(n-1)$ *dimensions; que, de plus, l'espace ainsi déterminé, qui passe par le point* $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$, *se déplace et se déforme d'une manière continue lorsque le point* $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$ *se déplace d'une manière continue.*

Nous admettrons en outre qu'un espace à adiabatiques réversibles ne se ferme jamais sur lui-même comme une ligne fermée ou une surface fermée, mais qu'il forme toujours un espace simplement connexe, s'étendant jusqu'aux limites du champ des valeurs des α, $\beta, \ldots, \lambda, \vartheta$.

Considérons une ligne quelconque tracée tout entière en l'un de ces espaces à $(n-1)$ dimensions. Cette ligne représentera une suite continue d'états du système. En chacun de ces états $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$, supposons le système entouré de corps qui ont la même température que lui et qui exercent sur lui des actions données par les égalités (1). Cette suite d'états sera une suite d'états d'équilibre. D'après l'hypothèse indiquée au Chap. I, n° **8**, cette suite d'états d'équilibre constituera une modification réversible. Les égalités (3) et (4) montrent que, pour tout élément de cette modification réversible, on aura

$$dQ = 0,$$

en sorte que cette modification réversible sera adiabatique. Ainsi *toute ligne tracée en entier en l'un des espaces à* $(n-1)$ *dimensions définis par l'équation* (4) *représente une modification adiabatique réversible du système*. Nous nommerons chacun des espaces à $(n-1)$ dimensions définis par l'équation (4) un *espace à adiabatiques réversibles*.

Prenons deux points, m et n, dans l'espace à n dimensions considéré; entre ces deux points, m et n, menons deux lignes, l et l', telles que chacune d'elles n'ait pas plus d'un point commun avec un même espace à adiabatiques réversibles. Les propositions suivantes, évidentes géométriquement lorsque les espaces à adiabatiques réversibles sont des lignes $(n=2)$ ou des surfaces $(n=3)$, peuvent être énoncées d'une manière entièrement générale :

L'espace à adiabatiques réversibles mené par un point a de la ligne l rencontre la ligne l' en un et un seul point a'; les deux points a et a' sont dits *points correspondants*.

Si les trois points a', b', c' de la ligne l' correspondent respectivement aux trois points a, b, c de la ligne l; si le point b est situé, sur la ligne l, entre les points a et c, le point b' est situé sur la ligne l', entre les points a' et c'.

Si deux points a, b sont infiniment voisins sur la ligne l, leurs correspondants a', b' sont infiniment voisins sur la ligne l'.

Au point m sur la ligne l correspond le même point m sur la ligne l'; au point n sur la ligne l correspond le même point n sur la ligne l'.

Ce mode de correspondance entre les points de deux lignes va nous être utile dans la démonstration du théorème de Clausius, démonstration que nous allons maintenant aborder.

3. *Démonstration du théorème de Clausius.* — Une ligne quelconque, tracée dans l'espace à n dimensions considéré, représente une suite d'états du système; si, dans chacun de ces états, nous supposons le système entouré de corps à la même température que lui et exerçant sur lui des actions données par les égalités (1), chacun de ces états deviendra un état d'équilibre, et la suite de ces états sera une modification réversible. Ainsi, *une ligne quelconque, tracée dans l'espace des* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, *représente toujours, d'une et d'une seule manière, une modification réversible du système.*

Nous allons étudier les propriétés de semblables transformations; mais nous supposerons provisoirement chacune des modifications réversibles étudiées soumise à certaines restrictions que nous lèverons ensuite une à une :

1° La ligne qui représente une des modifications réversibles étudiées ne présente aucune partie d'étendue finie tracée en entier dans un espace à adiabatiques réversibles;

2° La ligne qui représente une des modifications réversibles étudiées ne rencontre jamais plus d'une fois un même espace à adiabatiques réversibles. Cette dernière restriction suppose évidemment cette autre : la ligne considérée ne passe pas plus d'une fois par un même point.

Considérons deux modifications réversibles l, l', soumises aux restrictions précédentes; toutes deux prennent le système dans le même état initial, représenté par le point m, et l'amènent au même état final, représenté par le point n.

Soient a, b deux états infiniment voisins de la modification l, l'état b venant après l'état a lorsqu'on suit la modification l en allant de m vers n. Soient a', b' les deux états de la modification l' qui correspondent respectivement aux deux états a, b. D'après ce que nous avons vu, les deux états a', b' sont infiniment voisins sur la modification l' et, lorsqu'on parcourt cette modification de m en n, on rencontre l'état a' avant l'état b'.

Soient ϑ la température du système pris dans l'état a et ϑ' la température du système pris dans l'état a'. Soient dQ la quantité de chaleur dégagée par le système pendant qu'il subit la modification réversible infiniment petite ab et dQ$'$ la quantité de chaleur dégagée par le système pendant qu'il subit la modification réversible infiniment petite $a'b'$. Nous allons nous proposer de démontrer que l'on a

$$\frac{dQ}{F(\vartheta)} = \frac{dQ'}{F(\vartheta')}. \tag{5}$$

Par le point a, menons une ligne isothermique jusqu'au point c où elle rencontre l'espace à adiabatiques réversibles mené par le point b; en général, le point c sera infiniment voisin des deux points a et b. De même, par le point a', menons une ligne isothermique, jusqu'au point c' où elle rencontre l'espace à adiabatiques réversibles mené par le point b'; en général, le point c' sera infiniment voisin des points a' et b'. Nous supposerons réalisées, pour le moment, les hypothèses que nous venons d'indiquer, quitte à revenir plus tard au cas où elles ne le seraient pas.

Joignons les deux points c, b par une ligne infiniment petite tracée en l'espace à adiabatiques réversibles auquel appartiennent ces deux points; joignons de même les deux points c', b' par une ligne infiniment petite tracée en l'espace à adiabatiques réversibles auquel appartiennent ces deux points.

Les lignes ac, cb, $a'c'$, $c'b'$ représentent chacune une modification réversible infiniment petite du système.

Les deux modifications réversibles cb, $c'b'$ sont adiabatiques; lorsque le système subit l'une quelconque d'entre elles, il dégage une quantité de chaleur égale à zéro.

Soient dQ_1 la quantité de chaleur que le système dégage lorsqu'il décrit l'isothermique réversible ac et dQ'_1 la quantité de chaleur que le système dégage lorsqu'il décrit l'isothermique réversible $c'a'$.

Considérons le cycle fermé et réversible $abca$; lorsque le système décrit ce cycle, il dégage une quantité de chaleur $(dQ - dQ_1)$; en appliquant l'égalité (16) (I^{re} Partie, Chap. III) à chacun des éléments de ce cycle, nous trouverons sans peine l'égalité

$$E(dQ - dQ_1) = \int (A\,d\alpha + B\,d\beta + \ldots + L\,d\lambda + \Theta\,d\vartheta),$$

l'intégrale s'étendant au cycle $abca$ tout entier.

Soit $(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \Im_1)$ un des points de ce cycle; soient A_1, B_1, ..., L_1, Θ_1 les valeurs que prennent, en ce point, les fonctions A, B, ..., L, Θ; nous pourrons écrire l'égalité précédente

$$\begin{aligned} E(dQ - dQ_1) = A_1 \int d\alpha + B_1 \int d\beta + \ldots + L_1 \int d\lambda + \Theta_1 \int d\Im \\ + \int [(A - A_1)\,d\alpha + (B - B_1)\,d\beta + \ldots \\ + (L - L_1)\,d\lambda + (\Theta - \Theta_1)\,d\Im]. \end{aligned}$$

Mais, comme le cycle est fermé, on a

$$\int d\alpha = 0, \qquad \int d\beta = 0, \qquad \ldots, \qquad \int d\lambda = 0, \qquad \int d\Im = 0.$$

D'autre part, comme les quantités A, B, ..., L, Θ varient par hypothèse d'une manière continue avec la position du point $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \Im)$, les quantités

$$(A - A_1), \quad (B - B_1), \quad \ldots, \quad (L - L_1), \quad (\Theta - \Theta_1)$$

sont des quantités infiniment petites, au moins du même ordre que les dimensions du cycle. La quantité

$$\int [(A - A_1)\,d\alpha + (B - B_1)\,d\beta + \ldots + (L - L_1)\,d\lambda + (\Theta - \Theta_1)\,d\Im]$$

est donc un infiniment petit d'ordre supérieur aux dimensions du cycle, en sorte que l'égalité précédente permet d'écrire

$$dQ - dQ_1 = 0. \tag{6}$$

Une démonstration analogue, appliquée au cycle $a'b'c'a'$, donne l'égalité

$$dQ' + dQ'_1 = 0. \tag{7}$$

Faisons maintenant décrire au système :

1° L'isothermique réversible ac, relative à la température $\Im$;

2° L'adiabatique réversible cb;
3° L'adiabatique réversible bb';
4° L'adiabatique réversible $b'c'$;
5° L'isothermique réversible $c'a'$, relative à la température $\mathfrak{S}'$;
6° L'adiabatique réversible $a'a$.

Le système aura décrit un cycle de Carnot réversible entre les températures $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$; à la température $\mathfrak{S}$, il aura dégagé une quantité de chaleur dQ_1; à la température $\mathfrak{S}'$, une quantité de chaleur dQ'_1; on aura donc [Chap. II, égalité (22 *bis*)]

$$\frac{dQ_1}{F(\mathfrak{S})} + \frac{dQ'_1}{F(\mathfrak{S}')} = 0.$$

En vertu des égalités (6) et (7), cette égalité fournit l'égalité (5), que nous voulions démontrer.

Considérons successivement tous les éléments de la transformation l, en allant de m vers n; les éléments qui leur correspondent sur la transformation l' décriront une et une seule fois la transformation l' en allant de m' vers n'. Pour chaque groupe d'éléments correspondants, écrivons l'égalité analogue à l'égalité (5) et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouverons l'égalité

$$\int_l \frac{dQ}{F(\mathfrak{S})} = \int_{l'} \frac{dQ'}{F(\mathfrak{S}')}, \tag{8}$$

qui nous conduit à énoncer la proposition suivante :

Considérons toutes les modifications réversibles (soumises aux restrictions indiquées) qui conduisent le système de l'état m à l'état n, ces deux états étant quelconques; pour toutes ces modifications, l'intégrale

$$\int \frac{dQ}{F(\mathfrak{S})}$$

a la même valeur.

Il s'agit maintenant de lever successivement les diverses restrictions que nous avons admises pour effectuer la démonstration précédente.

Nous avons admis qu'en tout point a de la ligne l on pouvait mener une isothermique rencontrant l'espace à adiabatiques réversibles mené par le point b, infiniment voisin du point a en un point c, qui soit lui-même infiniment voisin du point a. Cela revient à admettre, on le voit aisément, que la ligne isothermique issue du point a n'est pas tangente au point a à l'espace à adiabatiques réversibles qui passe par ce point. Une hypothèse semblable a été faite pour tout point a' de la ligne l'.

En premier lieu, on voit aisément que, s'il existe soit sur la ligne l, soit sur la ligne l', soit sur toutes deux, un nombre limité de points isolés les uns des autres, pour lequel l'hypothèse précédente cesse d'être exacte, le théorème précédent ne sera certainement pas en défaut. Il ne pourrait donc être en défaut que s'il existait sur l'une au moins de ces lignes, la ligne l par exemple, une portion d'étendue finie, la portion fgh, en tout point de laquelle l'isothermique réversible serait tangente à l'espace à adiabatiques réversibles.

Si de semblables conditions sont remplies pour la ligne fgh, deux cas sont à distinguer.

Il est possible que, du point f au point h, on puisse mener des lignes $fg'h$ infiniment voisines de la ligne fgh et qui échappent aux conditions précédentes.

Il est possible au contraire que tous les points de la ligne fgh appartiennent à un domaine D, tracé dans l'espace $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S}$, et qu'en tout point de ce domaine l'isothermique réversible soit tangente à l'espace à adiabatiques réversibles.

Dans le premier cas, l'intégrale $\int \frac{dQ}{F(\mathfrak{S})}$ étendue à la ligne $mfg'hn$ aura, d'après la démonstration précédente, la même valeur que l'intégrale de même forme étendue à la ligne l'. Sa valeur ne variera donc pas lorsque la ligne $mfg'hn$ variera d'une manière continue de manière à tendre vers la ligne $mfghn$ ou l; or, dans ces conditions, cette intégrale tend certainement vers

$$\int_l \frac{dQ}{F(\mathfrak{S})}.$$

On a donc encore dans ce cas

$$\int_l \frac{dQ}{F(\mathfrak{S})} = \int_{l'} \frac{dQ'}{F(\mathfrak{S}')}.$$

Seul, le second des deux cas que nous venons de distinguer demeure exclu de nos recherches.

Essayons de caractériser ce cas d'une manière plus précise.

Une isothermique réversible satisfait à l'équation différentielle

$$d\vartheta = 0.$$

Un espace à adiabatiques réversibles est défini par l'équation différentielle

$$(4) \qquad R_\alpha\, d\alpha + R_\beta\, d\beta + \ldots + R_\lambda\, d\lambda + C\, d\vartheta = 0.$$

Pour qu'en tout point $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$ du domaine D une isothermique réversible quelconque soit tangente à l'espace à adiabatiques réversibles, il faut et il suffit que l'on ait, en tout point du domaine D,

$$(9) \qquad R_\alpha = 0, \qquad R_\beta = 0, \qquad \ldots, \qquad R_\lambda = 0.$$

Nous excluons donc provisoirement de nos recherches les systèmes qui vérifieraient les égalités (9) *en tous les points d'un domaine d'étendue finie appartenant à l'espace des* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$.

Nous avons admis jusqu'ici que chacune des deux modifications l et l' ne rencontrait pas en plus d'un point un même espace à adiabatiques réversibles. Nous allons maintenant nous affranchir de cette restriction et admettre que chacune des deux modifications l et l' peut rencontrer un même espace à adiabatiques réversibles en un nombre fini de points, isolés les uns des autres.

Menons l'espace à adiabatiques réversibles E(m) qui passe par le point m et l'espace à adiabatiques réversibles E(n) qui passe par le point n. Ces deux espaces à $(n-1)$ dimensions partagent l'espace à n dimensions en trois régions; une de ces régions est comprise entre les espaces E(m) et E(n); les deux autres sont extérieures. Si l'on mène la droite de manière à rencontrer le point m au point n, et si l'on suit cette droite de manière à rencontrer le point m plus tôt que le point n, avant d'arriver au point m, on se trouve dans une région que je nommerai *la première;* au moment où l'on passe par le point m, on pénètre dans une région que je nommerai *la deuxième;* au moment où l'on passe par le point n, on quitte cette seconde région pour pénétrer dans une région que je nommerai *la troisième* (1).

Il peut arriver que la ligne l ait avec un espace à adiabatiques réversibles E, autre que l'espace $E(m)$ ou l'espace $E(n)$, un point de rencontre p, sans traverser cet espace en ce point de rencontre. Si l'on mène deux espaces à adiabatiques réversibles infiniment voisins de l'espace E, et situés de part et d'autre de cet espace, l'un d'eux n'aura avec la ligne l aucune rencontre infiniment voisine du point p, tandis que l'autre aura avec la ligne l deux rencontres infiniment voisines du point p.

Prenons sur la ligne l tous les points, analogues à p, où la ligne l vient rencontrer un espace à adiabatiques réversibles sans le traverser; prenons de même, sur la ligne l', tous les points où la ligne l' vient rencontrer un espace à adiabatiques réversibles sans le traverser. Par tous ces points, menons des espaces à adiabatiques réversibles. Joints aux espaces $E(m)$ et $E(n)$, ils divisent l'espace en un certain nombre de *sous-régions*.

Tous les espaces à adiabatiques réversibles situés dans une même sous-région rencontrent la ligne l en un même nombre N de points et la ligne l' en un même nombre N' de points. Si la sous-région considérée fait partie de la deuxième région, les deux nombres N et N' sont impairs; si la sous-région considérée est située dans la première ou dans la troisième région, N et N' sont pairs ou nuls.

Considérons une sous-région comprise dans la deuxième région; dans cette sous-région, menons un espace à adiabatiques réversibles E; il rencontre la ligne l en $(2k+1)$ points; numérotons ces points dans l'ordre où les rencontre la ligne l allant du point m au point n; soient $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}, a_{2k+1}$ ces points. Ce même espace à adiabatiques réversibles rencontre la ligne l' en $(2k'+1)$ points; numérotons ces points dans l'ordre où les rencontre la ligne l' allant du point m au point n; $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{2k'}, a'_{2k'+1}$ ces points.

Sur la ligne l, menée de m vers n, prenons un point b_1 qui soit ren-

(1) Au cas où les deux points m et n seraient sur un même espace à adiabatiques réversibles, la première et la troisième région coïncideraient.

contré infiniment peu après le point a_1, et qui se trouve ainsi dans la même sous-région que le point a_1. Par ce point b_1, menons un espace à adiabatiques réversibles F; d'après ce que nous avons supposé au sujet des espaces à adiabatiques réversibles, l'espace F sera partout infiniment voisin de l'espace E, sans jamais le rencontrer. L'espace F rencontrera la ligne en l en $(2k+1)$ points $b_1, b_2, \ldots, b_{2k}, b_{2k+1}$, respectivement voisins des points $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}, a_{2k+1}$; il rencontrera la ligne l' en $(2k'+1)$ points $b'_1, b'_2, \ldots, b'_{2k'}, b'_{2k'+1}$, respectivement voisins des points $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{2k'}, a'_{2k'+1}$.

Sur la ligne l, menée de m vers n, les points a_i, b_i sont rencontrés dans l'ordre suivant

$$a_1, \quad b_1, \quad b_2, \quad a_2, \quad a_3, \quad b_3, \quad \ldots, \quad b_{2k}, \quad a_{2k}, \quad a_{2k+1}, \quad b_{2k+1},$$

ce qui nous donne $(2k+1)$ modifications réversibles infiniment petites ayant leur ligne représentative entre les espaces E et F. Ces modifications sont

$$a_1 b_1, \quad b_2 a_2, \quad a_3 b_3, \quad \ldots, \quad b_{2k} a_{2k}, \quad a_{2k+1} b_{2k+1}.$$

Adoptons, pour ces modifications, les notations suivantes :

Modification subie par le système.	Température initiale du système.	Chaleur dégagée par le système.
$a_1 b_1$	ϑ_1	dQ_1
$b_2 a_2$	ϑ_2	dQ_2
$a_3 b_3$	ϑ_3	dQ_3
....	..	...
$b_{2k} a_{2k}$	ϑ_{2k}	dQ_{2k}
$a_{2k+1} b_{2k+1}$	ϑ_{2k+1}	dQ_{2k+1}

Sur la ligne l', menée de m vers n, les points a'_i, b'_i sont rencontrés dans l'ordre suivant

$$a'_1, \quad b'_1, \quad b'_2, \quad a'_2, \quad a'_3, \quad b'_3, \quad \ldots, \quad b'_{2k'}, \quad a'_{2k'}, \quad a'_{2k'+1}, \quad b'_{2k'+1},$$

ce qui nous donne $(2k'+1)$ modifications réversibles infiniment petites ayant leur ligne représentative entre les espaces E et F. Ces modifications sont

$$a'_1 b'_1,\quad b'_2 a'_2,\quad a'_3 b'_3,\quad \ldots,\quad b'_{2k'} a'_{2k'},\quad a'_{2k'+1} b'_{2k'+1}.$$

Adoptons, pour ces modifications, les notations suivantes :

Modification subie par le système.	Température initiale du système.	Chaleur dégagée par le système.
$a'_1 b'_1$	ϑ'_1	dQ'_1
$b'_2 a'_2$	ϑ'_2	dQ'_2
$a'_3 b'_3$	ϑ'_3	dQ'_3
....	..	...
$b'_{2k'} a'_{2k'}$	$\vartheta'_{2k'}$	$dQ'_{2k'}$
$a'_{2k'+1} b'_{2k'+1}$	$\vartheta'_{2k'+1}$	$dQ'_{2k'+1}$

Considérons les deux transformations $a_1 b_1$ et $b_2 a_2$. Un raisonnement analogue à celui qui nous a fourni l'égalité (5) nous donnera sans peine

$$\frac{dQ_1}{F(\vartheta_1)} + \frac{dQ_2}{F(\vartheta_2)} = 0.$$

De même, la considération des deux modifications $a_3 b_3$ et $b_4 a_4$ nous donnera

$$\frac{dQ_3}{F(\vartheta_3)} + \frac{dQ_4}{F(\vartheta_4)} = 0.$$

On continuera de même jusqu'à considérer les deux modifications $a_{2k-1} b_{2k-1}$ et $b_{2k} a_{2k}$, qui donneront

$$\frac{dQ_{2k-1}}{F(\vartheta_{2k-1})} + \frac{dQ_{2k}}{F(\vartheta_{2k})} = 0.$$

Semblablement, on prouvera que l'on a

$$\frac{dQ'_1}{F(\vartheta'_1)} + \frac{dQ'_2}{F(\vartheta'_2)} = 0,$$
$$\frac{dQ'_3}{F(\vartheta'_3)} + \frac{dQ'_4}{F(\vartheta'_4)} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{dQ'_{2k'-1}}{F(\vartheta_{2k'-1})} + \frac{dQ'_{2k'}}{F(\vartheta_{2k'})} = 0.$$

Enfin, la comparaison des modifications $a_{2k+1}\,b_{2k+1}$ et $a'_{2k'+1}\,b'_{2k'+1}$ donne l'égalité

$$\frac{dQ_{2k+1}}{F(\vartheta_{2k+1})} = \frac{dQ'_{2k'+1}}{F(\vartheta_{2k'+1})}.$$

Ces diverses égalités permettent d'écrire

$$\begin{aligned}&\frac{dQ_1}{F(\vartheta_1)} + \frac{dQ_2}{F(\vartheta_2)} + \ldots + \frac{dQ_{2k}}{F(\vartheta_{2k})} + \frac{dQ_{2k+1}}{F(\vartheta_{2k+1})}\\ &= \frac{dQ'_1}{F(\vartheta'_1)} + \frac{dQ'_2}{F(\vartheta'_2)} + \ldots + \frac{dQ'_{2k'}}{F(\vartheta'_{2k'})} + \frac{dQ'_{2k'+1}}{F(\vartheta'_{2k'+1})}.\end{aligned}$$

On peut écrire une égalité analogue pour tout système formé par deux espaces à adiabatiques réversibles infiniment voisins tracés dans la sous-région considérée; on aura donc pour cette sous-région tout entière

$$(10) \qquad \sum \frac{dQ}{F(\vartheta)} = \sum \frac{dQ'}{F(\vartheta')};$$

dans cette égalité, le premier signe $\sum$ s'étend à tous les éléments de la modification l qui sont situés dans la sous-région considérée et le second à tous les éléments de la modification l' situés dans la même sous-région.

A chaque sous-région comprise dans la deuxième région on peut appliquer un raisonnement semblable qui fournira une égalité analogue, en sorte qu'on peut supposer l'égalité (10) étendue à la deuxième région tout entière.

Considérons maintenant une sous-région comprise soit dans la première, soit dans la troisième région; dans cette sous-région, menons un espace à adiabatiques réversibles E; il rencontre la ligne l en $2k$ points; numérotons ces points dans l'ordre où on les rencontre sur la ligne l en allant du point m au point n; soient $a_1, a_2, \ldots, a_{2k-1}, a_{2k}$ ces points.

Sur la ligne l, menée de m vers n, prenons un point b_1 qui soit rencontré infiniment peu après le point a_1, et qui se trouve ainsi dans la même sous-région que le point a_1; par ce point b_1, menons un espace à adiabatiques réversibles F; d'après ce que nous avons supposé au sujet des espaces à adiabatiques réversibles, l'espace F sera partout infiniment voisin de l'espace E sans jamais le rencontrer. L'espace F rencontrera la ligne l en $2k$ points $b_1, b_2, \ldots, b_{2k-1}, b_{2k}$, respectivement voisins des points $a_1, a_2, \ldots, a_{2k-1}, a_{2k}$.

Sur la ligne l, les points a_i, b_i sont rencontrés dans l'ordre suivant

$$a_1, \quad b_1, \quad b_2, \quad a_2, \quad a_3, \quad b_3, \quad \ldots, \quad a_{2k-1}, \quad b_{2k-1}, \quad b_{2k}, \quad a_{2k},$$

ce qui donne $2k$ modifications réversibles infiniment petites ayant leur ligne représentative comprise entre les espaces E et F; ces modifications sont

$$a_1 b_1, \quad b_2 a_2, \quad a_3 b_3, \quad \ldots, \quad a_{2k-1} b_{2k-1}, \quad b_{2k} a_{2k}.$$

La considération de ces modifications donne aisément les égalités

$$\frac{dQ_1}{F(\mathfrak{Z}_1)} + \frac{dQ_2}{F(\mathfrak{Z}_2)} = 0,$$
$$\frac{dQ_3}{F(\mathfrak{Z}_3)} + \frac{dQ_4}{F(\mathfrak{Z}_4)} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{dQ_{2k-1}}{F(\mathfrak{Z}_{2k-1})} + \frac{dQ_{2k}}{F(\mathfrak{Z}_{2k})} = 0,$$

qui donnent elles-mêmes l'égalité

$$\frac{dQ_1}{F(\mathfrak{Z}_1)} + \frac{dQ_2}{F(\mathfrak{Z}_2)} + \ldots + \frac{dQ_{2k}}{F(\mathfrak{Z}_{2k})} = 0.$$

On peut écrire une égalité analogue pour tout système formé par deux espaces à adiabatiques réversibles infiniment voisins tracés dans la sous-région considérée; on aura donc, pour cette sous-région tout entière

$$\sum \frac{dQ}{F(\mathfrak{Z})} = 0, \tag{11}$$

le signe $\sum$ s'étendant à tous les éléments de la modification l qui sont situés dans la sous-région considérée.

A chaque sous-région comprise dans la première ou dans la troisième région on peut appliquer un raisonnement semblable qui fournira une égalité analogue, en sorte que l'égalité (11) peut être étendue à l'ensemble de la première et de la troisième région.

On démontrerait de même l'égalité

$$\sum \frac{dQ'}{F(\vartheta')} = 0, \tag{11 bis}$$

dans laquelle le signe $\sum$ s'étend à tous les éléments de la modification l' qui sont situés dans la première ou dans la troisième région.

Des égalités (10), (11) et (11 *bis*), on déduit facilement l'égalité

$$\int_l \frac{dQ}{F(\vartheta)} = \int_{l'} \frac{dQ'}{F(\vartheta')}. \tag{8}$$

Il nous reste à lever une dernière restriction.

Nous avons admis que ni la modification l, ni la modification l', ne contenait une portion d'étendue finie tracée en entier en un espace à adiabatiques réversibles.

Supposons maintenant que la modification l présente certaines portions d'étendue finie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, tracées en entier sur les espaces à adiabatiques réversibles $E_1, E_2, \ldots$; que, de même, la modification l' présente certaines portions d'étendue finie $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots$, tracées en entier sur les espaces à adiabatiques réversibles $E'_1, E'_2, \ldots$.

Pour toute modification adiabatique réversible, on a constamment

$$dQ = 0.$$

On aura donc

$$\int_{\lambda_1} \frac{dQ}{F(\vartheta)} = 0, \qquad \int_{\lambda_2} \frac{dQ}{F(\vartheta)} = 0, \qquad \ldots, \tag{12}$$

et pareillement

$$\int_{\lambda'_1} \frac{dQ'}{F(\vartheta')} = 0, \qquad \int_{\lambda'_2} \frac{dQ'}{F(\vartheta')} = 0, \qquad \ldots. \tag{12 bis}$$

On pourra donc, sans modifier la valeur de $\int_l \frac{dQ}{F(\Im)}$ et de $\int_{l'} \frac{dQ'}{F(\Im')}$, retrancher de la modification l, les portions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, et de la modification l', les portions $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots$. Il suffira alors de faire figurer les espaces $E_1, E_2, \ldots$ et les espaces $E'_1, E'_2, \ldots$, au nombre de ceux qui limitent les sous-régions, puis de reproduire les raisonnements précédents, pour prouver que l'on a

$$(13) \qquad \sum \frac{dQ}{F(\Im)} = \sum \frac{dQ'}{F(\Im')},$$

le premier signe $\sum$ s'étendant à tous ceux des éléments de la modification l qui ne sont pas compris dans les portions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, et le second signe $\sum$ s'étendant à tous ceux des éléments de la modification l' qui ne sont pas compris dans les portions $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots$.

L'ensemble des égalités (12), (12 *bis*) et (13) fournit aisément l'égalité

$$(8) \qquad \int_l \frac{dQ}{F(\Im)} = \int_{l'} \frac{dQ'}{F(\Im')}.$$

Cette égalité n'est donc plus soumise qu'aux restrictions indiquées au n° 1 et aussi *à cette condition que l'on n'ait pas identiquement, en tous les points d'un domaine d'étendue finie faisant partie de l'espace des* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \Im$,

$$(9) \qquad R_\alpha = 0, \qquad R_\beta = 0, \qquad \ldots, \qquad R_\lambda = 0.$$

4. *Propriété des cycles réversibles.* — Imaginons que la modification réversible l ramène le système à son état initial; l'état n est alors identique à l'état m; parmi les autres modifications réversibles l' susceptibles de conduire le système du même état initial au même état final, on peut ranger l'absence de toute modification; dans ce cas, on a évidemment

$$\int_{l'} \frac{dQ'}{F(\Im')} = 0.$$

L'égalité (8) nous fournit alors ce théorème célèbre de Clausius :

Pour le cycle réversible, on a

$$\int \frac{dQ}{F(\vartheta)} = 0. \tag{14}$$

Supposons en particulier le cycle isothermique; la température ϑ demeurant constante le long du parcours du cycle, il en est de même de la fonction $F(\vartheta)$ et l'égalité (14) peut s'écrire

$$\int dQ = 0$$

ou

$$\int (R_\alpha\, d\alpha + R_\beta\, d\beta + \ldots + R_\lambda\, d\lambda) = 0.$$

En vertu des égalités (2), cette égalité devient

$$\int \left(\frac{\partial U}{\partial \alpha}\, d\alpha + \frac{\partial U}{\partial \beta}\, d\beta + \ldots + \frac{\partial U}{\partial \lambda}\, d\lambda \right)$$
$$- \frac{1}{E} \int (A\, d\alpha + B\, d\beta + \ldots + L\, d\lambda) = 0.$$

Mais, pour un cycle isothermique, on a

$$\int \left(\frac{\partial U}{\partial \alpha}\, d\alpha + \frac{\partial U}{\partial \beta}\, d\beta + \ldots + \frac{\partial U}{\partial \lambda}\, d\lambda \right) = 0.$$

L'égalité précédente devient donc

$$\int (A\, d\alpha + B\, d\beta + \ldots + L\, d\lambda) = 0. \tag{15}$$

Lorsqu'un système parcourt un cycle isothermique réversible, les actions extérieures appliquées à ce système effectuent un travail total égal à zéro.

Ce théorème est dû à M. J. Moutier; Clausius et M. J. Moutier en ont fait un fréquent usage. On peut remarquer qu'il est exact même pour les systèmes pour lesquels les égalités (9) seraient vérifiées.

5. *L'entropie.* — L'égalité (8) peut s'énoncer de la manière suivante, en désignant par R_α, R_β, ..., R_λ, C les coefficients calorifiques du système en équilibre :

L'intégrale curviligne

$$\int_l \frac{1}{F(\mathfrak{S})}(R_\alpha\, d\alpha + R_\beta\, d\beta + \ldots + R_\lambda\, d\lambda + C\, d\mathfrak{S})$$

a une valeur qui dépend uniquement du point initial

$$(\alpha_0, \beta_0, \ldots, \lambda_0, \mathfrak{S}_0)$$

et du point final

$$(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \mathfrak{S}_1).$$

On sait que ce théorème équivaut à celui-ci :

Il existe une infinité de fonctions uniformes des variables α, β, ..., λ, $\mathfrak{S}$, *différant les uns des autres par une constante, qui sont telles que l'on ait*

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{R_\alpha}{F(\mathfrak{S})} = -\dfrac{\partial S}{\partial \alpha}, \\ \dfrac{R_\beta}{F(\mathfrak{S})} = -\dfrac{\partial S}{\partial \beta}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{R_\lambda}{F(\mathfrak{S})} = -\dfrac{\partial S}{\partial \lambda}, \\ \dfrac{C}{F(\mathfrak{S})} = -\dfrac{\partial S}{\partial \mathfrak{S}}, \end{array}\right.$$

$S(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S})$ *désignant une quelconque de ces fonctions.*

Cette fonction a reçu de Clausius le nom d'*entropie du système.*

Ce théorème peut encore s'énoncer en abrégé de la manière suivante :

Pour toute modification réversible infiniment petite, on a

$$(17)\qquad \frac{dQ}{F(\mathfrak{S})} = dS.$$

Si nous nous souvenons, 1° que les quantités

$$R_\alpha, \quad R_\beta, \quad \ldots, \quad R_\lambda, \quad C$$

ne dépendent pas de celles des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, qui déterminent la position absolue du système dans l'espace;

2° Que, dans l'expression

$$R_\alpha \,\delta\alpha + R_\beta \,\delta\beta + \ldots + R_\lambda \,\delta\lambda + C \,\delta\vartheta,$$

celles des variations $\delta\alpha, \delta\beta, \ldots, \delta\lambda, \delta\vartheta$ qui déterminent seulement le changement de position absolue du système dans l'espace ne figurent pas; nous voyons sans peine que l'entropie ne dépend pas de la position absolue du système dans l'espace.

6. *Sur le cas réservé dans ce qui précède.* — Revenons au cas où, en tous les points d'un domaine D faisant partie de l'espace des α, $\beta, \ldots, \vartheta$, on aurait identiquement

$$R_\alpha = 0, \qquad R_\beta = 0, \qquad \ldots, \qquad R_\lambda = 0 \tag{9}$$

et cherchons si les théorèmes précédents peuvent être encore appliqués dans ce cas.

En premier lieu, il est évident qu'ils peuvent l'être si l'on n'envisage que des modifications isothermiques du système; car alors on aura, pour toute modification réversible,

$$dQ = 0,$$

et, partant,

$$\frac{dQ}{F(\vartheta)} = dS,$$

en désignant par S une fonction quelconque de la température.

Ce cas particulier est important, car c'est en réalité celui que l'on envisage dans la Mécanique rationnelle classique; en effet, dans l'exposé classique de la Mécanique rationnelle, on omet la notion de température (ce qui n'est admissible que si la température est supposée invariable) et l'on omet aussi la notion de quantité de chaleur dégagée par le système; ce qui n'est admissible que si les égalités (9) sont vérifiées.

Dans ce cas, les égalités (2) et (9) donnent

$$(18) \qquad A = E\frac{\partial U}{\partial \alpha}, \qquad B = A\frac{\partial U}{\partial \beta}, \qquad \ldots, \qquad L = E\frac{\partial U}{\partial \lambda}.$$

C'est la forme qu'il convient d'attribuer dans ce cas aux conditions d'équilibre (1). Le produit EU représente ce que les mécaniciens appellent le *potentiel des forces intérieures.*

Mais ne supposons plus la température invariable. Nous allons prouver que, *s'il existe un domaine* D *où les égalités* (9) *soient vérifiées, pour qu'il existe une fonction* S, *uniforme et continue, des variables* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, *telle que, dans tout le champ de ces variables, on puisse écrire*

$$(16) \qquad \begin{cases} \dfrac{R_\alpha}{F(\vartheta)} = -\dfrac{\partial S}{\partial \alpha}, \\ \dfrac{R_\beta}{F(\vartheta)} = -\dfrac{\partial S}{\partial \beta}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{R_\lambda}{F(\vartheta)} = -\dfrac{\partial S}{\partial \lambda}, \\ \dfrac{C}{F(\vartheta)} = -\dfrac{\partial S}{\partial \vartheta}, \end{cases}$$

il faut et il suffit que, dans tout le domaine D, *la capacité calorifique* C *soit fonction de la seule température* ϑ.

Si le domaine D n'occupe pas le champ entier des variables α, $\beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, c'est le seul cas où le théorème ne soit pas évident) on pourra toujours découper la partie de ce champ extérieure au domaine D en espaces simplement connexes; à l'intérieur de chacun de ces espaces, les démonstrations précédentes s'appliqueront; elles permettent d'écrire des égalités analogues aux égalités (16), lesquelles entraînent à leur tour des égalités du type

$$(18) \qquad \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{R_\alpha}{F(\vartheta)}\right] = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{R_\beta}{F(\vartheta)}\right]$$

et des égalités du type

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left[\frac{R_\alpha}{F(\vartheta)}\right] = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{C}{F(\vartheta)}\right]. \tag{18 bis}$$

D'autre part, pour que dans le domaine D, où les égalités (9) sont vérifiées, on puisse écrire les égalités (18) et (18 *bis*), il faut et il suffit que la quantité

$$\frac{dQ}{F(\vartheta)} = \frac{C}{F(\vartheta)}\, d\vartheta$$

soit une différentielle totale et, partant, que la quantité C soit une fonction de la seule température ϑ.

D'ailleurs, le champ des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, étant supposé simplement connexe, pour qu'il existe une fonction S, *uniforme* et continue, des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$, vérifiant les égalités (16), il faut et il suffit que les égalités (18) et (18 *bis*) soient vérifiées dans tout ce champ.

Ainsi, *si nous admettons que, dans tout domaine* D *où les égalités* (9) *sont vérifiées, la capacité calorifique du système est fonction de la température seule,* les théorèmes démontrés dans le présent Chapitre seront soumis seulement aux restrictions énoncées au n° **1**.

Théorie générale des surfaces hyperelliptiques (¹);

PAR M. G. HUMBERT.

TROISIÈME PARTIE.

SURFACES HYPERELLIPTIQUES GÉNÉRALES.

CHAPITRE I.

Premières propriétés.

101. Nous abordons maintenant l'étude des surfaces hyperelliptiques générales, dont M. Picard a déjà fait connaître quelques propriétés importantes (²); nous donnerons d'abord des propositions géométriques applicables à l'ensemble de ces surfaces; nous insisterons ensuite avec plus de détails sur certaines catégories de surfaces ou sur certaines surfaces particulières.

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par $\mathfrak{S}$ une surface hyperelliptique générale; nous savons (nº **2**) que les coordonnées homogènes d'un de ses points, x_1, x_2, x_3, x_4, sont proportionnelles à quatre fonctions thêta normales d'un même ordre, h, et de caractéristique nulle; nous donnerons à ces fonctions (fonctions coordonnées) les notations $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$, $x_3(u, v)$, $x_4(u, v)$.

(¹) *Voir* même Tome, p. 29.
(²) *Journal de Mathém.*, 4ᵉ série, t. I, p. 312 et suiv.; t. V, p. 223 et suiv.

102. En général, c'est-à-dire si les quatre fonctions $x(u, v)$ sont arbitraires, à un point de $\mathfrak{S}$ ne correspond, aux multiples près des périodes, qu'un seul système de valeurs des paramètres u, v; nous dirons en ce cas que *la surface est représentable point par point sur le champ hyperelliptique.*

M. Picard a démontré qu'une telle surface est de genre un; l'intégrale double $\int\int du\,dv$ est en effet, sur la surface $\mathfrak{S}$, de la forme

$$\int\int \varphi(x, y, z)\,dx\,dy,$$

où φ est une fonction rationnelle des coordonnées cartésiennes x, y, z, c'est-à-dire $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$, d'un point de $\mathfrak{S}$.

Il y a donc une intégrale de cette dernière forme qui reste finie sur toute la surface; il ne peut en exister une seconde, car toute intégrale $\int\int \varphi(x, y, z)\,dx\,dy$, quand on y remplace x, y, z par leurs valeurs en u et v, prend la forme $\int\int F(u, v)\,du\,dv$, où $F(u, v)$ est une fonction quadruplement périodique uniforme de u, v, et cette intégrale ne peut rester finie que si $F(u, v)$ est une constante.

Il est à observer que la démonstration s'applique aussi au cas où à chaque point de $\mathfrak{S}$ correspondent les deux couples d'arguments u, v et $-u$, $-v$, comme cela se produit pour la surface de Kummer (¹). En effet, x, y, z sont alors des fonctions quadruplement périodiques *paires* de u, v et toute fonction quadruplement périodique paire aux mêmes périodes pourra s'exprimer rationnellement en x, y, z : il en est ainsi, en particulier, de la fonction $\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$, et comme on a

$$\int\int du\,dv = \int\int \frac{dx\,dy}{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}},$$

(¹) Nous verrons plus tard qu'on peut ramener à ce cas le cas plus général où, à chaque point de $\mathfrak{S}$, correspondent *deux* couples d'arguments, abstraction faite des multiples des périodes.

on voit que l'intégrale

$$\iint du\,dv$$

est bien de la forme

$$\iint \varphi(x, y, z)\,dx\,dy,$$

φ étant rationnel. Il existe donc sur la surface une intégrale double rationnelle ne devenant pas infinie et l'on démontre comme plus haut qu'il n'en existe qu'une : la surface est encore de genre un.

103. Une intégrale double rationnelle qui reste finie en tous les points d'une surface algébrique $S(x, y, z) = 0$, d'ordre n, est, comme l'on sait, de la forme

$$\iint \frac{D(x, y, z)}{S'_z}\,dx\,dy,$$

$D(x, y, z)$ étant un polynôme d'ordre $n-4$; la surface $D = 0$ est une *surface adjointe* de la surface $S = 0$, c'est-à-dire que toute courbe multiple d'ordre l de la surface $S = 0$ est multiple d'ordre $l-1$ sur $D = 0$, et que tout point multiple d'ordre l sur $S = 0$ est multiple d'ordre $l-2$ sur $D = 0$.

Il résulte de là que la surface hyperelliptique $\mathfrak{S}$ admet une et une seule surface adjointe, de degré inférieur au sien de quatre unités.

Dans tout ce qui suit nous désignerons par $\mathfrak{D}$ cette surface adjointe; $D = 0$ sera son équation, et $S = 0$ sera l'équation de $\mathfrak{S}$.

D'après ce qui précède, on aura

$$\iint \frac{D}{S'_z}\,dx\,dy = \iint du\,dv;$$

d'où

$$\frac{D}{S'_z}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = 1. \tag{1}$$

104. Une propriété fondamentale des surfaces représentables point par point sur le champ hyperelliptique est, comme l'a montré M. Picard, de posséder deux intégrales de différentielles totales de première espèce : ce sont les intégrales $\int du$ et $\int dv$. Il est clair en effet qu'on a, en chaque point de $\mathfrak{S}$,

$$du = \mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy, \qquad dv = \mathrm{M}_1\,dx + \mathrm{N}_1\,dy,$$

$\mathrm{M}, \mathrm{N}, \mathrm{M}_1, \mathrm{N}_1$ étant des fonctions rationnelles de x, y, z. M. Picard a fait voir que leur dénominateur commun est S'_z, et qu'on peut écrire

$$du = \frac{\mathrm{B}\,dx - \mathrm{A}\,dy}{\mathrm{S}'_z}, \qquad dv = \frac{\mathrm{B}_1\,dx - \mathrm{A}_1\,dy}{\mathrm{S}'_z},$$

$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1$ étant des polynômes entiers en x, y, z d'une forme particulière.

D'après cela on a, sur la surface $\mathfrak{S}$,

$$\int\int du\,dv = \int\int \frac{dx\,dy}{\mathrm{S}'^2_z}(\mathrm{BA}_1 - \mathrm{AB}_1)$$

et, en comparant cette forme à celle du numéro précédent, on trouve avec M. Picard

$$(2) \qquad \mathrm{DS}'_z = \mathrm{BA}_1 - \mathrm{AB}_1.$$

Cette relation importante, vérifiée en tous les points de la surface $\mathrm{S} = 0$, nous sera utile à chaque instant.

103. Revenons à l'expression des coordonnées homogènes d'un point de $\mathfrak{S}$ à l'aide des fonctions thêta [1] : soit h l'ordre des quatre

---

[1] On peut se demander si la surface $\mathfrak{S}$ est susceptible de plusieurs modes de représentation hyperelliptique, c'est-à-dire si, le tétraèdre de référence restant le même, les coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 peuvent être proportionnelles à quatre autres fonctions thêta de caractéristique nulle $x'_1(u, v), x'_2(u, v), \ldots, x'_4(u, v)$, aux mêmes paires de périodes que $x_1(u, v), \ldots, x_4(u, v)$. Cette question revient évidemment à cette autre : la surface $\mathfrak{S}$ admet-elle des transformations birationnelles en elle-même? Soit alors (u, v) un point de $\mathfrak{S}$; (u', v') le point transformé; on aura nécessairement, puisque du et dv sont les seules dif-

fonctions $x_j(u, v)$; si ces fonctions n'ont pas de zéro commun, c'est-à-dire si elles ne s'annulent simultanément pour aucun système de valeurs de u, v, le *degré* de $\mathfrak{S}$ sera égal à $2h^2$. En effet, une droite quelconque, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, par exemple, coupe $\mathfrak{S}$ en des points dont les arguments sont les solutions communes aux équations

$$x_1(u, v) = 0, \qquad x_2(u, v) = 0,$$

et ces solutions sont au nombre de $2h^2$, d'après le théorème de M. Poincaré. Cela suppose, bien entendu, que $\mathfrak{S}$ est représentable point par point sur le champ hyperelliptique.

Si les quatre fonctions $x_j(u, v)$ s'annulent simultanément pour un ou plusieurs systèmes de valeurs des arguments u, v, le degré de $\mathfrak{S}$

---

férentielles totales de première espèce sur la surface

$$du' = \alpha\,du + \beta\,dv,$$
$$dv' = \gamma\,du + \delta\,dv,$$

α, β, γ, δ étant des constantes. On en tire

$$u' = \alpha u + \beta v + \lambda,$$
$$v' = \gamma u + \delta v + \mu.$$

Pour que u' et v' aient les mêmes systèmes de périodes simultanées que u et v, il faut que α, β, γ, δ soient entiers; si l'on suppose de plus, comme nous l'avons fait jusqu'ici, qu'il n'y a pas de relation linéaire à coefficients entiers entre les périodes a, b, c, $2\pi i$, on voit qu'il est nécessaire que β et γ soient nuls. Enfin, pour qu'à un point (u', v') corresponde un seul point (u, v), il faut que α et δ soient égaux simultanément à ± 1.

On a donc les deux types de transformation

$$u' = \pm u + \lambda,$$
$$v' = \pm v + \mu,$$

les signes supérieurs ou inférieurs étant pris ensemble.

Il en résulte que la surface $\mathfrak{S}$ n'admet qu'un seul mode de représentation hyperelliptique, si l'on ne considère pas comme distinctes les représentations qui se déduisent de l'une d'elles en substituant u' et v' à u et v. Une telle substitution n'altère pas d'ailleurs, comme on le voit de suite, l'ordre h des fonctions $x_j(u, v)$ de la représentation; la quantité h est donc un nombre lié à $\mathfrak{S}$: nous en verrons la signification géométrique au n° 145.

devient inférieur à $2h^2$; nous reviendrons plus tard là-dessus, nous bornant à signaler ici les particularités intéressantes qui se présentent dans cette hypothèse.

Il est clair d'abord, et c'est là un résultat bien connu dans la théorie des surfaces représentables sur un plan, que si les quatre fonctions $x_j(u, v)$ s'annulent pour $u = u_0$, $v = v_0$, ainsi que toutes leurs dérivées partielles par rapport à u et v jusqu'à l'ordre k exclusivement, il correspond en général sur la surface $\mathfrak{S}$, au système d'arguments u_0, v_0, non pas un seul point, mais tous les points d'une courbe unicursale d'ordre k. On a en effet, en posant $u = u_0 + \varepsilon$, $v = v_0 + \eta$, ε et η étant très petits,

$$x_j(u, v) = a_j\varepsilon^k + b_j\varepsilon^{k-1}\eta + \ldots + l_j\eta^k + p_j\varepsilon^{k+1} + \ldots$$
$$(j = 1, 2, 3, 4),$$

a_j, b_j, ... désignant des constantes. Ces développements montrent que le point de $\mathfrak{S}$ qui correspond aux arguments $u_0 + \varepsilon$, $v_0 + \eta$ décrit la courbe unicursale définie par les équations

$$\rho x_j = a_j\lambda^k + b_j\lambda^{k-1} + \ldots + l_j,$$

λ désignant un paramètre variable.

Nous appellerons cette courbe *courbe unicursale singulière*.

Les courbes unicursales singulières (courbes ausgezeichnete de M. Nöther) jouent un rôle important dans la théorie des surfaces hyperelliptiques; M. Picard a démontré tout d'abord que la surface $\mathfrak{S}$ est coupée par son adjointe $\mathfrak{D}$ suivant ses courbes multiples et suivant les courbes unicursales singulières.

Nous présenterons cette démonstration de la manière suivante, afin de pouvoir lui donner une certaine extension.

106. Considérons en premier lieu la relation (1),

$$D(x, y, z)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = S'_z.$$

Elle montre que les points de $\mathfrak{S}$, non situés sur $S'_z = 0$, et dont les coordonnées annulent $D(x, y, z)$, rendent infinie la fonction

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Cette fonction peut s'écrire, si l'on remplace x et y par leurs valeurs $\frac{x_1}{x_4}$ et $\frac{x_2}{x_4}$,

$$\frac{1}{x_4^3}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_4}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_4}{\partial v} \end{vmatrix};$$

elle devient infinie sur $\mathfrak{S}$ le long de la courbe $x_4 = 0$, et ne peut le devenir le long d'aucune autre courbe, les courbes unicursales singulières exceptées. Or la surface $D = 0$ ne passe pas par la courbe $x_4 = 0$, si le tétraèdre de référence a été choisi arbitrairement; elle ne peut donc couper $\mathfrak{S}$ que suivant des courbes unicursales singulières et des courbes situées sur la surface $S'_z = 0$. Mais celle-ci rencontre évidemment $\mathfrak{S}$: 1° suivant les courbes multiples; 2° suivant d'autres courbes dont la définition dépend du choix du tétraèdre de référence, et qui dès lors ne peuvent être sur $\mathfrak{D}$, si ce tétraèdre est quelconque : on voit ainsi que les surfaces $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{D}$ ne peuvent avoir en commun, en dehors des courbes multiples, que des courbes unicursales singulières.

Réciproquement soit une de ces dernières courbes, il s'agit d'établir qu'elle est sur $\mathfrak{D}$.

Reprenons à cet effet les relations (n° **104**)

$$(3)\qquad S'_z\,du = B\,dx - A\,dy;\qquad S'_z\,dv = B_1\,dx - A_1\,dy;$$
$$BA_1 - AB_1 = DS'_z.$$

Le long d'une courbe unicursale singulière, u et v sont constants; du et dv sont donc nuls et par suite on a $BA_1 - AB_1 = 0$. La dernière relation montre alors que la courbe unicursale singulière est sur la surface $DS'_z = 0$, c'est-à-dire sur l'une au moins des surfaces $D = 0$, $S'_z = 0$. Or elle ne peut être sur $S'_z = 0$, le tétraèdre des coordonnées étant quelconque, que si elle est une ligne multiple de $\mathfrak{S}$, et en ce cas nous savons qu'elle est encore sur $\mathfrak{D}$. La proposition est donc démontrée.

107. Il est à observer que cette dernière partie de la démonstration suppose essentiellement que $\mathfrak{S}$ est représentable point par point sur le champ hyperelliptique, les formules (3) n'étant valables que dans cette hypothèse; *si nous supposons qu'à un point de* $\mathfrak{S}$ *correspondent les couples d'arguments* u, v et $-u$, $-v$, on doit la modifier comme il suit.

Les coordonnées x, y, z d'un point de $\mathfrak{S}$ sont alors des fonctions quadruplement périodiques paires de u, v; dès lors leurs dérivées premières par rapport à u et v sont impaires.

On a d'ailleurs

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv.$$

Pour tirer du et dv de ces équations, multiplions les deux membres de chacune d'elles par une même fonction quadruplement périodique, *impaire* $F(u, v)$: le carré de cette fonction sera une fonction rationnelle, $\frac{P}{Q}$, de x, y, z, et de même les produits de $F(u, v)$ par $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$ étant des fonctions quadruplement périodiques *paires*, seront rationnels en x, y, z. On a ainsi, en tous les points de la surface $\mathfrak{S}$, *pour lesquels la fonction* $F(u, v)$ *n'est ni nulle ni infinie*,

$$dx\sqrt{\frac{P}{Q}} = M\,du + N\,dv,$$

$$dy\sqrt{\frac{P}{Q}} = M_1\,du + N_1\,dv,$$

M, N, M_1, N_1 étant rationnels en x, y, z. On en tire

$$du = \sqrt{\frac{P}{Q}}(G\,dx + H\,dy),$$

$$dv = \sqrt{\frac{P}{Q}}(G_1\,dx + H_1\,dy),$$

G, H, G_1, H_1 étant également rationnels. Cela posé, le long d'une courbe unicursale singulière,

$$du = 0, \qquad dv = 0,$$

et par suite, en éliminant dx et dy,

$$\frac{P}{Q}(GH_1 - HG_1) = 0.$$

Nous savons d'ailleurs qu'on a, sur la surface $\mathfrak{S}$,

$$\frac{D}{S'_z} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{P}{Q}(GH_1 - HG_1),$$

ce qui montre que $D(x, y, z)$ s'annule en tous les points des courbes unicursales singulières, comme dans le cas général.

Il n'y a d'exception à ce raisonnement que si la fonction $F(u, v)$ est nulle ou infinie le long d'une courbe unicursale singulière, c'est-à-dire si $F(u_0, v_0)$ est nul ou infini, en désignant toujours par u_0, v_0 les valeurs des arguments qui correspondent à tous les points de la courbe. Or $F(u, v)$ est une fonction impaire *quelconque*, quadruplement périodique; elle est toujours nulle ou infinie pour les seize demi-périodes, comme on le voit sans difficulté; il est clair d'ailleurs que les fonctions quadruplement périodiques impaires ne deviennent *toutes* nulles ou infinies pour aucun autre système de valeurs, u_0, v_0, de u et de v; notre analyse établit donc que *la surface* $D(x, y, z) = 0$ *passe par toutes les courbes unicursales singulières de* $\mathfrak{S}$, *celles qui correspondent à des demi-périodes exceptées.*

Nous rencontrerons plus tard des exemples de l'exception intéressante indiquée ici.

108. Dans tout ce qui suit, nous supposerons, sauf avis contraire, que la surface $\mathfrak{S}$ est représentable point par point sur le champ hyperelliptique.

Toutes les surfaces $\mathfrak{S}$, dont les coordonnées des points s'expriment par des fonctions quadruplement périodiques uniformes aux mêmes périodes, se correspondent point par point, de telle sorte qu'à une courbe $\Theta(u, v) = 0$, tracée sur l'une, correspondent sur les autres les courbes représentées par la même équation $\Theta(u, v) = 0$. Il résulte de cette remarque que la courbe $\Theta(u, v) = 0$ jouira d'un certain nombre de propriétés indépendantes de la définition de la surface hyperelliptique sur laquelle on la suppose tracée : telles seront les propriétés qui se rattachent à la notion de genre, et qui possèdent le caractère d'invariance dans les transformations birationnelles. On peut constituer ainsi une *Géométrie des courbes algébriques dans le champ hyperelliptique*, et c'est cette étude que nous allons tout d'abord esquisser.

CHAPITRE II.

Géométrie des courbes dans le champ hyperelliptique.

109. Nous appellerons *courbe algébrique* du champ hyperelliptique toute courbe tracée sur une surface hyperelliptique représentable, point par point, sur le champ (n° **102**), et qui n'est ni une ligne multiple, ni une courbe unicursale singulière de la surface.

La propriété caractéristique des courbes algébriques ainsi définies est de posséder deux intégrales abéliennes de première espèce, $\int du$ et $\int dv$, n'ayant que quatre paires de périodes simultanées: il est clair, en effet, puisque $\int du$ et $\int dv$ sont, sur la surface hyperelliptique, des intégrales de différentielles totales de première espèce, qu'elles seront des intégrales abéliennes de première espèce le long de toute courbe, non multiple, tracée sur la surface. Nous disons non multiple parce qu'à un point d'une courbe multiple correspondent plusieurs systèmes de valeurs de u et de v, et que du et dv peuvent, dès lors, n'être plus des différentielles abéliennes. Il est également évident que les courbes unicursales singulières doivent être exclues de la catégorie des courbes du champ hyperelliptique.

Cela posé, rappelons (n° **8**) que, sur une surface hyperelliptique, l'équation d'une courbe algébrique peut toujours se mettre sous la forme

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0,$$

où λ et μ sont des constantes, et $\Theta(u, v)$ une fonction thêta de caractéristique nulle.

Introduisons de plus, pour simplifier le langage, les définitions suivantes :

Nous appellerons *courbes de même ordre*, dans le champ hyperelliptique, l'ensemble des courbes dont les équations sont de la forme

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0,$$

où $\Theta(u, v)$ est une fonction thêta d'un ordre donné; parmi les courbes d'un même ordre, nous appellerons *courbes d'une même famille* celles dont l'équation peut être mise sous la forme

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0,$$

où $\Theta(u, v)$ est une fonction à caractéristique nulle, d'un ordre donné, et où λ et μ sont des constantes données (¹).

Si les équations de deux courbes s'obtiennent respectivement en égalant à zéro deux fonctions Θ, d'ordres m et n, la première sera dite *d'ordre supérieur ou inférieur* à l'ordre de la seconde, selon que m sera plus grand ou plus petit que n.

110. *Remarque I.* — Il convient d'observer que, sur une surface hyperelliptique $\mathfrak{S}$, les courbes dont l'équation est de la forme

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0,$$

$\Theta(u, v)$ désignant une fonction thêta quelconque, d'ordre m, seront de même ordre, dans le sens ordinaire de ce mot, c'est-à-dire de même degré. En effet, si les coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3, x_4

(¹) Ces définitions concordent avec celles que nous avons données des courbes d'un même ordre et d'une même famille — univoques ou non — sur la surface de Kummer.

d'un point de $\mathfrak{S}$ sont des fonctions thêta (à caractéristique nulle), d'ordre h, le degré de la courbe $\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$ sera égal au nombre des solutions communes aux deux équations

$$x_j(u, v)=0, \qquad \Theta(u-\lambda, v-\mu)=0,$$

c'est-à-dire à $2mh$. Toutefois, si les quatre coordonnées $x_j(u, v)$ ont des zéros communs u_0, v_0; u_1, v_1; ..., la courbe précédente sera d'ordre inférieur à $2mh$ quand la fonction $\Theta(u-\lambda, v-\mu)$ s'annulera pour un ou plusieurs des systèmes de valeurs u_0, v_0; ...; mais $2mh$ sera toujours le degré de la courbe obtenue en égalant à zéro la fonction thêta la plus générale d'ordre m.

111. *Remarque II.* — D'après la remarque faite au n° **11**, si $\Theta(u, v)$ et $\Theta_0(u, v)$ désignent deux fonctions quelconques d'ordre m, à caractéristique nulle, les deux courbes du même ordre

$$\Theta_0(u-\lambda_0, v-\mu_0)=0, \qquad \Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$$

appartiendront à la même famille, si les constantes $\lambda, \mu, \lambda_0, \mu_0$ vérifient les relations

$$m(\lambda-\lambda_0)=0, \qquad m(\mu-\mu_0)=0 \qquad (\text{mod. périodes}).$$

112. *Remarque III.* — Soient $\Theta_1(u, v), \Theta_2(u, v), \ldots, \Theta_\rho(u, v)$ des fonctions thêta de caractéristique nulle et d'ordres respectifs $m_1, m_2, \ldots, m_\rho$. La fonction

$$\Theta_1(u-\lambda_1, v-\mu_1)\Theta_2(u-\lambda_2, v-\mu_2)\ldots\Theta_\rho(u-\lambda_\rho, v-\mu_\rho)$$

où les λ_i, μ_i sont des constantes, pourra, comme on le voit de suite en écrivant les relations auxquelles elle satisfait quand on augmente u et v de périodes simultanées, se mettre sous la forme

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu),$$

où $\Theta(u, v)$ est une fonction de caractéristique nulle, d'ordre

$m_1+m_2+\ldots+m_\rho$ et où les constantes λ et μ vérifient les relations

$$\lambda(m_1+m_2+\ldots+m_\rho)=m_1\lambda_1+m_2\lambda_2+\ldots+m_\rho\lambda_\rho,$$
$$\mu(m_1+m_2+\ldots+m_\rho)=m_1\mu_1+m_2\mu_2+\ldots+m_\rho\mu_\rho.$$

113. Les deux courbes

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0, \qquad \Theta(u-\lambda', v-\mu')=0$$

se correspondent point par point (n° **91**); on peut, pour étudier, dans le champ hyperelliptique, les propriétés des courbes d'un même ordre et d'une même famille, faire choix d'une famille particulière; nous choisirons, dans ce qui suit, celle qui correspond à $\lambda=0$, $\mu=0$; mais nos raisonnements, absolument généraux, s'étendront à toutes les courbes et à toutes les familles de courbes du champ hyperelliptique.

114. Nous savons que $\int du$ et $\int dv$ sont des intégrales abéliennes de première espèce le long d'une courbe quelconque du champ hyperelliptique; il est aisé de trouver l'expression des autres intégrales de première espèce appartenant à cette courbe.

Soit, en effet, $\Theta_0(u,v)=0$ l'équation de la courbe considérée, Θ_0 désignant une fonction thêta d'ordre m, de caractéristique nulle; désignons par $\Theta(u,v)$ une autre fonction, quelconque d'ailleurs, de même ordre et de même caractéristique, l'intégrale

$$(1) \qquad \int \frac{\Theta(u,v)}{\left(\frac{\partial\Theta_0}{\partial v}\right)}\,du,$$

prise le long de la courbe $\Theta_0=0$, est une intégrale abélienne de première espèce.

Elle est abélienne comme l'établit le raisonnement fait au n° **92**, répété mot pour mot; elle est de première espèce, car elle ne peut devenir infinie qu'aux points de la courbe qui annulent $\frac{\partial\Theta_0}{\partial v}$. Or la relation

$$\frac{\partial\Theta_0}{\partial u}\,du + \frac{\partial\Theta_0}{\partial v}\,dv = 0$$

montre que l'intégrale ne deviendra infinie que s'il existe sur la courbe $\Theta(u, v) = 0$ des points dont les arguments vérifient les équations

$$\frac{\partial\Theta_0}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial\Theta_0}{\partial v} = 0,$$

c'est-à-dire des points doubles, ou plus généralement des points *singuliers* d'un ordre quelconque.

Si donc la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$ n'a pas de tels points singuliers, l'intégrale ci-dessus est de première espèce. Or les fonctions $\Theta(u, v)$, d'ordre m et de caractéristique nulle, s'expriment en fonction linéaire et homogène de m^2 d'entre elles, parmi lesquelles figure la fonction $\Theta_0(u, v)$: il en résulte qu'on obtient, sous la forme (4), $m^2 - 1$ intégrales abéliennes de première espèce linéairement distinctes, ce qui donne en tout, avec $\int du$ et $\int dv$, $m^2 + 1$ intégrales de première espèce.

Il est aisé de voir qu'on a obtenu ainsi *toutes* les intégrales de cette nature linéairement distinctes, c'est-à-dire que le genre p de la courbe proposée est égal à $m^2 + 1$. En effet, les deux courbes

$$\Theta_0(u, v) = 0 \qquad \text{et} \qquad \Theta(u, v) = 0$$

ont $2m^2$ points communs, qui varient tous avec $\Theta(u, v)$; d'un autre côté, on sait qu'une différentielle abélienne de première espèce appartenant à une courbe de genre p s'annule en $2(p-1)$ points de celle-ci. On a donc, d'après la forme (4) de l'intégrale,

$$2(p-1) = 2m^2, \qquad \text{d'où} \qquad p = m^2 + 1.$$

Nous pouvons énoncer maintenant ce théorème :

Dans le champ hyperelliptique, les courbes d'un même ordre et d'une même famille, sans point singulier, découpent l'une sur l'autre des groupes $\mathcal{G}_{2(p-1)}$.

Dans cet énoncé et dans toutes les recherches qui vont suivre, quand nous parlons de systèmes de courbes dans le champ hyperelliptique, il s'agit de courbes tracées sur une *même* surface hyperelliptique quelconque d'ailleurs; les points communs à deux courbes sont ceux dont les arguments u, v vérifient les équations de ces courbes.

La réciproque de la proposition précédente n'est pas vraie; il y a, sur une courbe du champ hyperelliptique, à cause de l'existence des deux intégrales de première espèce $\int du$ et $\int dv$, d'autres groupes $G_{2(p-1)}$ que ceux découpés par les courbes du même ordre et de la même famille.

115. *Remarque.* — Il importe d'observer, pour appliquer le théorème ci-dessus, que tous les *points multiples* d'une courbe algébrique tracée sur une surface hyperelliptique ne sont pas nécessairement des *points singuliers* dans l'acception indiquée plus haut. Ainsi, par exemple, une surface hyperelliptique $\mathfrak{S}$ a généralement une courbe double, et toute section plane $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$ de $\mathfrak{S}$ a des points doubles aux points où elle coupe la courbe double; mais, dans le champ hyperelliptique, ces points ne sont pas singuliers si les fonctions $x_j(u, v)$, qui définissent les coordonnées d'un point de $\mathfrak{S}$, ne sont soumises à aucune condition particulière.

116. On peut donner quelques propositions simples, relativement aux groupes de points découpés sur une courbe du champ hyperelliptique sans point singulier, par certains systèmes de courbes mobiles.

Observons d'abord que sur une courbe fixe, $\Theta_0(u, v) = 0$, les courbes d'un même ordre et d'une même famille découpent des groupes équivalents, car, si

$$\rho_1\theta_1(u-\lambda, v-\mu) + \rho_2\theta_2(u-\lambda, v-\mu) + \ldots = 0$$

est l'équation générale des courbes sécantes, λ et μ désignant des constantes fixes et $\rho_1, \rho_2, \ldots$ des constantes variables d'une courbe à l'autre, il est clair que la somme des valeurs que prend une différentielle abélienne de première espèce appartenant à la courbe fixe $\Theta_0 = 0$, aux points communs à cette courbe et à l'une des courbes mobiles, est de la forme

$$A_1 d\rho_1 + A_2 d\rho_2 + \ldots,$$

les A étant des fonctions rationnelles de ρ_1, ρ_2, ... Pour que cette dernière expression reste finie, il est nécessaire que $A_1 = A_2 = \ldots = 0$. Par suite (n° **85**), les groupes formés par les points communs à la courbe fixe et à l'une des courbes sécantes sont équivalents entre eux.

Étudions, en particulier, les groupes de points déterminés sur une courbe du champ hyperelliptique sans point singulier, $\Theta_0(u, v) = 0$, par les courbes ayant pour équation générale

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\rho_1\Theta'_1(u-\lambda', v-\mu') \\ &\quad + \rho_2\Theta'_2(u-\lambda', v-\mu') + \ldots + \rho_{n^2}\Theta'_{n^2}(u-\lambda', v-\mu') = 0, \end{aligned}\right.$$

où $\Theta'_1(u, v)$, ..., $\Theta'_{n^2}(u, v)$ désignent les n^2 fonctions thêta d'ordre n et de caractéristique nulle, à l'aide desquelles on peut exprimer linéairement toutes les fonctions de même nature. Nous supposerons que n est *inférieur* à l'ordre, m, de $\Theta_0(u, v)$, c'est-à-dire que les courbes sécantes sont d'ordre inférieur à celui de la courbe fixe.

Il est aisé de démontrer que les courbes représentées par l'équation (5), où λ', μ' sont supposés fixes, et ρ_1, ρ_2, ..., variables d'une courbe à l'autre, découpent sur la proposée des groupes appartenant à un *système spécial :* soient en effet

$$\Theta''_1(u, v), \quad \Theta''_2(u, v), \quad \ldots, \quad \Theta''_{(m-n)^2}(u, v),$$

$(m-n)^2$ fonctions thêta, linéairement distinctes d'ordre $m-n$ et de caractéristique nulle; désignons par λ'', μ'' deux constantes, liées à λ' et μ' par les relations

$$(6)\quad \left.\begin{aligned} n\lambda' + (m-n)\lambda'' \equiv 0 \\ n\mu' + (m-n)\mu'' \equiv 0 \end{aligned}\right\} \text{(mod périodes).}$$

La courbe qui a pour équation

$$\begin{aligned} 0 = &\left[\rho_1\Theta'_1(u-\lambda', v-\mu') + \rho_2\Theta'_2(u-\lambda', v-\mu') + \ldots\right] \\ &\times\left[\sigma_1\Theta''_1(u-\lambda'', v-\mu'') + \sigma_2\Theta''_2(u-\lambda'', v-\mu'') + \ldots\right], \end{aligned}$$

où $\rho_1, \rho_2, \ldots, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$ sont des constantes quelconques, est, d'après les remarques des nos **111** et **112**, une courbe du même ordre et de la même famille que la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$; elle détermine donc (n° **114**) sur cette dernière, quand on fait varier $\rho_1, \rho_2, \ldots, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$ des groupes $g_{2(p-1)}$. Or chacune des deux familles de courbes

$$(5) \qquad \rho_1\Theta'_1(u-\lambda', v-\mu') + \rho_2\Theta'_2(u-\lambda', v-\mu') + \ldots = 0,$$

$$(5\ bis) \qquad \sigma_1\Theta''_1(u-\lambda'', v-\mu'') + \sigma_2\Theta''_2(u-\lambda'', v-\mu'') + \ldots = 0$$

découpe sur la courbe de genre p, $\Theta_0(u, v) = 0$, des groupes équivalents qui appartiennent respectivement à deux systèmes de groupes, Σ' et Σ''; les groupes de l'un des deux systèmes contiennent moins de p points, puisque l'ensemble d'un groupe de Σ' et d'un groupe de Σ'' comprend $2(p-1)$ points. On en conclut (n° **85**) que l'un des deux systèmes est spécial, et l'autre l'est également, en vertu du théorème de Riemann-Roch. Donc :

Dans le champ hyperelliptique, les courbes d'un même ordre et d'une même famille découpent, sur une courbe quelconque du champ sans point singulier et d'ordre supérieur à l'ordre des courbes sécantes, des groupes de points qui appartiennent à un système spécial.

La démonstration de ce théorème nous fait de plus connaître une seconde famille de courbes d'un même ordre, découpant sur la courbe fixe des groupes qui appartiennent au système spécial complémentaire du précédent.

117. Ces résultats auxquels nous sommes parvenu si simplement vont nous conduire à des propriétés géométriques intéressantes des courbes du champ hyperelliptique, propriétés qui n'appartiennent pas aux courbes algébriques générales.

Supposons d'abord que la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$ soit *d'ordre pair*, c'est-à-dire que l'ordre, m, de $\Theta_0(u, v)$ soit égal à $2q$: nous pourrons alors choisir n de façon que les courbes (5) et (5 *bis*) soient du même ordre; il suffit pour cela de faire $n = q$. Si de plus on choisit λ' et μ'

de façon que l'on ait $\lambda' = \lambda''$, $\mu' = \mu''$, ce qui entraîne, d'après

$$(6) \qquad 2q\lambda' \equiv 0, \qquad 2q\mu' \equiv 0 \qquad (\text{mod périodes}),$$

les deux familles de courbes (5) et (5 *bis*) seront identiques. A chaque système de valeurs de λ', μ' vérifiant les congruences précédentes correspond ainsi une famille de courbes représentée par l'équation (5); cherchons combien nous obtiendrons, par cette méthode, de familles différentes.

Soient $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}'_0$ et $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ deux couples de périodes simultanées; nous aurons pour λ', μ' les solutions

$$\frac{\mathfrak{P}_0}{2q}, \; \frac{\mathfrak{P}'_0}{2q} \quad \text{et} \quad \frac{\mathfrak{P}}{2q}, \; \frac{\mathfrak{P}'}{2q};$$

pour que les courbes représentées par l'équation (5), où l'on remplace successivement λ' et μ' par ces valeurs, appartiennent à deux familles distinctes, il faut, d'après ce qui a été dit au n° **111**, et puisque les fonctions Θ' sont d'ordre q, que les quantités

$$q\left(\frac{\mathfrak{P}_0}{2q} - \frac{\mathfrak{P}}{2q}\right), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\mathfrak{P}_0}{2} - \frac{\mathfrak{P}}{2},$$

et

$$q\left(\frac{\mathfrak{P}'_0}{2q} - \frac{\mathfrak{P}'}{2q}\right), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\mathfrak{P}'_0}{2} - \frac{\mathfrak{P}'}{2},$$

ne soient pas égales à des périodes simultanées, et, par suite, que les couples de demi-périodes $\frac{\mathfrak{P}_0}{2}, \frac{\mathfrak{P}'_0}{2}$ et $\frac{\mathfrak{P}}{2}, \frac{\mathfrak{P}'}{2}$ soient différents, à des périodes près. Il en résulte qu'il y aura autant de familles différentes de courbes (5) répondant au problème qu'il y a de couples distincts de demi-périodes, c'est-à-dire *seize*.

Deux courbes quelconques d'une de ces seize familles découpent sur la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$ deux groupes de points dont l'ensemble forme un groupe $G_{2(p-1)}$; en particulier, si les deux courbes considérées coïncident, on obtient, sur la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$, un groupe particulier $G_{2(p-1)}$, formé de points deux à deux confondus. L'équation (5) renfermant n^2-1, ici q^2-1, paramètres, il y aura un nombre q^2-1 fois infini de ces groupes particuliers.

Or il est à remarquer que, sur une courbe algébrique quelconque, il n'existe qu'un nombre fini de tels groupes $g_{2(p-1)}$: on sait en effet que, parmi les courbes d'ordre N − 3 adjointes à une courbe plane d'ordre N et de genre p, le nombre de celles qui touchent la courbe plane en tous leurs points non singuliers de rencontre avec elle, est égal, en général, à $2^{p-1}(2^p-1)$; c'est seulement pour des courbes particulières que ce nombre pourra devenir infini. Nous avons ainsi trouvé, pour les courbes du champ hyperelliptique, une propriété géométrique qu'on peut énoncer ainsi :

Soit C_0 *une courbe du champ hyperelliptique, sans point singulier, obtenue en égalant à zéro une fonction thêta d'ordre pair,* $2q$ (¹); *désignons par* C'_0 *sa projection sur un plan quelconque, et, plus généralement, une courbe plane qui lui corresponde point par point; soit* N *le degré de* C'_0 : *il existe seize familles de courbes d'ordre* N − 3, *adjointes à* C'_0, *et touchant cette courbe en tous leurs points mobiles de rencontre avec elle; l'équation des courbes d'une même famille dépend de* q^2-1 *paramètres arbitraires.*

Les points de contact des courbes d'une famille forment des groupes équivalents de $4q^2$ *points qui appartiennent à un système spécial, et par les points de deux de ces groupes on peut faire passer une courbe adjointe d'ordre* N − 3.

Par un raisonnement tout à fait semblable à celui qui précède, on établit la proposition plus générale suivante :

Si l'équation de la courbe C_0 *du champ hyperelliptique s'obtient en égalant à zéro une fonction thêta d'ordre* rq, *il existe* r^4 *familles de courbes d'ordre* N − 3 *adjointes à* C'_0 *et ayant avec cette dernière courbe un contact d'ordre* $r-1$ *en chacun de leurs points*

(¹) Le genre de C_0 est (nº 114) égal à $4q^2+1$; réciproquement une courbe du champ hyperelliptique, sans point singulier, de genre $4q^2+1$, s'obtient en égalant à zéro une fonction thêta d'ordre $2q$.

mobiles de rencontre avec elle; l'équation des courbes d'une même famille dépend de q^2-1 paramètres arbitraires.

Les points de contact des courbes d'une famille forment des groupes équivalents de $2rq^2$ points qui appartiennent à un système spécial, et par les points de r de ces groupes on peut faire passer une courbe adjointe d'ordre $N-3$.

En particulier, et cette proposition s'applique à toutes les courbes sans point singulier du champ hyperelliptique : *si l'équation de C_0 s'obtient en annulant une fonction thêta d'ordre m, c'est-à-dire si C'_0 est de genre m^2+1, il existe m^4 courbes d'ordre $N-3$, adjointes à C'_0, et ayant avec cette dernière courbe un contact d'ordre $m-1$ en chacun de leurs points (non multiples) de rencontre avec elle.*

Les $2m$ points de contact d'une de ces courbes avec C'_0 correspondent aux points déterminés sur la courbe C_0, c'est-à-dire $\Theta_0(u, v)=0$, par les courbes

$$\Xi_0(u-\lambda', v-\mu')=0,$$

où λ' et μ' sont définis par les congruences

$$m\lambda'\equiv 0, \qquad m\mu'\equiv 0 \qquad (\text{mod périodes}),$$

et où $\Xi_0(u, v)$ désigne toujours la fonction thêta d'ordre m, de caractéristique nulle.

Cette dernière propriété n'appartient pas non plus aux courbes algébriques générales, car soit $p=m^2+1$ le genre d'une de ces courbes, supposée plane et d'ordre N : pour trouver une courbe adjointe d'ordre $N-3$ ayant avec elle en $2m$ points un contact d'ordre $m-1$, il faut satisfaire à $2m(m-1)$ conditions; or $2m(m-1)$ est supérieur au nombre de paramètres, $p-1$ ou m^2, dont dépend l'équation des courbes adjointes d'ordre $N-3$, dès que m dépasse 2.

118. *Remarque.* — Les théorèmes ci-dessus s'étendent d'eux-mêmes aux courbes univoques tracées sur la surface de Kummer, lorsque ces courbes n'ont pas d'autres points multiples que les points doubles qui leur appartiennent nécessairement en vertu de leur définition.

On peut en ce cas donner à nos résultats une forme géométrique simple.

Soit en effet $\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)=0$ l'équation d'une courbe univoque de la surface de Kummer; si $\Theta_0(u, v)$ est d'ordre m, cette courbe, d'ordre $4m$, est l'intersection de la surface de Kummer avec une surface d'ordre m, touchant la précédente en m^2 points (n° **91**): par suite les groupes $\mathcal{G}_{2(p-1)}$ et les groupes spéciaux sont découpés (n° **80**) sur elle par des surfaces d'ordre m passant par les m^2 points doubles.

Cette remarque permet, par exemple, d'énoncer ainsi le dernier théorème du numéro précédent :

Par les m^2 points doubles d'une courbe univoque d'ordre $4m$ tracée sur la surface de Kummer, on peut faire passer m^4 surfaces d'ordre m, ayant avec la courbe proposée un contact d'ordre $m-1$ en chacun de leurs $2m$ points (non multiples) de rencontre avec elle.

Les $2m$ points de contact d'une de ces surfaces et de la courbe sont dans un même plan tangent de la surface de Kummer.

Lorsque m dépasse 4, on doit entendre qu'il y a m^4 *systèmes* de surfaces d'ordre m répondant à la question, les surfaces d'un même système coupant la surface de Kummer suivant la même courbe : mais il n'y a jamais que m^4 groupes de points de contact.

119. Arrivons maintenant aux courbes du champ hyperelliptique douées de points singuliers, c'est-à-dire aux courbes représentées par une équation $\Theta_0(u, v)=0$, telle que les trois équations $\Theta_0(u, v)=0$, $\frac{\partial\Theta_0}{\partial u}=0$, $\frac{\partial\Theta_0}{\partial v}=0$ aient un ou plusieurs systèmes de solutions communes en u et v.

Soit u_0, v_0 un quelconque de ces systèmes; il est clair qu'on obtiendra une intégrale de première espèce, appartenant à la courbe

$\Theta_0 = 0$, par l'expression

$$(4)\qquad \int \frac{\Theta(u,v)}{\left(\frac{\partial\Theta_0}{\partial v}\right)}\,du$$

où $\Theta(u, v)$ désigne une fonction de même ordre et de même famille que $\Theta_0(u, v)$, telle que l'intégrale précédente reste finie en tout point singulier u_0, v_0. Si u_0, v_0 est un point double, c'est-à-dire si les dérivées secondes de $\Theta_0(u, v)$ ne s'y annulent pas, il faut et il suffit, pour que l'intégrale (4) reste finie, que la courbe $\Theta(u, v) = 0$ passe par ce point; si u_0, v_0 est un point multiple d'ordre k, c'est-à-dire si toutes les dérivées de $\Theta_0(u, v)$ par rapport à u et v s'annulent en ce point jusqu'à l'ordre k, exclusivement, la courbe $\Theta(u, v) = 0$ devra avoir au même point un point multiple d'ordre $k-1$. On le démontre par un raisonnement identique à celui que l'on connaît pour les points singuliers des courbes algébriques planes : sur une courbe plane, $f(x, y) = 0$, les propriétés d'un point multiple x_0, y_0 dépendent en effet uniquement d'un certain nombre des premiers termes du développement de $f(x, y)$ suivant les puissances croissantes de $x - x_0$, $y - y_0$, et ces propriétés s'étendent d'elles-mêmes aux points singuliers d'une courbe $\Theta_0(u, v) = 0$ du champ hyperelliptique, puisque $\Theta_0(u, v)$ est toujours développable en série convergente suivant les puissances croissantes de $u - u_0$, $v - v_0$.

D'après cela, et d'une manière générale, si la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$ a, en un point u_0, v_0, une singularité σ_0, il faudra, pour que l'intégrale (4) reste finie en ce point, que la courbe $\Theta = 0$ possède en u_0, v_0 une singularité bien déterminée σ'_0 : nous dirons que la singularité σ'_0 est *adjointe* de σ_0.

Si l'on considère, dans le développement de $\Theta_0(u, v)$, suivant les puissances croissantes de $u - u_0$, $v - v_0$, les termes (dont les coefficients peuvent être nuls) qui caractérisent la singularité σ_0, il est clair qu'une courbe algébrique plane $f(u, v) = 0$, telle que le développement de $f(u, v)$ commence par les mêmes termes, les autres termes étant quelconques, aura, au point u_0, v_0, la singularité σ_0, et les courbes adjointes à $f(u, v) = 0$ auront, en ce même point, la singularité adjointe σ_0'. On ramène ainsi la recherche de la singularité σ_0' au problème analogue pour une courbe algébrique plane.

Une courbe possédant, en chaque singularité de la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$, la singularité adjointe sera dite *adjointe* à la proposée.

Cela posé, nous allons établir que les intégrales abéliennes de première espèce relatives à une courbe quelconque $\Theta_0(u, v) = 0$ du champ hyperelliptique sont, à part $\int du$ et $\int dv$, de la forme

$$\int \frac{\Theta(u, v)}{\left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial v}\right)} du,$$

où $\Theta(u, v) = 0$ est une courbe du même ordre et de la même famille que $\Theta_0(u, v) = 0$, et adjointe à celle-ci.

120. Observons d'abord que, si deux courbes ont en un même point deux singularités, σ_1, σ_2, elles ont, en ce point, un certain nombre d'intersections confondues : ce nombre ne dépend évidemment que des termes qui caractérisent les singularités σ_1 et σ_2 dans les développements des premiers membres des équations des deux courbes; il est égal au nombre analogue relatif à deux courbes planes qui auraient en un point les singularités σ_1 et σ_2; nous le désignerons par $I(\sigma_1, \sigma_2)$.

En particulier, le nombre $I(\sigma_0, \sigma_0')$ des intersections, réunies en un point singulier, d'une courbe et d'une quelconque de ses courbes adjointes ne dépend que de la singularité σ_0; il jouit de plusieurs propriétés importantes que nous allons exposer.

Tout d'abord, dans le champ hyperelliptique comme dans le plan, le nombre $I(\sigma_0, \sigma_0')$ est double du nombre qui exprime l'abaissement du genre dû à la singularité σ_0.

Soit en effet $\Theta_0(u, v)$ une fonction thêta d'ordre m, supposons que la courbe $\Theta_0 = 0$ n'ait qu'une seule singularité, σ_0, et désignons par $\Theta(u, v) = 0$ la courbe adjointe la plus générale, du même ordre et de la même famille que la proposée. La différentielle

$$\frac{\Theta(u, v)}{\left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial v}\right)} du$$

étant, par hypothèse, abélienne et de première espèce le long de la courbe $\Theta_0 = 0$, s'annulera en $2(p-1)$ points, non fixes, de cette courbe, p désignant le genre de $\Theta_0 = 0$. En d'autres termes, le nombre des points, distincts du point singulier, où les deux courbes $\Theta_0 = 0$ et $\Theta = 0$ se rencontrent, est égal à $2(p-1)$, et l'on a

$$2(p-1) = 2m^2 - \mathrm{I}(\sigma_0, \sigma'_0);$$

d'où

$$(7) \qquad p = m^2 + 1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{I}(\sigma_0, \sigma'_0)$$

ce qui démontre la proposition à établir.

En second lieu, le nombre $\frac{1}{2}\mathrm{I}(\sigma_0, \sigma'_0)$ est égal au nombre des conditions auxquelles équivaut la singularité σ'_0. Ce théorème est évident dans le plan : soit en effet c'_0 le nombre de conditions dont il s'agit; pour une courbe plane d'ordre n sans points singuliers, les courbes adjointes d'ordre $n-3$, linéairement distinctes, sont en nombre égal à $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$, puisque toute courbe d'ordre $n-3$ est adjointe à la proposée. Si la courbe a une singularité σ_0, le nombre des courbes adjointes d'ordre $n-3$ est diminué de c'_0 par définition, et par suite c'_0 est égal à l'abaissement du genre dû à la singularité σ_0, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}\mathrm{I}(\sigma_0, \sigma'_0)$.

La proposition subsiste dans le champ hyperelliptique, puisque les nombres $\mathrm{I}(\sigma_0, \sigma'_0)$ et c'_0 ne dépendent que de la nature de la singularité σ_0; il en résulte que, dans le développement suivant les puissances croissantes de $u - u_0$, $v - v_0$, du premier nombre de l'équation d'une courbe supposée adjointe à une autre courbe, douée en u_0, v_0 de la singularité σ_0, les coefficients doivent satisfaire à $\frac{1}{2}\mathrm{I}(\sigma_0, \sigma'_0)$ équations, et ces équations sont linéaires comme dans le cas du plan. Toutefois on pourrait objecter qu'en raison de la nature spéciale des fonctions thêta, un certain nombre des équations précédentes peuvent être des conséquences nécessaires des autres; le nombre c'_0 des conditions cherchées serait donc inférieur à $\frac{1}{2}\mathrm{I}(\sigma_0, \sigma'_0)$.

Nous allons montrer que cette hypothèse est à écarter.

Supposons toujours que la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$ n'ait pas d'autre singularité que σ_0; le nombre des courbes adjointes linéairement distinctes du même ordre et de la même famille est égal à $m^2 - c'_0$, et si l'on retranche la courbe $\Theta_0 = 0$ elle-même, il reste $m^2 - c'_0 - 1$ de ces courbes, fournissant par la formule (4) autant d'intégrales abéliennes de première espèce, sur $\Theta_0 = 0$. Si l'on ajoute les intégrales $\int du$ et $\int dv$, on voit que le genre, p, de la courbe $\Theta_0 = 0$ est au moins égal à $m^2 - c'_0 + 1$,

$$p \geqq m^2 - c'_0 + 1.$$

Or on a

$$p = m^2 + 1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{I}(\sigma_0, \sigma'_0); \tag{7}$$

d'où l'on tire

$$c'_0 \geqq \tfrac{1}{2}\mathrm{I}(\sigma_0, \sigma'_0)$$

et par suite, comme c'_0 ne peut dépasser $\frac{1}{2}\mathrm{I}(\sigma_0, \sigma'_0)$, d'après ce qui a été dit plus haut, on a nécessairement

$$c'_0 = \tfrac{1}{2}\mathrm{I}(\sigma_0, \sigma'_0).$$

Donc :

Pour une courbe du champ hyperelliptique possédant en un point une singularité σ_0, le nombre $\frac{1}{2}\mathrm{I}(\sigma_0, \sigma'_0)$ est égal : 1° au nombre des conditions linéaires auxquelles équivaut la singularité adjointe σ'_0; 2° au nombre qui exprime l'abaissement du genre dû à la singularité σ_0.

121. Nous sommes maintenant en mesure d'établir la proposition que nous avions en vue relativement aux intégrales abéliennes de première espèce qui appartiennent à une courbe du champ hyperelliptique.

Soit $\Theta_0 = 0$ cette courbe; supposons qu'elle ait en des points u_1, v_1, u_2, v_2, ... des singularités σ_1, σ_2, ..., soit p son genre, désignons par m l'ordre de $\Theta_0(u, v)$.

On a, d'après le raisonnement du numéro précédent,

$$2(p-1) = 2m^2 - \Sigma I(\sigma, \sigma')$$

ou

$$(8) \qquad p = m^2 + 1 - \tfrac{1}{2}\Sigma I(\sigma, \sigma'),$$

la somme s'étendant à toutes les singularités $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$.

D'un autre côté, les courbes du même ordre et de la même famille que $\Theta_0 = 0$, adjointes à celle-ci et linéairement distinctes, sont en nombre *au moins* égal à

$$m^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma I(\sigma, \sigma'),$$

puisque chaque singularité σ', adjointe d'une singularité σ, équivaut à $\frac{1}{2}I(\sigma, \sigma')$ conditions. Nous disons *au moins* parce que les conditions imposées par les diverses singularités σ' pourraient ne pas être indépendantes. En retranchant des courbes adjointes qui précèdent la courbe $\Theta_0 = 0$ elle-même, il reste au moins $m^2 - 1 - \frac{1}{2}\Sigma I(\sigma, \sigma')$ courbes distinctes, donnant par la formule (4) *au moins* autant d'intégrales de première espèce le long de la courbe $\Theta_0 = 0$; en ajoutant maintenant les deux intégrales $\int du$ et $\int dv$, on arrive à l'inégalité

$$p \geqq m^2 + 1 - \tfrac{1}{2}\Sigma I(\sigma, \sigma')$$

et, en comparant à la relation (8), on voit qu'on doit prendre le signe $=$, et par suite la restriction *au moins* doit être supprimée.

Il en résulte :

1° *Que les conditions imposées aux courbes du même ordre et de la même famille qu'une courbe donnée, par les singularités adjointes des singularités de cette courbe, sont indépendantes les unes des autres;*

2° *Que toutes les intégrales de première espèce appartenant à* *une courbe du champ hyperelliptique sont, à part* $\int du$ *et* $\int dv$, *comprises dans le type* (4) (¹).

Nous voyons ainsi qu'une courbe de genre p admet $p-1$ courbes adjointes, linéairement distinctes, du même ordre et de la même famille qu'elle, parmi lesquelles figure d'ailleurs cette courbe même.

122. M. Guccia a démontré, pour les courbes algébriques planes, le théorème suivant, qui s'étend aussi, en vertu des explications que nous venons de donner, aux courbes du champ hyperelliptique (²).

« *Le nombre des conditions auxquelles équivaut pour une courbe une singularité donnée en un point donné est égal au nombre des intersections, réunies en ce point, de deux courbes quelconques douées de cette singularité, diminué du nombre qui exprime l'abaissement du genre que celle-ci produit* (³). »

Nous aurons occasion d'appliquer cette belle et importante proposition, ainsi que la suivante, due au même auteur et que nous énonçons tout de suite pour le champ hyperelliptique.

Soit un système linéaire de courbes, du même ordre et de la même famille,

$$0 = \lambda_1 \Theta_1^{(1)}(u, v) + \lambda_2 \Theta_2^{(1)}(u, v) + \ldots + \lambda_\alpha \Theta_\alpha^{(1)}(u, v) + \ldots$$

tel que la courbe mobile du système possède en un point une singu-

(¹) Cette seconde conséquence était évidente *a priori*; la proposition a été en effet démontrée pour les courbes sans point singulier, et il est clair qu'elle subsiste quand on fait varier les coefficients de l'équation d'une courbe sans point singulier de manière à lui faire acquérir un ou plusieurs de ces points.

(²) *Comptes rendus*, 4 octobre 1886.

(³) On suppose dans cet énoncé que si les deux courbes $\theta_0 = 0$, $\theta = 0$ ont en un point la singularité considérée, les courbes du système $\lambda_0\theta_0 + \lambda_1\theta_1 = 0$ ont en ce point la même singularité.

larité σ_1; soient de même d'autres systèmes linéaires

$$\begin{aligned}
o &= \Sigma_\beta \mu_\beta \Theta_\beta^{(2)}(u, v) = o;\\
o &= \Sigma_\gamma \nu_\gamma \, \Theta_\gamma^{(3)}(u, v),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
o &= \Sigma_\delta \sigma_\delta \, \Theta_\delta^{(\rho)}(u, v),
\end{aligned}$$

dont les courbes mobiles possèdent un même point des singularités respectives $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_\rho$.

On appellera *singularité composée* $(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_\rho)$ la singularité bien déterminée que possède au point considéré, quelles que soient les constantes a, toute courbe représentée par l'équation

$$o = \Sigma a_{\alpha, \beta, \ldots, \delta} \Theta_\alpha^{(1)} \Theta_\beta^{(2)} \ldots \Theta_\delta^{(\rho)},$$

la somme s'étendant à toutes les valeurs de $\alpha, \beta, \ldots, \delta$.

Cela posé, on a ce théorème ([1]) :

« *Le nombre de conditions auxquelles équivaut la singularité* $(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_\rho)$ *en un point donné est égal à la somme des nombres analogues relatifs aux singularités* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\rho$, *augmenté de la somme des intersections deux à deux des mêmes singularités, c'est-à-dire de la somme des nombres* $\mathrm{I}(\sigma_i, \sigma_j)$, $[i \gtrless j]$.

Il est à remarquer que M. Guccia n'a pas établi les théorèmes qui précèdent en partant des développements dans le domaine du point singulier; mais les résultats sont applicables aux courbes du champ hyperelliptique puisqu'ils ne dépendent en réalité que des termes caractéristiques de ces développements. D'ailleurs M. Nöther a indiqué une méthode pour déduire les propositions de M. Guccia de l'équation même des courbes au voisinage des points multiples ([2]).

Il est aisé de voir, à l'aide des principes qui viennent d'être posés relativement aux courbes adjointes, dans quelle mesure les proposi-

---

([1]) *Rendiconti del Circolo matem. di Palermo*, t. III, p. 241.

([2]) *Ibid.*, t. IV, p. 300.

tions établies plus haut pour les courbes du champ hyperelliptique sans point singulier s'appliquent aux courbes possédant des singularités; nous n'insisterons pas sur ces extensions qui n'offrent aucune difficulté dans chaque cas particulier, et que nous présenterons d'ailleurs sous une autre forme en exposant les propriétés des surfaces adjointes aux surfaces hyperelliptiques générales.

CHAPITRE III.

Théorie des surfaces adjointes.

123. Reprenons la surface hyperelliptique $\mathfrak{S}$ dont les coordonnées d'un point x_1, x_2, x_3, x_4 sont proportionnelles à quatre fonctions thêta d'ordre h et de caractéristique nulle $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$, $x_3(u, v)$, $x_4(u, v)$. Nous supposerons que, dans le champ hyperelliptique, c'est-à-dire sur une surface hyperelliptique choisie à volonté, les quatre courbes $x_j(u, v) = 0$, ou, d'une manière plus précise, les courbes

$$(1) \qquad 0 = \lambda_1 x_1(u, v) + \lambda_2 x_2(u, v) + \lambda_3 x_3(u, v) + \lambda_4 x_4(u, v),$$

où les λ sont des constantes quelconques, ont un certain nombre de singularités communes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\rho$ aux points u_1, v_1; u_2, v_2; $\ldots$, u_ρ, v_ρ.

Dans cette hypothèse tout à fait générale, nous allons établir, entre les surfaces *adjointes* de $\mathfrak{S}$ et les fonctions thêta, une liaison importante qui est la généralisation de notre théorème fondamental pour la surface de Kummer et qui se prêtera à de nombreuses applications géométriques.

La surface $\mathfrak{S}$ définie plus haut étant toujours supposée représentable point par point sur le champ hyperelliptique, on obtiendra son degré n, en cherchant le nombre des solutions non fixes communes aux deux équations

$$(1) \qquad \lambda_1 x_1(u, v) + \ldots + \lambda_4 x_4(u, v) = 0,$$

$$(2) \qquad \mu_1 x_1(u, v) + \ldots + \mu_4 x_4(u, v) = 0,$$

où les λ et les μ sont des constantes quelconques. Ce nombre est égal à $2h^2$ diminué de la somme des intersections des deux courbes (1) et (2) réunies aux points singuliers u_1, v_1; $u_2, v_2, \ldots, u_\rho, v_\rho$; c'est-à-dire, d'après la notation du n° **120**, de la somme des nombres $\mathrm{I}(\sigma_k, \sigma_k)$.

Donc :

$$n = 2h^2 - \Sigma_k \mathrm{I}(\sigma_k, \sigma_k), \qquad (k = 1, 2, \ldots \rho).$$

Si le point u_k, v_k est un point multiple d'ordre k à branches séparées pour les courbes (1) et si en ce point ces courbes n'ont aucune branche commune, $\mathrm{I}(\sigma_k, \sigma_k)$ est égal à k^2.

Le genre, p, des sections planes de $\mathfrak{S}$, c'est-à-dire des courbes (1), est donné par la formule du n° **121** :

$$p = h^2 + 1 - \tfrac{1}{2}\Sigma_k \mathrm{I}(\sigma_k, \sigma'_k),$$

σ'_k désignant toujours la singularité adjointe de σ_k.

Dans le cas où u_k, v_k est un point multiple d'ordre k de la nature indiquée tout à l'heure, $\frac{1}{2}\mathrm{I}(\sigma_k, \sigma'_k)$ est égal à $\frac{k(k-1)}{2}$.

124. Arrivons maintenant à l'étude des surfaces adjointes à $\mathfrak{S}$ et d'ordre $n-3$; soit posé

$$\mathrm{F}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4,$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ étant des constantes. La surface $\mathrm{F} = 0$ est un plan, qui détermine sur la surface $\mathfrak{S}$ une section s.

La fonction de u et v

$$\mathrm{F}(u, v) = \mathrm{F}[x_1(u, v), \ldots, x_4(u, v)] = \lambda_1 x_1(u, v) + \ldots + \lambda_4 x_4(u, v)$$

est une fonction thêta, d'ordre h, ayant en chaque point singulier u_k, v_k la singularité σ_k: désignons par $\Theta_1(u, v), \ldots, \Theta_{p-1}(u, v)$ les premiers membres des $p-1$ courbes, linéairement distinctes, du même ordre et de la même famille que s, et adjointes à cette courbe (remarque finale du n° **121**), parmi lesquelles figure d'ailleurs la courbe $\mathrm{F}(u, v) = 0$ elle-même; les intégrales abéliennes de première espèce appartenant à la courbe considérée seront, à part $\int du$ et $\int dv$; de la forme

$$(4) \qquad \mathfrak{J} = \int \frac{\Theta(u,v)}{\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)} du,$$

où $\Theta(u, v)$ est l'une quelconque des fonctions $\Theta_1, \ldots, \Theta_{p-1}$.

L'intégrale $\mathfrak{J}$ peut être mise sous une autre forme qui conduit à des conséquences importantes, relativement aux surfaces adjointes. Représentons en effet comme d'habitude par x, y, z les rapports $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$, on a (n° **104**) sur $\mathfrak{S}$

$$(5) \qquad \begin{cases} S'_z du = B\, dx - A\, dy, \\ S'_z dv = B_1 dx - A_1 dy, \end{cases}$$

$$(5\ bis) \qquad D S'_z = B A_1 - A B_1,$$

$S = o$ étant toujours l'équation de $\mathfrak{S}$ et $D = o$ celle de la surface adjointe d'ordre $n - 4$.

Or, le long de la courbe $F = o$, $S = o$, on a

$$dx\, F'_x + dy\, F'_y + dz\, F'_z = o,$$
$$dx\, S'_x + dy\, S'_y + dz\, S'_z = o;$$

d'où

$$\frac{dx}{S'_y F'_z - S'_z F'_y} = \frac{dy}{S'_z F'_x - S'_x F'_z} = \frac{dz}{S'_x F'_y - S'_y F'_x}$$

étant posé, bien entendu,

$$F(x, y, z) = \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \lambda_4.$$

De ces relations et des relations (5), on tire, le long de la courbe s,

$$(6) \qquad \frac{dx}{S'_y F'_z - S'_z F'_y} = \frac{S'_z du}{B(S'_y F'_z - S'_z F'_y) - A(S'_z F'_x - S'_x F'_z)},$$

ce qui donne la valeur de du, en fonction de dx.

Reste à calculer, pour transformer l'intégrale (4), la valeur de $\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)$, en fonction de x, y, z; or on a

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4 F(x, y, z);$$

d'où, le long de la courbe $S = 0$, $F = 0$,

$$\frac{\partial F}{\partial v} = x_4\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right). \tag{6 bis}$$

Les relations (5), résolues par rapport à dx et dy, donnent, en tenant compte de (5 *bis*),

$$D\,dx = A_1\,du - A\,dv,$$
$$D\,dy = B_1\,du - B\,dv;$$

d'où

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{A}{D}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{B}{D},$$

et, par suite,

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{S'_x}{S'_z}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{S'_y}{S'_z}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{AS'_x + BS'_y}{S'_z}.$$

Portant ces valeurs de $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ dans (6 *bis*), il vient

$$\frac{\partial F}{\partial v} = x_4[B(S'_y F'_z - S'_z F'_y) - A(S'_z F'_x - S'_x F'_z)]\frac{1}{DS'_z}; \tag{6 ter}$$

d'où, finalement, en remplaçant dans (4) du et $\frac{\partial F}{\partial v}$ par leurs valeurs tirées de (6) et (6 *ter*),

$$\mathfrak{J} = \int \frac{\theta(u,v)\,D(x,y,z)}{x_4}\,\frac{dx}{S'_y F'_z - S'_z F'_y}.$$

Supposons que le plan $F = 0$ soit le plan $z = z_0$, qui est évidemment un plan arbitraire de l'espace; il restera

$$\mathfrak{J} = \int \frac{\theta(u,v)\,D(x,y,z_0)}{x_4(u,v)}\,\frac{dx}{S'_y}.$$

Puisque cette intégrale reste finie en tous les points de la courbe plane d'ordre n, $S(x, y, z_0) = 0$, il est nécessaire que la fonction

$$\frac{\Theta(u, v)}{x_4(u, v)} D(x, y, z_0)$$

soit égale, le long de cette courbe, à un polynôme entier d'ordre $n-3$ en x et y, $C(x, y)$, dont les coefficients sont d'ailleurs fonctions de z_0. De plus, la courbe $C = 0$ sera adjointe à la courbe

$$S(x, y, z_0) = 0.$$

En d'autres termes, la fonction $\frac{\Theta(u, v)}{x_4(u, v)} D(x, y, z)$, qui est, en chaque point de la surface $\mathfrak{S}$ une fonction quadruplement périodique de u, v, et par suite une fonction rationnelle de x, y, z, doit être une fonction entière de x et de y : on verrait de même qu'elle est une fonction entière de x et de z, et par suite de x, y, z. On a ainsi, en chaque point de $\mathfrak{S}$,

$$(7) \qquad \frac{\Theta(u, v)}{x_4(u, v)} = \frac{C(x, y, z)}{D(x, y, z)},$$

C désignant un polynôme entier. D'après ce qui précède, le degré de C est $n-3$ par rapport à deux quelconques des variables x, y, z : le tétraèdre de référence étant arbitraire, il en résulte nécessairement que C est d'ordre $n-3$, par rapport à l'ensemble des trois variables.

De plus, la courbe commune à la surface $C = 0$ et au plan $z = z_0$, qui est un plan arbitraire de l'espace, étant, comme on l'a vu, adjointe à la section de $\mathfrak{S}$ par le même plan, cette surface $C = 0$ aura pour courbe multiple d'ordre $l-1$ toute courbe multiple d'ordre l de $\mathfrak{S}$.

La relation (7), qui peut s'écrire, en revenant aux coordonnées homogènes,

$$(8) \qquad \Theta(u, v) = \frac{C(x_1, x_2, x_3, x_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)},$$

mettait d'ailleurs ce dernier résultat en évidence, car le premier membre restant fini pour toutes les valeurs de u et de v, il faut, pour que le second membre soit également fini, que la surface $C = 0$ passe par les courbes communes aux surfaces $D = 0$ et $S = 0$, les courbes unicursales singulières pouvant toutefois être exceptées, puisque le long des courbes $x_1, \ldots, x_4$ s'annulent. On en déduit que toute courbe multiple d'ordre l de $\mathfrak{S}$, qui est multiple d'ordre $l - 1$ sur la surface adjointe $\mathfrak{D}$, doit être aussi multiple d'ordre $l - 1$ sur $C = 0$. Si cette courbe multiple était *en même temps* une courbe unicursale singulière, le raisonnement précédent ne s'appliquerait plus, mais nous venons de voir, par une autre voie, que la proposition subsiste encore.

125. La relation (8) montre également comment se comporte la surface $C = 0$ aux points multiples (isolés) de la surface $\mathfrak{S}$.

M. Picard a fait voir que la surface $D = 0$ passe par les points doubles de $\mathfrak{S}$, et qu'elle a pour point multiple d'ordre au moins égal à $l - 2$ tout point multiple d'ordre l de cette même surface; de plus, si l'ordre de multiplicité est $l - 2$, les termes de degré $l - 2$ dans D ne sont pas complètement arbitraires.

Dès lors, pour que la fonction $\Theta(u, v)$, ou $\frac{C}{D}$, reste finie en un point multiple d'ordre l de $\mathfrak{S}$, il est nécessaire que la surface $C = 0$ ait en ce point un point multiple du même ordre que la surface $D = 0$; et l'on voit ainsi que la surface $C = 0$ est une surface (d'ordre $n - 3$), adjointe à $\mathfrak{S}$, et qu'elle se comporte comme la surface $D = 0$, aux points multiples isolés.

Il est également à observer que si la surface $D = 0$, en un point multiple isolé, avait le même cône des tangentes que la surface $\mathfrak{S}$, la surface $C = 0$ jouirait de la même propriété. Cette condition est en effet nécessaire pour que la fonction $\frac{C(x, y, z)}{D(x, y, z)}$ reste finie quand le point (x, y, z) s'approche du point multiple en restant sur $\mathfrak{S}$.

126. A chacune des $p - 1$ fonctions linéairement distinctes Θ_1, $\Theta_2, \ldots, \Theta_{p-1}$, correspond ainsi par la relation (8) une surface d'ordre $n - 3$ adjointe à $\mathfrak{S}$: les $p - 1$ surfaces obtenues sont distinctes linéairement; sinon, en vertu de la relation (8), les $p - 1$ fonctions Θ ne le seraient pas.

Réciproquement, nous allons établir que, si $C = 0$ est l'équation d'une surface d'ordre $n - 3$ *adjointe* à $\mathfrak{S}$, la fonction

$$\frac{C(x_1, x_2, x_3, x_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)}$$

est égale, en chaque point de $\mathfrak{S}$, à une fonction linéaire et homogène de $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_{p-1}$.

Nous admettrons d'abord, non seulement que la surface $C = 0$ est adjointe à $\mathfrak{S}$ dans le sens ordinaire du mot, c'est-à-dire qu'elle a pour courbe multiple d'ordre $l - 1$ toute courbe multiple d'ordre l de $\mathfrak{S}$, et pour point multiple d'ordre au moins égal à $l - 2$ tout point multiple d'ordre l de cette surface; mais encore que l'expression

$$x_4(u, v)\frac{C(x, y, z)}{D(x, y, z)}$$

reste finie, sur la surface $\mathfrak{S}$, pour toutes les *valeurs de u, v qui correspondent à des points multiples isolés.*

Nous reviendrons ensuite sur cette restriction, pour nous en débarrasser, ou tout au moins pour lui donner un énoncé géométrique simple et précis.

127. Soient $C(x, y, z) = 0$ une surface d'ordre $n - 3$ adjointe à $\mathfrak{S}$, $F(x, y, z) = 0$ le plan $\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \lambda_4 = 0$; l'intégrale

$$\mathfrak{J} = \int C(x, y, z)\frac{dx}{S'_y F'_z - S'_z F'_y}$$

est évidemment, d'après l'hypothèse et la théorie générale des intégrales abéliennes, une intégrale de première espèce le long de la courbe plane $S = 0$, $F = 0$, du moins tant que les λ restent quelconques, c'est-à-dire tant que le plan $F = 0$ ne touche pas $\mathfrak{S}$ ou ne passe pas par un des points multiples isolés de cette surface.

Si maintenant on refait en sens inverse les calculs du n° **124**, on met $\mathfrak{J}$ sous la forme

$$\mathfrak{J} = \int \frac{C(x_1, x_2, x_3, x_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)}\frac{du}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial v}\right)},$$

étant toujours posé

$$F(u, v) = \lambda_1 x_1(u, v) + \ldots + \lambda_4 x_4(u, v).$$

On voit ainsi que la fonction de u et v

$$\frac{C(x_1, x_2, x_3, x_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)}$$

reste finie en tous les points de la courbe $F(u, v) = 0$, considérée dans le champ hyperelliptique ; on en déduit, en faisant varier les λ, qu'elle reste finie en tous les points de $\mathfrak{S}$, les points multiples isolés pouvant seuls être exceptés. Mais cette restriction est inutile, car nous avons admis *a priori* que $\frac{C}{D}$ restait fini en chacun de ces points. Soit alors $\Theta(u, v)$ la fonction $\frac{C}{D}(u, v)$; on a évidemment, puisque les $x_j(u, v)$ sont des fonctions thêta d'ordre h, à caractéristique nulle, et que le degré de $C(x_1, \ldots, x_4)$ surpasse d'une unité celui de $D(x_1, \ldots, x_4)$,

$$\begin{aligned}
\Theta(u + 2\pi i, v) &= \Theta(u, v + 2\pi i) = \Theta(u, v), \\
\Theta(u + a, v + b) &= e^{-hu - h\frac{a}{2}}\Theta(u, v), \\
\Theta(u + b, v + c) &= e^{-hv - h\frac{c}{2}}\Theta(u, v),
\end{aligned}$$

ce qui montre, puisque $\Theta(u, v)$ est une fonction entière, que c'est aussi une fonction thêta, d'ordre h, de caractéristique nulle.

Enfin l'intégrale $\mathfrak{J}$ restant finie tout le long de la courbe $F(u, v) = 0$, il est nécessaire (n° **121**) que $\Theta(u, v)$ soit une combinaison linéaire des $p - 1$ fonctions $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \ldots, \Theta_{p-1}$, et c'est là précisément la réciproque qu'il s'agissait d'établir.

128. Supposons maintenant que $C = 0$ soit l'équation d'une surface d'ordre $n - 3$ ayant pour courbe multiple d'ordre $l - 1$ toute courbe multiple d'ordre l de $\mathfrak{S}$, *sans aucune condition relative aux points multiples isolés;* la démonstration précédente établit que la fonction de u et v

$$\frac{C(x_1, \ldots, x_4)}{D(x_1, \ldots, x_4)}$$

reste finie en tous les points de $\mathfrak{S}$, les points multiples isolés pouvant seuls être exceptés.

Deux cas sont à distinguer suivant la nature analytique du point multiple :

En premier lieu, et c'est le cas le plus intéressant, il peut arriver qu'à un point multiple, O, de $\mathfrak{S}$, corresponde *une infinité* de systèmes de valeurs des paramètres u et v.

Supposons par exemple, ce que nous pouvons toujours admettre, que O soit le point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; pour que le cas indiqué se présente, il faut que les trois équations $x_1(u, v) = 0$; $x_2(u, v) = 0$; $x_3(u, v) = 0$ aient une infinité de solutions communes et, par suite, il est nécessaire que les fonctions $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$, $x_3(u, v)$ soient divisibles par une même fonction thêta, $\theta(u, v)$.

La surface $\mathfrak{S}$ est alors définie par des relations de la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta(u, v)\,\theta_1(u, v), \\ x_2 &= \theta(u, v)\,\theta_2(u, v), \\ x_3 &= \theta(u, v)\,\theta_3(u, v), \\ x_4 &= \Theta_4(u, v), \end{aligned}$$

les θ et Θ étant des fonctions thêta.

Inversement, on vérifie sans difficulté qu'une surface ainsi définie admet le point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ pour point multiple, et à ce point correspondent les couples d'arguments vérifiant l'équation

$$\theta(u, v) = 0.$$

Soit u_0, v_0 un de ces couples; si u et v s'approchent respectivement de u_0 et v_0, le point (x_1, x_2, x_3, x_4) s'approche de O, dans la direction définie par les relations

$$\frac{x_1}{\theta_1(u_0, v_0)} = \frac{x_2}{\theta_2(u_0, v_0)} = \frac{x_3}{\theta_3(u_0, v_0)}.$$

Nous appellerons *point multiple de première catégorie* un point multiple de cette nature.

Reprenons maintenant les deux surfaces $C = 0$, $D = 0$; *si la première a au point O un point multiple du même ordre que la surface* $D = 0$, le quotient $x_4 \frac{C(x, y, z)}{D(x, y, z)}$ reste évidemment fini, quand x, y, z s'approche de O en restant sur $\mathfrak{S}$, c'est-à-dire en suivant une des directions tangentes à $\mathfrak{S}$ en ce point. Il n'y a d'exceptions que pour les directions tangentes simultanément aux surfaces $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{D}$, en d'autres termes le quotient

$$x_4 \frac{C(x, y, z)}{D(x, y, z)} \quad \text{ou} \quad \frac{C(x_1, x_2, x_3, x_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)},$$

considéré comme fonction de u, v, reste fini pour tous les systèmes de valeurs de u, v qui correspondent au point multiple, sauf peut-être pour certains systèmes *en nombre limité*. Ces systèmes de valeurs ne pourraient être en nombre infini que si les cônes formés par les tangentes en O aux surfaces $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{D}$ avaient une partie commune; c'est là un cas d'exception sur lequel nous reviendrons.

En second lieu, à un point multiple de $\mathfrak{S}$ peut ne correspondre qu'un nombre limité de systèmes de valeurs de u, v; nous n'avons rien à dire de spécial sur ce cas particulier.

Cela posé, nous savons que le quotient $\frac{C}{D}$ reste fini en tous les points (non multiples) de $\mathfrak{S}$, dès que la surface $C = 0$ a pour ligne d'ordre $l - 1$ toute ligne d'ordre l de $\mathfrak{S}$; si de plus cette surface a en chacun des points multiples de $\mathfrak{S}$ un point multiple de même ordre que la surface $\mathfrak{D}$, le quotient $\frac{C}{D}$ considéré comme fonction de u et de v ne pourra devenir infini que pour un nombre limité de systèmes de valeurs de u et de v.

On en conclut alors qu'il reste fini pour toutes les valeurs de u, v.

En effet, la fonction thêta $D[x_1(u, v), \ldots, x_4(u, v)]$ s'annule pour une infinité de systèmes de valeurs de u et v; si le quotient $\frac{C}{D}$ ne devient infini que pour un nombre limité de ces systèmes, il faut que les deux équations $C(u, v) = 0$ et $D(u, v) = 0$ aient une infinité de solutions communes, ce qui ne peut se présenter que si $C(u, v)$ est divisible par $D(u, v)$, ou par une fonction thêta divisant D. Dans cette dernière hypothèse on pourrait poursuivre le même raisonnement, et on arrive ainsi à établir que $C(u, v)$ est divisible par $D(u, v)$, le quotient étant une fonction thêta.

En d'autres termes, le quotient $\frac{C}{D}$ reste fini en *tous* les points de $\mathfrak{S}$, *sans exception.*

Reste à examiner le cas spécial signalé plus haut, celui où les cônes formés par les tangentes aux surfaces $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{D}$ en un point multiple, auraient en commun un cône γ: en ce cas, pour que $\frac{C}{D}$ reste fini au point considéré, il faut que la surface $C = 0$ y ait un point multiple du même ordre que la surface $D = 0$ et que les génératrices du cône γ touchent également en ce point la surface $C = 0$. On démontre par la méthode suivie plus haut que la condition est nécessaire et suffisante.

129. Voici la conclusion de cette analyse :

Appelons *surface adjointe* à une surface hyperelliptique $\mathfrak{S}$ une surface qui a pour ligne multiple d'ordre $l - 1$ toute ligne multiple d'ordre l de $\mathfrak{S}$, et qui, en tout point multiple isolé de $\mathfrak{S}$, se comporte comme la surface adjointe $\mathfrak{D}$ d'ordre $n - 4$.

Le sens de l'expression *se comporte* est donné par l'analyse précédente; en général il suffira que la surface adjointe ait, au point multiple, un point multiple du même ordre que $\mathfrak{D}$; si le cône des tangentes de $\mathfrak{D}$ en ce point est le même que celui des tangentes de $\mathfrak{S}$, ou s'il comprend une partie de ce dernier cône, la surface adjointe devra jouir de la même propriété que $\mathfrak{D}$.

Sous le bénéfice de cette explication nous pouvons énoncer la proposition géométrique suivante, résultat des recherches des numéros précédents.

130. Théorème I. — *Le nombre des surfaces d'ordre $n - 3$, linéairement distinctes, adjointes à une surface hyperelliptique quelconque $\mathfrak{S}$, d'ordre n, est égal au genre des sections planes de cette surface, diminué d'une unité.*

Si les coordonnées d'un point de la surface hyperelliptique proposée sont proportionnelles à des fonctions thêta, de caractéristique nulle et d'ordre h, ayant en des points $u_1, v_1; \ldots; u_k, v_k; \ldots$, *des singularités communes*, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \ldots$, *les surfaces adjointes d'ordre* $n-3$ *découperont sur la proposée* $\mathfrak{S}$ *le système linéaire de courbes ayant pour équation*

$$\lambda_1 \Theta_1(u,v) + \lambda_2 \Theta_2(u,v) + \ldots + \lambda_{p-1}\Theta_{p-1}(u,v) = 0,$$

$\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_{p-1}$ *désignant les* $p-1$ *fonctions thêta, linéairement distinctes, de caractéristique nulle et d'ordre h, qui ont en chaque point* u_k, v_k *la singularité* σ'_k *adjointe de la singularité* σ_k.

131. Une méthode analogue à celle qui vient d'être exposée est applicable à la détermination des surfaces adjointes d'un ordre quelconque, $n+q-4$ l'expression *surfaces adjointes* ayant toujours la signification indiquée au n° **129**.

Considérons en effet une surface d'ordre q, quelconque :

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0; \qquad \text{ou} \qquad F(x, y, z) = 0.$$

La fonction de u et v, $F[x_1(u,v), \ldots, x_4(u,v)]$ est une fonction thêta de caractéristique nulle, d'ordre hq, ayant en tout point singulier u_k, v_k la singularité composée $(q\sigma_k)$ (n° **122**). Il en résulte que les intégrales abéliennes de première espèce appartenant à la courbe

$$F[x_1(u,v), \ldots] = 0$$

seront, à part $\int du$ et $\int dv$, de la forme

$$\mathfrak{J} = \int \theta(u,v) \frac{du}{\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)},$$

$\theta(u,v)$ désignant une fonction thêta de caractéristique nulle d'ordre hq, ayant en chaque point u_k, v_k la singularité $(q\sigma_k)'$, adjointe de la singularité $(q\sigma_k)$.

Cette intégrale peut être transformée comme au n° **124**.

Considérons la courbe algébrique intersection des surfaces

$$S(x, y, z) = 0 \qquad \text{et} \qquad F(x, y, z) = 0.$$

On a, le long de cette courbe,

$$\frac{dx}{S'_y F'_z - S'_z F'_y} = \frac{dy}{S'_z F'_x - S'_x F'_z}$$

et

$$\frac{dx}{S'_y F'_z - S'_z F'_y} = \frac{S'_z du}{B(S'_y F'_z - S'_z F'_y) - A(S'_z F'_x - S'_x F'_z)}.$$

D'ailleurs,

$$(9) \qquad F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4^q F(x, y, z),$$

et par suite, le long de la courbe $S = 0$, $F = 0$,

$$(10) \qquad \frac{\partial F}{\partial v} = x_4^q \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

d'où, par les calculs du n° **124**,

$$\frac{\partial F}{\partial v} = x_4^q \left| B(S'_y F'_z - S'_z F'_y) - A(S'_z F'_x - S'_x F'_z) \right| \frac{1}{DS'_z},$$

ce qui donne pour l'intégrale $\mathfrak{J}$ la forme définitive

$$(11) \qquad \mathfrak{J} = \int \frac{\theta(u, v) D(x, y, z)}{x_4^q} \frac{dx}{S'_y F'_z - S'_z F'_y}.$$

On a ainsi ramené l'intégrale $\mathfrak{J}$, qui est prise le long de la courbe gauche $S = 0$, $F = 0$, à une forme simple; pour qu'elle soit de première espèce, il faut d'abord que, en chaque point de cette courbe, la fonction

$$\frac{\theta(u, v) D(x, y, z)}{x_4^q}$$

soit égale à un polynôme entier d'ordre $n + q - 4$, $C(x, y, z)$. Or cette fonction, étant quadruplement périodique en u et v, est en chaque point de $\mathfrak{S}$ une fonction rationnelle de x, y, z; la surface $F = 0$ étant quelconque, on voit qu'il est nécessaire qu'*en chaque point de* $\mathfrak{S}$ la fonction rationnelle précédente soit entière, et l'on a ainsi

$$\frac{\theta(u, v)\, D(x, y, z)}{x_4^q} = C(x, y, z),$$

ou, en coordonnées homogènes,

$$\theta(u, v) = \frac{C(x_1, x_2, x_3, x_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)}. \tag{12}$$

De plus, la surface $C = 0$ doit être adjointe à la surface $\mathfrak{S}$: on le voit, soit à l'aide de la relation qui précède, soit en exprimant directement que l'intégrale

$$\int C(x, y, z) \frac{dx}{S'_y F'_z - S'_z F'_y}$$

est finie aux points où la surface $F = 0$ coupe les lignes multiples de $\mathfrak{S}$.

La réciproque de cette proposition se démontre sans difficulté, en suivant la marche inverse, comme au n° **127**.

Si en effet $C = 0$ est l'équation d'une surface adjointe à $\mathfrak{S}$, d'ordre $n + q - 4$, l'intégrale

$$\mathfrak{J} = \int C(x, y, z) \frac{dx}{S'_y F'_z - S'_z F'_y}$$

prise le long de la courbe $S = 0$, $F = 0$, peut se mettre sous la forme

$$\int \frac{C(x_1, x_2, x_3, x_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)} \frac{du}{\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)},$$

Comme $\mathfrak{J}$, d'après la première forme, est une intégrale abélienne de première espèce, on voit que la fonction $\frac{C[x_1(u, v), \ldots, x_4(u, v)]}{D[x_1(u, v), \ldots]}$ reste finie le long de la courbe considérée et par suite (n°s **127-128**) en tout point de $\mathfrak{S}$; $\frac{C}{D}$ est donc une fonction entière de u, v, et, en vertu de son expression même, c'est une fonction thêta, d'ordre qh, et de caractéristique nulle, $\theta(u, v)$. La courbe $\theta(u, v) = 0$ doit d'ailleurs avoir en chaque point u_k, v_k la singularité $(q\sigma_k)'$, pour que l'intégrale reste finie en ce point. Donc :

Théorème II. — *Les surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ déterminent sur la surface $\mathfrak{S}$ le système de courbes ayant pour équation générale*

$$(13) \qquad \lambda_1\theta_1(u,v)+\lambda_2\theta_2(u,v)+\ldots=0,$$

les θ étant des fonctions d'ordre hq, de caractéristique nulle, ayant en u_k, v_k la singularité $(q\sigma_k)'$; réciproquement toute courbe (13) est sur une surface adjointe d'ordre $n+q-4$.

132. Calculons maintenant le nombre des surfaces adjointes, linéairement distinctes, d'ordre $n+q-4$.

D'après ce qui précède, il est égal au nombre des fonctions $\theta(u,v)$, linéairement distinctes; toutefois, si q atteint ou dépasse 4, on obtiendra d'autres surfaces adjointes par l'équation

$$SQ=0,$$

où Q est un polynôme quelconque d'ordre $q-4$, renfermant

$$\tfrac{1}{6}(q-3)(q-2)(q-1)$$

coefficients arbitraires, et l'on devra ainsi ajouter au nombre des fonctions $\theta(u,v)$ distinctes le nombre

$$\tfrac{1}{6}(q-3)(q-2)(q-1).$$

Les fonctions thêta linéairement distinctes d'ordre hq et de caractéristique nulle sont en nombre égal à h^2q^2; il faut chercher combien, parmi elles, ont en chaque point u_k, v_k la singularité composée $(q\sigma_k)'$.

Nous allons d'abord démontrer que les conditions imposées à une fonction thêta d'ordre hq et de caractéristique nulle par les singularités $(q\sigma_k)'$ sont indépendantes entre elles; le nombre cherché des fonctions $\theta(u, v)$ sera donc égal à $h^2 q^2$ diminué de la somme des nombres des conditions auxquelles équivaut *chacune* des singularités considérées.

Il a été en effet établi au n° **121** que, si une courbe $\Theta_0(u, v) = 0$ a en des points u_1, v_1; $u_2, v_2 \ldots$ des singularités $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, les conditions imposées par les singularités adjointes $\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots$, aux courbes du même ordre et de la même famille que $\Theta_0(u, v) = 0$ sont indépendantes; or si $\Theta_0(u, v)$ est un polynôme arbitraire d'ordre q en $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$, $x_3(u, v)$, $x_4(u, v)$, la courbe $\Theta_0 = 0$ n'a pas d'autres singularités que la singularité $(q\sigma_k)$, en chaque point u_k, v_k, et par suite les singularités $(q\sigma_k)'$ sont indépendantes, comme nous voulions l'établir, pour les courbes dont l'équation générale s'obtient en annulant une fonction thêta d'ordre hq, de caractéristique nulle.

Cherchons maintenant à combien de conditions équivaut la singularité $(q\sigma_k)'$.

Soient

C_{kq} le nombre de conditions auxquelles équivaut la singularité $(q\sigma_k)$:
c_k le nombre analogue pour la singularité σ_k;
C'_{kq} le nombre analogue pour la singularité $(q\sigma_k)'$;

on a, d'après le premier théorème de M. Guccia (n° **122**) et celui du n° **120**,

$$C_{kq} = \mathrm{I}(q\sigma_k, q\sigma_k) - C'_{kq};$$

le second théorème de M. Guccia (n° **122**) donne

$$C_{kq} = q c_k + \frac{q(q-1)}{2} \mathrm{I}(\sigma_k, \sigma_k).$$

Enfin l'on a

$$c_k = \mathrm{I}(\sigma_k, \sigma_k) - \tfrac{1}{2}\mathrm{I}(\sigma_k, \sigma'_k),$$

en vertu du premier théorème de M. Guccia et de celui du n° **120**. Égalant les deux valeurs de C_{kq}, et éliminant c_k, on obtient la valeur cherchée de C'_{kq},

$$C'_{kq} = \mathrm{I}(q\sigma_k, q\sigma_k) - \tfrac{1}{2}q(q+1)\,\mathrm{I}(\sigma_k, \sigma_k) + \frac{q}{2}\,\mathrm{I}(\sigma_k, \sigma'_k).$$

On a d'ailleurs évidemment, d'après la définition même de la singularité $(q\sigma_k)$ (¹),

$$\mathrm{I}(q\sigma_k, q\sigma_k) = q^2\,\mathrm{I}(\sigma_k, \sigma_k),$$

et, par suite,

$$C'_{kq} = \tfrac{1}{2}q(q-1)\,\mathrm{I}(\sigma_k, \sigma_k) + \frac{q}{2}\,\mathrm{I}(\sigma_k, \sigma'_k).$$

Il est à remarquer que la somme des nombres C'_{kq}, pour tous les points u_k, v_k, est indépendante des quantités $\mathrm{I}(\sigma_k, \sigma_k)$ et $\mathrm{I}(\sigma_k, \sigma'_k)$; on a en effet (nº **123**)

$$(14)\qquad \begin{cases} n = 2h^2 \quad - \Sigma\,\mathrm{I}(\sigma_k, \sigma_k), \\ p = h^2 + 1 - \tfrac{1}{2}\Sigma\,\mathrm{I}(\sigma_k, \sigma'_k); \end{cases}$$

d'où

$$\Sigma C''_{kq} = \frac{q(q-1)}{2}(2h^2 - n) + q(h^2 + 1 - p).$$

Le nombre des fonctions $\theta(u, v)$ est ainsi égal à

$$h^2 q^2 - \Sigma C''_{kq} = \frac{q(q-1)}{2}\,n + q(p-1).$$

Dans cette expression figurent seulement n, p, q.

133. Nous pouvons maintenant énoncer ce théorème :

Théorème III. — *Le nombre des surfaces d'ordre $n+q-4$, linéairement distinctes, adjointes à une surface hyperelliptique d'ordre n et dont les sections planes sont de genre p, est égal à*

$$N_q = \tfrac{1}{2}q(q-1)n + q(p-1) + \tfrac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3)\ (^2).$$

Dans cette formule q est supposé au moins égal à un. Donc aussi :

Les surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ découpent sur la pro-

(¹) *Voir* Guccia, *Rendiconti del Circolo matem. di Palermo*, t. III, p. 259.

(²) Le terme complémentaire $\frac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3)$ ne doit figurer que si q est au moins égal à quatre; mais, comme il s'annule pour $q = 1, 2, 3$, la formule subsiste pour $q \geqq 1$.

posée une série linéaire de courbes, dont l'équation renferme $\frac{1}{2}q(q-1)n+q(p-1)-1$ *paramètres arbitraires.*

134. *Remarque.* — Le nombre N_q des surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ peut aussi être trouvé sans faire usage des formules de M. Guccia, par la voie géométrique suivante.

Il résulte des raisonnements faits aux n^{os} **119-121** que le nombre des fonctions $\theta(u, v)$ est égal au nombre des intégrales abéliennes de première espèce appartenant à la courbe $F=0$, $S=0$, diminué de deux unités à cause des intégrales $\int du$ et $\int dv$, et augmenté d'une unité, puisque parmi les fonctions $\theta(u, v)$ figure la fonction

$$F[x_1(u, v), \ldots, x_4(u, v)].$$

Soit ϖ le genre de la courbe $F=0$, $S=0$, c'est-à-dire le nombre de ses intégrales abéliennes de première espèce; il est toujours entendu que la surface d'ordre q, $F=0$, est quelconque, c'est-à-dire n'a aucune relation particulière avec $\mathfrak{S}$.

Pour calculer ϖ, cherchons en combien de points, distincts de ses points multiples, la courbe est coupée par une de ses surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$: on obtient évidemment une telle surface en combinant la surface $\mathfrak{D}$, d'ordre $n-4$ adjointe à $\mathfrak{S}$, et une surface quelconque d'ordre q; cette dernière coupe la courbe en $q^2 n$ points, et l'on a ainsi

$$2(\varpi-1)=q^2 n+R_q,$$

R_q étant le nombre des points, situés en dehors des courbes multiples de $\mathfrak{S}$, où la courbe considérée coupe la surface $\mathfrak{D}$, c'est-à-dire le nombre des points où la surface $F=0$ coupe les courbes unicursales singulières de $\mathfrak{S}$.

Pour $q=1$, la surface $F=0$ est un plan; ϖ est alors égal à p, et il vient

$$2(p-1)=n+R_1.$$

Il est clair d'ailleurs que $R_q=qR_1$; si donc on élimine R_q et R_1, on

trouve pour ϖ
$$\varpi = \tfrac{1}{2}q(q-1)n + q(p-1) + 1.$$

Par suite, le nombre, $\varpi - 1$, des fonctions $\theta(u, v)$ linéairement distinctes est égal à
$$\tfrac{1}{2}q\,(q-1)n + q(p-1),$$
comme nous l'avions démontré par une voie purement analytique.

135. Parmi les surfaces adjointes, celles qui passent par toutes les courbes unicursales singulières offrent un intérêt spécial.

Soit $C = 0$ une de ces surfaces, d'ordre $n + q - 4$; reprenons la relation

$$(12) \qquad \frac{\theta(u, v)}{x_4^q} = \frac{C(x, y, z)}{D(x, y, z)}$$

vérifiée en tout point de $\mathfrak{S}$. La surface $C = 0$ passant par les courbes unicursales singulières, la fonction $\frac{C}{D}$, considérée comme fonction de x, y, z, reste finie en un point quelconque d'une de ces courbes, pourvu toutefois que ce point ne soit pas à l'infini, c'est-à-dire dans le plan $x_4 = 0$.

Il en résulte que $\frac{C}{D}$, considérée comme fonction de u et v, ne devient pas infinie quand on y remplace u et v par les valeurs u_k, v_k des paramètres u, v qui correspondent à la courbe unicursale considérée; la fonction $\frac{\theta(u, v)}{x_4^q}$ jouira d'après (12) de la même propriété, et par suite la courbe $\theta(u, v) = 0$ aura, en chaque point (u_k, v_k), la même singularité que la courbe $x_4^q = 0$, c'est-à-dire la singularité composée $(q\sigma_k)$.

Réciproquement, soit $\theta(u, v)$ une fonction thêta d'ordre hq, de caractéristique nulle, ayant en chaque point (u_k, v_k) la singularité $(q\sigma_k)$; on a évidemment (n° **131**)

$$\frac{\theta(u, v)}{x_4^q} = \frac{C(x, y, z)}{D(x, y, z)},$$

$C = 0$ étant l'équation d'une surface adjointe d'ordre $n + q - 4$

Le premier membre reste fini par hypothèse quand u et v s'approchent de u_k, v_k $\left(\text{le rapport } \frac{u-u_k}{v-v_k} \text{ étant arbitraire}\right)$; le second membre jouit donc de la même propriété, et par suite $\frac{C}{D}$, considérée comme fonction de x, y, z, reste finie le long des courbes unicursales singulières, ce qui exige que la surface $C = 0$ passe par toutes ces courbes.

Ainsi :

Théorème IV. — *Les surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ qui passent par les courbes unicursales singulières découpent sur* $\mathfrak{S}$ *la série linéaire des courbes comprises dans l'équation*

$$\lambda_1 \theta_1(u, v) + \lambda_2 \theta_2(u, v) + \ldots = 0,$$

où $\theta_1(u, v)$, $\theta_2(u, v)$, ... désignent les fonctions thêta linéairement distinctes d'ordre hq, de caractéristique nulle, ayant en chaque point u_k, v_k la singularité composée $(q\sigma_k)$, et réciproquement.

136. Le nombre des surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$, linéairement distinctes et passant par les courbes unicursales singulières est égal d'après cela au nombre des fonctions $\theta(u, v)$ qu'on vient de considérer, augmenté de $\frac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3)$.

Or ce nombre est *au moins* égal à h^2q^2, diminué de la somme des nombres des conditions auxquelles équivaut chacune des singularités $(q\sigma_k)$: nous disons *au moins*, parce qu'il peut arriver, et qu'il arrive en effet, que les conditions imposées aux fonctions thêta, d'ordre hq et de caractéristique nulle, par les singularités $(q\sigma_k)$, ne soient pas indépendantes les unes des autres.

Le nombre C_{kq} des conditions auxquelles équivaut la singularité $q\sigma_k$ se tire des relations du n° **132**; on trouve ainsi

$$C_{kq} = \tfrac{1}{2}q(q+1)\,\mathrm{I}(\sigma_k, \sigma_k) - \tfrac{1}{2}q\,\mathrm{I}(\sigma_k, \sigma'_k)$$

et, par suite, en tenant compte des équations (14),

$$\Sigma C_{kq} = \tfrac{1}{2}q(q+1)(2h^2-n) - q(h^2+1-p).$$

Il vient donc

$$h^2 q^2 - \Sigma C_{kq} = \tfrac{1}{2} q(q+1)n - q(p-1).$$

Ainsi :

Le nombre n_q des surfaces adjointes, linéairement distinctes, d'ordre $n+q-4$, passant par les courbes unicursales singulières de $\mathfrak{S}$ est AU MOINS *égal à*

$$\tfrac{1}{2} q(q+1)n - q(p-1) + \tfrac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3).$$

Si q dépasse une certaine limite, on peut voir que le nombre n_q est *toujours* égal à cette quantité.

137. Une surface adjointe d'ordre $n+q-4$ coupe $\mathfrak{S}$, en dehors des lignes multiples, suivant une courbe dont le degré, d_q, s'évalue aisément.

Il est clair tout d'abord qu'on a

$$d_q = d_1 + n(q-1);$$

on le voit en supposant que la surface adjointe d'ordre $n+q-4$ se décompose en une surface adjointe d'ordre $n-3$ et en une surface quelconque d'ordre $q-1$.

Pour calculer d_1 observons que l'équation de la courbe déterminée sur $\mathfrak{S}$ par une surface adjointe d'ordre $n-3$ a une équation de la forme

$$\Theta(u, v) = 0$$

$\Theta(u, v)$ étant une fonction thêta d'ordre h, douée en chaque point singulier, u_k, v_k, de la singularité σ'_k.

Le degré de cette courbe sera égal au nombre des solutions communes aux deux équations

$$\Theta(u, v) = 0, \qquad x_4(u, v) = 0,$$

abstraction faite des solutions qui coïncident avec un des systèmes singuliers u_k, v_k.

On a ainsi

$$d_1 = 2h^2 - \Sigma I(\sigma_k, \sigma'_k)$$

et par suite, d'après (14),

$$d_1 = 2(p-1);$$

d'où

$$d_q = 2(p-1) + n(q-1).$$

Si la surface adjointe d'ordre $n+q-4$ passe par les courbes unicursales singulières, le degré δ_q de la courbe suivant laquelle elle coupe en outre $\mathfrak{S}$, est de même égal à

$$\delta_1 + n(q-1);$$

or ici on a

$$\delta_1 = 2h^2 - \Sigma I(\sigma_k, \sigma_k) = n;$$

d'où

$$\delta_q = nq.$$

Ce résultat est évident, si l'on observe que la surface adjointe considérée peut se décomposer en une surface d'ordre q, quelconque, et en la surface adjointe $\mathfrak{D}$, d'ordre $n-4$.

La différence $d_1 - \delta_1$ représente la somme des degrés des courbes unicursales singulières; on a

$$d_1 - \delta_1 = 2(p-1) - n.$$

Applications géométriques.

138. Les résultats généraux auxquels nous sommes parvenus relativement aux surfaces adjointes, donnent lieu à des applications géométriques nombreuses, qui vont nous occuper maintenant.

139. I. Tout d'abord ces résultats permettent de vérifier, pour les surfaces hyperelliptiques, la proposition générale si remarquable et si importante qui est due à M. Nöther, et qui est connue sous le nom de *Théorème du Reste* (1).

(1) *Math. Annalen*, t. III, p. 509.

Ce théorème s'énonce ainsi :

Si une surface d'un ordre donné, adjointe à une surface algébrique $\mathfrak{S}$, *coupe celle-ci (en dehors des lignes multiples) suivant deux courbes* c_1 *et* c', *on dit que* c_1 *et* c' *sont résiduelles. Toute courbe* c'', *résiduelle de* c_1, *est dite corésiduelle de* c', *par rapport à* c_1.

Cela posé, le théorème du Reste est le suivant :

Lorsque, sur $\mathfrak{S}$, *des courbes* c', c'', ... *sont corésiduelles par rapport à une même courbe* c_1, *elles le sont également par rapport à toute courbe* c_2, *résiduelle de l'une quelconque d'entre elles.*

Dans le cas d'une surface hyperelliptique, soient $\theta_1 = 0$ et $\theta' = 0$ les équations de deux courbes résiduelles, situées sur une surface adjointe d'ordre $n + q - 4$. Le produit $\theta_1\theta'$ sera une fonction thêta, d'ordre hq, de caractéristique nulle, ayant en chaque point u_k, v_k la singularité $(q\sigma_k)'$. Soient $\theta'' = 0$ une courbe résiduelle de $\theta_1 = 0$, et $\theta_2 = 0$ une courbe résiduelle de $\theta' = 0$; les produits $\theta_1\theta''$ et $\theta_2\theta'$ jouiront des mêmes propriétés que le produit $\theta_1\theta'$. Il en résulte, sans difficulté, que la fonction $\theta_2\theta''$ sera aussi une fonction thêta, d'ordre hq, de caractéristique nulle, ayant en u_k, v_k la singularité $(q\sigma_k)'$, ce qui démontre que les courbes $\theta_2 = 0$, $\theta'' = 0$ sont bien sur une même surface adjointe d'ordre $n + q - 4$.

Le théorème du Reste est ainsi vérifié.

140. II. Soient $c_1, c_2, \ldots, c_\rho$ les courbes d'intersection de $\mathfrak{S}$ avec ρ surfaces adjointes, passant par les courbes unicursales singulières, et d'ordres respectifs $n + q_1 - 4$, $n + q_2 - 4$, ..., $n + q_\rho - 4$. *Ces courbes sont sur une même surface adjointe, passant par les courbes unicursales, et d'ordre* $n + (q_1 + q_2 + \ldots + q_\rho) - 4$.

En effet, soient $\Theta_1 = 0$, $\Theta_2 = 0$, ..., $\Theta_\rho = 0$ les équations des ρ courbes considérées; $\Theta_j(u, v)$ est une fonction thêta d'ordre hq_j, de caractéristique nulle, ayant en u_k, v_k la singularité $(q_j\sigma_k)$: donc la fonction thêta, de caractéristique nulle,

$$\Theta_1\Theta_2\ldots\Theta_\rho$$

est d'ordre

$$h(q_1 + q_2 + \ldots + q_\rho)$$

et a en u_k, v_k la singularité

$$(q_1 + q_2 + \ldots + q_\rho)\sigma_k.$$

Ce dernier point découle de la définition même des singularités composées. En d'autres termes, la courbe $\Theta_1\Theta_2\ldots\Theta_\rho = 0$ est, d'après le numéro **135**, sur une surface adjointe d'ordre

$$n + (q_1 + q_2 + \ldots + q_\rho) - 4,$$

passant par les courbes unicursales singulières, ce qui est la proposition énoncée.

Nous ne donnerons de ce résultat que l'application suivante :

Soit c la courbe d'ordre qn suivant laquelle $\mathfrak{S}$ est coupée par une surface adjointe d'ordre $n + q - 4$ passant par les courbes unicursales singulières; il existe une surface adjointe, d'ordre $n + rq - 4$, passant par les courbes unicursales singulières, et ayant en outre, avec $\mathfrak{S}$, un contact d'ordre $r - 1$ tout le long de la courbe c.

Voici une autre proposition de même nature que la précédente.

Soient c_q et c'_s deux courbes, intersections de $\mathfrak{S}$ avec deux surfaces adjointes d'ordres $n + q - 4$ et $n + s - 4$, dont la première passe en outre par les courbes unicursales singulières : *ces deux courbes sont sur une surface adjointe d'ordre $n + q + s - 4$.*

En effet, si $\Theta = 0$, $\Theta' = 0$ sont les équations des deux courbes, la fonction Θ est d'ordre hq et a, en u_k, v_k, la singularité $(q\sigma_k)$; Θ' est d'ordre sq et a, en u_k, v_k, la singularité $(s\sigma_k)'$, c'est-à-dire, comme on le voit aisément, la singularité composée $(s - 1)\sigma_k + \sigma'_k$. Le produit $\Theta\Theta'$ est donc une fonction thêta, d'ordre $s + q$, ayant en u_k, v_k la singularité $(q + s - 1)\sigma_k + \sigma'_k$, c'est-à-dire $[(q + s)\sigma_k]'$; elle est d'ailleurs de caractéristique nulle, comme les fonctions Θ et Θ'. La proposition est donc établie; la réciproque est vraie et se démontre de la même manière.

141. III. Proposons-nous de traiter le problème des *surfaces de contact adjointes*, passant par les courbes unicursales singulières, c'est-à-dire de déterminer celles de ces surfaces, de degré $n+q-4$, qui ont un contact d'ordre donné, $r-1$, avec la surface $\mathfrak{S}$ tout le long de la courbe suivant laquelle elles coupent cette surface (en dehors des lignes multiples et des courbes unicursales).

Soit

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$$

l'équation de la courbe de contact d'une des surfaces cherchées, $\Theta(u, v)$ étant une fonction thêta d'ordre ρ et de caractéristique nulle; il faut et il suffit, pour que la courbe réponde au problème géométrique, que $\Theta^r(u-\lambda, v-\mu)$ soit une fonction thêta, d'ordre hq, et que la courbe $\Theta^r(u-\lambda, v-\mu)=0$ soit l'intersection avec $\mathfrak{S}$ d'une surface adjointe d'ordre $n+q-4$, passant par les courbes unicursales singulières.

La condition relative à l'ordre de Θ^r donne l'égalité

$$r\rho = hq.$$

Nous *supposerons* que r est un diviseur de q, c'est-à-dire que $q=rm$; on aura donc

$$\rho = hm.$$

En second lieu, pour que la courbe $\Theta^r(u-\lambda, v-\mu)=0$ puisse être l'intersection de $\mathfrak{S}$ avec une surface adjointe d'ordre $n+q-4$ passant par les courbes unicursales, il faut d'abord qu'elle appartienne à la même famille que la courbe $\Theta_0(u, v)=0$, où $\Theta_0(u, v)$ est une fonction d'ordre hq, de caractéristique nulle: cette condition entraîne les congruences (nos **111** et **112**)

$$\left.\begin{array}{l} r\rho\lambda \equiv 0 \\ r\rho\mu \equiv 0 \end{array}\right\} \text{(mod. périodes),} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{array}{l} \lambda = \dfrac{\mathfrak{P}}{r\rho}, \\[2ex] \mu = \dfrac{\mathfrak{P}'}{r\rho} \end{array}$$

$\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ étant deux périodes simultanées quelconques.

Il faut ensuite que la courbe $\Theta^r(u-\lambda, v-\mu)=0$ ait la singularité $(q\sigma_k)$ en chaque point u_k, v_k, ce qui exige que la courbe

$\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$ ait en u_k, v_k la singularité $\left(\frac{q}{r}\sigma_k\right)$, c'est-à-dire $(m\sigma_k)$ (¹).

Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes.

Nous pouvons maintenant former l'équation générale des courbes de contact.

En effet, ces courbes appartiennent tout d'abord à un certain nombre de familles, déterminées par l'ordre ρ ou hm des fonctions thêta correspondantes et par l'un des systèmes de valeurs de λ et μ obtenus plus haut. Pour calculer le nombre de ces familles, il suffit d'observer que deux courbes

$$\Theta_0\left(u-\frac{\mathfrak{P}}{r\rho}, v-\frac{\mathfrak{P}'}{r\rho}\right)=0,$$
$$\Theta_1\left(u-\frac{\mathfrak{P}_1}{r\rho}, v-\frac{\mathfrak{P}'_1}{r\rho}\right)=0,$$

où $\Theta_0(u,v)$ et $\Theta_1(u,v)$ sont des fonctions d'ordre ρ ou hm, de caractéristique nulle, appartiendront à la même famille si l'on a (n° **111**)

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\frac{\mathfrak{P}-\mathfrak{P}_1}{r\rho}\equiv 0, &&\text{c'est-à-dire}\quad \frac{\mathfrak{P}-\mathfrak{P}_1}{r}\equiv 0\\
&\rho\frac{\mathfrak{P}'-\mathfrak{P}'_1}{r\rho}\equiv 0, &&\text{c'est-à-dire}\quad \frac{\mathfrak{P}'-\mathfrak{P}'_1}{r}\equiv 0
\end{aligned}\right\}\quad (\text{mod. périodes}).$$

On aura donc autant de familles distinctes qu'il y a de $r^{\text{ièmes}}$ de périodes simultanées, c'est-à-dire r^4.

Soit une courbe d'une des r^4 familles, $\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$; pour qu'elle soit une des courbes de contact cherchées, il ne nous reste qu'à exprimer qu'elle a, en u_k, v_k, la singularité $m\sigma_k$.

Or l'équation générale des courbes d'une de nos familles dépend linéairement de ρ^2, c'est-à-dire h^2m^2, coefficients; celles de ces courbes linéairement distinctes, qui ont en chaque point u_k, v_k la singularité $m\sigma_k$ sont en nombre *au moins* égal à

$$h^2m^2-\Sigma C_{km},$$

(¹) C'est à ce point de l'analyse que nous sommes obligé de supposer $q=rm$.

C_{km} étant le nombre des conditions auxquelles équivaut la singularité $m\sigma_k$. Or on a trouvé (nº **136**)

$$h^2 m^2 - \Sigma C_{km} = \tfrac{1}{2} m(m+1) n - m(p-1).$$

Ainsi, les courbes de contact cherchées se répartissent en r^4 familles; et, dans chaque famille, elles forment une série linéaire $\frac{1}{2}m(m+1)n - m(p-1) - 1$ fois infinie, au moins.

Ces courbes jouissent de propriétés géométriques simples.

Considérons d'abord r courbes de contact, appartenant à une *même* des r^4 familles trouvées plus haut; soient

$$\Theta_1\left(u - \frac{\mathfrak{P}}{r\rho}, v - \frac{\mathfrak{P}'}{r\rho}\right) = 0,$$
$$\Theta_2\left(u - \frac{\mathfrak{P}}{r\rho}, \ldots\ldots\right) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Theta_r\left(u - \frac{\mathfrak{P}}{r\rho}, \ldots\ldots\right) = 0$$

leurs équations; la fonction

$$\Theta_1\left(u - \frac{\mathfrak{P}}{r\rho}, v - \frac{\mathfrak{P}'}{r\rho}\right)\Theta_2\left(u - \frac{\mathfrak{P}}{r\rho}, \ldots\right)\cdots\Theta_r\left(u - \frac{\mathfrak{P}}{r\rho}, \ldots\right)$$

est évidemment une fonction thêta d'ordre $r\rho$, c'est-à-dire d'ordre qh, et de caractéristique nulle; de plus, elle a en chaque point u_k, v_k la singularité $(q\sigma_k)$, puisque chacun des ρ facteurs du produit a la singularité $(m\sigma_k)$ et que l'on a

$$q = rm.$$

En d'autres termes, les r courbes considérées sont sur une surface adjointe d'ordre $n+q-4$ passant par les courbes unicursales singulières.

On démontrerait de même que par $r-1$ courbes de contact données, appartenant à des familles *différentes*, et par les courbes unicursales singulières, on peut faire passer des surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$, qui découpent sur $\mathfrak{S}$ une des r^4 familles de courbes de contact.

142. L'énoncé suivant résume ces résultats :

Soit $\mathfrak{S}$ *une surface hyperelliptique quelconque, d'ordre* n *et dont les sections planes sont de genre* p; *désignons par* q, r, m *trois entiers positifs quelconques, tels que*

$$q = rm.$$

Les surfaces d'ordre $n+q-4$, *adjointes à* $\mathfrak{S}$, *passant par les courbes unicursales singulières de* $\mathfrak{S}$, *et ayant avec cette surface, tout le long de la courbe suivant laquelle elles la coupent en outre, un contact d'ordre* $r-1$, *se répartissent en* r^4 *systèmes.*

Pour les surfaces d'un même système, les courbes de contact appartiennent à un même ordre et à une même famille; elles forment, dans cette famille, une série linéaire dont l'équation renferme

$$\tfrac{1}{2}m(m+1)n - m(p-1) - 1$$

paramètres, au moins.

Les r *courbes de contact de* r *surfaces d'un même système sont sur une surface adjointe d'ordre* $n+q-4$, *passant par les courbes unicursales singulières.*

Par $r-1$ *courbes de contact appartenant à des systèmes quelconques et par les courbes unicursales singulières, on peut mener une infinité de surfaces adjointes d'ordre* $n+q-4$, *qui découpent en outre sur* $\mathfrak{S}$ *une des* r^4 *séries de courbes de contact.*

Parmi les r^4 systèmes de surfaces de contact, celui qui correspond aux valeurs $\mathfrak{P} = 0$, $\mathfrak{P}' = 0$ est particulièrement remarquable : les courbes de contact correspondantes ayant pour équation générale

$$\Theta(u, v) = 0,$$

où $\Theta(u, v)$ est une fonction d'ordre hm, de caractéristique nulle, douée en chaque point u_k, v_k de la singularité $m\sigma_k$, sont les intersections de $\mathfrak{S}$ avec les surfaces adjointes d'ordre $n+m-4$, menées par les courbes unicursales singulières.

Ce résultat concorde d'ailleurs avec une application faite au n° **140.**

Le problème des surfaces de contact, dans les conditions qui viennent d'être exposées, n'est possible, *en général*, que si le nombre $\frac{1}{2}m(m+1)n - m(p-1) - 1$, qui est celui des paramètres variables dont dépend l'équation des courbes de contact d'une même famille, est supérieur ou égal à zéro. On doit donc avoir, sauf en certains cas exceptionnels,

$$\tfrac{1}{2}m(m+1)n - m(p-1) - 1 \geqq 0 \text{ (1)}.$$

Cette condition est toujours remplie, n et p étant fixes, dès que m dépasse une certaine limite.

En particulier, en faisant $m = 1$, on voit que, si l'inégalité

$$n \geqq p$$

est vérifiée, il existera, *quel que soit* q, q^4 systèmes de surfaces adjointes d'ordre $n + q - 4$ passant par les courbes unicursales singulières, et ayant avec $\mathfrak{S}$, tout le long du reste de leur intersection avec cette surface, un contact d'ordre $q - 1$.

143. Terminons par l'exposé de *nouvelles propriétés* des courbes de contact, dans le cas général.

Soient deux courbes de contact, appartenant à deux familles différentes

$$\Theta\left(u - \frac{\mathfrak{P}}{2\rho}, v - \frac{\mathfrak{P}'}{2\rho}\right) = 0, \qquad \Theta_1\left(u - \frac{\mathfrak{P}_1}{2\rho}, v - \frac{\mathfrak{P}'_1}{2\rho}\right) = 0.$$

La fonction

$$\theta(u, v) = \Theta\left(u - \frac{\mathfrak{P}}{2\rho}, v - \frac{\mathfrak{P}'}{2\rho}\right)\Theta_1\left(u - \frac{\mathfrak{P}_1}{2\rho}, v - \frac{\mathfrak{P}'_1}{2\rho}\right)$$

est une fonction thêta d'ordre 2ρ, c'est-à-dire $2hm$, ayant en chaque point u_k, v_k la singularité $(2m\sigma_k)$. Pour que la courbe $\theta(u, v) = 0$ soit sur une surface adjointe d'ordre $n + 2m - 4$, passant par les courbes unicursales singulières, il faut et il suffit qu'elle soit de la

(1) Le système remarquable de surfaces de contact signalé plus haut existe toujours, même si l'inégalité n'est pas vérifiée.

même famille que la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$, où $\Theta_0(u, v)$ est une fonction thêta, d'ordre $2hm$ et de caractéristique nulle, c'est-à-dire (n° **111**) que l'on ait

$$\frac{\mathfrak{P} + \mathfrak{P}_1}{r} \equiv 0, \qquad \frac{\mathfrak{P}' + \mathfrak{P}'_1}{r} \equiv 0 \qquad \text{(mod. périodes)}.$$

Si $\frac{\mathfrak{P}}{r}$ et $\frac{\mathfrak{P}'}{r}$ sont donnés, il est toujours possible, et d'une seule manière, de choisir $\frac{\mathfrak{P}_1}{r}$ et $\frac{\mathfrak{P}'_1}{r}$, de manière à satisfaire à ces congruences. Donc :

Par une courbe de contact quelconque et par les courbes unicursales singulières, on peut faire passer une infinité de surfaces adjointes d'ordre $n + 2m - 4$, qui découpent en outre sur $\mathfrak{S}$ *une des r^4 séries de courbes de contact.*

Cette série reste la même quand la courbe primitivement considérée varie sans cesser d'appartenir à une même famille.

On démontre de même la proposition plus générale qui suit :

Par $s - 1$ courbes de contact appartenant à des familles quelconques et par les courbes unicursales singulières, on peut faire passer une infinité de surfaces adjointes d'ordre $n + sm - 4$, qui découpent en outre sur $\mathfrak{S}$ *une des r^4 séries de courbes de contact.*

Dans cet énoncé, le nombre positif, s, est quelconque, mais supérieur à 1.

On peut ajouter que chacune des r^4 séries de courbes de contact peut être obtenue par ce procédé, les $s - 1$ courbes primitives étant convenablement choisies, ou plutôt étant prises arbitrairement dans des familles convenablement choisies.

Enfin il existe des relations géométriques entre les *surfaces de contact* qui répondent à des *problèmes différents;* en voici un exemple, qu'il serait aisé d'étendre.

Considérons deux multiples consécutifs de r,

$$q = rm,$$
$$q_1 = r(m + 1);$$

soient c_m et c_{m+1} les courbes de contact avec $\mathfrak{S}$ de deux surfaces adjointes d'ordres respectifs $n+q-4$, $n+q_1-4$, passant par les courbes unicursales singulières, et ayant avec $\mathfrak{S}$, tout le long du reste de leur intersection, un contact d'ordre $r-1$.

Les équations de ces deux courbes sont de la forme

$$\Theta\left(u-\frac{\mathfrak{P}}{hmr}, v-\frac{\mathfrak{P}'}{hmr}\right)=0,$$

$$\Theta_1\left[u-\frac{\mathfrak{P}_1}{h(m+1)r}, v-\frac{\mathfrak{P}'_1}{h(m+1)r}\right]=0,$$

et l'on démontre, comme plus haut, que, si l'on a

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\mathfrak{P}}{r}+\dfrac{\mathfrak{P}_1}{r}\equiv 0\\[2ex] \dfrac{\mathfrak{P}'}{r}+\dfrac{\mathfrak{P}'_1}{r}\equiv 0\end{array}\right\}\text{(mod. périodes)},$$

les deux courbes considérées sont sur une même surface adjointe d'ordre $n+2m-3$, passant par les courbes unicursales singulières.

144. IV. *Sections planes.* — Le nombre des surfaces d'ordre $n-3$ adjointes à $\mathfrak{S}$ étant égal au genre des sections planes de cette surface diminuée d'une unité, on voit de suite que les courbes d'ordre $n-3$, adjointes à une section plane, ne sont pas toutes situées sur des surfaces adjointes d'ordre $n-3$.

Pour étudier la question de plus près, observons que, parmi les $p-1$ surfaces adjointes d'ordre $n-3$ figurent les surfaces décomposables

$$D(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3+\lambda_4 x_4)=0,$$

où les λ sont des constantes arbitraires, et où $D=0$ est toujours l'équation de la surface adjointe d'ordre $n-4$.

Soit alors $x_2=0$, par exemple, une section plane de $\mathfrak{S}$: le plan $x_2=0$ coupe le système linéaire, $p-2$ fois infini, des surfaces adjointes d'ordre $n-3$ suivant un système linéaire de courbes d'ordre $n-3$ qui ne sera que $p-3$ fois infini, puisque, parmi les surfaces adjointes, figure la surface $Dx_2=0$.

On obtient ainsi $p-2$ courbes d'ordre $n-3$, linéairement distinctes, adjointes à la section de $\mathfrak{S}$ par le plan considéré; cette section étant de genre p admet encore deux courbes adjointes distinctes des précédentes, et il résulte des raisonnements faits aux nos **120**, **124** que ces deux courbes sont nécessairement celles qui correspondent aux intégrales $\int du$ et $\int dv$.

Au contraire, si q dépasse un, toutes les courbes d'ordre $n+q-4$ adjointes à une section plane de $\mathfrak{S}$ sont les sections, par le plan considéré, des surfaces d'ordre $n+q-4$ adjointes à $\mathfrak{S}$.

On le démontre aisément comme il suit :

En premier lieu, quel est le nombre des courbes linéairement distinctes d'ordre $n+q-4$ adjointes à une courbe plane d'ordre n et de genre p? $(q>1)$. Ces courbes découpent sur la proposée des groupes équivalents de N points mobiles, formant un système *non spécial*, puisque q dépasse un; p points d'un de ces groupes sont donc déterminés par les $N-p$ autres, et, par suite, le nombre des courbes adjointes d'ordre $n+q-4$, linéairement distinctes, est égal à

$$N-p+1.$$

Toutefois, si q atteint ou dépasse 4, on devra ajouter à ce nombre le nombre $\frac{1}{2}(q-3)(q-2)$ des coefficients d'un polynôme entier. d'ordre $q-4$, par rapport à deux variables, afin de tenir compte des courbes adjointes qui se décomposent en la courbe proposée et en une courbe quelconque de degré $q-4$.

Pour calculer N, il suffit de considérer le cas où la courbe adjointe d'ordre $n+q-4$ se décompose en une courbe adjointe d'ordre $n-3$ et en une courbe quelconque d'ordre $q-1$; on a ainsi

$$N=2(p-1)+n(q-1),$$

et le nombre des courbes adjointes linéairement distinctes d'ordre $n+q-4$ est égal à

$$n(q-1)+p-1+\tfrac{1}{2}(q-2)(q-3).$$

Cette formule est vraie pour toutes les valeurs de q, supérieures à un, même pour $q = 2$ et $q = 3$, puisque le terme complémentaire $\frac{1}{2}(q-2)(q-3)$ s'annule pour ces deux valeurs.

En second lieu, soit N_q le nombre des surfaces d'ordre $n+q-4$ linéairement distinctes, adjointes à $\mathfrak{S}$; parmi ces surfaces il en est N_{q-1} qui se décomposent en une surface adjointe d'ordre $n+q-5$ et en un plan donné : on en conclut que les sections par un plan des surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ forment un système linéaire, renfermant un nombre de courbes linéairement distinctes égal à

$$N_q - N_{q-1},$$

c'est-à-dire (nº **133**)

$$n(q-1)+p-1+\tfrac{1}{2}(q-2)(q-3),$$

nombre qui est bien égal à celui des courbes d'ordre $n+q-4$, adjointes à la section plane de la surface $\mathfrak{S}$.

Donc :

Les courbes d'ordre $n+q-4$ adjointes à la section plane générale d'une surface hyperelliptique sont les sections, par le plan de la courbe, des surfaces d'ordre $n+q-4$ adjointes à la surface proposée, dès que q dépasse l'unité.

145. V. Il est difficile d'établir, sur une surface hyperelliptique générale, la classification des courbes algébriques d'un degré donné : le degré d, d'une courbe $\Theta(u,v)=0$, présentant en un point singulier u_k, v_k, la singularité s_k, est en effet, si l'on désigne par m l'ordre de la fonction $\Theta(u,v)$, donné par l'équation

$$d = 2hm - \Sigma \mathrm{I}(\sigma_k, s_k).$$

Ce degré dépend donc des singularités dont la fonction $\Theta(u,v)$ est douée aux points singuliers u_k, v_k.

Il y a lieu d'observer que si $\Theta(u,v)$ s'annule au point u_k, v_k, la courbe $\Theta(u,v)=0$, sur la surface $\mathfrak{S}$, *rencontre* la courbe unicursale singulière qui correspond aux valeurs u_k, v_k des arguments, et réciproquement.

Les courbes qui ne rencontrent aucune des courbes unicursales singulières ([1]) sont donc, d'après la formule précédente, d'ordre $2hm$; leur degré est ainsi divisible par $2h$. Parmi ces courbes, celles de degré minimum s'obtiennent en faisant $m = 1$; elles sont représentées par l'équation générale

$$(17) \qquad \mathfrak{S}(u-\lambda, v-\mu) = 0,$$

où λ et μ sont deux constantes quelconques et $\mathfrak{S}$ une fonction thêta d'ordre un. On peut supposer que $\mathfrak{S}(u, v)$ est la fonction normale, d'ordre un et de caractéristique $\begin{vmatrix} 10 \\ 11 \end{vmatrix}$ (n° 59).

Nous appellerons *courbes* γ les courbes représentées par l'équation (17); *ces courbes*, en nombre doublement infini, *sont*, comme on l'a dit, *les courbes du plus petit degré qu'on puisse tracer sur la surface hyperelliptique, sans rencontrer les courbes unicursales singulières;* elles sont d'ordre $2h$, ce qui donne la signification géométrique du nombre h, ordre des fonctions thêta qui servent à représenter les coordonnées d'un point de $\mathbf{S}$.

Les courbes γ sont de genre deux et sont représentables point par point l'une sur l'autre (n° 60).

Sur une courbe de genre deux, on appelle *points conjugués* deux points formant un groupe $G_{2(p-1)}$; d'après ce que nous avons dit au n° 62, deux points conjugués sur la courbe $\mathfrak{S}(u-\lambda, v-\mu) = 0$ ont pour arguments u, v et $2\lambda-u$, $2\mu-v$. En particulier, les points d'une courbe γ, qui coïncident avec leurs conjugués, sont au nombre de six et ont pour arguments $\lambda + \frac{\mathfrak{P}_i}{2}$, $\mu + \frac{\mathfrak{P}'_i}{2}$, en désignant par $\frac{\mathfrak{P}_i}{2}$, $\frac{\mathfrak{P}'_i}{2}$ un des six couples de demi-périodes dont le tableau a été donné au n° 59.

Ces six points seront dits les *pôles* de la courbe γ à laquelle ils appartiennent; inversement une courbe γ sera dite *courbe polaire* de chacun de ses six pôles. On vérifie sans difficulté qu'*un point quel-*

([1]) Ces courbes peuvent couper les lignes unicursales singulières en des points *fixes*, qui sont les points multiples de première catégorie (n° 128).

conque u_0, v_0 *a six courbes polaires*, correspondant aux valeurs de λ et μ égales à $u_0 + \frac{\mathfrak{P}_i}{2}$, $v_0 + \frac{\mathfrak{P}'_i}{2}$.

Il existe entre les courbes γ et les points de $\mathfrak{S}$ une réciprocité remarquable que les théorèmes suivants mettent en évidence ([1]).

146. Considérons les courbes γ qui passent par un point donné u_0, v_0 et cherchons le lieu de leurs pôles.

Si

$$\mathfrak{I}(u-\lambda, v-\mu) = 0 \tag{17}$$

est une de ces courbes, on aura

$$\mathfrak{I}(\lambda - u_0, \mu - v_0) = 0, \tag{18}$$

puisque $\mathfrak{I}(u, v)$ est une fonction impaire. Si U, V est un pôle de la courbe (17), on a

$$U = \lambda + \tfrac{1}{2}\mathfrak{P}_i, \qquad V = \mu + \tfrac{1}{2}\mathfrak{P}'_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots 6).$$

Éliminant λ et μ entre ces deux équations et l'équation (18), on trouve le lieu cherché :

$$\mathfrak{I}(U - u_0 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{P}_i, V - v_0 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{P}'_i) = 0.$$

La courbe représentée par cette équation est une courbe γ, qui passe par le point u_0, v_0 et admet ce point pour pôle. Donc :

Les six pôles d'une courbe γ qui passe par un point sont chacun sur une des six courbes polaires de ce point.

De même, on démontre sans difficulté que :

Les six courbes polaires d'un point d'une courbe γ passent chacune par un des pôles de cette courbe.

([1]) C'est la réciprocité qui existe entre les plans tangents et les points de la surface de Kummer.

Ces théorèmes justifient les dénominations de pôles et de courbes polaires, et établissent la réciprocité dont nous parlions plus haut.

147. *Par deux points donnés de* **S** *passent deux courbes* γ, et inversement *deux courbes* γ *se coupent en deux points*. Ces propositions résultent immédiatement du théorème de M. Poincaré.

Cherchons les conditions auxquelles doivent satisfaire deux points u_1, v_1 et u_2, v_2 pour que les deux courbes γ qui passent par ces points coïncident.

Si $\mathfrak{S}(u-\lambda, v-\mu)$ est l'équation d'une courbe γ passant par les deux points, on a

$$\mathfrak{S}(\lambda-u_1, \mu-v_1)=0, \qquad \mathfrak{S}(\lambda-u_2, \mu-v_2)=0.$$

Ces deux équations en λ, μ ont deux solutions communes, λ_1, μ_1 et λ_2, μ_2, liées (nº **65**) par les relations

$$\lambda_1+\lambda_2 \equiv u_1+u_2, \qquad \mu_1+\mu_2 \equiv v_1+v_2 \qquad (\text{mod. périodes}).$$

Si

$$\lambda_1=\lambda_2 \qquad \text{et} \qquad \mu_1=\mu_2,$$

il vient

$$2\lambda_1 \equiv u_1+u_2, \qquad 2\mu_1 \equiv v_1+v_2 \qquad (\text{mod. périodes}).$$

Écrivant maintenant que λ_1 et μ_1 vérifient la relation

$$\mathfrak{S}(\lambda_1-u_1, \mu_1-v_1)=0,$$

on trouve la condition cherchée

$$\mathfrak{S}\left(\frac{u_1-u_2}{2}, \frac{v_1-v_2}{2}\right)=0. \tag{19}$$

On peut donner une interprétation géométrique de cette formule. Considérons en effet les courbes γ qui passent par un point u_2, v_2, et cherchons le lieu du point conjugué de u_2, v_2 sur chacune d'elles.

Soit $\mathfrak{S}(u-\lambda, v-\mu)=0$ une des courbes γ passant par u_2, v_2; on a

$$\mathfrak{S}(\lambda-u_2, \mu-v_2)=0.$$

Le conjugué de u_2, v_2 sur cette courbe a pour arguments

$$u = 2\lambda - u_2; \qquad v = 2\mu - v_2;$$

il décrit donc la courbe

$$\Xi\left(\frac{u-u_2}{2}, \frac{v-v_2}{2}\right) = 0. \tag{20}$$

Si l'on compare maintenant les équations (19) et (20), on obtient cette proposition :

Lorsque deux points sont conjugués sur une même courbe γ, la seconde courbe γ qui passe par ces deux points coïncide avec la première, et réciproquement.

148. Une autre propriété de la courbe (20) résulte des considérations suivantes.

Cherchons *l'enveloppe des courbes γ qui passent par un point fixe u_2, v_2.*

Deux de ces courbes

$$\Xi(u-\lambda, v-\mu) = 0; \qquad \Xi(u-\lambda', v-\mu') = 0$$

se coupent en u_2, v_2 et en un second point, u, v, tel que l'on ait

$$u + u_2 = \lambda + \lambda'; \qquad v + v_2 = \mu + \mu' \qquad \text{(mod. périodes)}.$$

Si les deux courbes primitives sont infiniment voisines, on aura, à la limite,

$$u = 2\lambda - u_2; \qquad v = 2\mu - v_2;$$

on obtiendra le lieu de u, v, c'est-à-dire l'enveloppe cherchée, en éliminant λ, μ entre les deux équations qui précèdent et la relation

$$\Xi(\lambda - u_2, \mu - v_2) = 0,$$

qui exprime que la courbe γ considérée passe par u_2, v_2; il vient ainsi

$$\Xi\left(\frac{u-u_2}{2}, \frac{v-v_2}{2}\right) = 0. \tag{20}$$

Donc : *L'enveloppe des courbes γ qui passent par un point coïncide avec le lieu des conjugués de ce point.*

Dans cet énoncé, nous appelons *points conjugués* deux points conjugués l'un de l'autre sur une même courbe γ.

149. Cherchons la condition qui exprime que deux courbes γ :

$$\varphi(u-\lambda_1, v-\mu_1)=0; \qquad \varphi(u-\lambda_2, v-\mu_2)=0$$

sont *tangentes :* on trouve aisément, par des considérations semblables aux précédentes, que cette condition est la suivante

$$\varphi\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}, \frac{\mu_1-\mu_2}{2}\right)=0.$$

Par suite :

Lorsque deux points sont conjugués sur une courbe γ, chacune des six courbes polaires de l'un touche une des six courbes de l'autre; réciproquement, lorsque deux courbes γ se touchent, chacun des six pôles de l'une est conjugué d'un des six pôles de l'autre.

On en déduit immédiatement cet autre théorème :

Le lieu des pôles des courbes γ qui touchent une courbe γ fixe se décompose en six courbes, dont chacune est lieu des conjugués d'un pôle de la courbe fixe.

150. Les courbes γ forment une famille doublement infinie : dans cette famille considérons une série simplement infinie et *algébrique* de courbes γ; λ et μ seront alors liés par une relation de la forme

$$\Theta(\lambda, \mu)=0,$$

$\Theta(\lambda, \mu)$ désignant une fonction uniforme quadruplement périodique de λ, μ, ou, si l'on veut, une fonction thêta de λ, μ.

Le lieu des pôles des courbes γ considérées est donné par l'équation

$$\Theta\left(u-\frac{\mathfrak{P}_i}{2}, v-\frac{\mathfrak{P}'_i}{2}\right)=0;$$

il se décompose donc en six courbes, généralement distinctes, de même genre et de mêmes modules.

Plus généralement, sur chacune des courbes

$$\Xi(u-\lambda, v-\mu) = 0,$$

où λ, μ vérifient la relation $\Theta(\lambda, \mu) = 0$, prenons le point qui correspond à un point fixe u_0, v_0 de la courbe $\Xi(u, v) = 0$ dans la transformation univoque qui lie ces deux courbes; ce point sera (n° **60**)

$$u = \lambda + u_0, \qquad v = \mu + v_0.$$

Il décrit par suite la courbe

$$\Theta(u-u_0, v-v_0) = 0.$$

Ainsi :

Soit une série algébrique, quelconque d'ailleurs de courbes γ : le lieu du point qui, sur chacune de ces courbes, correspond univoquement à un même point M de l'une d'elles, est une courbe algébrique; si le point M varie, on obtient ainsi une infinité simple de courbes algébriques, qui sont toutes de même genre et de mêmes modules : l'équation générale de ces courbes est de la forme

$$\Theta(u-\alpha, v-\beta) = 0,$$

$\Theta(u, v)$ étant une fonction thêta, et α, β deux paramètres, variables d'une courbe à l'autre, liés par la relation

$$\Xi(\alpha, \beta) = 0.$$

Inversement, il est clair que, sur chacune des nouvelles courbes, le point qui correspond univoquement à un même point de l'une d'elles décrit une des courbes γ de la série considérée : la démonstration est identique à celle qui précède.

Ces résultats se généralisent sans difficulté.

Soit une série quelconque simplement infinie de courbes de même genre et de mêmes modules, tracées sur une surface hyperelliptique et comprises dans l'équation

$$(21) \qquad \theta(u-\lambda, v-\mu) = 0,$$

où $\theta(u, v)$ est une fonction thêta donnée et où λ, μ désignent deux paramètres liés par une relation de la forme

$$\Theta(\lambda, \mu) = 0,$$

$\Theta(\lambda, \mu)$ étant une nouvelle fonction thêta.

Considérons la seconde série de courbes

$$\Theta(u-\alpha, v-\beta) = 0,$$

où α et β sont deux paramètres liés par la relation

$$\theta(\alpha, \beta) = 0.$$

Les courbes de cette nouvelle série sont aussi de même genre et de mêmes modules, et les deux séries jouissent de la propriété suivante :

Le lieu du point qui, sur chacune des courbes d'une série, correspond univoquement à un même point de l'une de ces courbes, est une courbe de l'autre série.

Si les deux fonctions $\theta(u, v)$ et $\Theta(u, v)$ sont les mêmes, les courbes des deux séries se confondent; il en est de même si $\theta(u, v)$ est une fonction paire ou impaire et si $\Theta(u, v) = \theta(u-u_0, v-v_0)$; u_0, v_0 étant des constantes données. Dans ce dernier cas, les courbes de la première série passent par le point fixe u_0, v_0. En particulier :

Considérons les courbes γ qui passent par un point fixe : le lieu du point qui sur chacune d'elles correspond univoquement à un même point d'une courbe γ donnée est une courbe γ passant par le point fixe.

Le théorème du n° **146** est un cas particulier du précédent.

151. VI. Revenons maintenant aux surfaces adjointes : la formule qui fait connaître le nombre des surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$, linéairement distinctes, donne lieu à une remarque intéressante.

On sait que deux définitions ont été proposées pour le genre d'une surface d'ordre n.

Le *genre géométrique*, P, est le nombre des surfaces d'ordre $n-4$, linéairement distinctes, adjointes à la proposée;

Le *genre numérique*, P′, s'obtient en faisant $N = n - 4$ dans la formule qui donne le nombre des surfaces distinctes d'ordre N satisfaisant aux conditions des surfaces adjointes, c'est-à-dire ayant pour courbe multiple d'ordre $l-1$ toute courbe multiple d'ordre l et pour point multiple d'ordre $l-2$ tout point multiple d'ordre l de la proposée.

Ces deux définitions, en apparence identiques, ne le sont pas réellement : en effet, on ne sait pas déterminer à l'aide d'une formule générale le nombre des conditions auxquelles équivaut, pour une surface d'ordre N, l'obligation d'avoir pour courbe multiple d'ordre $l-1$ une courbe donnée, que si N est suffisamment grand par rapport au degré de la courbe. Pour ce cas, il existe une formule générale exacte, mais on ne sait pas pour quelle valeur minimum de N elle cesse de s'appliquer. En d'autres termes, les courbes et les points multiples d'une surface d'ordre n étant donnés, on sait calculer le nombre des surfaces adjointes d'ordre N, N étant suffisamment grand : si dans la formule ainsi obtenue on fait $N = n - 4$, rien ne prouve qu'on doive obtenir réellement le nombre des surfaces adjointes d'ordre $n-4$; on trouve un nombre P′, qui peut différer de P, mais qui est également intéressant, parce qu'il possède le caractère d'invariance dans les transformations birationnelles, comme l'ont montré MM. Cayley et Zeuthen.

Pour les surfaces représentables point par point sur le champ hyperelliptique, on a (n° **102**)

$$P = 1;$$

quant à P′, on le calculera, d'après ce qui précède, en faisant $q = 0$ dans la formule qui donne le nombre des surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$, et l'on trouve ainsi

$$P' = -1.$$

Les deux nombres P et P′ sont donc différents. Il convient de supposer, dans cette application, que la surface $\mathfrak{S}$ n'a pas de points multiples isolés; en ce cas, notre définition des surfaces adjointes coïncide avec celle qui est généralement adoptée.

CHAPITRE IV.

Classes particulières de surfaces hyperelliptiques.

132. Les plus simples des surfaces hyperelliptiques sont *celles qui n'ont pas de courbes unicursales singulières.*

Pour une de ces surfaces, les fonctions $x_1(u, v)$; $x_2(u, v)$; $x_3(u, v)$; $x_4(u, v)$ sont quatre fonctions thêta, de caractéristique nulle, d'ordre h, ne s'annulant simultanément pour aucun système de valeurs des paramètres.

Les formules du n° **123** donnent alors, pour l'ordre n de la surface et le genre p de ses sections planes,

$$n = 2h^2, \qquad p = h^2 + 1; \qquad \text{ou} \qquad p = \frac{n+2}{2}.$$

Ainsi :

Si une surface hyperelliptique n'a pas de courbes unicursales singulières, son ordre est le double d'un carré.

133. *Surfaces adjointes.* — Le nombre des surfaces adjointes, linéairement distinctes, d'ordre $n+q-4$, a pour expression (n° **133**)

$$q^2h^2 + \tfrac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3);$$

ces surfaces découpent, sur la proposée, un système linéaire q^2h^2-1 fois infini de courbes ayant pour équation générale (n° **131**)

$$\lambda_1\theta_1(u, v) + \lambda_2\theta_2(u, v) + \ldots + \lambda_{q^2h^2}\theta_{q^2h^2}(u, v) = 0,$$

où $\theta_1(u, v), \ldots, \theta_{q^2h^2}(u, v)$ désignent q^2h^2 fonctions thêta, d'ordre qh et de caractéristique nulle, linéairement distinctes; en d'autres termes, *toute* fonction thêta, d'ordre qh et de caractéristique nulle, égalée à zéro, représente sur $\mathfrak{S}$ une courbe qui est l'intersection de $\mathfrak{S}$ avec une surface adjointe d'ordre $n+q-4$ ([1]).

Le degré de cette courbe est égal à $2qh^2$ ou qn(nº **137**).

Le problème des *surfaces adjointes de contact* est susceptible d'une solution plus complète que dans le cas général.

Cherchons les surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ qui ont avec $\mathfrak{S}$, tout le long de la courbe commune, un contact d'ordre $r-1$: on voit, comme au nº **141**, que le problème n'est possible que si l'on a

$$hq = r\rho,$$

ρ étant un entier; mais il n'est pas nécessaire de supposer ici que r divise q, et le problème comporte ainsi une solution plus étendue que celui des surfaces adjointes de contact passant par les courbes unicursales singulières d'une surface hyperelliptique générale.

Soit $\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$ l'équation d'une des courbes de contact cherchées; $\Theta(u,v)$ sera une fonction thêta *quelconque*, d'ordre ρ et de caractéristique nulle; λ, μ seront deux constantes vérifiant les congruences,

$$\left.\begin{array}{l} r\rho\lambda \equiv 0 \\ r\rho\mu \equiv 0 \end{array}\right\} \text{(mod périodes)}.$$

On le démontre par la méthode appliquée au nº **141**.

On en conclut, toujours comme au nº **141**, que les courbes de contact sont *toutes* celles qui appartiennent à r^4 familles, et l'on peut énoncer le théorème général suivant :

Soit $\mathfrak{S}$ une surface hyperelliptique sans courbes unicursales singulières, d'ordre $n(=2h^2)$; désignons par q, r, ρ des entiers positifs tels que

$$qh = r\rho.$$

([1]) Pour abréger, nous dirons qu'une courbe est l'intersection de $\mathfrak{S}$ avec une surface adjointe quand elle constitue, jointe aux courbes multiples, l'intersection complète des deux surfaces.

Les surfaces d'ordre $n+q-4$ adjointes à $\mathfrak{S}$, et ayant avec cette surface, tout le long de leur courbe d'intersection (non multiple), un contact d'ordre $r-1$, se répartissent en r^4 systèmes.

Pour les surfaces d'un système, les courbes de contact sont des courbes d'un même ordre et d'une même famille, et forment une série linéaire ρ^2-1 fois infinie. Inversement toute courbe de l'ordre et de la famille considérée est la courbe de contact d'une des surfaces du système.

Les r courbes de contact de r surfaces d'un même système sont sur une surface adjointe d'ordre $n+q-4$.

Par $r-1$ courbes de contact appartenant à des systèmes quelconques on peut mener une surface adjointe d'ordre $n+q-4$, qui coupe en outre $\mathfrak{S}$ suivant une $r^{\text{ième}}$ courbe de contact.

Cette théorie est au fond la même que celle qui a été exposée au n° **117** pour les courbes du champ hyperelliptique sans point singulier.

En particulier, si l'on fait $q=1$, $r=h$, on voit que :

Il existe h^4 surfaces d'ordre $n-3$ adjointes à $\mathfrak{S}$ et ayant avec cette surface, le long de leur intersection, un contact d'ordre $h-1$.

Les h^4 courbes de contact sont des courbes γ; par $r-1$ d'entre elles passe une surface adjointe d'ordre $n-3$, coupant en outre $\mathfrak{S}$ suivant une $r^{\text{ième}}$ de ces courbes.

On a des théorèmes tout à fait analogues pour les surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ passant par une ou plusieurs courbes données sur $\mathfrak{S}$ et ayant en outre avec $\mathfrak{S}$, tout le long du reste de l'intersection, un contact d'ordre $r-1$: ces surfaces se répartissent encore en r^4 systèmes; les courbes de contact de r surfaces d'un même système et les courbes fixes données sur $\mathfrak{S}$ sont sur une même surface adjointe d'ordre $n+q-4$; ....

Ces propriétés, qui offrent une analogie complète avec celles que l'on a établies pour les courbes de contact adjointes à une courbe plane, ne s'étendent pas, du moins, sous cette forme générale, aux surfaces hyperelliptiques douées de courbes unicursales singulières.

154. *Courbes tracées sur la surface.* — L'équation d'une courbe algébrique quelconque tracée sur $\mathfrak{S}$ s'obtient en égalant à zéro une fonction thêta : si q est l'ordre de celle-ci, le degré de la courbe correspondante sera $2hq$: ainsi, les degrés des courbes tracées sur $\mathfrak{S}$ sont des multiples de $2h$.

Si q est inférieur à h, on peut, à une fonction thêta d'ordre q, associer au moins une fonction d'ordre $h-q$, de telle sorte que le produit des deux fonctions soit une fonction thêta d'ordre h et de caractéristique nulle (n° **116**); donc :

Par une courbe quelconque, tracée sur $\mathfrak{S}$, et dont l'ordre est inférieur à l'ordre n de la surface, on peut faire passer au moins une surface adjointe d'ordre $n-3$.

De plus :

Si $2qh$ est l'ordre de la courbe considérée, le nombre des surfaces adjointes d'ordre $n-3$, linéairement distinctes, passant par la courbe, est égal à $(h-q)^2$.

De même on démontrerait que :

Par une courbe d'ordre $2qh$, tracée sur $\mathfrak{S}$, et dont l'ordre est compris entre n et $2n-1$ (c'est-à-dire telle que $2h>q\geqq h$) on peut faire passer $(2h-q)^2$ surfaces adjointes d'ordre $n-2$, linéairement distinctes, etc.

Rien n'est plus aisé que de déterminer toutes les courbes d'un degré donné $2hq$, que l'on peut tracer sur $\mathfrak{S}$: leur équation générale est de la forme

$$\lambda_1\theta_1(u-\lambda, v-\mu)+\lambda_2\theta_2(u-\lambda, v-\mu)+\ldots \\ +\lambda_{q^2}\theta_{q^2}(u-\lambda, v-\mu)=0,$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_{q^2}, \lambda, \mu$ sont des constantes arbitraires, et où $\theta_1(u,v)$, $\theta_2(u,v), \ldots$ désignent q^2 fonctions thêta linéairement distinctes, d'ordre q et de caractéristique nulle.

Les courbes du plus petit degré, que l'on puisse tracer sur la surface, ont l'ordre $2h$, et sont les courbes γ (¹).

133. *Remarque.* — Les courbes découpées sur $\mathfrak{S}$ par les surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ forment un système linéaire q^2h^2-1 fois infini; le genre de ces courbes est q^2h^2+1 (nº **114**); deux d'entre elles se coupent en $2q^2h^2$ points, d'après le théorème de M. Poincaré : la connaissance de ces nombres nous permet de discuter une formule, due à M. Nöther, et qui est une extension aux surfaces du théorème de Riemann-Roch relatif aux courbes algébriques.

D'après M. Nöther, si l'on appelle :

- C des courbes du genre π, situées sur une surface algébrique $\mathfrak{S}$, et formant un système linéaire Q fois infini;
- s le nombre de points d'intersection de deux courbes C;
- P le genre de la surface $\mathfrak{S}$, supposée de degré n;
- ρ le nombre des surfaces d'ordre $n-4$ linéairement distinctes adjointes à $\mathfrak{S}$, et passant par une courbe C,

on a l'inégalité
$$Q \geqq P + s - \pi - \rho + 1.$$

Si nous appliquons la formule à une surface hyperelliptique $\mathfrak{S}$, et au système des courbes C découpées sur elle par les surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$, nous trouvons, puisque $\rho = 0$,
$$q^2h^2 - 1 \geqq P + 2q^2h^2 - (q^2h^2+1) + 1 \qquad \text{ou} \qquad -1 \geqq P.$$

(¹) Il est à observer que les courbes γ, bien qu'étant toutes du même ordre et du même genre et formant un système continu, n'appartiennent pas à une série *linéaire* de courbes de même ordre qu'elles, c'est-à-dire de courbes découpées sur $\mathfrak{S}$ par un système linéaire de surfaces, chaque surface mobile ne découpant qu'une courbe. Ce fait ne s'est pas présenté sur la surface de Kummer, où toutes les courbes d'un degré donné se répartissaient en une ou plusieurs séries linéaires; la raison générale de cette différence tient à l'existence sur $\mathfrak{S}$ des deux intégrales de première espèce $\int du$ et $\int dv$, comme nous l'avons montré dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (28 août 1893).

Or le genre géométrique, P est égal à 1; la formule n'est donc pas vérifiée pour cette valeur de P. Elle l'est au contraire si l'on introduit, au lieu du genre géométrique, le genre numérique P′, égal ici à -1. Il y a donc lieu de penser que la formule générale de M. Nöther doit être précisée, soit dans le sens que nous indiquons, soit en tenant compte des intégrales de différentielles totales de première espèce appartenant à la surface.

156. *Les surfaces hyperelliptiques qui n'ont pour courbes unicursales singulières que des droites,* c'est-à-dire pour lesquelles les quatre courbes coordonnées $x_j(u, v)$ considérées dans le champ hyperelliptique n'ont en commun que des points simples, jouissent d'une propriété spéciale.

Dans ce cas, en effet, la singularité σ_k, que présentent les courbes $x_j(u, v) = 0$ en un de leurs points simples communs, n'est pas une singularité proprement dite, et les courbes adjointes ne sont pas assujetties à passer par ce point. En d'autres termes, la singularité σ'_k n'existe pas.

Il en résulte (n° **150**) que les surfaces adjointes d'ordre $n-3$ découperont sur $\mathfrak{S}$ la série linéaire de courbes dont l'équation s'obtient en égalant à zéro une fonction thêta quelconque d'ordre h et de caractéristique nulle, renfermant, par suite, sous forme linéaire et homogène, h^2 coefficients arbitraires.

Les propriétés des surfaces de contact adjointes d'ordre $n-3$ seront ainsi les mêmes, pour la surface $\mathfrak{S}$ considérée, que pour les surfaces sans courbes unicursales singulières, en particulier il existe h^4 surfaces adjointes d'ordre $n-3$ ayant avec $\mathfrak{S}$, le long de leur intersection, un contact d'ordre $h-1$, etc.

Le nombre h est lié ici au genre p des sections planes de $\mathfrak{S}$ par la relation

$$p = h^2 + 1.$$

CHAPITRE V.

Étude de quelques surfaces hyperelliptiques.

157. Nous étudierons, dans ce Chapitre, quelques surfaces représentables point par point sur le champ hyperelliptique : nous n'avons pas réussi à déterminer d'une manière générale le degré minimum des surfaces de cette nature; il résulte des recherches de M. Picard que ce degré est supérieur à cinq; nous avons, d'autre part, formé des surfaces hyperelliptiques d'ordre huit. Il ne resterait donc, pour combler la lacune, qu'à former des surfaces d'ordre six et sept, ou à démontrer, ce qui semble probable, que le degré doit nécessairement dépasser sept.

Quoi qu'il en soit, nous allons faire connaître et étudier quelques surfaces d'ordre huit.

158. Soient $\vartheta_0(u, v)$; $\vartheta_1(u, v)$; $\vartheta_2(u, v)$; $\vartheta_3(u, v)$ quatre fonctions thêta *normales*, du premier ordre, formant un groupe de Rosenhain (n° **20**) : pour fixer les idées, nous supposerons qu'elles ont respectivement pour symboles (n° **20**) $44'$, $12'$, $13'$, $41'$.

La fonction $\vartheta_0(u, v)$ est ainsi la fonction thêta (paire) d'ordre un, de caractéristique nulle, et les trois fonctions ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 s'annulent pour la demi-période $u = 0$, $v = 0$.

De plus, le produit $\vartheta_0\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3$ étant une fonction impaire, de caractéristique nulle (n° **21**), il en sera de même du produit $\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3$.

Cela posé, considérons la surface définie par les relations

$$(1) \qquad x_1 = \vartheta_0\vartheta_1^2, \qquad x_2 = \vartheta_0\vartheta_2^2, \qquad x_3 = \vartheta_0\vartheta_3^2, \qquad x_4 = \vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

$$(2) \qquad x = \frac{\vartheta_0\vartheta_1}{\vartheta_2\vartheta_3}, \qquad y = \frac{\vartheta_0\vartheta_2}{\vartheta_1\vartheta_3}, \qquad z = \frac{\vartheta_0\vartheta_3}{\vartheta_1\vartheta_2}.$$

Les quatre fonctions coordonnées, $x_j(u, v)$, sont des fonctions thêta, d'ordre trois et de caractéristique nulle, s'annulant à la fois pour les valeurs de u, v qui vérifient les équations

$$\vartheta_0(u, v) = 0, \qquad \vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3 = 0$$

et qui sont au nombre de *six*, d'après le théorème de M. Poincaré. De plus, les fonctions ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 devenant nulles pour $u = 0$, $v = 0$, le point $u = 0$, $v = 0$ est un point double pour les courbes du champ hyperelliptique $x_1(u, v) = 0$, $x_2(u, v) = 0$, $x_3(u, v) = 0$ et un point triple pour la courbe $x_4(u, v) = 0$; par suite, c'est un point double pour toute courbe $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0$ et il diminue le degré de la surface (1) de quatre unités (n° **123**).

En résumé, les zéros communs aux fonctions $x_j(u, v)$ diminuent le degré de $6 + 4 = 10$ unités; ce degré est donc égal à $2.3^2 - 10 = 8$. Ainsi :

La surface définie par les relations (1) *est d'ordre huit.*

Nous la désignerons par Σ.

Il est aisé d'obtenir son équation.

Les relations (1) donnent en effet sans difficulté

$$(3) \qquad \vartheta_0^2 = \frac{1}{\vartheta_0}\frac{x_1 x_2 x_3}{x_4^2},$$

$$\vartheta_1^2 = \frac{1}{\vartheta_0}x_1, \qquad \vartheta_2^2 = \frac{1}{\vartheta_0}x_2, \qquad \vartheta_3^2 = \frac{1}{\vartheta_0}x_3;$$

les fonctions ϑ_0^2, ϑ_1^2, ϑ_2^2, ϑ_3^2 sont donc respectivement proportionnelles à $x_1x_2x_3$; $x_1x_4^2$; $x_2x_4^2$; $x_3x_4^2$, et l'équation de la surface Σ s'obtiendra en remplaçant ϑ_0^2, ϑ_1^2, ϑ_2^2, ϑ_3^2 par leurs valeurs proportionnelles dans l'équation homogène classique qui lie les carrés de quatre fonctions thêta d'un même groupe de Rosenhain.

Cette dernière relation est la suivante

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & a_1^2(\vartheta_0^4\vartheta_1^4 + \vartheta_2^4\vartheta_3^4) + a_2^2(\vartheta_0^4\vartheta_2^4 + \vartheta_1^4\vartheta_3^4) + a_3^2(\vartheta_0^4\vartheta_3^4 + \vartheta_1^4\vartheta_2^4) \\ & \quad - 2a_2a_3\,\vartheta_2^2\vartheta_3^2(\vartheta_0^4 - \vartheta_1^4) - 2a_1a_3\,\vartheta_1^2\vartheta_3^2(\vartheta_0^4 + \vartheta_2^4) \\ & \quad - 2a_1a_2\,\vartheta_1^2\vartheta_2^2(\vartheta_0^4 + \vartheta_3^4) - 2a_2a_3\,\vartheta_0^2\vartheta_1^2(\vartheta_2^4 - \vartheta_3^4) \\ & \quad + 2a_1a_3\,\vartheta_0^2\vartheta_2^2(\vartheta_1^4 + \vartheta_2^4) - 2a_1a_2\,\vartheta_0^2\vartheta_3^2(\vartheta_3^4 + \vartheta_2^4) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 2\lambda\,\vartheta_0^2\vartheta_1^2\vartheta_2^2\vartheta_3^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Les coefficients a_1, a_2, a_3, λ dépendent des périodes des fonctions hyperelliptiques considérées; nous renverrons, pour leur expression, au Mémoire de Rosenhain.

On a d'après cela pour l'équation de Σ

$$
(5)\quad \left\{\begin{aligned}
& a_1^2x_2^2x_3^2(x_1^4+x_4^4)+a_2^2x_1^2x_3^2(x_2^4+x_4^4)+a_3^2x_1^2x_2^2(x_3^4+x_4^4)\\
&\quad -2a_2a_3x_1^2x_2x_3(x_2^2x_3^2-x_4^4)-2a_1a_3x_2^2x_1x_3(x_1^2x_3^2+x_4^4)\\
&\quad -2a_1a_2x_3^2x_1x_2(x_1^2x_2^2+x_4^4)-2a_2a_3x_1^2x_2x_3x_4^2(x_2^2-x_3^2)\\
&\quad +2a_1a_3x_2^2x_1x_3x_4^2(x_1^2+x_3^2)-2a_1a_2x_3^2x_1x_2x_4^2(x_1^2+x_2^2)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +2\lambda x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2=0.
\end{aligned}\right.
$$

Remplaçant $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$ par x, y, z, on obtiendrait l'équation cartésienne de Σ, à laquelle nous donnerons plus loin une forme simple (¹).

159. On voit que Σ est bien du huitième ordre; cette surface, en coordonnées cartésiennes, admet pour centre l'origine $x=0$, $y=0$, $z=0$, ainsi qu'on pouvait s'en rendre compte *a priori :* en effet, si l'on change u et v en $-u$, $-v$, les fonctions x_1, x_2, x_3 restent inaltérées et x_4 change de signe, puisque ϑ_0, ϑ_1^2, ϑ_2^2, ϑ_3^2 sont des fonctions paires et que $\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3$ est une fonction impaire.

La surface Σ est liée d'une manière simple à la surface de Kummer. Posons en effet

$$
(6)\qquad X=\frac{\vartheta_1^2}{\vartheta_0^2}(u,v),\qquad Y=\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_0^2}(u,v),\qquad Z=\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_0^2}(u,v).
$$

Le point X, Y, Z décrit une surface de Kummer, puisque ϑ_0^2, ϑ_1^2, ϑ_2^2, ϑ_3^2 sont des fonctions thêta d'ordre deux et de caractéristique nulle, linéairement distinctes (n° **12**); cette surface admet pour plans singuliers les plans de coordonnées et le plan de l'infini, qui forment un tétraèdre de Rosenhain.

(¹) L'équation (5) représente, quelles que soient les constantes a_1, a_2, a_3, λ, une surface Σ, parce que l'équation (4), où les ϑ sont considérées comme des coordonnées homogènes, représente toujours une surface de Kummer (*voir* le n° 159).

Entre les coordonnées X, Y, Z d'un point de la surface de Kummer et les coordonnées x, y, z d'un point de Σ, correspondant aux mêmes valeurs de u, v, on trouve aisément, en éliminant les $\mathfrak{S}$, entre les relations (2) et (6), les équations

$$(7) \qquad X = \frac{1}{yz}, \qquad Y = \frac{1}{xz}, \qquad Z = \frac{1}{xy};$$

d'où l'on tire

$$(8) \qquad x = \frac{X}{\sqrt{XYZ}}, \qquad y = \frac{Y}{\sqrt{XYZ}}, \qquad z = \frac{Z}{\sqrt{XYZ}}.$$

Ainsi à un point de la surface de Kummer correspondent deux points de Σ symétriques par rapport à l'origine et à un point de Σ correspond un seul point de la surface de Kummer.

Soient $K(X, Y, Z) = 0$ l'équation de cette dernière surface et $\Sigma(x, y, z) = 0$ celle de Σ; on a, d'après (4) et (6),

$$K(X, Y, Z) = C_2(X, Y, Z) + 2B_3(X, Y, Z) + A_2^2(X, Y, Z),$$

C_2, B_3, A_2 étant des polynômes homogènes en X, Y, Z d'ordre marqué par l'indice

$$\begin{aligned}
C_2 &= \quad a_1^2X^2 + a_2^2Y^2 + a_3^2Z^2 - 2a_1a_2XY - 2a_1a_3XZ - 2a_2a_3YZ,\\
B_3 &= -\, a_2a_3X(Y^2 - Z^2)\\
&\qquad + a_1a_3Y(X^2 + Z^2) - a_1a_2Z(X^2 + Y^2) + \lambda XYZ,\\
A_2 &= \quad a_1YZ - a_2ZX - a_3XY.
\end{aligned}$$

On en déduit pour le polynôme $\Sigma(x, y, z)$ la forme simple

$$(9) \qquad \begin{cases} \Sigma(x, y, z) = x^2y^2z^2C_2(x, y, z)\\ \qquad\qquad + 2xyzB_3(x, y, z) + A_2^2(x, y, z); \end{cases}$$

on a de plus identiquement

$$(10) \qquad K(x, y, z) = \frac{1}{x^4y^4z^4}\Sigma(x, y, z).$$

160. Cela posé, les formes (5) (9) et (10) que nous avons données à l'équation de la surface Σ mettent en évidence les propriétés suivantes.

En coordonnées homogènes, les six arêtes du tétraèdre de référence sont des droites doubles de Σ. Les trois arêtes qui partent du point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, c'est-à-dire les trois axes des coordonnées cartésiennes, sont en même temps des courbes unicursales singulières : en effet, les courbes unicursales singulières de Σ, abstraction faite de celle qu'on obtient en faisant $u = 0$, $v = 0$, correspondent aux valeurs de u, v qui annulent simultanément $\mathfrak{S}_0$ et $\mathfrak{S}_1\, \mathfrak{S}_2\, \mathfrak{S}_3$. Or les quatre fonctions $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ forment un groupe de Rosenhain et par suite des deux systèmes de valeurs (demi-périodes) de u, v qui annulent à la fois $\mathfrak{S}_0$ et $\mathfrak{S}_1$; l'un annule $\mathfrak{S}_2$ et l'autre annule $\mathfrak{S}_3$. Même remarque pour les systèmes qui annulent à la fois $\mathfrak{S}_0$ et $\mathfrak{S}_2$, ou $\mathfrak{S}_0$ et $\mathfrak{S}_3$.

Il en résulte, si l'on se reporte aux relations (1), que les courbes unicursales singulières considérées se réduisent aux trois droites $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; $x_1 = 0$, $x_3 = 0$; $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; chacune d'elles étant obtenue *deux* fois.

La courbe unicursale singulière qui correspond aux valeurs $u = 0$, $v = 0$ est une conique, qui est située dans le plan $x_4 = 0$; en effet, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ s'annulent pour $u = 0$, $v = 0$, et $\mathfrak{S}_0$ ne s'annule pas ; si donc on donne à u et v des valeurs très petites, $x_4(u, v)$ est infiniment petit par rapport aux trois autres fonctions x_1, x_2, x_3.

L'équation de cette conique s'obtient en faisant $x_4 = 0$ dans (5) et en divisant par $x_1^2\, x_2^2\, x_3^2$; on trouve ainsi

$$C_2(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

C'est une conique qui touche les trois arêtes du tétraèdre de référence situées dans le plan $x_4 = 0$.

En coordonnées cartésiennes (9), on voit que l'origine est un point quadruple de Σ ; le cône des tangentes en ce point est le cône du second ordre

$$A_2(x, y, z) = 0$$

compté deux fois ; ce cône passe par les trois axes de coordonnées. Il est à observer que l'origine (ou le point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$) est un point multiple de *première catégorie* (nº **128**); si en effet, dans les relations (1), on donne à u, v des valeurs annulant $\mathfrak{S}_0(u, v)$, on trouve $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

161. La surface d'ordre quatre adjointe à Σ se trouve aisément; on pourrait la chercher directement par l'étude des lignes doubles, mais la marche suivante est plus simple.

La surface de Kummer, $K(X, Y, Z) = 0$, admet, comme nous le savons, une intégrale double de fonction rationnelle ne devenant jamais infinie; la fonction K étant d'ordre quatre, cette intégrale a pour expression

$$\int\int \frac{dX\,dY}{K'_Z}.$$

Sous le signe $\int\int$ remplaçons X, Y, Z par leurs valeurs (7) en fonction rationnelle de x, y, z, c'est-à-dire par $\frac{1}{yz}, \frac{1}{xz}, \frac{1}{xy}$; l'intégrale nouvelle restera finie pour tous les systèmes de valeurs de x, y, z qui correspondent à un point de la surface Σ, et par suite elle sera de la forme

$$\int\int \frac{D(x, y, z)\,dx\,dy}{\Sigma'_z},$$

D étant le polynôme d'ordre quatre adjoint à Σ.

Or les relations

$$X = \frac{1}{yz}, \qquad Y = \frac{1}{zx}$$

donnent

$$(11) \qquad dX\,dY = -\frac{dx\,dy}{x^2y^2z^3}\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + z\right),$$

$\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ étant les dérivées partielles de z par rapport à x et à y, déduites de la relation

$$\Sigma(x, y, z) = 0.$$

La relation identique (10),

$$K(X, Y, Z) = \frac{1}{x^4y^4z^4}\Sigma(x, y, z)$$

donne, en chaque point de la surface $\Sigma = 0$,

$$K'_Z = \frac{1}{x^4 y^4 z^4}\left(\Sigma'_x \frac{\partial x}{\partial Z} + \Sigma'_y \frac{\partial y}{\partial Z} + \Sigma'_z \frac{\partial z}{\partial Z}\right),$$

$\frac{\partial x}{\partial Z}, \frac{\partial y}{\partial Z}, \frac{\partial z}{\partial Z}$ étant les dérivées partielles, par rapport à Z, de x, y, z considérés comme fonctions des trois variables X, Y, Z. Or on tire de (8)

$$-2\frac{\partial x}{\partial Z} = \frac{X}{Z\sqrt{XYZ}}, \qquad -2\frac{\partial y}{\partial Z} = \frac{Y}{Z\sqrt{XYZ}}, \qquad 2\frac{\partial z}{\partial Z} = \frac{1}{\sqrt{XYZ}}$$

et, en remplaçant X, Y, Z par leurs valeurs en x, y, z, il vient

$$(12) \qquad 2K'_Z = \frac{1}{x^3 y^3 z^3}(-x\Sigma'_x - y\Sigma'_y + z\Sigma'_z).$$

D'ailleurs on a

$$-x\Sigma'_x - y\Sigma'_y + z\Sigma'_z = \Sigma'_z\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + z\right),$$

et, par suite, d'après (11) et (12),

$$\iint \frac{dX\,dY}{K'_Z} = -2\iint \frac{xyz}{\Sigma'_z}\,dx\,dy.$$

Cette formule montre que la surface adjointe $D = 0$ a pour équation $xyz = 0$, c'est-à-dire, en revenant aux coordonnées homogènes, $x_1 x_2 x_3 x_4 = 0$, puisque cette surface est d'ordre quatre.

La surface adjointe du quatrième degré se décompose donc en quatre plans, qui sont les faces du tétraèdre de référence : il en résulte que la surface Σ n'a pas d'autres lignes multiples que les arêtes de ce tétraèdre, qui sont des lignes doubles; on le voit de suite en faisant successivement $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, dans l'équation (5).

Il y a lieu d'observer toutefois que les six arêtes ne jouent pas le même rôle géométrique. Si l'on considère en effet la section de la surface Σ par un plan quelconque P, cette section a six points doubles en chacun des six points où P coupe les arêtes; mais on démontrerait sans difficulté que chacun des trois points doubles situés dans le plan

$x_4 = 0$ diminue le genre de la section de trois unités, tandis que les trois autres points doubles, situés sur les arêtes qui partent du point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, sont des points de rebroussement ordinaires. Les trois premiers points doubles sont donc d'une nature toute particulière; les deux branches de la courbe passant par chacun d'eux y ont un contact d'ordre élevé.

La section plane de Σ est ainsi de genre

$$\tfrac{1}{2}.7.6 - 3.3 - 3 = 9,$$

comme on le savait *a priori*, car les quatre courbes $x_j(u, v) = 0$, considérées dans le champ hyperelliptique, ont six points simples et un point double ($u = v = 0$) communs; dès lors la formule

$$p = h^2 + 1 - \tfrac{1}{2}\Sigma I(\sigma_k, \sigma'_k)$$

donne ici

$$p = 3^2 + 1 - 1 = 9.$$

162. L'étude des courbes algébriques tracées sur la surface Σ nous entraînerait trop loin; nous nous bornerons à parler de celles qui sont du plus petit degré.

En dehors des courbes multiples et des courbes unicursales singulières, toute courbe tracée sur une surface représentable point par point sur le champ hyperelliptique est au moins de genre deux, puisqu'elle admet les deux intégrales de première espèce $\int du$ et $\int dv$: les courbes de moindre degré seront donc au moins du quatrième ordre. Si elles sont du quatrième ordre, elles seront planes, car les courbes gauches de degré quatre sont de genre zéro ou un.

Sur la surface Σ existe effectivement une série simplement infinie de courbes planes d'ordre quatre et de genre deux. Soit en effet $\vartheta(u, v)$ la fonction normale impaire d'ordre un et de caractéristique $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$; désignons par λ et μ deux paramètres liés par la relation

$$\vartheta(\lambda, \mu) = 0$$

et considérons sur Σ les courbes représentées par l'équation générale

$$(13) \qquad \vartheta(u+\lambda, v+\mu) = 0.$$

Nous allons montrer que ces courbes, en nombre simplement infini, sont d'ordre quatre.

En effet, dans le champ hyperelliptique, la courbe

$$\vartheta(u+\lambda, v+\mu) = 0$$

a un point simple en $u=0$, $v=0$, puisque

$$\vartheta(\lambda, \mu) = 0;$$

la courbe

$$\rho_1 x_1(u,v) + \rho_2 x_2(u,v) + \rho_3 x_3(u,v) + \rho_4 x_4(u,v) = 0$$

a un point double au même point. Donc des *six* points communs à ces deux courbes, *deux* coïncident avec le point $u=0$, $v=0$.

En revenant à la surface Σ, on voit que toute courbe (13) tracée sur cette surface est rencontrée par un plan quelconque en $6-2=4$ points; elle est par suite du *quatrième* degré.

Voici quelques propriétés des courbes (13).

La fonction

$$\vartheta(u+\lambda, v+\mu)\,\vartheta(u-\lambda, v-\mu)$$

est évidemment une fonction thêta d'ordre deux et de caractéristique nulle; elle s'exprime donc en fonction linéaire et homogène de quatre fonctions distinctes de même nature, par exemple de $\vartheta_0^2, \vartheta_1^2, \vartheta_2^2, \vartheta_3^2$. Comme d'ailleurs elle s'annule pour $u=0$, $v=0$, ainsi que ϑ_1^2, ϑ_2^2, ϑ_3^2 et que ϑ_0^2 ne s'annule pas, on pourra l'exprimer à l'aide de $\vartheta_1^2, \vartheta_2^2, \vartheta_3^2$ seulement, et l'on a ainsi

$$(14) \quad \vartheta(u+\lambda, v+\mu)\,\vartheta(u-\lambda, v-\mu) = \lambda_1\vartheta_1^2 + \lambda_2\vartheta_2^2 + \lambda_3\vartheta_3^2.$$

Observons ici que, si l'on considère la surface de Kummer déjà introduite et définie par les relations (6), le plan

$$\lambda_1 X + \lambda_2 Y + \lambda_3 Z = 0,$$

en vertu de l'équation précédente, est un plan tangent de cette surface (n° **59**) dont le point de contact est défini par les deux équations

$$\mathfrak{S}(u+\lambda, v+\mu)=0, \qquad \mathfrak{S}(u-\lambda, v-\mu)=0;$$

c'est donc le point $u=0$, $v=0$, c'est-à-dire le point $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, qui est un point singulier de la surface. En d'autres termes, le plan $\lambda_1 X+\lambda_2 Y+\lambda_3 Z=0$ touche le cône $C_2(X, Y, Z)=0$ formé par les tangentes en ce point singulier (n° **159**).

Si nous revenons à Σ, nous voyons que l'équation (14), après multiplication des deux membres par $\mathfrak{S}_0(u, v)$, peut s'écrire

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_0(u, v)\mathfrak{S}(u+\lambda, v+\mu)\mathfrak{S}(u-\lambda, v-\mu)\\ =\lambda_1 x_1(u, v)+\lambda_2 x_2(u, v)+\lambda_3 x_3(u, v).\end{aligned}$$

Le plan $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3=0$ coupe donc la surface Σ suivant les deux courbes du quatrième ordre

$$(16) \qquad \mathfrak{S}(u+\lambda, v+\mu)=0, \qquad \mathfrak{S}(u-\lambda, v-\mu)=0.$$

Le facteur $\mathfrak{S}_0(u, v)$ ne donne que l'origine des coordonnées (n° **128**). Les deux courbes (16) sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'origine, car on passe de l'une à l'autre en changeant u et v en $-u$, $-v$ (n° **159**). Le plan $\lambda_1 x+\lambda_2 y+\lambda_3 z=0$ enveloppe le cône $C_2(x, y, z)=0$ d'après ce qui précède.

En d'autres termes :

Les plans menés par le centre de Σ, tangentiellement au cône qui a pour sommet ce point et pour base la conique située sur la surface coupent Σ suivant deux courbes du quatrième ordre.

Ces deux courbes ont le centre (qui est un point quadruple de Σ) pour point double; on démontre sans difficulté qu'elles ont toutes deux pour asymptotes les trois droites suivant lesquelles leur plan coupe les trois plans des coordonnées cartésiennes, et qu'elles sont osculatrices entre elles aux points à l'infini sur ces asymptotes, etc.

Pour six positions du plan sécant, correspondant aux six plans singuliers de la surface de Kummer passant par le point $u=0$, $v=0$, les deux courbes du quatrième ordre coïncident (¹) : trois des plans sécants ainsi définis sont les plans de coordonnées $x=0$, $y=0$, $z=0$, et les quartiques se décomposent en droites; les trois autres plans touchent Σ le long d'une quartique de genre deux proprement dite.

Il serait aisé de déduire de ces propositions un mode de génération de la surface Σ par des quartiques planes; sans insister sur ce point, nous nous bornerons à faire observer que toutes les quartiques (13) sont des courbes γ et ont par suite les mêmes modules. Géométriquement on peut donner de cette dernière propriété une démonstration identique à celle du n° **60**, basée sur la fixité des rapports anharmoniques des six droites suivant lesquelles un plan mobile, tangent à un cône du second ordre ($C_2=0$), est coupé par six plans fixes tangents au même cône.

Enfin il y a lieu de remarquer que les propriétés générales des courbes γ passant par un point fixe s'appliquent à nos quartiques.

163. On obtient une seconde surface du huitième ordre, analogue à la précédente, mais un peu plus générale, de la manière suivante :

Désignons par $\mathfrak{S}_1(u,v)$; $\mathfrak{S}_2(u,v)$; $\mathfrak{S}_3(u,v)$; $\mathfrak{S}_4(u,v)$; $\mathfrak{S}_5(u,v)$; $\mathfrak{S}_6(u,v)$ les six fonctions thêta normales d'ordre un qui s'annulent pour $u=0$, $v=0$; ce seront les six fonctions impaires, ayant pour symboles respectifs

$$12', \quad 13', \quad 41', \quad 14', \quad 21', \quad 31'.$$

Soit toujours $\mathfrak{S}_0(u,v)$ la fonction d'ordre un et de caractéristique nulle, de symbole $44'$. Considérons la surface S définie par les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1=\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_1^2, \qquad x_2=\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_2^2, \qquad x_3=\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_3^2, \\ \qquad x_4=\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3+\rho\,\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_5\mathfrak{S}_6, \end{cases}$$

où ρ est une constante quelconque (pour $\rho=0$ on a la surface Σ). Les

(¹) L'équation de ces six plans est évidemment $B_3^2-C_2A_2^2=0$.

quatre fonctions x_1, x_2, x_3, x_4 sont d'ordre trois et de caractéristique nulle, comme on le voit aisément; les trois premières sont paires et la dernière est impaire.

Ces fonctions s'annulent simultanément :

1° Pour les six solutions communes aux équations

$$\mathfrak{S}_0(u, v) = 0, \qquad \mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3 + \rho\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_5\mathfrak{S}_6 = 0;$$

2° Pour le système $u = 0$, $v = 0$; de plus, le point $u = 0$, $v = 0$ est un point double, au moins, pour chacune des courbes du champ hyperelliptique $x_j(u, v) = 0$; $(j = 1, 2, 3, 4)$.

Il en résulte que le degré de S est égal à

$$2.3^2 - 6 - 4 = 8.$$

Cette surface, en coordonnées cartésiennes, a pour centre le point $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, qui est un point quadruple (de première catégorie). Examinons maintenant en quelques mots rapides les courbes remarquables tracées sur S, et d'abord les courbes unicursales singulières.

Les six solutions communes aux deux équations

$$\mathfrak{S}_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3 + \rho\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_5\mathfrak{S}_6$$

sont deux à deux égales et de signes contraires; soient u_0, v_0 et $-u_0$, $-v_0$ deux d'entre elles. Donnons à u, v dans les fonctions $x_j(u, v)$ les valeurs $u_0 + \varepsilon$, $v_0 + \eta$, ε et η étant très petits, il vient

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1(\mathrm{A}\varepsilon + \mathrm{B}\eta) + \ldots, \\ x_2 &= a_2(\mathrm{A}\varepsilon + \mathrm{B}\eta) + \ldots, \\ x_3 &= a_3(\mathrm{A}\varepsilon + \mathrm{B}\eta) + \ldots, \\ x_4 &= \mathrm{A}_4\varepsilon \quad + \mathrm{B}_4\eta + \ldots, \end{aligned}$$

les a, A, B étant des constantes et les termes négligés étant du second ordre au moins en ε et η.

Quand ε et η varient, le point ainsi défini décrit la droite

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \frac{x_3}{a_3}.$$

La droite analogue qui correspond aux valeurs $-u_0$, $-v_0$ des paramètres coïncide avec la précédente, car dans le calcul ci-dessus a_1, a_2, a_3 sont les valeurs que prennent les fonctions paires $\mathfrak{S}_1^2$, $\mathfrak{S}_2^2$, $\mathfrak{S}_3^2$ pour $u = u_0$, $v = v_0$.

En d'autres termes, les six droites (unicursales singulières) se réduiront à trois, passant par le centre de la surface et dont chacune sera une ligne double de S. Nous avons déjà rencontré le même fait pour la surface Σ.

Au système $u = 0$, $v = 0$ correspond sur S une courbe unicursale singulière qui est une conique, située dans le plan $x_4 = 0$ (nº **160**); l'équation de cette conique, ou plutôt celle du cône qui la contient et qui a pour sommet le centre de S, est $C_2(x_1, x_2, x_3) = 0$, comme dans le cas de la surface Σ, car l'équation cherchée ne dépend que des valeurs que prennent les fonctions x_1, x_2, x_3 pour $u = \varepsilon$, $v = \eta$, et ces fonctions sont les mêmes pour les surfaces S et Σ.

On voit également, comme plus haut, que les plans tangents au cône $C_2 = 0$ coupent S suivant deux courbes γ, du quatrième ordre, symétriques par rapport au centre, et dont les équations sont de la forme

$$\mathfrak{S}(u + \lambda, v + \mu) = 0, \qquad \mathfrak{S}(u - \lambda, v - \mu) = 0,$$

λ et μ étant deux paramètres liés par la relation $\mathfrak{S}(\lambda, \mu) = 0$.

Toutes ces courbes ont pour point double le centre de S.

On démontre ensuite sans difficulté que, parmi les plans tangents au cône $C_2 = 0$, il en est six qui touchent la surface S suivant une courbe du quatrième ordre (¹). Les trois faces du trièdre formé par les droites doubles trouvées plus haut, touchent également le cône, et coupent chacune S suivant une conique, qui est une ligne double de cette surface.

Enfin le plan $x_4 = 0$ coupe S suivant la conique qui correspond au système de valeurs $u = 0$, $v = 0$, et suivant une courbe du troisième ordre qui est également une ligne double de la surface.

En résumé, la surface S a pour lignes doubles trois droites, trois

(¹) Parmi ces plans figurent les plans de coordonnées $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

coniques et une cubique; le genre des sections planes est ainsi égal à $\frac{1}{2}.7.6 - 12 = 9$, comme on le savait *a priori*.

La surface adjointe du quatrième ordre se décompose en quatre plans, qui sont les faces du trièdre formé par les droites doubles et le plan $x_1 = 0$.

164. Nous nous bornerons enfin à signaler une *troisième surface hyperelliptique d'ordre huit*, qu'on déduit de Σ en remplaçant x, y, z par $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$; elle a pour équation

$$C_4 + 2xyzB_3 + A_1^2 x^2 y^2 z^2 = 0,$$

étant posé

$$C_4 = a_1^2 y^2 z^2 + a_2^2 x^2 z^2 + a_3^2 x^2 y^2 - 2xyz(a_1 a_2 z + a_1 a_3 y + a_2 a_3 x),$$

$$\begin{aligned} B_3 = &- a_2 a_3 x(z^2 - y^2) \\ &- a_1 a_3 y(x^2 + z^2) - a_1 a_2 z(x^2 + y^2) + \lambda xyz, \end{aligned}$$

$$A_1 = a_1 x - a_2 y - a_3 z.$$

QUATRIÈME PARTIE.

SURFACES REPRÉSENTABLES POINT PAR POINT SUR LA SURFACE DE KUMMER.

Généralités.

165. Nous avons admis jusqu'ici, dans l'étude des surfaces hyperelliptiques générales, qu'à un point de la surface ne correspond, aux multiples près des périodes, qu'un seul couple d'arguments u, v.

Supposons maintenant qu'à un point d'une surface $\mathfrak{T}$ dont les coordonnées cartésiennes x, y, z s'expriment en fonction quadruplement périodique uniforme de deux paramètres u, v, correspondent *deux couples* d'arguments u, v et u', v'. Nous allons démontrer que la surface $\mathfrak{T}$ est représentable point par point sur une surface de Kummer.

En effet, considérons, en chaque point x, y, z de $\mathfrak{T}$, la somme $du + du'$: elle peut se mettre sous la forme $M\,dx + N\,dy$, M et N étant rationnels en x, y, z, car x et y étant les variables indépendantes, chacune des deux fonctions $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u'}{\partial y}$ est une fonction rationnelle de x, y, z en chaque point de $\mathfrak{T}$, puisqu'elle n'a qu'une seule valeur en ce point.

Si maintenant, dans $M\,dx + N\,dy$, on remplace x, y, z par leurs valeurs en fonction quadruplement périodique de u, v, il vient

$$du + du' = A(u, v)\,du + B(u, v)\,dv,$$

A et B étant des fonctions quadruplement périodiques uniformes.

De même on aurait

$$dv + dv' = A_1(u, v)\,du + B_1(u, v)\,dv.$$

Les deux intégrales $\int(du + du')$ et $\int(dv + dv')$ restent évidemment finies sur la surface $\mathfrak{T}$; or l'intégrale $\int A(u, v)\,du + B(u, v)\,dv$ ne peut demeurer finie que si les fonctions quadruplement périodiques A et B se réduisent à des constantes, et de même les fonctions A_1 et B_1.

On a ainsi

$$(1)\qquad \begin{cases} du + du' = \alpha\;du + \beta\;dv, \\ dv + dv' = \alpha_1\,du + \beta_1\,dv, \end{cases}$$

α, β, α_1, β_1 étant des constantes.

Permutant u et u', v et v' dans ces relations, on trouve les nouvelles équations

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha\;(du - du') + \beta\;(dv - dv') = 0, \\ \alpha_1(du - du') + \beta_1(dv - dv') = 0. \end{cases}$$

Deux cas sont à distinguer :

I. Si l'on a

$$du' = du \qquad \text{et} \qquad dv' = dv,$$

les deux relations (2) sont satisfaites. Mais on en conclut $u' = u + \gamma$, $v' = v + \gamma_1$; γ et γ_1 étant des constantes, et par suite les coordonnées x, y, z, considérées comme des fonctions quadruplement périodiques de u, v, admettent le couple de périodes γ, γ_1. Le système d'arguments u', v' n'est donc pas distinct (aux périodes près) du système u, v.

II. Si l'on n'a pas simultanément

$$du = du' \qquad \text{et} \qquad dv = dv',$$

les relations (2) montrent que le déterminant $\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1$ est nul.

Distinguons encore deux cas.

1° Si α, β, α_1, β_1 sont tous nuls, il reste dans (1)

$$du + du' = 0, \qquad dv + dv' = 0;$$

d'où l'on tire

$$u + u' = \gamma, \qquad v + v' = \gamma_1.$$

Posons maintenant

$$u = U + \tfrac{1}{2}\gamma, \qquad v = V + \tfrac{1}{2}\gamma_1,$$
$$u' = U' + \tfrac{1}{2}\gamma, \qquad v' = V' + \tfrac{1}{2}\gamma_1;$$

il vient

$$U + U' = 0, \qquad V + V' = 0.$$

On voit ainsi que les coordonnées x, y, z, considérées comme fonctions quadruplement périodiques de U et V ne changent pas quand on remplace U et V simultanément par $-$ U et $-$ V; ce sont donc des fonctions *paires* de U, V.

2° Supposons que l'une au moins des quantités α, β, α_1, β_1; α_1, par exemple, ne soit pas nulle.

On déduit des équations (1), en tenant compte de la condition $\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1 = 0$,

$$(\alpha_1\, du - \alpha\, dv) + (\alpha_1\, du' - \alpha\, dv') = 0;$$

d'où

$$(\alpha_1 u - \alpha v) + (\alpha_1 u' - \alpha v') = \gamma. \tag{3}$$

La seconde relation (2) donne d'ailleurs

$$(4) \qquad (\alpha_1 u + \beta_1 v) - (\alpha_1 u' + \beta_1 v') = \gamma_1.$$

Prenons maintenant pour variables, à la place de u et v, les arguments U et V ainsi définis

$$\begin{aligned} U &= \alpha_1 u - \alpha v - \tfrac{1}{2}\gamma, \\ V &= \alpha_1 u + \beta_1 v. \end{aligned}$$

Les relations (3) et (4) montrent que, à un point de $\mathfrak{C}$, correspondront les deux systèmes d'arguments

$$U, \; V \text{ et } -U, \; V + \gamma_1.$$

En ce cas, les fonctions quadruplement périodiques considérées se ramènent aux fonctions elliptiques.

Soit en effet F(U, V) l'une quelconque des coordonnées x, y, z d'un point de $\mathfrak{C}$; on a, d'après ce qui précède, pour toutes les valeurs de U, V,

$$(5) \qquad F(U, V) = F(-U, V + \gamma_1).$$

On en conclut, en changeant encore une fois U, V en $-U$, $V + \gamma_1$,

$$F(U, V) = F(U, V + 2\gamma_1),$$

$2\gamma_1$ est donc une période par rapport à V seulement.

Soient maintenant ω et ω' un couple quelconque de périodes simultanées de U, V : changeons dans (5) U et V en $U + \omega$, $V + \omega'$; il vient successivement, par des transformations évidentes,

$$\begin{aligned} F(U, V) = F(U + \omega, V + \omega') &= F(-U - \omega, V + \omega' + \gamma_1) \\ &= F(-U, V + 2\omega' + \gamma_1) \\ &= F(U, V + 2\omega' + 2\gamma_1) \\ &= F(U, V + 2\omega'). \end{aligned}$$

Cette dernière relation montre que $2\omega'$ est une période par rapport à V seul; et, par suite, puisque $(2\omega, 2\omega')$ est un couple de périodes simultanées, que 2ω est une période par rapport à U seul.

Il en résulte évidemment que $F(U, V)$ est une fonction doublement périodique de U et doublement périodique de V.

166. Résumant toute cette analyse, on voit que, si l'on reste dans le champ hyperelliptique proprement dit, *toute surface* $\mathfrak{T}$, *telle qu'à un de ses points correspondent deux points du champ, peut,* après un changement de variables, *être représentée par des équations de la forme*

$$x = F_1(u, v), \qquad y = F_2(u, v), \qquad z = F_3(u, v),$$

où F_1, F_2, F_3 sont des fonctions quadruplement périodiques *paires* de u, v, c'est-à-dire ne changeant pas quand on remplace u, v par $-u$, $-v$.

En d'autres termes :

La surface $\mathfrak{T}$ *est représentable point par point sur la surface de Kummer.*

167. Les coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3, x_4 d'un point de la surface $\mathfrak{T}$ peuvent être mises sous une forme remarquable.

Si l'on se reporte en effet au théorème de M. Appell, rappelé au n° **1**, on voit qu'on peut écrire (en négligeant le facteur de proportionnalité)

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta_1(u, v), & x_2 &= \theta_2(u, v), \\ x_3 &= \theta_3(u, v), & x_4 &= \theta_4(u, v); \end{aligned}$$

$\theta_1(u, v)$, ..., $\theta_4(u, v)$ étant des fonctions thêta de même ordre et de mêmes multiplicateurs.

Pour que la fonction $\frac{x_1}{x_4}$ soit paire, il faut qu'on ait

$$\frac{\theta_1(u, v)}{\theta_4(u, v)} = \frac{\theta_1(-u, -v)}{\theta_4(-u, -v)};$$

d'où l'on déduit aisément que le quotient $\frac{\theta_1(-u,-v)}{\theta_1(u,v)}$ doit être entier, et par suite (nº **10**) il faut que $\theta_1(u,v)$ soit une fonction paire ou impaire, ou qu'elle le devienne quand on la multiplie par $e^{-\frac{p'}{2}u-\frac{q'}{2}v}$, p' et q' étant des nombres entiers.

Désignons par $\Theta_1(u,v)$ la fonction paire ou impaire

$$\theta_1(u,v)\,e^{-\frac{p'}{2}u-\frac{q'}{2}v},$$

le raisonnement fait au nº **14** montre que $\Theta_1(u,v)$ est une *fonction normale*, de caractéristique quelconque.

Les quotients $\frac{\theta_2}{\theta_1}$, $\frac{\theta_3}{\theta_1}$, $\frac{\theta_4}{\theta_1}$ étant des fonctions quadruplement périodiques paires, les trois fonctions

$$\Theta_j = e^{-\frac{p'}{2}u-\frac{q'}{2}v}\,\theta_j(u,v), \qquad (j=2,3,4),$$

qui sont des fonctions thêta, seront des fonctions normales, de même ordre et de même caractéristique que $\Theta_1(u,v)$, et seront paires ou impaires avec Θ_1.

En d'autres termes :

Les coordonnées homogènes d'un point de $\mathfrak{T}$ sont proportionnelles à quatre fonctions thêta normales, de même ordre et de même caractéristique, simultanément paires ou impaires.

On peut dire aussi que toute surface $\mathfrak{T}$ correspond point par point à une surface de Kummer K, par les relations

$$x_j = S_j(X_1, X_2, X_3, X_4) \qquad (j=1,2,3,4),$$

en désignant par x_j les coordonnées d'un point de $\mathfrak{T}$ et par X_j celles du point correspondant de K.

Les fonctions S_j, égalées à zéro, représentent des surfaces liées d'une manière remarquable à la surface de Kummer; d'après la théorie générale des courbes tracées sur cette surface, cinq cas sont à distinguer :

1° Les coordonnées $x_j(u, v)$ sont d'ordre impair, $2\rho+1$, et s'annulent pour six demi-périodes : les surfaces $S_j = 0$ sont d'ordre $\rho+1$ et passent par une même conique de K.

2° Les coordonnées $x_j(u, v)$ sont d'ordre impair, $2\rho+1$, et s'annulent pour dix demi-périodes : les surfaces $S_j = 0$ sont d'ordre $\rho+2$, et passent par trois mêmes coniques de K, ayant en commun un point double de K.

3° Les coordonnées $x_j(u, v)$ sont paires, d'ordre pair, 2ρ, et de caractéristique nulle : les surfaces S_j sont d'ordre ρ et n'ont en commun aucune courbe située sur K.

4° Les coordonnées $x_j(u, v)$ sont impaires, d'ordre pair 2ρ, et de caractéristique nulle : les surfaces S_j sont d'ordre $\rho+2$ et passent par quatre mêmes coniques de K, formant un groupe de Rosenhain.

5° Les coordonnées $x_j(u, v)$ sont d'ordre pair, 2ρ, et de caractéristique non nulle ; les surfaces $S_j = 0$ sont d'ordre $\rho+1$ et passent par deux mêmes coniques de K.

168. Ces principes étant établis, il est aisé, en répétant les raisonnements faits au Chapitre III de la troisième Partie, d'établir la théorie générale des surfaces $\mathfrak{T}$.

Nous nous bornerons à énoncer les résultats principaux.

Toute surface $\mathfrak{T}$, d'ordre n, admet une surface adjointe d'ordre $n-4$ (n° **102**); cette surface a pour ligne multiple d'ordre $l-1$ toute ligne multiple d'ordre l et pour point multiple d'ordre $l-2$ (au moins) tout point multiple d'ordre l de $\mathfrak{T}$. *Elle coupe $\mathfrak{T}$, en dehors des lignes multiples, suivant les courbes unicursales singulières de $\mathfrak{T}$, celles qui correspondent à des demi-périodes pouvant toutefois être exceptées* (n° **107**).

La théorie des courbes tracées sur la surface de Kummer, exposée au Chapitre IX de la deuxième Partie, s'applique évidemment sans modification aux surfaces $\mathfrak{T}$, du moins pour les propriétés qui restent invariables dans les transformations birationnelles.

Le nombre des surfaces d'ordre $n-3$, linéairement distinctes, *adjointes à $\mathfrak{T}$, est égal à $p+1$, p étant le genre des sections planes de $\mathfrak{T}$.*

Le nombre des surfaces d'ordre $n+q-4$, linéairement distinctes, adjointes à $\mathfrak{T}$, est égal à

$$\tfrac{1}{2}q(q-1)n+q(p-1)+2+\tfrac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3).$$

Cette formule ne diffère de la formule analogue, relative aux surfaces hyperelliptiques générales, que par le terme additif $+2$ (1).

Si les quatre fonctions coordonnées $x_j(u,v)$ sont des fonctions d'ordre h, ayant en commun des singularités $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ en des points $u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k$, *les courbes découpées sur $\mathfrak{T}$ par les surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ forment une série linéaire*

$$\tfrac{1}{2}q(q-1)n+q(p-1)+1$$

fois infinie, et ayant pour équation générale

$$\lambda_1\theta_1(u,v)+\lambda_2\theta_2(u,v)+\ldots=0,$$

les $\theta(u,v)$ étant les fonctions thêta normales d'ordre hq, linéairement distinctes, de même caractéristique que les fonctions $x_j^q(u,v)$, et paires ou impaires selon que ces dernières sont paires ou impaires; de plus, les fonctions $\theta(u,v)$ ont en chaque point u_k, v_k la singularité adjointe de la singularité composée $(q\sigma_k)$.

169. *Remarque.* — Il peut arriver que les fonctions $\theta(u,v)$ aient en u_k, v_k une singularité d'ordre plus élevé que la singularité adjointe $(q\sigma_k)'$, en raison de la condition particulière qui leur est imposée d'être paires ou impaires. Par exemple, si ces fonctions sont des fonctions paires, de caractéristique nulle, et si la singularité σ_k consiste en un point double correspondant à une demi-période, — $(0,0)$ par exemple, — la singularité $q\sigma_k$ sera un point multiple d'ordre $2q$, et la

(1) L'existence du terme $+2$ tient à ce que les intégrales $\int du$ et $\int dv$ ne sont pas des intégrales abéliennes le long de toute courbe tracée sur $\mathfrak{T}$.

singularité $(q\sigma_k)'$ un point d'ordre $2q-1$, correspondant à la même demi-période; mais une fonction paire ne peut avoir au point $(0, 0)$ qu'un point multiple d'ordre pair; les fonctions $\theta(u, v)$ auront ainsi, en ce point, un point multiple d'ordre $2q$, et par suite y seront douées de la singularité $(q\sigma_k)$ et non de la singularité adjointe $(q\sigma_k)'$. La proposition énoncée plus haut n'en subsiste pas moins, si l'on considère comme douée *a fortiori* de la singularité $(q\sigma_k)'$ toute fonction qui présente en u_k, v_k une singularité plus élevée que $(q\sigma_k)'$.

Dans cet énoncé voici ce que nous entendons par singularité plus élevée que $(q\sigma_k)'$. Soient $\Theta_0(u, v)$ une fonction quelconque, ayant en u_k, v_k la singularité $(q\sigma_k)$, et $\Theta(u, v)$ une fonction quelconque ayant la singularité adjointe $(q\sigma_k)'$: la fonction $\theta(u, v)$ aura une singularité plus élevée que $(q\sigma_k)'$ si le quotient $\frac{\theta(u, v)}{\Theta(u, v)}$ tend vers zéro quand u, v s'approchent respectivement de u_k, v_k en restant liés par la relation $\Theta_0(u, v) = 0$.

170. On démontre également, comme au n° **155**, que :

Les surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ qui passent par les courbes unicursales singulières, communes à $\mathfrak{C}$ et à la surface adjointe d'ordre $n-4$, découpent sur $\mathfrak{C}$ la série linéaire des courbes comprises dans l'équation

$$\lambda_1\theta_1(u,v) + \lambda_2\theta_2(u,v) + \ldots = 0,$$

où $\theta_1, \theta_2, \ldots$ désignent les fonctions thêta normales d'ordre hq, linéairement distinctes, de même caractéristique que les fonctions $x_j^q(u, v)$, et paires ou impaires en même temps que ces dernières; de plus, les fonctions $\theta_1, \theta_2, \ldots$ ont en chaque point u_k, v_k la singularité composée $(q\sigma_k)$.

Le nombre des surfaces adjointes, linéairement distinctes, dont il est question, est *au moins* égal à

$$\tfrac{1}{2}q(q+1)n - q(p-1) + 2 + \tfrac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3).$$

Il est égal à ce nombre lorsque les singularités $(q\sigma_k)$ sont indépendantes pour les fonctions thêta normales, d'ordre hq, de même caractéristique que les fonctions $x_j^q(u, v)$ et paires ou impaires en même temps que celles-ci.

Ces divers théorèmes donneraient lieu à des applications géométriques analogues à celles qui ont été développées dans le cas des surfaces hyperelliptiques générales, et sur lesquelles nous n'insisterons pas.

Surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre.

171. Laissant maintenant de côté l'étude générale des surfaces $\mathfrak{T}$, nous dirons quelques mots de celles qui sont d'ordre minimum, c'est-à-dire d'ordre 4 : il est clair, en effet, que les surfaces $\mathfrak{T}$ sont au moins du quatrième degré, puisqu'elles sont de genre un.

Les surfaces $\mathfrak{T}$, d'ordre quatre, ne peuvent avoir d'autres courbes unicursales singulières que celles qui correspondent à des demi-périodes. En effet (n° **103**), l'intégrale double $\int\int du\,dv$, sur une surface $\mathfrak{T}$, d'ordre n, se met sous la forme

$$\int\int \frac{D(x, y, z)\,dx\,dy}{T_z'}.$$

Nous savons de plus (n° **107**) que la fonction $D(x, y, z)$, d'ordre $n-4$, s'annule en tous les points d'une courbe unicursale singulière qui ne correspond pas à une demi-période. Si $T(x, y, z)$ est d'ordre quatre, $D(x, y, z)$ est une constante non nulle, et par suite il est impossible qu'il existe des courbes unicursales singulières, en dehors de celles qui correspondent à des demi-périodes.

Les quatre fonctions coordonnées $x_j(u, v)$, $(j = 1, 2, 3, 4)$, qui définissent une surface $\mathfrak{T}$ d'ordre quatre, n'ont donc de singularités communes qu'aux seize points $\left(\frac{\mathfrak{P}}{2}, \frac{\mathfrak{P}'}{2}\right)$, en désignant toujours par $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ deux périodes simultanées.

Soient $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{16}$ ces singularités dont plusieurs ne peuvent pas exister; on a, en désignant par h l'ordre des fonctions $x_j(u, v)$,

$$4 = \tfrac{1}{2}\left[2h^2 - \Sigma_k \mathrm{I}(\sigma_k, \sigma_k)\right];$$

car l'ordre de $\mathfrak{T}$ est évidemment égal à *la moitié* du nombre des solutions non fixes communes à deux équations $x_j(u, v) = 0$, $x_i(u, v) = 0$, puisque ces solutions sont deux à deux égales et de signes contraires, et qu'à deux systèmes $u, v; -u-v$ ne correspond qu'un point de $\mathfrak{T}$.

Les sections planes d'une surface $\mathfrak{T}$ d'ordre quatre sont de genre trois, car la surface $\mathfrak{T}$, qui est de genre un, n'a pas de courbe multiple; par suite, le nombre des surfaces adjointes à $\mathfrak{T}$, d'ordre $n+q-4$, c'est-à-dire d'ordre q, est, d'après la formule du n° **170** (¹), *au moins* égal à

$$2q(q+1)-2q+2+\tfrac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3)$$

ou

$$\tfrac{1}{6}(q+1)(q+2)(q+3).$$

Or le nombre $\frac{1}{6}(q+1)(q+2)(q+3)$ est précisément égal au nombre des surfaces les plus générales d'ordre q linéairement distinctes; il en résulte :

1° Que les surfaces d'ordre q adjointes à une surface $\mathfrak{T}$ d'ordre quatre sont toutes les surfaces d'ordre q de l'espace, ce qui était évident *a priori;*

2° Que les mots *au moins* doivent être supprimés dans l'énoncé ci-dessus, et par suite (n° **170**) que les singularités $(q\sigma_k)$ sont indépendantes pour les fonctions thêta normales de même ordre et de même caractéristique que les fonctions x_j^q, et paires ou impaires en même temps que celles-ci. En particulier, si l'on fait $q=1$, on voit que les singularités communes aux quatre fonctions $x_1(u, v)\, x_2(u, v)$, $x_3(u, v)$, $x_4(u, v)$ sont indépendantes les unes des autres, pour les fonctions thêta normales de même ordre et de même caractéristique que ces quatre fonctions, et paires ou impaires en même temps qu'elles.

Enfin le nombre des surfaces adjointes linéairement distinctes d'ordre un étant égal à quatre, la proposition du n° **170** montre qu'il n'existe pas, en dehors des quatre fonctions $x_j(u, v)$ et de leurs combinaisons linéaires, de fonction thêta de même ordre et de même

(¹) Cette formule donne bien le nombre des surfaces adjointes d'ordre q, puisqu'il n'y a pas de courbes unicursales singulières communes à $\mathfrak{T}$ et à la surface adjointe d'ordre $n-4$.

caractéristique que ces fonctions, paire ou impaire en même temps qu'elles, et douée des mêmes singularités aux seize points $\left(\frac{\mathfrak{P}}{2}, \frac{\mathfrak{P}'}{2}\right)$.

172. Il résulte de là qu'on pourra trouver *toutes* les surfaces $\mathfrak{T}$ d'ordre quatre en appliquant la méthode suivante.

Soit h un nombre quelconque; on considérera les fonctions thêta normales $\theta(u, v)$, d'ordre h, paires (ou impaires) ayant une caractéristique donnée.

Désignons par N le nombre des fonctions thêta considérées, linéairement distinctes; une singularité σ_k en un des seize points $\left(\frac{\mathfrak{P}}{2}, \frac{\mathfrak{P}''}{2}\right)$ équivaut pour ces fonctions à c_k conditions : on formera les fonctions $\theta(u, v)$ qui ont en chacun des seize points précédents des singularités $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{16}$ choisies arbitrairement, mais de telle sorte cependant que l'on ait

$$4 = \mathrm{N} - \Sigma c_k. \tag{6}$$

On aura donc ainsi formé quatre fonctions $\theta(u, v)$ linéairement distinctes qui sont les fonctions coordonnées $x_j(u, v)$ d'une surface $\mathfrak{T}$, dont le degré n est donné par la relation

$$n = \tfrac{1}{2}\left[2h^2 - \Sigma_k \mathrm{I}(\sigma_k, \sigma_k)\right]. \tag{7}$$

Les singularités σ_k devront être choisies de telle sorte que $n = 4$. Toutefois il conviendra de s'assurer que les quatre fonctions $\theta(u, v)$ trouvées ne sont pas divisibles par une même fonction thêta, et qu'à un point de $\mathfrak{T}$ ne correspondent pas d'autres couples d'arguments que u, v et $-u, -v$.

Voici des applications de cette méthode à chacun des cinq cas considérés au n° **167**.

173. I. Les fonctions $\theta(u, v)$ sont d'ordre $2\rho + 1$, paires par exemple, et s'annulent pour six mêmes demi-périodes, $\frac{\mathfrak{P}_i}{2}, \frac{\mathfrak{P}'_i}{2}$.

Le nombre de ces fonctions, linéairement distinctes, est égal (n^{os} **3**, **7**) à

$$2\rho^2 + 2\rho + 1;$$

Si on les assujettit à avoir un point multiple d'ordre $2k$ pour une des dix demi-périodes autres que $\frac{\mathfrak{P}_i}{2}$, $\frac{\mathfrak{P}'_i}{2}$, le point $(0, 0)$ par exemple, on trouve aisément le nombre de conditions auxquelles équivaut cette singularité. En effet, les développements des fonctions paires $\theta(u, v)$, suivant les puissances croissantes de u, v, ne contient que des termes d'ordre pair; si l'on annule les coefficients de ces termes jusqu'à l'ordre $2k$ exclusivement, on obtient un nombre de conditions égal à

$$1 + 3 + \ldots + (2k - 1), \quad \text{c'est-à-dire} \quad k^2.$$

Si l'on assujettit les fonctions $\theta(u, v)$ à avoir un point multiple d'ordre $2k + 1$ pour une des six demi-périodes primitives, on trouve de même un nombre de conditions égal à

$$2 + 4 + \ldots + 2k = k(k + 1).$$

Par suite, pour les fonctions $\theta(u, v)$ douées de points multiples ordinaires, correspondant aux seize demi-périodes, et d'ordres

$$2k_1, \quad 2k_2, \quad \ldots, \quad 2k_{10}, \quad 2k'_1 + 1, \quad 2k'_2 + 1, \quad \ldots, \quad 2k'_6 + 1,$$

les relations (6) et (7) deviennent

$$\begin{aligned} 4 &= 2\rho^2 + 2\rho + 1 - (k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_{10}^2) \\ &\quad - [k'_1(k'_1 + 1) + \ldots + k'_6(k'_6 + 1)], \\ 4 &= \tfrac{1}{2}[2(2\rho + 1)^2 - 4(k_1^2 + \ldots + k_{10}^2) \\ &\quad - (2k'_1 + 1)^2 - \ldots - (2k'_6 + 1)^2]. \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que *ces deux relations ne diffèrent pas l'une de l'autre*, et chacune d'elles peut s'écrire

$$(8) \quad \begin{cases} 8\rho^2 + 8\rho - 6 \\ \quad = 4k_1^2 + 4k_2^2 + \ldots + 4k_{10}^2 + (2k'_1 + 1)^2 + \ldots + (2k'_6 + 1)^2. \end{cases}$$

On arrive ainsi à ce résultat remarquable que les surfaces $\mathfrak{T}$ du quatrième ordre cherchées correspondent aux décompositions du nombre $8\rho^2+8\rho-6$, en dix carrés pairs et en six carrés impairs. $2\rho+1$ étant l'ordre des fonctions coordonnées.

Voici un exemple :

Pour $\rho=1$, on a

$$8\rho^2+8\rho-6=10.$$

Les décompositions du nombre 10 en carrés suivant la formule (8) se réduisent à une seule

$$10=4+1+1+1+1+1+1.$$

Les fonctions $\theta(u, v)$ sont alors des fonctions thêta paires, d'ordre trois, de caractéristique nulle, s'annulant pour six demi-périodes, et ayant un point double pour une autre demi-période.

Géométriquement, la surface $\mathfrak{T}$ correspondante est définie par des équations de la forme

$$x_j = S_j(X_1, X_2, X_3, X_4), \tag{9}$$

où X_1, X_2, X_3, X_4 désignent les coordonnées d'un point d'une surface de Kummer, K. Les surfaces $S_j=0$ sont ici des quadriques, passant par une des coniques singulières de K et par un point double situé en dehors de cette conique. La transformation ainsi obtenue est une transformation par rayons vecteurs réciproques de la surface K, si l'on suppose que la conique considérée sur K soit le cercle à l'infini et que le pôle soit placé en un des points doubles à distance finie.

L'étude de la surface du quatrième degré trouvée n'offre donc aucune difficulté.

174. II. Les fonctions $\theta(u, v)$, d'ordre $2\rho+1$, s'annulent pour dix demi-périodes. Celles d'entre elles qui sont linéairement distinctes sont (n^os **5**, **7**) en nombre égal à

$$2\rho^2+2\rho.$$

On démontre comme tout à l'heure qu'on obtiendra une surface $\mathfrak{T}$ d'ordre quatre, en assujettissant ces fonctions à avoir des points multiples d'ordres $(2k_1+1)$, $(2k_2+1)$, ..., $(2k_{10}+1)$ pour chacune des dix demi-périodes primitives et des points multiples d'ordres $2k'_1$, $2k'_2$, ..., $2k'_6$ pour chacune des six autres demi-périodes, les nombres k et k' devant vérifier la relation unique

$$8\rho^2+8\rho-6=(2k_1+1)^2+\ldots+(2k_{10}+1)^2+4k'^2_1+\ldots+4k'^2_6.$$

Exemple. — Pour $\rho=1$, $8\rho^2+8\rho-6$ est égal à dix et il n'y a qu'une décomposition possible

$$10=1+1+1+\ldots+1.$$

Les fonctions $\theta(u,v)$ sont alors des fonctions d'ordre trois s'annulant pour dix demi-périodes.

Dans les relations de la forme (9) qui définissent $\mathfrak{T}$, les surfaces $S_j=0$ sont des surfaces cubiques passant par trois coniques de K ayant en commun un point double de cette dernière surface. Nous reviendrons plus loin sur la surface $\mathfrak{T}$ ainsi obtenue.

175. III. Les fonctions $\theta(u,v)$ sont paires, de caractéristique nulle et d'ordre 2ρ; le nombre de celles qui sont linéairement distinctes est égal (n° 4) à

$$2\rho^2+2.$$

On obtient une surface $\mathfrak{T}$ d'ordre quatre en assujettissant ces fonctions à avoir, pour les demi-périodes, des points multiples d'ordres $2k_1$, $2k_2$, ..., $2k_{16}$, les nombres k vérifiant la relation unique

$$2\rho^2-2=k_1^2+k_2^2+\ldots+k_{16}^2.$$

Exemples. — Pour $\rho=2$, on a

$$2\rho^2-2=6.$$

Il y a deux décompositions du nombre six en moins de seize carrés

1° $\qquad 6=2^2+1+1,$

2° $\qquad 6=1+1+1+1+1+1.$

On voit sans difficulté que la surface $\mathfrak{T}$ qui correspond à la première décomposition est définie par des équations de la forme (9), où les surfaces $S_j = 0$ sont des cônes du second ordre qui ont pour sommet commun un point double de K et passent en outre par deux autres points doubles de cette surface. Il est clair qu'à un point de $\mathfrak{T}$ correspondent dès lors *deux* points de K, situés sur une même droite issue du point double qui est le sommet des cônes $S_j = 0$, et par suite $\mathfrak{T}$ est non pas du *quatrième*, mais du *second* degré.

Pour la surface $\mathfrak{T}$ qui correspond à la seconde décomposition, les surfaces $S_j = 0$ sont des quadriques passant par six points singuliers de K. Parmi ces six points, cinq ne peuvent être dans un même plan singulier de K, parce que les fonctions coordonnées $x_j(u, v)$ seraient alors divisibles par la fonction $\mathfrak{S}$ du premier ordre correspondant à ce plan singulier.

176. IV. Les fonctions $\theta(u, v)$ sont impaires, de caractéristique nulle, d'ordre 2ρ, elles s'annulent pour chacune des seize demi-périodes; le nombre de celles qui sont linéairement distinctes est $2\rho^2 - 2$ (nº **4**).

On obtient une surface $\mathfrak{T}$ d'ordre quatre en assujettissant ces fonctions à avoir, pour les demi-périodes, des points multiples d'ordres $(2k_1 + 1), (2k_2 + 1), \ldots, (2k_{16} + 1)$; les nombres k vérifiant la relation unique

$$8\rho^2 - 8 = (2k_1 + 1)^2 + (2k_2 + 1)^2 + \ldots + (2k_{16} + 1)^2.$$

Exemple. — Pour $\rho = 2$, $8\rho^2 - 8$ est égal à 24; il n'y a qu'une décomposition du nombre 24 en seize carrés impairs

$$24 = 9 + 1 + 1 + \ldots + 1.$$

Les quatre fonctions $x_j(u, v)$ relatives à la surface $\mathfrak{T}$ correspondante sont des fonctions thêta normales d'ordre quatre appartenant à la famille singulière; les courbes $x_j(u, v) = 0$ sur la surface de Kummer ont un point triple en un des seize points singuliers; ce sont donc (nº **78**) les courbes de contact de surfaces de Steiner inscrites à K.

Nous retrouverons également plus loin cette surface $\mathfrak{T}$.

177. V. Les fonctions $\theta(u, v)$ sont d'ordre 2ρ et de caractéristique non nulle. Elles s'annulent pour huit demi-périodes; le nombre de celles qui sont linéairement distinctes est égal à $2\rho^2$.

On obtient une surface $\mathfrak{T}$ d'ordre quatre en assujettissant ces fonctions à avoir, pour chacune des demi-périodes primitives, des points multiples d'ordres $2k_1+1$, $2k_2+1$, ..., $2k_8+1$ et, pour chacune des huit autres demi-périodes, des points multiples d'ordres $2k'_1$, ..., $2k'_8$, les nombres k, k' vérifiant la relation unique

$$8\rho^2 - 8 = (2k_1+1)^2 + \ldots + (2k_8+1)^2 + 4k_1'^2 + \ldots + 4k_8'^2.$$

Exemple. — Pour $\rho = 2$, $8\rho^2 - 8$ est égal à 24; il y a plusieurs décompositions du nombre 24 en huit carrés pairs et huit carrés impairs; considérons par exemple la suivante

$$24 = 4 + 4 + 4 + 4 + 1 + 1 + \ldots + 1.$$

Pour la surface $\mathfrak{T}$ qui correspond à cette décomposition les surfaces $S_j = 0$ sont des surfaces du troisième ordre, passant par deux coniques de K, et en outre par quatre points doubles de cette surface. Les quatre derniers points doubles doivent être distincts de ceux qui sont situés sur les deux coniques considérées, mais peuvent cependant coïncider avec l'un ou l'autre des points doubles communs aux deux coniques.

178. La théorie précédente montre qu'on peut obtenir des surfaces $\mathfrak{T}$ du quatrième ordre, quel que soit l'ordre fixé *a priori*, des fonctions coordonnées correspondantes; l'étude générale des surfaces ainsi définies serait sans doute fort intéressante, mais nous ne l'aborderons pas ici, nous contentant d'examiner une des surfaces particulières indiquées plus haut.

Nous nous bornerons à faire observer qu'on peut, pour des valeurs différentes de l'ordre fixé, retrouver la même surface ([1]); c'est ainsi que la surface de Kummer se retrouve, comme on le voit aisé-

([1]) Le raisonnement fait en note au n° 105 ne s'applique pas aux surfaces $\mathfrak{T}$, puisque les différentielles du et dv ne sont pas abéliennes sur ces surfaces.

ment, pour diverses valeurs simples de l'ordre. A chaque mode nouveau de représentation de cette surface correspond évidemment une transformation birationnelle de la surface en elle-même, et réciproquement. On voit par là que l'étude des surfaces ici examinées présente un réel intérêt; nous aurons sans doute occasion d'y revenir (¹).

Étude d'une surface hyperelliptique du quatrième ordre.

179. Soit $\mathfrak{K}$ la surface du quatrième ordre pour laquelle les fonctions coordonnées $x_j(u, v)$ sont les quatre fonctions thêta impaires, linéairement distinctes d'ordre trois et de caractéristique nulle (n° **174**). Ces fonctions s'annulant simultanément pour dix demi-périodes, la surface $\mathfrak{K}$ a dix droites, qui jouent le rôle de courbes unicursales singulières. Les points qui correspondent sur $\mathfrak{K}$ aux six autres demi-périodes sont évidemment des points doubles de la surface (n° **15**).

Étudions maintenant les courbes représentées sur $\mathfrak{K}$ par les équations $\mathfrak{S}_i(u, v) = 0$, $\mathfrak{S}_i(u, v)$ étant une des seize fonctions normales d'ordre un.

L'ordre de la courbe $\mathfrak{S}_i(u, v) = 0$ est égal à

$$\tfrac{1}{2}[2.3 - s'],$$

s' désignant le nombre de celles des dix demi-périodes primitives qui annulent $\mathfrak{S}_i(u, v)$; or nous savons que ces dix demi-périodes sont celles qui n'annulent pas une même fonction thêta d'ordre un, qui est ici la fonction $\mathfrak{S}_0(u, v)$ de caractéristique nulle, et il en résulte sans difficulté que la fonction $\mathfrak{S}_i(u, v)$ s'annule pour quatre des demi-périodes considérées, à moins qu'elle ne soit la fonction $\mathfrak{S}_0(u, v)$ elle-même. On a donc $s' = 4$ pour quinze des fonctions $\mathfrak{S}_i(u, v)$ et le degré de la courbe correspondante est égal à 1.

Nous trouvons ainsi *quinze nouvelles droites* sur $\mathfrak{K}$.

Ces droites sont celles qui joignent deux à deux les six points doubles de $\mathfrak{K}$, car chacune des quinze fonctions $\mathfrak{S}_i(u, v)$, autres que

(¹) Dès maintenant nous pouvons dire que la surface de Kummer admet d'autres transformations univoques que les quinze collinéations et les seize réciprocités fondamentales.

$\mathfrak{S}_0(u, v)$, s'annule pour deux des demi-périodes qui annulent $\mathfrak{S}_0(u, v)$, c'est-à-dire pour les arguments de deux des six points doubles.

Les dix droites trouvées primitivement sont les arêtes des couples de plans qui passent par les six points doubles : en effet, chacune des dix demi-périodes qui correspondent à ces droites annule six des quinze fonctions $\mathfrak{S}_i(u, v)$; en d'autres termes, chacune des dix droites primitives rencontre (nº **145**) six des quinze droites nouvelles, d'où l'on déduit de suite la proposition à établir.

Enfin la courbe $\mathfrak{S}_0(u, v) = 0$, sur $\mathfrak{R}$, est une cubique gauche qui passe par les six points doubles.

Il résulte de là que $\mathfrak{R}$ est *le lieu des sommets des cônes du second ordre qui passent par les six points doubles*, car on sait que ce lieu est une surface du quatrième ordre, laquelle passe évidemment par les vingt-cinq droites et par la cubique gauche trouvées tout à l'heure (¹).

180. Nous trouvons ainsi entre la surface lieu des sommets des cônes passant par six points et la surface de Kummer, K, un lieu remarquable, signalé pour la première fois par M. Darboux. Les coordonnées x d'un point de la surface $\mathfrak{R}$ sont liées aux coordonnées X d'un point de K, par des relations de la forme

$$(9) \qquad x_j = S_j(X_1, X_2, X_3, X_4) \qquad (j = 1, 2, 3, 4),$$

où $S_j = 0$ est l'équation d'une surface cubique passant par trois coniques de K qui ont en commun un point singulier. D'après cela (nºˢ **44-49**) aux sections planes de $\mathfrak{R}$ correspondent, sur K, les courbes de contact de surfaces cubiques inscrites, douées de quatre points doubles : c'est là précisément la liaison indiquée par M. Darboux.

Cette liaison ne permettant pas de transformer aisément les propriétés connues de la surface de Kummer pour les étendre à la sur-

---

(¹) *Voir*, sur cette surface :

DARBOUX, *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. I, 1ʳᵉ série, p. 354; HIERHOLZER, *Math. Annalen*, t. II, p. 582; SCHOTTKY, *Journal de Crelle*, t. 105, p. 238; REYE, *ibid.*, t. 86, p. 87 et 98; CASPARY, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1891.

face $\mathfrak{R}$, nous allons en déduire une seconde, d'application plus facile.

Il résulte de la proposition du n° **168** que la courbe commune à une quadrique et à $\mathfrak{R}$ aura une équation de la forme

$$\Theta(u, v) = 0,$$

$\Theta(u, v)$ étant une fonction thêta normale, paire, d'ordre six, à caractéristique nulle, douée d'un point double pour chacune des dix demi-périodes qui annulent les quatre fonctions $x_j(u, v)$, et réciproquement. Si la quadrique passe par les six points doubles de $\mathfrak{R}$, la fonction $\Theta(u, v)$ aura encore un point double pour chacune des six autres demi-périodes, et réciproquement.

Or, sur la surface de Kummer, dont les coordonnées $X_j(u, v)$ d'un point sont supposées proportionnelles à quatre fonctions d'ordre deux et de caractéristique nulle (n° **12**), la courbe $\Theta(u, v) = 0$ est sur une surface cubique (n° **30**) qui passe par les seize points singuliers. Mais toute surface cubique passant par les seize points singuliers de K est évidemment la première polaire d'un point de l'espace par rapport à K; il en résulte qu'aux courbes découpées sur $\mathfrak{R}$ par les quadriques menées par les six points doubles correspondent sur K les courbes de contact des tangentes issues d'un même point, et réciproquement. Si donc on transforme K par polaires réciproques en une autre surface de Kummer, K', on voit qu'aux sections planes de K' correspondent, sur $\mathfrak{R}$, les sections par des quadriques passant par les six points doubles, et réciproquement.

D'après cela, si X'_1, X'_2, X'_3, X'_4 sont les coordonnées d'un point de K' et $x_1, \ldots, x_4$ celles d'un point de $\mathfrak{R}$, la liaison entre les deux surfaces sera exprimée par des relations de la forme

$$(10) \qquad X'_j = C_j(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

les surfaces $C_j = 0$ étant des quadriques passant par les six points doubles de $\mathfrak{R}$ ([1]).

([1]) Cette relation entre K' et $\mathfrak{R}$ est celle qu'a indiquée M. Reye au Tome 86 du *Journal de Crelle;* on voit qu'elle se déduit de celle de M. Darboux (entre K et $\mathfrak{R}$) en opérant sur K une transformation par polaires réciproques.

181. Cherchons inversement à exprimer les x en fonction des X'. Lorsque le point x décrit une section plane de $\mathfrak{R}$, le point X décrit, sur K, une sextique passant par dix points singuliers, et, par suite, le point X' décrira, sur K' (n° **78**) une courbe du huitième ordre de la famille singulière, ayant un point triple en un point singulier de K'.

On aura donc

$$x_j = R_j(X'_1, X'_2, X'_3, X'_4),$$

les surfaces $R_j = 0$ étant des surfaces du quatrième ordre, passant par quatre coniques de K' qui appartiennent à un même tétraèdre de Rosenhain (n° **30**); de plus, ces surfaces ont un point double en un même singulier de K', qu'on peut supposer différent des sommets du tétraèdre.

Ces résultats montrent également que les fonctions coordonnées d'un point de $\mathfrak{R}$ peuvent se mettre sous la forme

$$x_j(u', v') = \theta'_j(u', v'), \tag{11}$$

les $\theta'_j(u', v')$ étant des fonctions thêta impaires, d'ordre quatre, de caractéristique nulle, douées d'un point triple pour une des seize demi-périodes. On a donc ainsi un nouveau mode de représentation paramétrique de la surface $\mathfrak{R}$ [1].

182. La relation entre les surfaces $\mathfrak{R}$ et K' donne lieu à des conséquences intéressantes.

Considérons les relations (10) comme liant les points d'un espace E', où les coordonnées sont X', aux points d'un espace e, où les coordonnées sont x (Transformation de Reye). A un point, x, de e correspond un seul point X' de E', mais à un point X' correspondent *deux* points x, puisque trois quadriques $C_j(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ ont huit points communs, dont six sont fixes.

---

[1] Ce mode de représentation comprend, comme cas particulier, celui que M. Schottky a indiqué, et où les $\theta_j(u', v')$ sont des produits de quatre fonctions $\mathfrak{S}$ du premier ordre.

Le mode de représentation primitif comprend, comme cas particulier, celui de M. Caspary.

Lorsque X' décrit un plan, x décrit une quadrique passant par les six points fixes; lorsque X' décrit une droite, x décrit une biquadratique passant par ces points, et réciproquement.

Trois quadriques passant par les six points fixes se coupent en outre en deux points $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, qui correspondent à un même point X' : si l'un de ses points, $x^{(1)}$, est sur $\mathfrak{K}$, parmi les quadriques qui passent par $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ et par les six points fixes, figure, d'après la définition de $\mathfrak{K}$, un cône ayant $x^{(1)}$ pour sommet; il en résulte de suite que les deux points $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ sont confondus. En d'autres termes, les deux points qui, par les relations (10), correspondent à un même point X', pris sur K', se confondent en un seul point situé sur $\mathfrak{K}$.

Le point X' décrivant un plan tangent à K', le point x décrit une quadrique passant par les six points fixes et tangente à $\mathfrak{K}$: cette quadrique est évidemment le cône qui passe par les six points, et qui a son sommet au point de $\mathfrak{K}$, correspondant du point de contact du plan considéré avec K'.

Observons enfin qu'une cubique passant par cinq points doubles de $\mathfrak{K}$ coupe en outre la surface en deux points, g_1 et g_2 : d'après la définition géométrique de $\mathfrak{K}$, ces deux points sont en ligne droite avec le sixième point double. Or l'ensemble de la cubique et de la droite $g_1 g_2$ peut être regardé comme une biquadrique, menée par les six points doubles, et tangente à $\mathfrak{K}$ aux deux points g_1 et g_2; en d'autres termes, cette biquadrique correspond à une tangente double de K'. Ainsi les points de contact d'une bitangente de K' ont pour correspondants deux points de $\mathfrak{K}$ situés en ligne droite avec un des six points doubles.

Cette belle relation, indiquée par M. Darboux, met en évidence les six systèmes bien connus de bitangentes de la surface de Kummer.

183. Voici quelques applications de ces principes; nous les donnons sans développement, nous bornant à renvoyer aux propriétés de la surface de Kummer que nous transformons.

Une biquadratique passant par les six points doubles de $\mathfrak{K}$ coupe en outre la surface en quatre points p_1, p_2, p_3, p_4; à chaque répartition en deux couples de ces quatre points correspond une réparti-

tion en deux couples des quatre cônes passant par la biquadratique, ou, si l'on veut, des sommets des quatre cônes, q_1, q_2, q_3, q_4 *(couples conjugués,* n° **96**).

Les points p_1, p_2, p_3, p_4 *sont les sommets d'un premier tétraèdre; les points* q_1, q_2, q_3, q_4 *sont les sommets d'un second : chaque couple d'arêtes opposées d'un des tétraèdres s'appuie sur un couple d'arêtes opposées de l'autre* (n° **100**).

Les deux tétraèdres appartiennent donc à un système desmique de trois tétraèdres et jouissent ainsi des nombreuses propriétés qui caractérisent un tel système.

Deux points doubles quelconques de $\mathfrak{K}$ *sont les sommets opposés d'une double infinité de quadrilatères complets, dont les quatre autres sommets sont sur* $\mathfrak{K}$.

Cette proposition dérive d'un théorème de M. Darboux (n° **37**) en vertu duquel il existe des quadrilatères gauches dont les côtés sont des bitangentes d'une surface de Kummer et dont les sommets sont les points de contact de ces bitangentes.

Comme conséquence :

Les cônes des tangentes à $\mathfrak{K}$ *aux six points doubles de cette surface ont en commun une même cubique gauche, tracée sur la surface et passant par les six points* (¹).

184. Nous terminerons en indiquant quelques propriétés de deux systèmes de courbes remarquables tracées sur $\mathfrak{K}$.

Le premier système se compose des courbes, en nombre doublement infini, suivant lesquelles $\mathfrak{K}$ est coupée par les cônes quadriques qui ont pour sommets les points de $\mathfrak{K}$ et qui passent par les six points doubles ou *points fondamentaux* de $\mathfrak{K}$; ces courbes, lorsque $\mathfrak{K}$ est rapportée au système de coordonnées (11), ont pour équation générale

$$\mathfrak{S}(u' - \lambda, v' - \mu) = 0,$$

(¹) HIERHOLZER, *loc. cit.*

ϑ étant une fonction thêta du premier ordre, et λ, μ des constantes arbitraires. Nous désignerons ces courbes sous le nom de *courbes* γ'; chacune d'elles a un point double, en dehors des points fondamentaux.

Le second système se compose des courbes représentées par l'équation

$$\vartheta(u-\lambda, v-\mu)=0,$$

lorsque $\mathfrak{K}$ est rapporté au système de coordonnées u, v du n° **179**; nous les appellerons *courbes* γ.

On démontre aisément que toute courbe γ a un point double, et qu'elle est le lieu des sommets des cônes du second ordre qui passent par les six points fondamentaux et par ce point double.

Les courbes γ et γ' jouissent des propriétés générales des courbes γ; elles sont de genre deux; les courbes γ sont d'ordre six, les courbes γ' d'ordre huit.

Chaque courbe γ ou γ' a six *pôles* (n° **145**), qui s'obtiennent géométriquement d'une manière simple, en vertu de cette proposition :

Chacune des droites joignant un des six points fondamentaux au point double d'une courbe γ (ou γ') rencontre en outre cette courbe en un nouveau point; les six points ainsi obtenus sont les pôles de la courbe.

Inversement, chaque point de $\mathfrak{K}$ est le pôle de six courbes γ (ou γ') qui seront dites ses *courbes polaires*, et dont les points doubles se déterminent par le théorème précédent.

On démontre comme au n° **146** que :

Les six pôles des courbes γ (ou γ') qui passent par un point décrivent chacune une des courbes γ (ou γ'), polaires de ce point.

Le lieu des points doubles des courbes γ ou γ' passant par un point se déduit du lieu des pôles par la construction indiquée plus haut; on voit ainsi que :

A chacune des six courbes γ' polaires d'un même point de $\mathfrak{K}$, *on* *peut associer un des six points fondamentaux, de telle sorte que les six cônes qui ont respectivement une des six courbes γ' pour directrice et le point fondamental correspondant pour sommet, se coupent suivant une même courbe nouvelle, située sur $\mathfrak{K}$.*

Cette courbe nouvelle, lieu des points doubles des courbes γ' menées par un point, est aussi, par définition, le lieu des sommets des cônes quadriques passant par ce point et par les six points fondamentaux; c'est donc une courbe γ, ayant le point considéré pour point double.

On a ainsi entre les courbes γ et γ' la dépendance qu'indique l'énoncé suivant :

Soit une courbe γ' (ou γ) quelconque; les six cônes qui ont respectivement pour sommets les six points fondamentaux et qui passent par cette courbe coupent en outre $\mathfrak{K}$ (en dehors de droites joignant les points fondamentaux) chacun suivant une courbe γ (ou γ'), ayant pour pôle le point double de la courbe γ' (ou γ) primitive.

ERRATA.

La proposition analytique énoncée au n° 9 (p. 44) de ce Mémoire est inexacte; la démonstration indiquée établit seulement que : *si une fonction thêta est divisible par une fonction thêta aux mêmes périodes, le quotient est une fonction thêta aux mêmes périodes.*

C'est d'ailleurs dans ce sens que nous avons toujours appliqué la proposition.