JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

P. DUHEM

Commentaire aux principes de la Thermodynamique

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 8 (1892), p. 269-330.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1892_4_8_A8_0>

Commentaire aux principes de la Thermodynamique;

Par M. P. DUHEM.

INTRODUCTION.

Toute science avance comme par une série d'oscillations.

A certaines époques, on discute les principes de la science; on examine les hypothèses qu'ils supposent, les restrictions auxquelles ils sont soumis. Puis, pour un temps, ces principes semblent bien établis: alors les efforts des théoriciens se portent vers la déduction des conséquences; les applications se multiplient, les vérifications expérimentales deviennent nombreuses et précises.

Mais ce développement, d'abord rapide et facile, devient par la suite plus lent et plus pénible; le sol, trop cultivé, s'appauvrit; alors surgissent des obstacles, que les principes établis ne suffisent pas à lever, des contradictions qu'ils ne parviennent pas à résoudre, des problèmes qu'ils sont incapables d'aborder. A ce moment, il devient nécessaire de revenir aux fondements sur lesquels repose la science, d'examiner à nouveau leur degré de solidité, d'apprécier exactement ce qu'ils peuvent porter sans se dérober. Ce travail fait, il sera possible d'édifier de nouvelles conséquences de la théorie.

Les applications de la Thermodynamique ont été nombreuses depuis trente ans; aussi, de l'aveu de tous ceux qu'intéresse cette science, une revision de ces principes est devenue nécessaire. C'est l'essai d'une semblable revision que nous soumettons aujourd'hui aux lecteurs du *Journal de Mathématiques*.

Toute théorie physique repose sur un certain nombre de définitions et d'hypothèses qui sont, dans une certaine mesure, arbitraires; il est donc permis de chercher à exposer une semblable théorie dans un ordre logique; mais prétendre qu'on lui a donné le seul ordre logique dont elle soit susceptible serait une prétention injustifiable. Cette prétention, nous nous garderons bien de l'avoir. Nous sommes convaincu que l'on peut enchaîner les principes de la Thermodynamique d'une manière autre que celle que nous avons adoptée et cependant aussi satisfaisante, plus satisfaisante peut-être. Nous n'oserions même espérer qu'aucune lacune ne subsiste dans l'enchaînement que nous avons cherché à établir.

Si la question que nous avons examinée paraît plutôt philosophique que mathématique, qu'il nous soit permis d'invoquer, pour justifier son introduction dans ce Journal, l'intérêt manifesté tout récemment encore, par un analyste illustre, pour les recherches qui concernent les principes de la Thermodynamique; ce sera notre excuse auprès des mathématiciens.

PREMIÈRE PARTIE.

LE PRINCIPE DE LA CONSERVATION DE L'ÉNERGIE.

CHAPITRE I.

DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES.

1. *Du mouvement absolu.* — Nous supposerons faites la Géométrie et la Cinématique; nous emprunterons à ces sciences tous les résultats dont nous aurons besoin.

L'expérience nous permet de constater si deux parties de la matière se sont déplacées l'une par rapport à l'autre, en sorte que la notion de *mouvement relatif* est une notion expérimentale; c'est de cette notion que traite la Cinématique.

Mais cette notion est insuffisante pour l'objet que nous nous proposons de traiter. Les hypothèses que nous aurons à énoncer, les lois que nous aurons à formuler, ne feront pas intervenir seulement les mouvements relatifs des différentes parties de la matière les unes par rapport aux autres. Elles feront intervenir les mouvements des différentes parties de la matière par rapport à un certain trièdre de référence idéal, que l'on suppose tracé quelque part. Il arrivera souvent que des propositions qui concernent les mouvements relatifs à ce trièdre de référence particulier, et que nous regardons comme exactes, deviendraient manifestement fausses si l'on y supposait les mouvements rapportés à un autre trièdre de référence, animé par rapport au premier d'un mouvement quelconque.

Nous donnerons à ce trièdre particulier, auquel seront rapportés tous les mouvements dont nous parlerons, le nom de *trièdre absolument fixe;* les axes de ce trièdre seront les *axes absolument fixes;* un mouvement rapporté à ce trièdre particulier prendra le nom de *mouvement absolu;* une portion de matière dont les divers points ne seront animés d'aucun mouvement par rapport à ce trièdre sera dite en *repos absolu;* en particulier, un trièdre immobile par rapport au trièdre absolument fixe sera un nouveau trièdre absolument fixe.

Nous ne pouvons pas juger d'une manière indiscutable si un trièdre donné est ou n'est pas absolument fixe; tout jugement à cet égard est subordonné à la croyance en la légitimité de quelque hypothèse. Si nous regardons comme exacte une certaine hypothèse où intervient la considération des mouvements absolus, et si cette hypothèse, appliquée aux mouvements relatifs à un certain trièdre, conduit à des résultats inexacts, nous déclarons que ce trièdre n'est pas absolument fixe. Mais cette conclusion n'est forcée qu'autant que nous tenons à conserver l'hypothèse qui nous a servi de criterium; nous serions en droit de regarder comme fixe le trièdre dont il s'agit si nous consentions à rejeter l'hypothèse.

2. *Des corps et des mélanges ou combinaisons.* — Nous appellerons *corps* un espace linéairement connexe rempli, *d'une manière continue,* par une certaine partie de la matière.

Nous ne discuterons pas la question de savoir si les corps sont réellement continus, ou formés de parties discontinues très petites séparées par des intervalles vides également très petits.

En Physique, il nous est à la fois impossible et inutile de connaître la constitution réelle de la matière. Nous cherchons simplement à concevoir un système abstrait qui nous fournisse une image des propriétés des corps. Pour construire ce système, nous sommes libres de représenter un corps qui nous semble continu soit par une distribution continue de matière dans un certain espace, soit par un ensemble discontinu d'atomes très petits. Le premier mode de représentation conduisant, dans toutes les parties de la Physique, à des théories plus simples, plus claires et plus élégantes, nous l'adopterons de préférence au second.

Considérons deux corps A, B, qui, à un certain instant t, occupent des espaces a, b, n'ayant aucune partie commune; ces deux corps ne sont pas toujours et forcément distincts; les parties de la matière qui les forment peuvent à un instant t', distinct de t, antérieur ou postérieur à t, fournir un corps unique C, occupant l'espace c; cela, de telle façon que tout élément $d\varpi$ de l'espace c renferme, à l'instant t', une partie de la matière qui, à l'instant t, forme le corps A, et aussi une partie de la matière qui, à l'instant t, forme le corps B; la première partie occupant, à l'instant t, un certain élément de volume dv de l'espace a; la seconde partie occupant, à l'instant t, un certain élément de volume dv' de l'espace b.

Dans le cas dont nous venons de parler, on dit que le corps C résulte soit du *mélange*, soit de la *combinaison* des deux corps A et B.

Beaucoup de physiciens se refusent à admettre la possibilité de la combinaison ou du mélange tel que nous venons de le définir. Ils regardent comme impossible cette pénétration intime par laquelle la matière qui remplit chaque élément de volume du corps continu C provient de l'union entre la matière que renfermait un élément de volume du corps continu A et la matière que renfermait un élément de volume du corps continu B. C'est cette impossibilité qu'ils nomment l'*impénétrabilité de la matière*.

Pour ces physiciens, les mots *mélange*, *combinaison* ne représentent que des apparences. Lorsque nous croyons voir les deux corps

A et B s'unir pour former un nouveau corps C, les parties extrêmement petites dont l'ensemble discontinu constitue chacun de ces deux corps demeurent, en réalité, distinctes; les petites parties du corps A s'interposent simplement aux petites parties du corps B, sans que l'espace occupé par l'une des parties du corps A ait aucun domaine commun avec l'espace occupé par l'une des parties du corps B.

Des raisons analogues à celles qui nous ont fait regarder comme continue la matière qui forme un corps nous conduisent à repousser cette manière de concevoir le mélange ou la combinaison et à adopter la définition que nous avons donnée tout à l'heure.

Considérons un corps C, formé par le mélange de deux corps A et B. La matière qui, à l'instant t, remplit l'élément de volume $d\varpi$ du corps C est composée d'une partie p de la matière qui formait le corps A et d'une partie q de la matière qui formait le corps B. A un autre instant t', ces deux parties p et q ne sont pas forcément unies entre elles au sein d'un même élément de volume. La matière qui constitue la partie p peut remplir un élément de volume $d\varpi'$, où elle est soit libre, soit unie à une partie q', différente de q, de la matière qui formait le corps B; en même temps, la matière qui constitue la partie q peut remplir un autre élément de volume $d\varpi''$, où elle est soit libre, soit unie à une partie p'', différente de p, de la matière qui formait le corps A.

Ainsi, lorsqu'un corps C est un mélange de deux corps, la matière qui remplit chaque élément de volume de ce corps est formée par l'union de deux parties différentes, et *ces deux parties peuvent être animées de mouvements différents;* en sorte qu'en chaque point du mélange il peut y avoir lieu de considérer deux vitesses différentes, chacune de ces vitesses étant relative à l'une des parties du mélange.

Tout ce que nous venons de dire d'un mélange de deux corps s'entend aussi bien d'un mélange d'un nombre quelconque de corps.

3. *Du corps isolé dans l'espace.* — L'expérience nous montre que, d'un corps donné, nous pouvons éloigner tous les corps qui l'environnent à un instant donné. L'existence de ces derniers nous apparaît donc comme n'ayant aucune liaison nécessaire avec l'existence du premier. Nous arrivons ainsi à concevoir la possibilité de l'existence de ce corps isolé dans l'espace illimité en tous sens et absolument vide.

Cette conception du corps isolé dans un espace illimité et absolument vide est une pure abstraction. Jamais l'expérience ne nous offre un corps qui ne soit, de toutes parts, contigu à d'autres corps, et la Physique nous conduit à admettre que, lors même que nous parviendrions à enlever tous les corps solides, liquides ou gazeux que nous pouvons saisir directement ou indirectement, de manière à faire le *vide physique* dans l'espace qui environne un certain corps, cet espace serait encore rempli par une certaine matière que l'on nomme l'*éther*. C'est donc, je le répète, en vertu d'une pure abstraction que nous pouvons concevoir un corps comme existant seul dans l'espace. Mais je ne crois pas qu'il soit possible de construire la Physique sans faire usage de cette abstraction.

4. *Des variables qui définissent l'état et le mouvement d'un système.* — Considérons un ensemble de corps isolé dans l'espace. Cet ensemble de corps peut, d'un instant à l'autre, changer de position, de forme, d'état, etc. Considérons-le tel qu'il est à l'instant t, abstraction faite de ce qu'il était à tout instant antérieur à t, de ce qu'il sera à tout instant postérieur à t. A cet instant t, il possède certaines propriétés. Pour représenter ces propriétés, la Physique théorique définit certaines grandeurs algébriques et géométriques, puis elle établit entre ces grandeurs des relations qui sont le symbole des lois physiques auxquelles le système est assujetti.

Ces grandeurs peuvent être définies de façons très diverses. La Géométrie, par exemple, nous apprend de quelle manière on peut, par la définition de certaines grandeurs, en nombre limité ou illimité, déterminer la forme et la position de chacune des parties matérielles qui composent le système. D'autres grandeurs, qui en représentent les propriétés physiques et chimiques, sont définies au cours des diverses théories dont la Physique est composée. Dans ce Chapitre même, nous montrerons comment la Physique définit une de ces grandeurs, particulièrement importante, la *température;* au Chapitre suivant, nous en rencontrerons une autre, la *masse*.

Dans l'étude d'un système, on peut avoir intérêt à considérer en même temps plusieurs grandeurs que leur définition relie les unes aux autres : ainsi, on peut avoir à parler de la masse [1] d'un corps, de son volume et de sa densité, alors que par *définition*, la densité d'un corps est le quotient de sa masse par son volume. Ces grandeurs, reliées les unes aux autres par leur définition même, ne sont pas indépendantes.

Des grandeurs qui représentent les propriétés d'un système à un instant donné sont *indépendantes* si la définition de chacune d'elles n'implique aucune relation entre la valeur de celle-ci à l'instant t et la valeur de chacune des autres au même instant t. Ainsi le volume et la masse d'un corps seront deux grandeurs indépendantes. De même, les composantes du flux électrique en chaque point d'un conducteur et la densité électrique, en chaque point du même conducteur, sont des grandeurs indépendantes; sans contredire ni à la définition de la densité électrique, ni à la définition du flux électrique, on peut, à l'instant t, attribuer des valeurs arbitraires à la première et aux trois composantes du second.

Nous avons dit que plusieurs grandeurs étaient indépendantes si la définition de chacune d'elles n'impliquait aucune relation entre la valeur de celle-ci *à l'instant* t et la valeur de chacune des autres *au même instant* t. Mais, tandis que les valeurs des variables indépendantes peuvent toutes être choisies arbitrairement à un instant isolé t, dans certains cas, il ne serait pas permis de choisir arbitrairement leurs valeurs à tous les instants d'un certain intervalle de temps. Ainsi, pour l'instant t, *considéré isolément*, on peut choisir arbitrairement la densité électrique et les composantes du flux électrique en chaque point d'un conducteur. Mais on ne pourrait, sans absurdité, en faire autant à *tous les instants* de l'intervalle de temps $(t_1 - t_0)$. En effet, la définition même du flux électrique montre que si l'on connaît, en tout point d'un conducteur : 1° les composantes du flux électrique à tout instant de l'intervalle de temps $(t_1 - t_0)$; 2° la densité électrique à un instant particulier de l'intervalle de temps $(t_1 - t_0)$, la valeur de

(1) Il est bien entendu que, *pour donner des exemples*, nous sommes obligé d'anticiper, puisque aucune grandeur représentant une propriété physique n'a été définie dans ce qui précède.

la densité électrique est déterminée à tout instant de l'intervalle $(t_1 - t_0)$, en sorte que cette valeur ne peut plus être choisie arbitrairement.

Dans tout ce que nous venons de dire, il faut bien observer que, lorsque nous parlons de *dépendance* entre diverses grandeurs, nous n'entendons jamais parler que d'une dépendance résultant de la définition de ces grandeurs et non pas d'une dépendance résultant d'une loi physique; en sorte que des grandeurs *logiquement* indépendantes peuvent ne pas être *physiquement* indépendantes; leur donner des valeurs arbitraires est une opération qui, sans être absurde, peut être contraire aux lois naturelles.

Parmi les grandeurs, indépendantes ou non, qui servent à représenter un système à un instant isolé t, il en est que leur définition astreint à avoir la même valeur pour un système donné, quel que soit l'instant que l'on considère isolément. Telle est, par exemple, la masse du système; telle est encore sa charge électrique totale. Il en est d'autres qui peuvent, pour un même système considéré, à des instants différents, avoir des valeurs différentes. On dit que les premières définissent la *nature* du système et que les secondes en définissent l'*état*.

Considérons les grandeurs indépendantes qui suffisent à représenter *complètement* les propriétés d'un système à l'instant isolé t. Les unes, A, B, ..., L, définissent la nature du système; les autres, α, β, ..., λ, définissent son état.

Si l'on conserve aux quantités A, B, ..., L leurs valeurs et si l'on donne aux variables α, β, ..., λ d'autres valeurs α', β', ..., λ', on aura la représentation d'un autre état du même système.

Imaginons ainsi une suite continue d'états différents du système, c'est-à-dire une suite continue de groupes de valeurs des quantités α, β, ..., λ. Fixons successivement notre attention sur ces divers états, dans l'ordre qui permet de passer d'une manière continue de l'un à l'autre. Pour désigner cette *opération tout intellectuelle*, nous dirons que nous imposons au système une *modification virtuelle*.

Toute modification réalisable d'un système correspond à des variations des quantités $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ compatibles avec les définitions de ces quantités; la suite des états par laquelle elle fait passer le système constitue donc une modification virtuelle du système.

Inversement, une modification virtuelle peut-elle toujours être regardée comme la suite des états qu'un système traverse durant une modification réelle? Si l'on se souvient que les variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, laissées arbitraires par leurs définitions, peuvent être liées les unes aux autres par des lois physiques, on voit qu'une modification virtuelle, bien que compatible avec les définitions des variables propres à représenter les divers états du système, peut être en opposition avec certaines lois physiques, et, par conséquent, être physiquement irréalisable.

Il y a plus : les valeurs qu'on peut attribuer aux variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, à un instant isolé t, sont arbitraires; mais il n'en est plus toujours de même des valeurs qu'on peut attribuer à ces variables aux divers instants d'un certain intervalle de temps; si donc on regarde la suite de groupes de valeurs de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, qui représentent les divers états du système durant une modification virtuelle, comme une suite d'états *qui se succèdent* durant un certain intervalle de temps, on pourra fort bien se heurter à une contradiction avec la définition des variables α, $\beta, \ldots, \lambda$. Si, par exemple, dans la modification virtuelle que l'on considère, on suppose qu'un conducteur est parcouru par des courants non uniformes, et si, d'autre part, on regarde la densité électrique en chaque point comme invariable, on obtient une suite continue d'états dont la succession dans le temps serait contradictoire avec la définition du flux électrique. Ainsi les définitions mêmes des variables α, $\beta, \ldots, \lambda$ peuvent suffire à rendre certaines modifications virtuelles irréalisables.

Nous avons dit que les constantes A, B, ..., L et les variables α, $\beta, \ldots, \lambda$ représentaient les propriétés physiques du système considéré à l'instant t, abstraction faite des propriétés du système aux instants qui précèdent ou qui suivent t. Or la considération d'un système à un instant isolé, abstraction faite des instants qui ont précédé celui-là ou qui le suivent, ne saurait permettre de reconnaître si le corps est en repos ou en mouvement. Le mot *mouvement* ne prend de sens pour un système qu'autant que l'on envisage ce système pendant un certain laps de temps, si court soit-il. Par conséquent, les valeurs des quantités $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, nécessaires et suffisantes pour représenter les propriétés du système à l'instant isolé t, ne suffiront pas, en général, à nous indiquer si le système est en mouvement et quel est ce mouvement.

Nous dirons que *le mouvement* du système à l'instant *t est défini* si l'on connaît non seulement l'état du système à cet instant, mais encore la grandeur et la direction de la vitesse dont est animée la matière remplissant chacun des éléments de volume du système; dans le cas où un élément de volume serait rempli par un mélange de plusieurs substances, il faudrait connaître la vitesse animant chacune des parties de matière qui composent ce mélange.

Considérons une partie infiniment petite de la matière qui forme un système. Les coordonnées x, y, z, qui, à l'instant t, marquent la position d'un de ses points par rapport au trièdre absolument fixe, sont connues lorsqu'on connaît les valeurs des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, à cet instant; en effet, ces variables connues, on doit connaître la forme, la position et les propriétés que possèdent, à l'instant t, toutes les parties du système. Nous devons donc avoir, pour déterminer x, y, z, des équations de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \varphi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda), \\ y = \psi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda), \\ z = \chi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda); \end{cases}$$

φ, ψ et χ sont trois fonctions dont la forme dépend de la nature du système, et aussi de la particule matérielle considérée. Ces relations ne dépendent pas explicitement du temps t, car si, à deux instants différents, t et t', les variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ reprennent les mêmes valeurs, comme ces variables suffisent à déterminer l'état du système, le système redeviendra identique à lui-même, et les coordonnées x, y, z reprendront les mêmes valeurs.

Des équations (1), on déduit les égalités

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\dfrac{d\alpha}{dt} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial\beta}\dfrac{d\beta}{dt} + \ldots + \dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\dfrac{d\lambda}{dt}, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial\psi}{\partial\alpha}\dfrac{d\alpha}{dt} + \dfrac{\partial\psi}{\partial\beta}\dfrac{d\beta}{dt} + \ldots + \dfrac{\partial\psi}{\partial\lambda}\dfrac{d\lambda}{dt}, \\[2ex] \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial\chi}{\partial\alpha}\dfrac{d\alpha}{dt} + \dfrac{\partial\chi}{\partial\beta}\dfrac{d\beta}{dt} + \ldots + \dfrac{\partial\chi}{\partial\lambda}\dfrac{d\lambda}{dt}. \end{cases}$$

Ces égalités (2) nous montrent que les composantes de la vitesse d'une partie élémentaire quelconque du système sont des fonctions linéaires et homogènes de $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \ldots, \frac{d\lambda}{dt}$. Ces fonctions dépendent, en outre, d'une manière quelconque des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$.

Ainsi, pour définir le mouvement du système à l'instant t, il est suffisant d'adjoindre aux valeurs de α, β, ..., λ les valeurs de $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}, \ldots, \frac{d\lambda}{dt}$. Cela est-il en même temps nécessaire?

Dans un grand nombre de cas, toutes les quantités $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ ne figurent pas dans les équations (1), ni, par conséquent, toutes les quantités $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \ldots, \frac{d\lambda}{dt}$, dans les équations (2). Nous aurons parfois à distinguer celles des quantités $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ qui figurent dans les équations (1) de celles qui n'y figurent pas; nous conserverons pour les premières lettres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, et, pour les secondes, nous adopterons les lettres $a, b, \ldots, l$.

Nous dirons qu'un système isolé est *en repos* lorsque la matière qui le compose est immobile, son état pouvant d'ailleurs subir avec le temps des variations qui laissent dans la même position chacune des parties qui le composent. Pour un pareil système, les quantités α, β, ..., λ gardent des valeurs indépendantes du temps, les quantités a, $b, \ldots, l$, pouvant d'ailleurs subir avec le temps des variations quelconques.

Nous dirons qu'un système isolé est *en équilibre* si son état ne varie pas avec le temps. Pour un système en équilibre, les quantités a, $b, \ldots, l$, aussi bien que les quantités $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, ont des valeurs indépendantes du temps.

Imaginons qu'un système parte d'un certain état caractérisé par certaines valeurs déterminées des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, et par une certaine vitesse bien déterminée de chacune des parties matérielles infiniment petites en lesquelles on peut le supposer divisé; que ce système subisse une série plus ou moins considérable de modifications; qu'enfin, au bout d'un certain temps, il soit ramené à un état identique à l'état initial, c'est-à-dire à un état où les variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ ont les mêmes valeurs que dans l'état initial, où la vitesse de chaque partie élémentaire est la même que dans l'état initial. La série de transformations subie par le système prendra le nom de *cycle fermé*. Nous aurons très souvent occasion, au cours de ce travail, de considérer de semblables transformations.

Il est entendu que, lorsqu'un système subit une transformation quelconque, la vitesse de chacune des parties élémentaires en lesquelles on peut le supposer divisé varie avec le temps d'une manière continue.

Dans la plupart des considérations précédentes, nous avons supposé l'état du système défini par les valeurs d'un nombre limité de paramètres variables. On s'aperçoit aisément que cette hypothèse a pour but unique de simplifier le langage, mais que tout ce que nous avons dit s'étend sans peine aux systèmes dont la définition exigerait la connaissance d'une infinité de paramètres variables.

5. *Des systèmes indépendants.* — Considérons un système de corps S, isolé dans l'espace, et soient $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ les variables qui, à chaque instant isolé t, déterminent complètement son état.

Supposons que les corps qui forment ce système puissent se partager en deux groupes S_1, S_2.

Supposons, en outre, que les variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ puissent se partager en deux groupes $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ et $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$, jouissant des propriétés suivantes :

1° Rien, dans la définition des variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$, ne suppose l'existence ou les propriétés du groupe de corps S_2 ou des variables $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$;

2° Rien, dans la définition des variables $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$, ne suppose l'existence ou les propriétés du groupe de corps S_1 ou des variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$.

Si ces conditions sont réalisées, on pourra supposer que le groupe de corps S_1 est isolé dans l'espace, et que, à chaque instant d'un certain laps de temps, les variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ ont, pour ce groupe isolé, des valeurs identiques à celles qu'elles auraient, à l'instant correspondant d'un laps de temps égal, au sein du système S. Cette hypothèse ne contredira en rien la définition des variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$.

De même, on pourra supposer que le groupe de corps S_2 est isolé dans l'espace, et que, à chaque instant d'un certain laps de temps, les variables $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$ ont, pour ce groupe isolé, des valeurs identiques à celles qu'elles auraient, à l'instant correspondant d'un laps de temps égal, au sein du système S. Cette hypothèse ne contredira en rien la définition des variables $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$.

D'ailleurs, les deux hypothèses que nous venons d'indiquer, tout en ne contredisant pas la définition des groupes de variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ et $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$, peuvent être en opposition avec certaines lois expérimentales.

Lorsque deux groupes de corps, S_1 et S_2, satisferont aux conditions que nous avons énumérées, nous dirons que ces deux groupes constituent *deux systèmes matériels susceptibles d'exister indépendamment l'un de l'autre*, ou, sous une forme plus concise, *deux systèmes indépendants*.

Remarquons que, dans ce cas, les variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ suffisent évidemment à fixer l'état du système S_1, sans rien indiquer relativement à l'état du système S_2, et que, inversement, les variables α_2, $\beta_2, \ldots, \lambda_2$ suffisent à fixer l'état du système S_2, sans rien indiquer relativement à l'état du système S_1. Ainsi, *lorsque deux systèmes sont indépendants l'un de l'autre, il est possible d'isoler chacun d'eux de l'autre sans changer son état;* dans cet énoncé, répétons-le, le mot *possible* désigne une opération qui n'est pas en contradiction avec les définitions, mais pas nécessairement une opération conforme aux lois physiques.

Éclaircissons tout ce que nous venons de dire par quelques exemples :

1° Le système S est un corps dont nous regardons l'état comme défini lorsque nous connaissons la position, la densité et la température de chacune des parties matérielles infiniment petites qui le composent.

Sans contredire aux définitions de la température et de la densité, nous pouvons, après avoir divisé le corps en deux parties S_1, S_2, supprimer par la pensée la partie S_2 et garder la partie S_1 isolée dans l'espace, en conservant à chacune des parties matérielles infiniment petites qui la composent, la position, la densité et la température qu'elle aurait eues, au même instant, dans le système S; nous pouvons aussi supprimer par la pensée la partie S_1 et garder la partie S_2 isolée dans l'espace, en conservant à chacune des parties matérielles infiniment petites qui la composent, la position, la densité et la température qu'elle aurait eues, au même instant dans le système S.

Dans ce cas, qui a une grande importance, les deux systèmes S_1, S_2 sont indépendants.

2° Le système S est formé d'un corps conducteur qui porte certaines charges électriques. La définition de ces charges exige que la somme des charges réparties sur le conducteur S demeure constante pendant le laps de temps que l'on considère; mais, si l'on regarde ce conducteur S comme formé de deux parties contiguës S_1, S_2, la somme des charges réparties sur la portion S_1 pourra fort bien varier d'un moment à l'autre, et aussi la somme des charges réparties sur la portion S_2.

Supposons maintenant que, pendant un certain laps de temps, nous considérions la partie S_2 comme supprimée et la partie S_1 comme isolée dans l'espace. Pourrons-nous, à chaque instant de ce laps de temps, imaginer sur cette partie S_1 une distribution électrique identique à celle qu'elle porterait au même instant, si elle était incorporée dans le système S? Non, car, nous venons de le remarquer, cette distribution donnera, en général, une valeur variable d'un instant à l'autre pour la quantité totale d'électricité que porte S_1; or le conducteur S_1, isolé dans l'espace, doit, d'après la définition des charges électriques, porter une charge électrique totale invariable.

Ainsi, dans le cas que nous venons d'analyser, les deux corps S_1, S_2 ne forment pas deux systèmes indépendants.

3° Le système S est formé d'un corps conducteur qui porte certaines charges électriques et est parcouru par certains courants. Pour fixer les idées, nous supposerons que ces courants sont uniformes. La distribution électrique est alors invariable, tant à la surface du conducteur S qu'à l'intérieur, pendant le laps de temps que l'on considère.

Par une surface σ, coupons le conducteur S en deux parties, S_1, S_2. Pouvons-nous supprimer par la pensée la partie S_2, regarder la partie S_1 comme isolée dans l'espace, et y conserver, pendant tout le laps de temps que nous considérons, une distribution de courants et de charges identiques à celle qui régnait dans cette partie S_1 lorsqu'elle était incorporée dans le conducteur S? Évidemment non, car, dans le conducteur S, les divers points de la surface σ portaient une électrisation invariable, tandis que, si la partie S_1 est isolée dans l'espace, les courants qui la traversent feront varier d'un instant à l'autre l'électrisation de la surface σ.

Dans ce cas encore, les deux corps S_1, S_2 ne sont pas des systèmes indépendants.

Il faut bien observer qu'en disant que deux corps S_1, S_2 ne forment pas deux systèmes indépendants, nous ne voulons pas dire que chacun de ces deux corps ne saurait être conçu comme isolé dans l'espace; nous admettons, au contraire, qu'un corps peut toujours, par la pensée, être isolé dans l'espace (*voir* n° 3). Nous voulons dire qu'on ne peut pas admettre que chacun d'eux, isolé dans l'espace, conserve, à chaque instant d'un laps de temps, l'état qu'il présenterait au même instant s'il était incorporé au système total.

Ainsi, dans les deux derniers exemples, le corps S_1 peut être conçu comme isolé dans l'espace; mais ce qui est contradictoire, c'est de lui attribuer alors, pendant un certain temps, la distribution de charges électriques et de courants qu'il porterait pendant le même temps s'il était uni au corps S_2, pour former le système S.

La Physique ne saurait, sans excéder le domaine où ses méthodes s'appliquent légitimement, décider si l'univers est ou non limité. Mais, dans toute question de Physique, on peut raisonner comme si l'univers était formé d'un certain nombre de corps enclos dans une surface fermée d'étendue. On admet, en effet, que, dans l'étude d'un groupe de corps, on peut, sans erreur sensible, considérer comme n'existant pas tous les corps dont la distance à ceux-là surpasse une certaine limite.

Considérons donc cette partie très grande, mais limitée, de l'univers dont il est nécessaire de tenir compte lorsqu'on veut étudier un groupe de corps déterminé S_1; soit S cette partie de l'univers; soit S_2 ce qui reste de S lorsqu'on en a retranché S_1. Si les deux groupes de corps S_1, S_2 forment deux systèmes indépendants, nous dirons que le groupe S_1 forme un *système matériel*. C'est toujours dans ce sens bien défini que nous emploierons le mot *système matériel*.

A un semblable système, nous pourrons étendre sans les modifier les définitions des mots *repos* et *équilibre*, que nous avons données, à la fin du n° **4**, pour un système isolé.

6. *De la température.* — Parmi les variables servant à définir l'état d'un système, il en est une dont le rôle, au cours du présent travail, aura une importance toute particulière; cette variable, c'est la *température.* Nous allons, dès maintenant, montrer comment cette variable peut être définie. Cette étude aura d'ailleurs l'avantage de nous montrer de quelle manière le physicien fait correspondre certaines grandeurs aux propriétés physiques d'un système.

Nos organes nous donnent la sensation de corps *chaud* et de corps *froid,* de corps plus chauds ou plus froids les uns que les autres. Cette sensation de chaleur ou de froid, de chaleur plus ou moins grande ou de froid plus ou moins intense, nous la regardons comme le signe d'une certaine propriété que possèdent les corps, et qu'ils possèdent à un degré plus ou moins élevé; nous admettons qu'un corps est chaud, qu'il est plus ou moins chaud qu'un autre, qu'il est froid s'il est moins chaud que notre corps.

Cette propriété des corps que nous caractérisons par les mots : *être chaud, être froid, être plus ou moins chaud,* notre faculté d'abstraction ne tarde pas à lui attribuer des caractères que la sensation ne nous marque pas.

Nous ne pouvons comparer entre eux le degré de chaleur des corps qu'autant que ces corps ne sont ni trop chauds, ni trop froids; au delà d'une certaine limite, dans un sens comme dans l'autre, nos organes seraient lésés ou détruits; nous concevons néanmoins qu'au delà de ces limites les corps continuent à être plus ou moins chauds les uns que les autres.

En comparant nos sensations à celles de nos semblables, nous voyons que, parfois, nous trouvons inégalement chauds deux corps qu'un autre trouve également chauds ou inversement; nous sommes ainsi conduit à admettre que la sensibilité de nos organes est limitée et que, sans être identiques, les degrés de chaleur de deux corps peuvent être assez peu dissemblables pour que nous ne puissions les distinguer.

Un corps chaud ne peut influer sur nos organes que par la partie de sa surface qui est en contact avec ces organes, et cette surface a toujours une certaine étendue; le temps pendant lequel nous touchons cette surface a toujours une certaine durée; néanmoins, nous admettons que le caractère d'être chaud appartient aussi bien aux parties qui sont à l'intérieur du corps qu'aux parties voisines de la surface; qu'il appartient en propre à chaque partie infiniment petite en lesquelles le corps peut être censé décomposé et à chaque moment infiniment petit de la durée; qu'à un même instant, il varie d'un point à l'autre; qu'en un même point, il varie d'un instant à l'autre.

Les observations les plus vulgaires nous montrent que, dans la plupart des cas, lorsqu'un corps chaud est mis en présence d'un corps froid, le corps froid s'échauffe et le corps chaud se refroidit; généralisant cette observation, nous admettons comme exacte la loi suivante :

Pour qu'un système isolé (1) *soit en équilibre, il est nécessaire que toutes les parties matérielles qui composent ce système soient également chaudes.*

Cette loi nous amène à corriger de nouveau les données de nos sensations. L'expérience nous apprend, en effet, que, dans certains systèmes que nous regardons comme étant en équilibre, diverses parties peuvent nous paraître très inégalement chaudes; par exemple, un morceau d'acier et un morceau de bois, dont l'ensemble est en équi-

---

(1) Il faut bien remarquer que cette loi n'est exacte qu'autant que le système auquel on l'applique est *isolé*. Une barre métallique dont une extrémité plonge dans la vapeur d'eau bouillante, et l'autre dans la glace fondante est en équilibre lorsque le régime permanent des flux de chaleur est établi. Cependant les divers points de cette barre sont inégalement échauffés. Mais cette barre ne forme pas un système isolé. Si l'on voulait l'incorporer dans un système isolé, celui-ci contiendrait, en même temps qu'elle, l'eau bouillante et la glace fondante, qui ne sont pas en équilibre. Une observation analogue s'appliquerait à l'état d'équilibre auquel parvient une chaîne thermo-électrique lorsque le régime permanent est établi, tant pour les flux de chaleur que pour les flux électriques.

libre, nous font éprouver des sensations de chaleur très inégales; nous continuons cependant à les regarder comme étant également chauds en réalité; et nous admettons que nos sensations ne nous renseignent pas toujours exactement sur le degré de chaleur des corps.

Ces mots *être chaud* correspondent donc à une propriété de chacune des parties infiniment petites en lesquelles les corps peuvent être censés divisés. Qu'est en soi cette propriété? Est-elle réductible, par sa nature même, en éléments quantitatifs? Ce sont des questions que la Physique n'a pas à résoudre. *Telle que nous la concevons,* cette propriété n'est pas quantitative. Elle nous apparaît comme susceptible d'être reproduite identique à elle-même, d'être augmentée ou diminuée, *mais non comme susceptible d'addition.*

Mais à cette propriété non quantitative nous pouvons faire correspondre une grandeur algébrique qui, *sans avoir avec elle aucune relation de nature,* en sera la représentation.

Nous pouvons, en effet, concevoir l'existence d'une grandeur qui satisfasse aux conditions suivantes :

1° En chaque point d'un corps quelconque, cette grandeur a une valeur déterminée;

2° En deux points également chauds, elle a la même valeur;

3° En deux points inégalement chauds, elle a des valeurs différentes, la plus grande valeur correspondant au point le plus chaud;

4° Si deux points tendent à devenir également chauds, les valeurs de la grandeur considérée qui leur correspondent tendent vers une même limite.

On voit que, si l'on connaissait les valeurs prises par une semblable grandeur aux divers points d'un ensemble de corps, on saurait toujours exactement si le degré de chaleur varie d'une partie à l'autre de cet ensemble, et dans quel sens il varie.

Cette grandeur, dont les diverses valeurs servent, non pas à *mesurer* (ce qui, d'après ce qui précède, n'aurait aucun sens), mais à *repérer* les divers degrés de chaleur, sera nommée *température.*

La définition de la température laisse arbitraire, à un haut degré, le choix de cette grandeur. Imaginons, en effet, que l'on ait, d'une première manière, déterminé la température en tout point; soit $\Im$ cette température; la grandeur $\Theta = f(\Im)$ pourra évidemment être, à son tour, prise comme température, si la fonction $f(\vartheta)$ possède les trois caractères suivants :

1° Pour chacune des valeurs que la variable ϑ est susceptible de prendre, la fonction $f(\vartheta)$ prend une valeur et une seule;

2° La fonction $f(\vartheta)$ varie d'une manière continue lorsque ϑ varie d'une manière continue;

3° La fonction $f(\vartheta)$ varie toujours dans le même sens que ϑ.

L'opération par laquelle on connaîtrait, à un instant donné, comment les diverses parties des corps devraient être classées si l'on voulait que toutes les parties d'une même classe fussent également chaudes; que les parties qui sont rangées dans une classe quelconque fussent plus chaudes que les parties rangées dans la classe précédente et moins chaudes que les parties rangées dans la classe suivante; cette opération, dis-je, nous apparaît comme logiquement possible, bien que nos sens ne nous permettent pas de la réaliser, si ce n'est entre des limites restreintes et d'une manière grossièrement approchée.

Nous concevons donc qu'une température, constante pour toutes les parties qui se trouvent dans la même classe et croissante d'une classe à l'autre, puisse être choisie, bien que nos sensations ne nous fournissent pas le moyen de réaliser un semblable choix avec quelque précision. Cela suffit pour que nous puissions faire figurer cette température dans nos raisonnements sans risquer d'employer un mot vide de sens. De fait, c'est exclusivement de cette température, conçue d'une manière abstraite, qu'il sera question dans nos théories.

Mais si nous voulons appliquer à des systèmes concrets les résultats auxquels nous auront conduits les raisonnements abstraits où figure la température, il ne nous suffira plus de savoir qu'il est possible de constituer une grandeur, appelée *température*, prenant une valeur déterminée en chaque point de ces systèmes; il faudra encore avoir un moyen, exact ou approché, de construire réellement une semblable grandeur, d'en obtenir la valeur numérique, c'est-à-dire de classer les parties des corps selon leur degré croissant de chaleur; nous avons vu que nos sens, employés directement, étaient insuffisants pour cet objet.

La méthode employée pour obtenir une détermination expérimentale de la température, ou plutôt d'*une* température, ne s'applique qu'à un cas particulier, très étendu il est vrai ; par des hypothèses spéciales, que nous n'examinerons pas ici, on parvient à l'étendre à certains autres cas.

Cette détermination expérimentale repose sur la loi suivante, dont nous avons dit l'origine :

Pour l'équilibre d'un système isolé, il est nécessaire que toutes ses parties soient également chaudes.

Si, comme nous en avons le droit, nous faisons figurer dans nos raisonnements une température ϑ dont la détermination est conçue d'une manière abstraite, mais non réalisée d'une manière effective, nous pourrons énoncer la loi précédente sous cette forme :

Si un système isolé est en équilibre, la température ϑ a la même valeur en tous ses points.

Cette loi admise, supposons que nous ayons un système S, isolé et en équilibre ; il a la même température en tous ses points.

Ce système S est lui-même formé de deux systèmes *indépendants* T et U.

Le système U, sauf la propriété d'être indépendant du système T, est quelconque.

On suppose au contraire que le système T possède, au moins approximativement les caractères (¹) suivants :

1° Pour une valeur donnée de la température ϑ, la même en tous ses points, le système T ne peut être en équilibre que d'une seule manière, quel que soit le système indépendant U auquel il est adjoint ; les diverses propriétés que présente ce système T en équilibre dépendent donc uniquement de la température ; si, parmi elles, il en est une qui est mesurable (par exemple, une propriété géométrique), le nombre qui la mesure est fonction de la seule température ϑ.

(¹) Ces caractères, des expériences plus ou moins grossières, celles, par exemple, que nous permet l'usage direct de nos sens, nous les ont fait apercevoir ; puis, par voie d'hypothèse, nous avons admis que le système T les possédait soit rigoureusement, soit avec une approximation supérieure à celle de nos premières observations.

2° Parmi ces propriétés mesurables du système T, il en est au moins une qui va toujours en croissant lorsque le système T s'échauffe : de quelque manière que l'on suppose choisie la température $\mathfrak{S}$, le nombre Θ qui mesure cette propriété variera toujours dans le même sens que $\mathfrak{S}$.

D'après une remarque faite précédemment *le nombre Θ pourra être pris comme propre à marquer la température* du système T et, partant, du système U.

Donc, toutes les fois que l'on aura pu adjoindre au système T, choisi une fois pour toutes, un certain système U, indépendant du système T et formant avec lui un système isolé en équilibre, on saura, d'une manière effective, faire correspondre une valeur de la température au degré de chaleur que possède le système U dans ces conditions.

Lorsqu'on définit le système T et la propriété de ce système dont la mesure Θ donnera la valeur numérique de la température, on dit que l'on fait choix d'un *thermomètre*. Lorsqu'on indique la valeur numérique de la température d'un système U, on doit évidemment, pour que cette indication ait un sens, mentionner le thermomètre que l'on a choisi.

Nous laissons au lecteur le soin d'éclaircir les généralités qui précèdent en les appliquant aux divers thermomètres ordinairement employés.

CHAPITRE II.

LE PRINCIPE DE LA CONSERVATION DE L'ÉNERGIE.

1. *L'œuvre et l'énergie d'un système.* — Nous pouvons, par nos efforts, produire dans un système une certaine transformation ou aider à cette transformation ; nous pouvons déplacer un corps, le lancer avec une certaine vitesse, le briser, le déformer. Nous pouvons, au contraire, employer nos efforts à mettre obstacle à la transformation que subit un système, à gêner cette transformation ; nous pouvons arrêter un corps en mouvement, le ralentir, l'empêcher de se déformer. Nous disons alors que nous avons accompli un certain ouvrage, fait une certaine *œuvre.*

L'expérience de chaque jour nous apprend qu'à notre action personnelle nous pouvons substituer un corps ou un assemblage de corps capable de produire ou d'aider la modification que nous produisons ou que nous aidons, de gêner la modification que nous gênons. L'objet pratique de la Physique est précisément, dans un grand nombre de cas, de connaître quels sont les divers corps qui peuvent être substitués à notre activité personnelle pour favoriser ou pour entraver une certaine modification, quelles sont les machines qui peuvent remplacer les ouvriers dans l'accomplissement d'un certain ouvrage. L'œuvre que nous aurions accomplie si nous avions agi nous-même sur le système qui se transforme, nous la regardons comme accomplie par le corps ou l'ensemble de corps que nous avons substitué à nous-même ou à nos semblables.

Cette notion d'œuvre accomplie par les corps étrangers à un système pendant que ce système subit une certaine modification, nous la transportons même au cas où la modification subie par le système est d'une nature telle que notre action personnelle ne pourrait ni l'aider, ni l'entraver. L'œuvre accomplie par ces corps étrangers est censée représenter l'œuvre qu'accomplirait un opérateur constitué autrement que nous et capable d'apporter à la transformation du système l'aide ou l'entrave qu'apportent les corps étrangers.

Ainsi donc, quand un système se transforme en présence de corps étrangers, nous considérons ces corps étrangers comme contribuant à cette transformation soit en la causant, soit en l'aidant, soit en l'entravant; c'est cette contribution, dont la nature demeure pour nous obscure, que nous nommons *l'œuvre accomplie pendant une transformation d'un système par les corps étrangers à ce système.*

Sans chercher à pénétrer la nature de cette contribution, ce qui n'est point l'objet de la Physique, mais de la Métaphysique, nous allons nous efforcer de créer une expression mathématique propre à servir de symbole à cette contribution. Pour cela, nous déterminerons la forme d'une expression assujettie à certaines conventions; ces conventions, nous ne les établirons pas au hasard; nous les choisirons de telle sorte qu'elles soient l'image des caractères les plus simples et les plus saillants que présente la notion d'œuvre, ou, tout au moins, de telle sorte qu'elles s'accordent sans peine avec ces caractères.

Supposons qu'un système, soumis à l'action de certains corps étrangers, subisse une certaine transformation; supposons ensuite que le même système subisse la même transformation, les corps étrangers au système étant autres. L'œuvre accomplie dans le premier cas et dans le second cas par les corps étrangers au système est la même, bien que ces corps soient différents; ce caractère, que nous attribuons forcément à la notion d'œuvre, nous conduit à poser la convention suivante :

Première convention. — *La grandeur qui représente l'œuvre accomplie, durant une transformation d'un système, par les corps étrangers à ce système est déterminée lorsqu'on connaît la nature du système et la transformation qu'il subit; elle est indépendante des corps étrangers au système.*

Voici maintenant une deuxième convention qu'il est bien naturel d'admettre.

Deuxième convention. — *Supposons qu'un système subisse successivement diverses transformations* 1, 2, ..., n, *pendant lesquelles les corps étrangers au système accomplissent des œuvres représentées respectivement par les grandeurs algébriques* G_1, $G_2, \ldots, G_n$. *L'ensemble des transformations* 1, 2, ..., n *peut être considéré comme une transformation unique; l'œuvre accomplie par les corps étrangers au système durant cette transformation résultante sera représentée par la grandeur* $(G_1 + G_2 + \ldots + G_n)$.

Nous pouvons désormais, lorsque aucune confusion ne sera à craindre entre le symbole mathématique et la notion qu'il représente, donner le nom d'*œuvre accomplie* durant la transformation d'un système par les corps étrangers à ce système à la grandeur algébrique qui représente cette œuvre.

Imaginons qu'un système parte d'un certain état initial avec un certain mouvement initial; qu'une série de modifications lui fasse prendre, au bout d'un certain temps, un état final identique à son état initial, un mouvement final identique à son mouvement initial. Nous regarderons l'œuvre que les corps extérieurs avaient accomplie durant une partie de cette transformation comme ayant été détruite par l'œuvre accomplie durant le reste de la transformation, en sorte que l'œuvre totale sera nulle; nous serons ainsi conduits à poser la convention suivante :

Troisième convention. — *Lorsqu'un système parcourt un cycle fermé, l'œuvre accomplie, durant le parcours de ce cycle, par les corps étrangers au système est égale à O.*

Cette convention nous indique, en premier lieu, que la grandeur qui représente l'œuvre accomplie n'aura pas, pour toute modification d'un système, le même signe. Les diverses modifications dont la succession constitue un cycle fermé devront correspondre à des œuvres les unes positives et les autres négatives, de telle sorte que la somme des œuvres positives soit exactement compensée par la somme des œuvres négatives.

Mais, en outre, cette convention fournit des renseignements beaucoup plus précis sur la forme de la grandeur G qui représente l'œuvre accomplie, durant une modification d'un système, par les corps étrangers au système.

Considérons deux états différents d'un même système. Dans l'un de ces états, que nous désignerons par le symbole 1, les variables qui définissent les propriétés du système ont pour valeurs $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$; les vitesses des diverses particules qui composent le système ont pour composantes u_1, v_1, w_1; u'_1, v'_1, w'_1; .... Dans l'autre de ces états, que nous désignerons par le symbole 2, les variables qui définissent les propriétés du système ont pour valeurs $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$; les vitesses des diverses particules qui composent le système ont pour composantes u_2, v_2, w_2; u'_2, v'_2, w'_2, ...

Imaginons un certain nombre de modifications distinctes M_1^2, $M_1'^2$, $M_1''^2$, ..., qui, toutes, font passer le système de l'état 1 à l'état 2, et soit M_2^1 une modification qui fait passer le système de l'état 2 à l'état 1.

Soient

$$G_1^2, \quad G_1'^2, \quad G_1''^2, \quad \ldots, \quad G_2^1$$

les œuvres accomplies par les corps étrangers au système durant les modifications

$$M_1^2,\quad M_1'^2,\quad M_1''^2,\quad \ldots,\quad M_2^1.$$

Les deux modifications M_1^2, M_2^1, imposées au système l'une après l'autre, lui font décrire un cycle fermé; il en est de même des deux modifications $M_1'^2$, M_2^1; ou encore deux modifications $M_1''^2$, M_2^1, ...

La convention précédente donne alors

$$\begin{aligned} G_1^2 + G_2^1 &= 0,\\ G_1'^2 + G_2^1 &= 0,\\ G_1''^2 + G_2^1 &= 0,\\ \ldots&\ldots\ldots, \end{aligned}$$

ou bien

$$G_1^2 = G_1'^2 = G_1''^2 = \ldots.$$

Le résultat qu'exprime cette égalité peut s'énoncer ainsi :

L'œuvre accomplie, durant une modification d'un système, par les corps étrangers à ce système dépend de l'état et du mouvement du système au début et à la fin de la modification, mais non des autres particularités qui caractérisent cette modification.

Conformément à cet énoncé, nous poserons désormais

$$G_1^2 = \psi(\alpha_1, \ldots; u_1, v_1, w_1, \ldots \,|\, \alpha_2, \ldots; u_2, v_2, w_2, \ldots).$$

Nous allons mettre la fonction ψ sous une forme plus explicite.

Considérons le système que nous étudions dans un certain état, *déterminé une fois pour toutes*, que nous désignerons par l'indice 0; dans cet état, α_0, β_0, ..., λ_0 sont les valeurs des variables qui définissent les propriétés du système; u_0, v_0, w_0; u_0', v_0', w_0', ... sont les composantes des vitesses dont sont animées les particules matérielles qui le composent.

Si le système passe de l'état 0 à l'état 1, les corps extérieurs accompliront une œuvre

$$G_0^1 = \psi(\alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots \,|\, \alpha_1, \ldots; u_1, v_1, w_1, \ldots).$$

Si le système passe de l'état 1 à l'état 2, les corps extérieurs accomplissent une œuvre

$$G_1^2 = \psi(\alpha_1, \ldots; u_1, v_1, w_1, \ldots | \alpha_2, \ldots; u_2, v_2, w_2, \ldots).$$

Ces deux transformations, effectuées l'une après l'autre, constituent une transformation faisant passer le système de l'état o à l'état 2; durant une semblable transformation, les corps extérieurs effectuent une œuvre

$$G_0^2 = \psi(\alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots | \alpha_2, \ldots; u_2, v_2, w_2, \ldots).$$

Mais, d'autre part, d'après la deuxième convention, l'œuvre accomplie par les corps extérieurs durant cette dernière transformation doit avoir pour valeur $(G_0^1 + G_1^2)$. On a donc

$$G_0^2 = G_0^1 + G_1^2,$$

ou bien

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\psi(\alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots | \alpha_2, \ldots; u_2, v_2, w_2, \ldots) \\ = \;&\psi(\alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots | \alpha_1, \ldots; u_1, v_1, w_1, \ldots) \\ +\;&\psi(\alpha_1, \ldots; u_1, v_1, w_1, \ldots | \alpha_2, \ldots; u_2, v_2, w_2, \ldots). \end{aligned} \right.$$

Cette identité (1) va déterminer la forme de la fonction ψ.

L'état o étant déterminé une fois pour toutes, les quantités

$$\alpha_0, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda_0, \quad u_0, \quad v_0, \quad w_0, \quad u'_0, \quad v'_0, \quad w'_0, \quad \ldots$$

sont non pas des variables, mais des constantes; la quantité

$$\psi(\alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots | \alpha, \ldots; u, v, w, \ldots)$$

est une fonction des seules variables

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad u, \quad v, \quad w, \quad u', \quad v', \quad w', \quad \ldots.$$

Nous pouvons donc poser

$$(2)\qquad \begin{cases} \psi(\alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots \mid \alpha, \ldots; u, v, w, \ldots) \\ \quad = \mathcal{E}(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots) \end{cases}$$

et l'égalité (1) nous donnera

$$(3)\qquad \begin{cases} \psi(\alpha_1, \ldots; u_1, v_1, w_1, \ldots \mid \alpha_2, \ldots; u_2, v_2, w_2, \ldots) \\ \quad = \mathcal{E}(\alpha_2, \ldots; u_2, v_2, w_2, \ldots) - \mathcal{E}(\alpha_1, \ldots; u_1, v_1, w_1, \ldots). \end{cases}$$

L'œuvre accomplie, durant une modification quelconque d'un système, par les corps étrangers à ce système est égale à l'accroissement que subit, par l'effet de cette modification, une certaine grandeur qui est déterminée sans ambiguïté lorsqu'on connaît l'état du système et son mouvement.

Cette grandeur, définie par l'égalité (2), porte le nom d'*énergie du système*.

Pour définir l'énergie du système, nous avons fait choix d'un certain état du système déterminé une fois pour toutes, que nous avons nommé l'état o. Mais ce choix était arbitraire. Nous aurions pu raisonner de même en choisissant une fois pour toutes un état ω, différent de l'état o. Si nous désignons par $\alpha_\omega, \beta_\omega, \ldots, \lambda_\omega$ les valeurs des variables qui déterminent les propriétés du système dans l'état ω; par u_ω, v_ω, w_ω, u'_ω, v'_ω, w'_ω les composantes des vitesses qui, dans cet état, animent les diverses parties du système, nous aurions obtenu une nouvelle détermination de l'énergie du système, définie par l'égalité

$$(2\ bis)\qquad \begin{cases} \psi(\alpha_\omega, \ldots; u_\omega, v_\omega, w_\omega, \ldots \mid \alpha, \ldots; u, v, w, \ldots) \\ \quad = \varepsilon(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots). \end{cases}$$

Évaluons la différence entre les valeurs correspondantes de ces deux déterminations de l'énergie.

Les égalités (2) et (2 *bis*) donnent

$$\begin{aligned} &\varepsilon(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots) - \mathcal{E}(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots) \\ &\quad = \psi(\alpha_\omega, \ldots; u_\omega, v_\omega, w_\omega, \ldots \mid \alpha, \ldots; u, v, w, \ldots) \\ &\qquad - \psi(\alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots \mid \alpha, \ldots; u, v, w, \ldots). \end{aligned}$$

Mais l'égalité (3) montre que l'on a

$$\begin{aligned}\psi(\alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots \mid \alpha, \ldots; u, v, w, \ldots)\\ = -\psi(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots \mid \alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots).\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\varepsilon(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots) - \varepsilon'(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots)\\ = \psi(\alpha_\omega, \ldots; u_\omega, v_\omega, w_\omega, \ldots \mid \alpha, \ldots; u, v, w, \ldots)\\ + \psi(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots \mid \alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots),\end{aligned}$$

ou bien, en vertu de l'égalité (1),

$$\begin{aligned}\varepsilon(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots) - \varepsilon'(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots)\\ = \psi(\alpha_\omega, \ldots; u_\omega, v_\omega, w_\omega, \ldots \mid \alpha_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots).\end{aligned}$$

Le second membre de cette égalité est une constante.

Donc *les valeurs que deux déterminations de l'énergie prennent pour un même état du système diffèrent par une constante;* ce qu'on peut encore énoncer en disant que *l'énergie est déterminée à une constante près.*

2. *La force vive et l'énergie interne.* — Toute transformation subie par un système se décompose en deux éléments. En premier lieu, un *changement d'état;* les variables qui définissent l'état du système passent des valeurs $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ aux valeurs $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$. En second lieu, un *changement de mouvement;* les composantes des vitesses qui animent les parties matérielles élémentaires du système passent des valeurs $u_1, v_1, w_1, u'_1, v'_1, w'_1, \ldots$ aux valeurs $u_2, v_2, w_2, u'_2, v'_2, w'_2, \ldots$. C'est sur la distinction de ces deux éléments de toute transformation qu'est fondée la convention suivante, d'un caractère plus arbitraire que les précédentes :

Quatrième convention. — *L'œuvre accomplie pendant une transformation d'un système par les corps étrangers au système est la somme de deux termes : l'un dépend du changement d'état du sys-*

tème et ne dépend pas de son mouvement; l'autre dépend du changement du mouvement du système et ne dépend pas de son état.

Cette convention s'exprime par l'identité

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\psi(\alpha_1, \ldots; u_1, v_1, w_1, \ldots \mid \alpha_2, \ldots; u_2, v_2, w_2, \ldots) \\ &\quad = \varphi(\alpha_1, \ldots, \lambda_1 \mid \alpha_2, \ldots, \lambda_2) + \chi(u_1, v_1, w_1, \ldots \mid u_2, v_2, w_2, \ldots). \end{aligned}\right.$$

En vertu de cette égalité (4), l'égalité (2) devient

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{E}(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots) = {}& \varphi(\alpha_0, \ldots, \lambda_0 \mid \alpha, \ldots, \lambda) \\ &+ \chi(u_0, v_0, w_0, \ldots \mid u, v, w, \ldots). \end{aligned}\right.$$

Les quantités $\alpha_0, \ldots, \lambda_0$ sont choisies une fois pour toutes; la quantité

$$\varphi(\alpha_0, \ldots, \lambda_0 \mid \alpha, \ldots, \lambda)$$

est donc une fonction des seules variables $\alpha, \ldots, \lambda$; nous pouvons poser

$$(6)\qquad \varphi(\alpha_0, \ldots, \lambda_0 \mid \alpha, \ldots, \lambda) = \mathrm{U}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda).$$

De même, les quantités u_0, v_0, w_0, ... sont choisies une fois pour toutes; la quantité

$$\chi(u_0, v_0, w_0, \ldots \mid u, v, w, \ldots)$$

est donc une fonction des seules variables $u, v, w, \ldots$; nous pouvons poser

$$(7)\qquad \chi(u_0, v_0, w_0, \ldots \mid u, v, w, \ldots) = \mathrm{K}(u, v, w, \ldots).$$

En vertu des égalités (6) et (7), l'égalité (5) devient

$$(8)\quad \mathcal{E}(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots) = \mathrm{U}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) + \mathrm{K}(u, v, w, \ldots).$$

L'énergie d'un système est la somme de deux termes : l'un dépend uniquement de l'état du système et point de son mouvement;

l'autre, indépendant de l'état du système, est connu lorsqu'on connaît la vitesse qui anime chacune des parties élémentaires du système.

Le premier terme se nomme l'*énergie potentielle* ou l'*énergie interne;* le second se nomme l'*énergie actuelle* ou l'*énergie cinétique;* nous allons chercher à déterminer la forme de cette dernière.

Nous remarquerons, en premier lieu, que les vitesses désignées par $u_0, v_0, w_0, \ldots$ ont été choisies arbitrairement; désormais nous conviendrons de prendre

$$u_0 = 0, \qquad v_0 = 0, \qquad w_0 = 0, \qquad \ldots.$$

Or, d'après l'égalité (7), la fonction $K(u, v, w, \ldots)$ est égale à o si l'on a

$$u = u_0, \qquad v = v_0, \qquad w = w_0, \qquad \ldots.$$

Par conséquent, nous serons assuré désormais que *la fonction*

$$K(u, v, w, \ldots)$$

est égale à o *lorsque l'on a*

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0, \qquad \ldots.$$

Nous nous fonderons en second lieu sur une convention que l'on peut regarder comme inévitable, et que nous énoncerons ainsi :

Cinquième convention. — *Lorsqu'un système est formé de plusieurs parties indépendantes les unes des autres et infiniment éloignées les unes des autres, l'œuvre accomplie pendant une modification quelconque du système par les corps étrangers à ce système est la somme des œuvres accomplies pendant la modification correspondante de chacune des parties par les corps étrangers à ces parties.*

De cet énoncé, on déduit sans peine les conséquences suivantes :

Lorsqu'un système est formé de plusieurs parties indépendantes *les unes des autres et infiniment éloignées les unes des autres, l'énergie interne du système est la somme des énergies internes des parties isolées; l'énergie cinétique du système est la somme des énergies cinétiques des parties isolées.*

L'énergie cinétique ne dépendant pas de l'état du système, nous pouvons, pour déterminer la forme de cette énergie, décomposer par la pensée le système en parties matérielles infiniment petites, isoler ces parties matérielles les unes des autres, et les disperser dans l'espace de façon qu'elles soient infiniment éloignées. Cette opération altère l'état du système; mais elle ne change pas son énergie cinétique, si l'on a soin de conserver à chaque particule matérielle, après cette opération, la vitesse dont elle était animée avant cette opération.

Mais, après cette opération, l'énergie cinétique du système est la somme des énergies cinétiques des diverses parties qui le composent; nous sommes donc ramenés à déterminer la forme de l'énergie cinétique d'une partie matérielle infiniment petite.

Soient u, v, w les composantes de la vitesse d'une partie matérielle infiniment petite. L'énergie cinétique sera une fonction de u, v, w, $k(u, v, w)$; la forme de la fonction k dépend de la nature de la particule matérielle, mais non de son état; pour une particule donnée, la forme de cette fonction est invariable; c'est cette forme que nous voulons connaître.

Sixième convention. — *Les corps étrangers à un système infiniment petit accomplissent toujours la même œuvre lorsque, à partir du repos, ils lui communiquent une vitesse de même grandeur, quelle que soit, dans l'espace, la direction de cette vitesse.*

Cette convention, qui revient à dire que, dans l'espace absolu, toutes les directions sont équivalentes, peut être regardée comme logiquement nécessaire; elle entraîne immédiatement cette conséquence : *La fonction $k(u, v, w)$ ne dépend pas isolément des trois composantes u, v, w de la vitesse* V, *mais seulement de la grandeur de cette dernière vitesse;* nous pouvons remplacer le symbole $k(u, v, w)$ par le symbole $k(V)$.

SEPTIÈME CONVENTION. — *L'œuvre accomplie par les corps extérieurs pour communiquer une certaine vitesse à une particule primitivement au repos est toujours une œuvre de même signe.*

Nous conviendrons de compter *positivement* une telle œuvre. La fonction $k(V)$ sera alors essentiellement positive.

HUITIÈME CONVENTION. — *Soient deux particules matérielles* P, P'. *Si les corps étrangers à ces deux particules effectuent la même œuvre pour communiquer à toutes deux une certaine vitese* V_0, *ils effectueront aussi la même œuvre pour communiquer à toutes deux la même vitesse* V, *quelle que soit cette dernière.*

En d'autres termes, l'égalité

$$k(V) = k'(V)$$

ne peut avoir lieu pour une certaine valeur V_0 de V sans avoir lieu identiquement.

Cette convention posée, considérons une particule à laquelle correspond une certaine fonction $k(V)$. Divisons-la elle-même en parties plus petites. Ces parties auront respectivement pour énergie cinétique $x(V)$, $x'(V)$, ... Nous savons que l'énergie cinétique $k(V)$ de la première partie aura pour valeur

$$k(V) = x(V) + x'(V) + \dots \tag{9}$$

D'ailleurs chacune des quantités $x(V)$, $x'(V)$, ... est positive : chacune d'elles est donc inférieure à $k(V)$. Ainsi, *si un élément matériel est une partie d'un autre élément matériel, pour une même vitesse il a une moindre énergie cinétique.* D'ailleurs, il est évident que l'*énergie cinétique d'un élément matériel pour une vitesse donnée varie d'une manière continue si l'on fait croître ou décroître d'une manière continue la quantité de matière que renferme cet élément.* En s'appuyant sur ces deux propositions, on démontre sans peine la proposition suivante : *Étant donnée une particule matérielle* P, *on peut toujours, quel que soit l'entier* N, *la diviser en* N *particules qui, pour une valeur donnée, aient même énergie cinétique.* La convention précédente montre que *ces N particules auront toujours même énergie cinétique si on les anime toutes d'une même vitesse, quelle que soit d'ailleurs cette vitesse.* Si, à cette proposition, on joint l'égalité (9), on voit sans peine que, *pour une même vitesse, l'énergie cinétique de chacune de ces particules est la* $N^{\text{ième}}$ *partie de l'énergie cinétique de la particule* P.

Prenons deux éléments matériels quelconques P et P', dont les énergies cinétiques sont représentées par les fonctions $k(V)$ et $k'(V)$. Soit V_0 une valeur particulière de V. Considérons le rapport $\frac{k'(V_0)}{k(V_0)}$ et supposons tout d'abord ce rapport commensurable.

Posons

$$\frac{k'(V_0)}{k(V_0)} = \frac{N}{N'},$$

N et N' étant deux nombres entiers premiers entre eux.

Divisons la particule P en N éléments ϖ, ... ayant, pour une même vitesse, des énergies cinétiques $x(V)$, ... égales entre elles et égales à $\frac{k(V)}{N}$.

Divisons la particule P' en N' éléments ϖ', ... ayant, pour une même vitesse, des énergies cinétiques $x(V)$, ... égales entre elles et égales à $\frac{k'(V_0)}{N'}$.

Nous aurons

$$x(V_0) = \frac{k(V_0)}{N}, \qquad x'(V_0) = \frac{k'(V_0)}{N'},$$

et, par conséquent,

$$x(V_0) = x'(V_0).$$

Dès lors, d'après la convention précédente, on a, quel que soit V,

$$x(V) = x'(V),$$

en sorte que les égalités

$$k(V) = Nx(V), \qquad k'(V) = N'x'(V)$$

donnent

$$\frac{k(V)}{k'(V)} = \frac{N}{N'} = \frac{k(V_0)}{k'(V_0)}.$$

Les énergies cinétiques qui, pour deux éléments matériels différents, correspondent à une même vitesse, sont entre elles dans un rapport indépendant de cette vitesse.

Nous venons de démontrer cette proposition pour le cas où le rapport $\frac{k'(V_0)}{k(V_0)}$ est commensurable. Mais elle est évidemment générale; car si le rapport $\frac{k'(V)}{k(V)}$ était variable avec V, il serait une fonction continue de V. Donc, pour certaines valeurs de V, il passerait par des valeurs commensurables; le raisonnement précédent montrerait alors que l'hypothèse où $\frac{k'(V)}{k(V)}$ varie avec V est absurde.

Considérons deux corps d'étendue finie quelconque, C et C', et supposons tous les points de ces deux corps animés d'une certaine vitesse V. Soient K(V) et K'(V) leurs énergies cinétiques. Chacune de ces énergies cinétiques est la somme des énergies qu'auraient, pour la même vitesse, les divers éléments matériels en lesquels chacun des deux corps peut être censé divisé. Dès lors, il n'est pas malaisé de déduire de la proposition précédente que *le rapport* $\frac{K'(V)}{K(V)}$ *est indépendant de la vitesse* V : *il dépend uniquement de la nature des deux corps* C *et* C'.

Prenons un corps déterminé Γ, par exemple le kilogramme des Archives. Supposons que tous les points de ce corps soient animés d'une même vitesse V. Soit $\chi(V)$ l'énergie cinétique de ce corps dans ces circonstances.

Soit ensuite un autre corps C quelconque, fini ou infiniment petit. Supposons que tous les points de ce corps soient animés de la même vitesse V.

Soit K(V) l'énergie cinétique du corps C dans ces conditions.

Posons

$$K(V) = M\chi(V). \tag{10}$$

Au sujet du nombre M, que définit cette égalité (10), nous pouvons immédiatement affirmer les propositions suivantes :

1° *Le nombre* M *ne dépend pas de la vitesse* V; *il dépend uniquement de la nature des corps* Γ *et* C;

2° *Le nombre* M *est essentiellement positif;*

3° *Le nombre* M *relatif à un élément matériel infiniment petit est infiniment petit comme cet élément;*

4° *Le nombre* M *relatif à un ensemble de corps est égal à la somme des nombres analogues relatifs aux divers corps qui composent cet ensemble;*

5° *Pour le corps* Γ, *le nombre* M *est égal à* 1.

Le nombre M se nomme la *masse* du corps C. On dit que le corps Γ constitue la *masse étalon* ou l'*unité de masse*.

On voit que la masse d'un corps est proportionnelle à l'œuvre que doivent effectuer les corps étrangers à celui-là pour le faire passer du repos à un état de mouvement où tous ses points sont animés d'une même vitesse donnée.

Considérons un système quelconque, dont les diverses parties élémentaires P, P′, P″, ... sont animées de vitesses quelconques V, V′, V″, ... L'énergie cinétique de ce système est la somme des énergies cinétiques de ses diverses parties. Or, si l'on désigne par m, m', m'', ... les masses des éléments P, P′, P″, ..., ces énergies cinétiques partielles auront respectivement pour valeurs, d'après l'égalité (10),

$$m\chi(V), \qquad m'\chi(V'), \qquad m''\chi(V''), \qquad \ldots.$$

L'énergie cinétique du système a donc pour valeur

$$(11) \qquad K = m\chi(V) + m'\chi(V') + m''\chi(V'') + \ldots = \sum m\chi(V).$$

La forme de cette énergie cinétique nous sera donc entièrement connue si nous déterminons la forme de la fonction $\chi(V)$. Pour effectuer cette détermination, nous nous appuierons sur une nouvelle convention.

Neuvième convention. — *Pour imprimer à tous les points d'un élément matériel une certaine vitesse dans une direction* D, *les corps extérieurs doivent accomplir la même œuvre, soit que l'élément matériel parte du repos, soit qu'il soit primitivement animé d'une vitesse quelconque dans une direction* D', *normale à* D.

Admettons cette convention qui, bien que se présentant assez naturellement à l'esprit, n'a nullement le caractère de la nécessité logique.

Soit V une vitesse; soient u, v, w ses composantes suivant trois axes de coordonnées rectangulaires, Ox, Oy, Oz. Supposons ces trois composantes positives. Prenons un élément matériel de masse m et donnons-lui une vitesse u dans la direction Ox. Nous effectuerons une œuvre ayant pour grandeur

$$g_1 = m\chi(u).$$

L'élément étant déjà animé de cette vitesse u dans la direction Ox, lançons-le, en outre, avec la vitesse v dans la direction Oy. D'après la convention précédente, l'œuvre accomplie dans cette seconde modification est la même que si nous communiquions la vitesse v, dans la direction Oy, au mobile partant du repos; elle a donc pour grandeur

$$g_2 = m\chi(v).$$

A l'élément déjà animé des deux vitesses u suivant Ox et v suivant Oy, appliquons une œuvre capable de lui communiquer une vitesse w suivant Oz; cette œuvre, égale, d'après la convention précédente, à celle qui communiquerait une vitesse w suivant Oz au mobile partant du repos, a pour valeur

$$g_3 = m\chi(w).$$

L'ensemble de ces trois modifications prend le mobile au repos et l'anime de la vitesse V. L'œuvre accomplie dans l'ensemble de ces trois modifications, œuvre qui a pour valeur $(g_1 + g_2 + g_3)$, doit être égale à $m\chi(V)$.

On doit donc avoir identiquement

$$\chi(V) = \chi(u) + \chi(v) + \chi(w).$$

En différentiant cette identité par rapport à u, et en tenant compte de l'égalité

$$u^2 + v^2 + w^2 = V^2,$$

nous trouvons

$$\frac{\dfrac{d\chi(u)}{du}}{\dfrac{d\chi(V)}{dV}} = \frac{u}{V}.$$

Les valeurs de u et de V sont quelconques. On voit donc que $\dfrac{d\chi(V)}{dV}$ doit être proportionnel à V. Si l'on observe en outre que $\chi(V)$ doit s'annuler avec V, on arrive à cette conclusion :

La fonction $\chi(V)$ est proportionnelle à V^2.

Nous poserons

$$\chi(V) = \frac{V^2}{2E}, \tag{12}$$

E étant une quantité *essentiellement positive* et indépendante de V.

Dès lors, d'après l'égalité (11), l'énergie cinétique d'un système quelconque est donnée par la formule

$$K = \frac{1}{E} \sum \frac{mV^2}{2}. \tag{13}$$

La quantité

$$\mathfrak{T} = \sum \frac{mV^2}{2} \tag{14}$$

se nomme la *force vive du système*.

La constante E se nomme l'*équivalent mécanique de la chaleur;* nous verrons plus tard la raison de cette dénomination. La valeur de cette constante dépend des unités de longueur, de temps, de masse et d'œuvre. L'égalité (12) montre en effet que, si l'on prend la masse étalon Γ au repos et si on la lance avec une vitesse qui lui fasse parcourir l'unité de longueur pendant l'unité de temps, l'œuvre effectuée devra être numériquement égale à $\frac{1}{2E}$.

D'après les égalités (8), (13) et (14), l'énergie d'un système quelconque est donnée par la formule

$$\mathcal{E}(\alpha, \ldots; u, v, w, \ldots) = U(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) + \frac{\mathfrak{T}}{E}. \tag{15}$$

Relativement à l'énergie interne $U(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$, il nous reste une dernière convention à poser.

Dixième convention (¹). — *La valeur de l'énergie interne d'un système ne change pas lorsqu'on change seulement sa position absolue dans l'espace, sans changer aucune des autres propriétés de ce système.*

Ainsi, parmi les variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, celles-là ne figurent pas dans l'expression de $U(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$ qui servent seulement à fixer la position absolue du système dans l'espace.

5. *Le principe de la conservation de l'énergie.* — Les conventions que nous avons énumérées dans ce qui précède nous ont amené à définir la forme d'une certaine quantité algébrique propre à servir de symbole à la notion d'œuvre effectuée, pendant une transformation d'un système, par les corps étrangers à ce système. Cette quantité algébrique est égale à l'accroissement que la transformation considérée fait subir à l'énergie totale du système.

Mais, dans le cas où aucun corps étranger au système n'agit sur le système, l'œuvre accomplie par les corps étrangers durant une modi-

---

(¹) Cette convention pourrait sembler *évidente* à quelques esprits; si, toutefois, on observe que l'énergie interne d'un système dépend du mouvement *absolu* de ce système, on voit qu'il ne serait nullement *absurde* de la regarder comme dépendant aussi de sa position *absolue* dans l'espace.

fication quelconque du système doit évidemment être égale à o. Nous sommes donc amené à énoncer la proposition suivante :

Lorsqu'un système matériel, isolé dans l'espace, éprouve une transformation quelconque, l'énergie totale de ce système demeure invariable par l'effet de cette transformation.

Cette proposition, qu'exprime l'égalité

$$U(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) + \frac{\mathfrak{T}}{E} = \text{const.}, \tag{16}$$

constitue le *principe de la conservation de l'énergie*.

Elle se distingue de toutes celles que nous avons énoncées dans ce qui précède. Celles-ci, en effet, avaient un caractère arbitraire; en dernière analyse, nous sommes absolument libres de considérer la quantité

$$\begin{aligned} G = \quad & U(\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2) + \frac{\mathfrak{T}_2}{E}, \\ & - U(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1) + \frac{\mathfrak{T}_1}{E} \end{aligned}$$

et de lui donner tel nom qu'il nous plaira, par exemple le nom d'*œuvre* accomplie par les corps étrangers au système. Mais, lorsque nous énonçons que, dans toute transformation d'un système isolé, il existe une quantité de la forme

$$U(\alpha, \beta, \ldots \lambda) + \frac{\mathfrak{T}}{E},$$

qui demeure invariable, nous énonçons une proposition dont les conséquences peuvent être ou conformes ou contraires à l'expérience; une proposition que nous ne pouvons pas admettre ou rejeter à notre fantaisie; en un mot, une *hypothèse physique*, la première que nous ayons rencontrée jusqu'ici. Les considérations exposées aux nos **1** et **2** ont pour but d'introduire cette hypothèse, de nous conduire à la formuler; elles ne la démontrent pas. C'est à l'expérience d'en vérifier les conséquences plus ou moins éloignées.

CHAPITRE III.

LE TRAVAIL ET LA QUANTITÉ DE CHALEUR.

1. *Établissement d'une équation fondamentale.* — Considérons un système Σ, isolé dans l'espace, et susceptible d'être lui-même subdivisé en deux systèmes indépendants, S et S'.

Soient $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, a, b, \ldots, l$ les variables qui déterminent la position du système S, isolé dans l'espace et son état; $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont celles de ces variables qui figurent dans les équations (1) du Chapitre I relatives au système S; $a, b, \ldots, l$ sont celles qui n'y figurent pas.

Soient, de même, $\alpha', \beta', \ldots, \lambda', a', b', \ldots, l'$ les variables qui déterminent la position du système S', isolé dans l'espace, et son état.

Si le système S était isolé dans l'espace, son énergie interne serait une certaine fonction de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, a, b, \ldots, l$, que nous désignerons par

$$U(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, a, b, \ldots, l).$$

Sa force vive serait une forme quadratique des variables

$$u = \frac{d\alpha}{dt}, \quad v = \frac{d\beta}{dt}, \quad \ldots, \quad w = \frac{d\lambda}{dt};$$

elle dépendrait en outre d'une manière quelconque des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, mais point des variables $a, b, \ldots, l$. Soit $\mathfrak{T}$ cette force vive.

Si le système S' était isolé dans l'espace, son énergie interne serait une certaine fonction de $\alpha', \beta', \ldots, \lambda', a', b', \ldots, l'$, que nous désignerons par

$$U'(\alpha', \beta', \ldots, \lambda', a', b', \ldots, l').$$

Sa force vive serait une forme quadratique des variables

$$u' = \frac{d\alpha'}{dt}, \quad v' = \frac{d\beta'}{dt}, \quad \ldots, \quad w' = \frac{d\lambda'}{dt};$$

elle dépendrait en outre d'une manière quelconque des variables α', β', ..., λ', mais point des variables α', β', ..., l'. Soit $\mathfrak{T}'$ cette force vive.

Considérons le système Σ.

Si l'on connaît les variables

$$\begin{gathered}\alpha,\ \beta,\ \ldots,\lambda,\ a,\ b,\ \ldots,\ l,\\ \alpha',\beta',\ldots,\lambda',a',b',\ldots,l',\end{gathered}$$

on connaît la position et l'état de chacun des deux systèmes S et S' qui le composent; on connaît donc l'état du système Σ. L'énergie interne du système Σ sera une fonction de ces variables. Désignons-la par

$$\Upsilon(\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \lambda,\ a,\ b,\ \ldots,\ l,\ \alpha',\ \beta',\ \ldots,\ \lambda',\ a',\ b',\ \ldots,\ l').$$

Nous pourrons évidemment écrire

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\Upsilon = {} & U(\alpha,\ \beta,\ \ldots,\lambda,\ a,\ b,\ \ldots,\ l)\\ & + U'(\alpha',\beta',\ldots,\lambda',a',b',\ldots,l')\\ & + \Psi(\alpha,\ \beta,\ \ldots,\lambda,\ a,\ b,\ \ldots,l,\ \alpha',\beta',\ldots,\lambda',\ a',b',\ldots,l').\end{aligned}\right.$$

Quant à la force vive du système Σ, elle est évidemment égale à $(\mathfrak{T}+\mathfrak{T}')$.

L'énergie totale du système Σ aura pour valeur

$$(2)\qquad \mathcal{E} = \Upsilon + \frac{1}{E}(\mathfrak{T}+\mathfrak{T}').$$

Écrivons que la modification infiniment petite éprouvée par le système Σ, pendant le temps dt, laisse invariable la valeur de cette énergie $\mathcal{E}$.

Posons

$$\begin{gathered}\varphi = \frac{da}{dt},\quad \chi = \frac{db}{dt},\quad \ldots,\quad \psi = \frac{dl}{dt},\\ \varphi' = \frac{da'}{dt},\quad \chi' = \frac{db'}{dt},\quad \ldots,\quad \psi' = \frac{dl'}{dt}.\end{gathered}$$

D'après l'égalité (1), pendant le temps dt, Υ éprouvera une variation

$$
\begin{aligned}
\delta\Upsilon = \Big[& \left(\frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}\right) u + \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{\partial \Psi}{\partial \beta}\right) v + \ldots + \left(\frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}\right) w \\
& + \left(\frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial \Psi}{\partial a}\right) \varphi + \left(\frac{\partial U}{\partial b} + \frac{\partial \Psi}{\partial b}\right) \chi + \ldots + \left(\frac{\partial U}{\partial l} + \frac{\partial \Psi}{\partial l}\right) \psi \\
& + \left(\frac{\partial U'}{\partial \alpha'} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha'}\right) u' + \left(\frac{\partial U'}{\partial \beta'} + \frac{\partial \Psi}{\partial \beta'}\right) v' + \ldots + \left(\frac{\partial U'}{\partial \lambda'} + \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda'}\right) w' \\
& + \left(\frac{\partial U'}{\partial a'} + \frac{\partial \Psi}{\partial a'}\right) \varphi' + \left(\frac{\partial U'}{\partial b'} + \frac{\partial \Psi}{\partial b'}\right) \chi' + \ldots + \left(\frac{\partial U'}{\partial l'} + \frac{\partial \Psi}{\partial l'}\right) \psi' \Big] \, dt.
\end{aligned}
$$

Quant à la variation subie par la force vive pendant le même temps, un calcul connu permet de la mettre sous la forme

$$
\begin{aligned}
\delta(\mathfrak{T} + \mathfrak{T}') = - \Big[& \left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u}\right) u \\
& + \left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \beta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial v}\right) v + \ldots + \left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial w}\right) w \\
& + \left(\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial \alpha'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial u'}\right) u' \\
& + \left(\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial \beta'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial v'}\right) v' + \ldots + \left(\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial \lambda'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial w'}\right) w' \Big] \, dt.
\end{aligned}
$$

Si nous exprimons que l'énergie totale $\mathcal{E}$, donnée par l'égalité (2), est demeurée invariable, nous trouvons l'égalité suivante

$$
(3) \qquad
\left\{
\begin{aligned}
& \left[\frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} - \frac{1}{E}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u}\right)\right] u \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \left[\frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} - \frac{1}{E}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial w}\right)\right] w \\
& + \left(\frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial \Psi}{\partial a}\right) \varphi + \ldots + \left(\frac{\partial U}{\partial l} + \frac{\partial \Psi}{\partial l}\right) \psi \\
& + \left[\frac{\partial U'}{\partial \alpha'} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha'} - \frac{1}{E}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial \alpha'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial u'}\right)\right] u' \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \left[\frac{\partial U'}{\partial \lambda'} + \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda'} - \frac{1}{E}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial \lambda'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial w'}\right)\right] w' \\
& + \left(\frac{\partial U'}{\partial a'} + \frac{\partial \Psi}{\partial a'}\right) \varphi' + \ldots + \left(\frac{\partial U'}{\partial l'} + \frac{\partial \Psi}{\partial l'}\right) \psi' = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Cette égalité fondamentale va nous servir de point de départ pour les considérations qui feront l'objet du présent Chapitre.

2. *Du travail.* — Posons

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{ll} E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\alpha} = -A, & E\dfrac{\partial\Psi}{\partial a} = -\mathcal{A}, \\ E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\beta} = -B, & E\dfrac{\partial\Psi}{\partial b} = -\mathcal{B}, \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots, \\ E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\lambda} = -L, & E\dfrac{\partial\Psi}{\partial l} = -\mathcal{L}. \end{array}\right.$$

Nous dirons que les quantités $A, B, \dots, L$ représentent les *forces* exercées par le système S' sur le système S; que les quantités $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}, \dots, \mathcal{L}$ représentent les *influences* exercées par le système S' sur le système S. L'ensemble des forces et des influences exercées par le système S' sur le système S se nommera l'ensemble des *actions* du système S' sur le système S.

La quantité

$$(Au + Bv + \dots + Lw)\,dt$$

est le *travail* effectué, pendant le temps dt, par les *forces* que le système S' exerce sur le système S; la quantité

$$(\mathcal{A}\varphi + \mathcal{B}\chi + \dots + \mathcal{L}\psi)\,dt$$

est le *travail* effectué, pendant le temps dt, par les *influences* que le système S' exerce sur le système S. La somme des deux quantités précédentes est le *travail* effectué, pendant le temps dt, par les *actions* du système S' sur le système S.

Considérons une modification virtuelle du système S; soient

$$\delta\alpha,\quad \delta\beta,\quad \dots,\quad \delta\lambda,\quad \delta a,\quad \delta b,\quad \dots,\quad \delta l$$

les variations que cette modification fait éprouver aux variables

$$\alpha,\quad \beta,\quad \dots,\quad \lambda,\quad a,\quad b,\quad \dots,\quad l.$$

Les expressions

$$
\begin{gathered}
A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots + L\,\delta\lambda,\\
\mathcal{A}\,\delta a + \mathcal{B}\,\delta b + \ldots + \mathcal{L}\,\delta\lambda,\\
A\,\delta\alpha + \ldots + L\,\delta\lambda + \mathcal{A}\,\delta a + \ldots + \mathcal{L}\,\delta l
\end{gathered}
$$

seront nommées respectivement :

Travail virtuel des forces exercées par le système S′ sur le système S;

Travail virtuel des influences exercées par le système S′ sur le système S;

Travail virtuel des actions exercées par le système S′ sur le système S.

Le travail (réel ou virtuel) des actions du système S′ sur le système S a pour valeur, d'après les égalités (4),

$$- E\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}\,\delta\alpha + \ldots + \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda}\,\delta\lambda + \frac{\partial\Psi}{\partial a}\,\delta a + \ldots + \frac{\partial\Psi}{\partial l}\,\delta l\right).$$

Ce n'est pas, en général, la différentielle totale d'une fonction uniforme des variables α, β, $\ldots$, λ, a, b, $\ldots$, l, qui déterminent le système S. Pour transformer cette expression en une différentielle totale, il faudrait lui ajouter le terme

$$- E\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha'}\,\delta\alpha' + \ldots + \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda'}\,\delta\lambda' + \frac{\partial\Psi}{\partial a'}\,\delta a' + \ldots + \frac{\partial\Psi}{\partial l'}\,\delta l'\right),$$

c'est-à-dire le travail des actions du système S sur le système S′.

Ainsi le travail des actions du système S′ sur le système S n'est pas, en général, une différentielle totale, mais *le travail des actions mutuelles des deux systèmes* S *et* S′ *est toujours la différentielle totale d'une fonction qui est définie d'une manière uniforme lorsqu'on connaît l'état du système* Σ *constitué par l'ensemble de deux systèmes* S *et* S′.

La fonction $E\Psi$, dont la différentielle totale, changée de signe, donne le travail des actions mutuelles des deux systèmes S et S′, se nomme le *potentiel* de ces actions.

Comme la fonction Υ, ce potentiel dépend des propriétés des deux systèmes S et S′ et de leur position relative, *mais point de la situation absolue que le système Σ occupe dans l'espace;* il en est de même des actions mutuelles des deux systèmes S et S′.

Ce théorème peut se généraliser et s'étendre à un système Σ formé de n systèmes indépendants $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Pour ne pas compliquer les notations, sans avantage sérieux au point de vue de la généralité, nous supposerons le système Σ formé seulement de trois systèmes partiels S_1, S_2, S_3.

Soient

$$\begin{gathered}\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1,\\ \alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2,\\ \alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3\end{gathered}$$

les trois systèmes de variables qui définissent respectivement l'état de chacun des trois systèmes S_1, S_2, S_3.

Soient

$$\begin{gathered}U_1(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1),\\ U_2(\alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2),\\ U_3(\alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3)\end{gathered}$$

les énergies internes de ces systèmes considérés isolément.

L'énergie interne du système Σ pourra évidemment être mise sous la forme suivante :

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}\Upsilon = U_1 + U_2 + U_3 + \Psi(&\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1,\\ &\alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2,\\ &\alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3).\end{aligned}\right.$$

Pour former la fonction Ψ, nous pouvons opérer de la manière suivante : nous envisageons d'abord le système Σ_{23} formé par l'ensemble des deux systèmes S_2 et S_3; l'énergie interne de ce système sera de la forme

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \Upsilon_{23} = {} & U_2 + U_3 \\ & + \Psi_{23}(\alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2, \alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3). \end{aligned}\right.$$

Combinons ensuite ce système Σ_{23} avec le système S_1, de manière à former le système Σ. L'énergie interne de ce système sera de la forme

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \Upsilon = U_1 + \Upsilon_{23} + X_1(&\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1, \\ &\alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2, \\ &\alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3). \end{aligned}\right.$$

La comparaison des formules (5), (6) et (7) donne l'égalité

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \Psi = {} & \Psi_{23}(\alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2, \alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3) \\ & + X_1(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1, \\ & \qquad \alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2, \\ & \qquad \alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3). \end{aligned}\right.$$

Les définitions posées dans ce qui précède nous montrent que les actions exercées sur le système S_1 par le système Σ_{23}, c'est-à-dire par l'ensemble des systèmes S_2, S_3, sont déterminées par les égalités

$$(4\ bis)\quad \left\{\begin{array}{ll} A_1 = -E\dfrac{\partial X_1}{\partial \alpha_1}, & \mathfrak{A}_1 = -E\dfrac{\partial X_1}{\partial a_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_1 = -E\dfrac{\partial X_1}{\partial \lambda_1}, & \mathfrak{L}_1 = -E\dfrac{\partial X_1}{\partial l_1}, \end{array}\right.$$

qui peuvent s'écrire, en vertu de l'égalité (8),

$$(4\ ter)\quad \left\{\begin{array}{ll} A_1 = -E\dfrac{\partial \Psi}{\partial \alpha_1}, & \mathfrak{A}_1 = -E\dfrac{\partial \Psi}{\partial a_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L_1 = -E\dfrac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1}, & \mathfrak{L}_1 = -E\dfrac{\partial \Psi}{\partial l_1}. \end{array}\right.$$

Les actions que le système S_2 subit de la part de l'ensemble des systèmes S_3 et S_1; les actions que le système S_3 subit de la part de l'ensemble des systèmes S_1 et S_2 sont déterminées d'une manière analogue. On déduit aisément de là la proposition suivante :

Dans un système complexe, formé de plusieurs systèmes indépendants, chacun de ces derniers subit certaines actions de la part de l'ensemble des autres; toutes ces actions, prises ensemble, admettent un potentiel.

Ce potentiel $E\Psi$ *dépend des propriétés des divers systèmes indépendants qui composent le système complexe, et de leur position relative; il ne dépend pas de la position absolue que le système complexe occupe dans l'espace.*

Des démonstrations analogues à celle qui a fourni l'égalité (8) permettent d'écrire, en faisant usage de notations semblables, les égalités

$$(8\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} \Psi = \Psi_{31}(&\alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3, \alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1) \\ + X_2(&\alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2, \\ &\alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3, \\ &\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1); \\ \Psi = \Psi_{12}(&\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1, \alpha_2, \ldots, \lambda_2, \omega_2, \ldots, l_2) \\ + X_3(&\alpha_3, \ldots, \lambda_3, a_3, \ldots, l_3, \\ &\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1, \\ &\alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2). \end{aligned}\right.$$

Ces égalités (8) et (8 *bis*) seront évidemment vérifiées si l'on pose

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} X_1 &= \Psi_{31} + \Psi_{12}, \\ X_2 &= \Psi_{12} + \Psi_{23}, \\ X_3 &= \Psi_{23} + \Psi_{31}, \end{aligned}\right.$$

qui entraînent

$$\Psi = \Psi_{23} + \Psi_{31} + \Psi_{12},$$

mais elles n'entraînent pas nécessairement ces égalités (9).

Voyons à quelles conséquences conduiraient ces égalités (9).

Les actions que le système S_2 exercerait sur le système S_1, si ces deux systèmes existaient seuls, seraient données par les égalités

$$\mathrm{A}_{12} = -\,\mathrm{E}\frac{\partial\Psi_{12}}{\partial\alpha_1}, \qquad \mathcal{A}_{12} = -\,\mathrm{E}\frac{\partial\Psi_{12}}{\partial a_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\mathrm{L}_{12} = -\,\mathrm{E}\frac{\partial\Psi_{12}}{\partial\lambda_1}, \qquad \mathcal{L}_{12} = -\,\mathrm{E}\frac{\partial\Psi_{12}}{\partial l_1}.$$

Les actions que le système S_3 exercerait sur le système S_1, si ces deux systèmes existaient seuls, seraient données par les égalités

$$\mathrm{A}_{13} = -\,\mathrm{E}\frac{\partial\Psi_{13}}{\partial\alpha_1}, \qquad \mathcal{A}_{13} = -\,\mathrm{E}\frac{\partial\Psi_{13}}{\partial a_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\mathrm{L}_{13} = -\,\mathrm{E}\frac{\partial\Psi_{13}}{\partial\lambda_1}, \qquad \mathcal{L}_{13} = -\,\mathrm{E}\frac{\partial\Psi_{13}}{\partial l_1}.$$

Ces égalités, jointes aux égalités (4 *bis*) et aux égalités (9), donnent

$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_{12} + \mathrm{A}_{13}, \qquad \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_{12} + \mathcal{A}_{13},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\mathrm{L}_1 = \mathrm{L}_{12} + \mathrm{L}_{13}, \qquad \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{12} + \mathcal{L}_{13}.$$

De ces égalités, et d'autres égalités analogues, qui se démontreraient de la même manière, on déduirait le théorème suivant :

Dans un système complexe formé de plusieurs systèmes indépendants, les actions que chacun de ces derniers subit de la part de l'ensemble des autres s'obtiennent en superposant les actions qu'il subirait de la part de chacun des autres, si chacun des autres était placé seul en sa présence.

On voit que *ce théorème, bien que compatible avec la définition des actions mutuelles qui s'exercent entre divers systèmes, n'en est cependant pas une conséquence nécessaire.* Toutes les fois que, dans une théorie particulière, on en admettra l'exactitude, on fera par cela même une hypothèse.

Revenons à l'étude générale d'un système Σ composé de n systèmes indépendants $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Supposons que ces n systèmes soient n corps dont chacun occupe, dans l'espace, une position variable, mais possède un état invariable. Nous dirons alors que *toute modification du système est un déplacement sans changement d'état.*

Lorsqu'on déplace simplement le système S_i dans l'espace, sans en changer les propriétés, l'énergie interne U_i de ce système demeure invariable; par conséquent, dans un déplacement sans changement d'état, chacune des quantités $U_1, U_2, \ldots, U_n$ demeure invariable. D'après l'égalité (5), l'énergie interne Υ du système Σ ne diffère que par une constante de la fonction Ψ. On arrive donc au théorème suivant :

Lorsqu'un système complexe, formé de plusieurs systèmes indépendants, est assujetti à n'éprouver que des déplacements sans changement d'état, l'ensemble des actions qui s'exercent entre les divers systèmes partiels admet pour potentiel le produit de l'énergie interne du système complexe par l'équivalent mécanique de la chaleur.

Ce théorème est très fréquemment employé dans les applications de la Thermodynamique.

De ce théorème en découle un autre :

Soit $\mathfrak{T}$ la force vive du système Σ. L'énergie totale de ce système aura pour valeur $\left(\Upsilon + \frac{1}{E}\mathfrak{T}\right)$. Si le système Σ est isolé, cette énergie totale ne peut varier. L'égalité

$$\Upsilon + \frac{1}{E}\mathfrak{T} = \text{const.}$$

doit subsister dans toute modification du système. Si le système Σ est assujetti à n'éprouver que des déplacements sans changement d'état, cette égalité pourra être remplacée par la suivante

$$E\Psi + \mathfrak{T} = \text{const.}$$

ou

$$E\,d\Psi + d\mathfrak{T} = 0.$$

Or $(-\mathrm{E}\,d\Psi)$ représente le travail qu'ont effectué les actions qui s'exercent entre les systèmes $S_1, S_2, \ldots, S_n$, pendant que la force vive du système Σ a augmenté de $d\mathfrak{T}$; nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Concevons un système complexe, formé de systèmes indépendants, isolé, et assujetti à n'éprouver que des déplacements sans changement d'état; dans toute modification réelle que subit un pareil système, sa force vive subit un accroissement égal au travail qu'accomplissent les actions qui s'exercent entre les divers systèmes partiels dont il est composé.

On remarquera que nous avons défini les forces et les influences qu'un système matériel subit de la part d'un autre système dont il est indépendant; nous n'avons pas défini les forces ou les influences qui s'exercent entre deux parties d'un même système, lorsque ces deux parties ne peuvent être regardées comme deux systèmes indépendants. Parfois, en Physique, on parle de semblables forces ou de semblables influences; c'est ainsi qu'en Électrodynamique on parle des actions qui s'exercent entre les diverses parties d'un même conducteur traversé par des courants. Lorsqu'on voudra considérer de semblables actions, on devra en donner une définition spéciale, et il n'y aura pas lieu de s'étonner si les actions ainsi définies ne satisfont pas à certains théorèmes auxquels les actions qui s'exercent entre systèmes indépendants, définies comme nous venons de le faire, sont nécessairement assujetties. Cette remarque trouve, en Électrodynamique et en Électromagnétisme, d'importantes applications.

5. *De la quantité de chaleur.* — Revenons à l'équation fondamentale (3).

Posons

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Bigg[& \left(\mathrm{A} - \mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u}\right)u \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \left(\mathrm{L} - \mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial w}\right)w \\
& + \left(\mathcal{A} - \mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial a}\right)\varphi + \ldots + \left(\mathcal{L} - \mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial l}\right)\psi \Bigg]\, dt = \mathrm{E}\, d\mathrm{Q},
\end{aligned}
\right.
$$

$$(10\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\Big[\left(A' - E\frac{\partial U'}{\partial \alpha'} + \frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial \alpha'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial u'}\right)u' \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \left(L' - E\frac{\partial U'}{\partial \lambda'} + \frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial \lambda'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}'}{\partial w'}\right)w' \\ &+ \left(\mathcal{A}' - E\frac{\partial U'}{\partial a'}\right)\varphi' + \ldots + \left(\mathcal{L}' - E\frac{\partial U'}{\partial l'}\right)\psi'\Big]\,dt = E\,dQ'. \end{aligned}\right.$$

L'égalité (3) deviendra, en tenant compte des égalités (4) et des égalités analogues relatives aux actions du système S sur le système S',

$$(11)\qquad dQ + dQ' = 0.$$

Nous donnerons à la quantité dQ le nom de *quantité de chaleur dégagée par le système* S dans le temps dt; lorsque cette quantité sera négative, nous dirons que sa valeur absolue est la *quantité de chaleur absorbée* par le système S durant le même temps. La quantité dQ' sera de même nommée la *quantité de chaleur* dégagée par le système S' pendant le temps dt.

L'égalité (11) nous enseigne alors que, *si l'on considère un système complexe isolé* Σ, *formé de deux systèmes indépendants* S *et* S', *dans toute modification réelle du système* Σ, *l'un des deux systèmes* S, S', *dégage autant de chaleur que l'autre en absorbe.*

Supposons le système S isolé dans l'espace. Le système S' n'existant pas, tous les termes qui composent le premier membre de l'égalité (10 *bis*) sont identiquement nuls. Il en est de même de dQ' et partant, d'après l'égalité (11), de dQ. De là le théorème suivant :

Lorsqu'un système, isolé dans l'espace, éprouve une modification réelle, il n'absorbe pas et ne dégage pas de chaleur.

Diverses théories de Physique nous conduisent à regarder un corps comme susceptible de dégager de la chaleur ou d'en absorber alors même que ce corps nous semble isolé dans le vide; cette manière de voir n'est compatible avec la définition que nous venons de donner pour la quantité de chaleur dégagée par un système que si nous regardons l'espace qui nous semble vide comme rempli par un certain corps, l'éther. Cette remarque aide à saisir l'importance du théorème précédent.

Posons

$$(12)\quad \begin{cases} E\dfrac{\partial U}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u} - A = ER_\alpha, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ E\dfrac{\partial U}{\partial \lambda} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial w} - L = ER_\lambda, \end{cases}$$

$$(12\,bis)\quad \begin{cases} E\dfrac{\partial U}{\partial a} - \mathcal{A} = E\mathfrak{R}_a, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ E\dfrac{\partial U}{\partial l} - \mathcal{L} = E\mathfrak{R}_l. \end{cases}$$

Nous donnerons aux quantités $R_\alpha, \dots, R_\lambda, \mathfrak{R}_a, \dots, \mathfrak{R}_l$ le nom de *coefficients calorifiques* du système S, soumis à l'action du système S' et animé du mouvement qui l'anime à l'instant t. Nous voyons, en effet, que ces coefficients dépendent :

1° Des propriétés du système S;

2° Des vitesses et des accélérations des divers points de ce système;

3° Des actions du système S' sur le système S.

Envisageons une modification virtuelle $\delta\alpha, \dots, \delta\lambda, \delta a, \dots, \delta l$ du système S. Par définition, la quantité

$$(13)\qquad dQ = -(R_\alpha\,\delta\alpha + \dots + R_\lambda\,\delta\lambda + \mathfrak{R}_a\,\delta a + \dots + \mathfrak{R}_l\,\delta l)$$

se nomme la *quantité de chaleur dégagée par le système S dans la modification virtuelle considérée.*

Cette quantité, on le voit, n'est pas, en général, la différentielle totale d'une fonction de $\alpha, \dots, \lambda, a, \dots, l$, car les coefficients de $\delta\alpha, \dots, \delta\lambda, \delta a, \dots, \delta l$ dépendent, en général, d'autres variables.

Nous savons que la quantité

$$(14)\qquad d\mathfrak{G} = A\,\delta\alpha + \dots + L\,\delta\lambda + \mathcal{A}\,\delta a + \dots + \mathcal{L}\,\delta l$$

représente le travail virtuel des actions exercées sur le système S.

Nous donnerons à la quantité

$$(15)\qquad d\tau = \left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u}\right)\delta\alpha + \ldots + \left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial w}\right)\delta\lambda$$

le nom de ***travail virtuel des forces d'inertie appliquées au système*** S.

Les égalités (12), (12 *bis*), (13), (14) et (15) nous donnent alors l'égalité suivante, applicable à toute transformation virtuelle du système S,

$$(16)\qquad \mathrm{E}(dQ + \delta U) = d\mathfrak{G} + d\tau.$$

En multipliant par l'équivalent mécanique de la chaleur la somme de la quantité de chaleur dégagée par un système durant une modification virtuelle et de la variation subie par l'énergie interne du système durant la même modification, on obtient un certain produit; ce produit est égal au travail virtuel des actions extérieures et des forces d'inertie appliquées au système.

Cette proposition constitue l'énoncé le plus général de la *loi de l'équivalence de la chaleur et du travail.*

Lorsqu'on a affaire non plus à une modification virtuelle quelconque, mais à une modification réelle, l'égalité (16) peut se transformer. Dans ce cas, en effet, le travail $d\tau$ des forces d'inertie devient égal à la variation changée de signe de la force vive, et l'on peut écrire

$$(17)\qquad d\mathfrak{G} - \mathrm{E}\,dQ = \frac{d}{dt}(\mathrm{EU} + \mathfrak{T})\,dt.$$

On voit que, *pour toute modification réelle, la quantité*

$$d\mathfrak{G} - \mathrm{E}\,dQ$$

est une différentielle totale.

Considérons un système Σ formé de deux systèmes partiels indépendants, S_1, S_2; soit σ le système formé par l'ensemble des corps étrangers à Σ.

Soient

$$U_1(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1),$$
$$U_2(\alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2)$$

les énergies internes des systèmes S_1, S_2, considérés isolément.

Le système Σ aura pour énergie interne la quantité

$$\Upsilon = U_1 + U_2 + \Psi_{12}(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1, \alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2).$$

Soit u l'énergie interne du système σ considéré isolément. L'énergie interne du système formé par l'ensemble $\Sigma\sigma$ aura pour expression

$$\Upsilon + u + X,$$

X dépendant des variables qui définissent la position et les propriétés de chacun des trois systèmes S_1, S_2, σ.

Supposons que le système Σ éprouve une modification virtuelle

$$\delta\alpha_1, \quad \ldots, \quad \delta\lambda_1, \quad \delta a_1, \quad \ldots, \quad \delta l_1, \quad \delta\alpha_2, \quad \ldots, \quad \delta\lambda_2, \quad \delta a_2, \quad \ldots, \quad \delta l_2.$$

et cherchons l'expression de la quantité de chaleur dQ dégagée par le système Σ. Nous aurons

$$\begin{aligned}
E\,dQ = -\Big[& \left(E\frac{\partial\Upsilon}{\partial\alpha_1} + E\frac{\partial X}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\alpha_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial u_1}\right)\delta\alpha_1 \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \left(E\frac{\partial\Upsilon}{\partial\lambda_1} + E\frac{\partial X}{\partial\lambda_1} - \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\lambda_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial w_1}\right)\delta\lambda_1 \\
& + \left(E\frac{\partial\Upsilon}{\partial a_1} + E\frac{\partial X}{\partial a_1}\right)\delta a_1 + \ldots + \left(E\frac{\partial\Upsilon}{\partial l_1} + E\frac{\partial X}{\partial l_1}\right)\delta l_1 \\
& + \left(E\frac{\partial\Upsilon}{\partial\alpha_2} + E\frac{\partial X}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\alpha_2} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial u_2}\right)\delta\alpha_2 \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \left(E\frac{\partial\Upsilon}{\partial\lambda_2} + E\frac{\partial X}{\partial\lambda_2} - \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\lambda_2} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial w_2}\right)\delta\lambda_2 \\
& + \left(E\frac{\partial\Upsilon}{\partial a_2} + E\frac{\partial X}{\partial a_2}\right)\delta a_2 + \ldots + \left(E\frac{\partial\Upsilon}{\partial l_2} + E\frac{\partial X}{\partial l_2}\right)\delta l_2 \Big].
\end{aligned}$$

Mais la force vive $\mathfrak{C}$ du système Σ est la somme des forces vives $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ des systèmes S_1, S_2. On voit donc sans peine que l'égalité précédente peut s'écrire

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\,dQ = -\Big\{ & \left[\mathrm{E}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(U_1+\Psi_{12}+X)-\frac{\partial\mathfrak{C}_1}{\partial\alpha_1}+\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{C}_1}{\partial u_1}\right]\delta\alpha_1 \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \left[\mathrm{E}\frac{\partial}{\partial\lambda_1}(U_1+\Psi_{12}+X)-\frac{\partial\mathfrak{C}_1}{\partial\lambda_1}+\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{C}_1}{\partial w_1}\right]\delta\lambda_1 \\
& + \mathrm{E}\frac{\partial}{\partial a_1}(U_1+\Psi_{12}+X)\delta a_1+\ldots+\mathrm{E}\frac{\partial}{\partial l_1}(U_1+\Psi_{12}+X)\delta l_1\Big\} \\
& -\Big\{\left[\mathrm{E}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(U_2+\Psi_{12}+X)-\frac{\partial\mathfrak{C}_2}{\partial\alpha_2}+\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{C}_2}{\partial u_2}\right]\delta\alpha_2 \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \left[\mathrm{E}\frac{\partial}{\partial\lambda_2}(U_2+\Psi_{12}+X)-\frac{\partial\mathfrak{C}_2}{\partial\lambda_2}+\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{C}_2}{\partial w_2}\right]\delta\lambda_2 \\
& + \mathrm{E}\frac{\partial}{\partial a_2}(U_2+\Psi_{12}+X)\delta a_2+\ldots+\mathrm{E}\frac{\partial}{\partial l_2}(U_2+\Psi_{12}+X)\delta l_2\Big\} \\
= \; & \mathrm{E}(dQ_1+dQ_2),
\end{aligned}
$$

dQ_1, dQ_2 désignant les quantités de chaleur que, dans la même modification virtuelle, dégagent les deux systèmes S_1, S_2. On arrive ainsi au théorème suivant :

Lorsqu'un système est formé de plusieurs parties indépendantes, la quantité de chaleur qu'il dégage dans une modification virtuelle quelconque est égale à la somme algébrique des quantités de chaleur que ses diverses parties dégagent dans la même modification.

Ce théorème nous sera utile dans la suite.

Ici vient naturellement se placer une réflexion semblable à celle que nous a suggérée la définition du travail : on ne peut parler de la quantité de chaleur dégagée par chacune des parties d'un système qu'autant que chacune de ces parties peut être considérée comme un système indépendant. Lorsque les diverses parties d'un système ne sont pas indépendantes les unes des autres, le mot : quantité de chaleur dégagée par chacune d'elles n'a aucun sens.

4. *Le problème classique de la Dynamique.* — Supposons que, pour un certain système, les coefficients calorifiques

$$\mathrm{R}_\alpha, \quad \ldots, \quad \mathrm{R}_\lambda, \quad \mathfrak{R}_a, \quad \ldots, \quad \mathfrak{R}_l$$

soient tous égaux à o identiquement, ou, en d'autres termes, que la quantité de chaleur dégagée par le système dans une modification réelle ou virtuelle quelconque soit égale à o. Les égalités (12) et (12 *bis*) deviendront

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{E}\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} + \dfrac{d}{dt}\,\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u} - \mathrm{A} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{E}\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial \lambda} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} + \dfrac{d}{dt}\,\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial w} - \mathrm{L} = 0, \end{array} \right.$$

$$(18\,bis) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{E}\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial a} - \mathcal{A} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{E}\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial l} - \mathcal{L} = 0. \end{array} \right.$$

On reconnaît les équations du mouvement d'un système dans lequel les frottements sont nuls; dans le cas que l'on étudie ordinairement en Mécanique, il n'existe pas d'autres variables que celles qui figurent dans les équations (1) du Chapitre I; il n'existe donc pas d'équation du type (18 *bis*); toutes les équations qui régissent le mouvement du système ont la forme (18), donnée, on le sait, par Lagrange.

On voit que les lois de la Dynamique rentrent, comme cas particulier, dans les lois de la Thermodynamique; elles se déduisent de ces dernières en supposant tous les coefficients calorifiques du système égaux à o; mais dans quel cas cette hypothèse est-elle vérifiée? C'est une question qui reste à examiner et que rien, dans ce que nous avons dit jusqu'ici, ne permet de résoudre. Dans la plupart des cas, elle n'est résolue que par voie d'hypothèse, directe ou indirecte. D'ailleurs, nous verrons plus tard qu'il existe une autre manière, distincte de celle-là, de faire dériver les équations de la Dynamique des équations de la Thermodynamique.

5. *Calorimétrie.* — Imaginons un système isolé formé lui-même de trois systèmes indépendants, S_1, S_2, S_3, à l'égard desquels nous ferons certaines suppositions.

Soient U_1, U_2, U_3 les énergies internes des systèmes S_1, S_2, S_3 considérés isolément; l'énergie interne du système complexe formé par leur ensemble pourra s'écrire

$$\Upsilon = U_1 + U_2 + U_3 + \Psi.$$

1° A l'égard de la fonction Ψ, nous supposerons qu'elle soit de la forme

$$\Psi = \Psi_{23} + \Psi_{31} + \Psi_{12},$$

la fonction Ψ_{ij} dépendant uniquement des variables qui caractérisent l'état des deux systèmes S_i, S_j. Cette hypothèse entraîne la conséquence suivante : Les actions que l'un quelconque des trois systèmes S_1, S_2, S_3 éprouve de la part de l'ensemble des deux autres s'obtiennent en composant entre elles les actions qu'il éprouve de la part de chacun des deux autres pris isolément.

2° Les actions du système S_3 sur le système S_1 sont nulles, ou sont telles qu'elles n'effectuent aucun travail dans les modifications du système S_1 que l'on a à étudier.

3° Les actions du système S_2 sur le système S_1 sont nulles; il en est de même des actions du système S_1 sur le système S_2.

De ces deux hypothèses résultent les conséquences suivantes :

Dans les modifications du système S_1 que l'on a à étudier, le travail des actions extérieures appliquées à ce système est toujours égal à o.

Les actions extérieures appliquées au système S_2 se réduisent aux actions exercées par le système S_3.

4° La quantité de chaleur dégagée ou absorbée par le système S_3 est constamment égale à o.

Comme la quantité de chaleur dégagée par l'ensemble S_1, S_2, S_3, qui forme un système isolé, doit être égale à o; comme, d'autre part, cette quantité de chaleur doit être égale à la somme des quantités de chaleur dégagée par chacun des trois systèmes S_1, S_2, S_3, on voit que la quantité de chaleur dQ_2, dégagée pendant le temps dt par le système S_2, sera égale et de signe contraire à la quantité de chaleur dQ_1, dégagée par le système S_1 pendant le même temps,

$$dQ_1 + dQ_2 = 0. \tag{19}$$

A l'égard de la quantité dQ_1, on peut écrire, en vertu de l'égalité (10), et en observant que, d'après nos hypothèses,

$$(A_1 u_1 + \ldots + L_1 w_1 + \mathcal{A}_1 \varphi_1 + \ldots + \mathcal{L}_1 \psi_1)\, dt = 0,$$

l'égalité suivante

$$\begin{aligned}\Big[& \left(E\frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial u_1} - \frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \alpha_1}\right) u_1 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \left(E\frac{\partial U_1}{\partial \lambda_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial w_1} - \frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \lambda_1}\right) w_1 \\ & + \; E\frac{\partial U_1}{\partial a_1}\varphi_1 + \ldots + E\frac{\partial U_1}{\partial l_1}\psi_1 \Big]\, dt = -\,E\, dQ_1.\end{aligned}$$

En vertu de l'égalité (19), celle-ci devient

$$\begin{aligned}E\, dQ_2 = \Big[& \left(E\frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial u_1} - \frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \alpha_1}\right) u_1 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \left(E\frac{\partial U_1}{\partial \lambda_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial w_1} - \frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \lambda_1}\right) w_1 \\ & + \; E\frac{\partial U_1}{\partial a_1}\varphi_1 + \ldots + E\frac{\partial U_1}{\partial l_1}\psi_1 \Big]\, dt.\end{aligned}$$

Cette égalité s'intègre immédiatement et donne l'expression suivante pour la quantité de chaleur Q_2 dégagée par le système S_2 pendant une modification finie quelconque

$$EQ_2 = EU_1'' + \mathfrak{T}_1'' - EU_1' - \mathfrak{T}_1', \tag{20}$$

U_1', $\mathfrak{T}_1'$ représentant les valeurs de U_1, $\mathfrak{T}_1$ à l'instant initial de la modification, et U_1'', $\mathfrak{T}_1''$ représentant les valeurs de U_1, $\mathfrak{T}_1$ à l'instant final de la même modification.

Cette égalité (20) permet déjà d'apprécier l'égalité des quantités de chaleur dégagées par des modifications différentes produites au sein de systèmes différents.

Supposons, en effet, que nous conservions le système S_1, mais que nous remplacions l'ensemble (S_2, S_3) par divers ensembles (S'_2, S'_3), (S''_2, S''_3), ..., les hypothèses indiquées demeurant toujours vérifiées. Si, durant des modifications diverses de ces divers ensembles, le système S_1 est toujours parti du même état initial et du même mouvement initial pour aboutir au même état final et au même mouvement final, les quantités de chaleur Q_2, Q'_2, Q''_2, ..., dégagées dans ces diverses modifications par les systèmes S_2, S'_2, S''_2, ..., soumis respectivement aux actions des S_1, S'_1, S''_1, ..., sont égales entre elles.

Imposons maintenant au système S_1 de nouvelles restrictions :

5° Le système S_1 est en repos au début et à la fin de chacune des modifications que nous étudions, ou, s'il est en mouvement, son mouvement absolu est le même dans les deux cas;

6° L'état du système S_1 est fixé par la connaissance d'une seule variable α_1;

7° Dans les modifications étudiées, la valeur finale de cette variable α''_1 diffère peu de sa valeur initiale α'_1.

La cinquième hypothèse nous donne

$$\mathfrak{T}''_1 - \mathfrak{T}'_1 = 0.$$

La sixième et la septième nous permettent d'écrire

$$U''_1 - U'_1 = \varpi_1(\alpha''_1 - \alpha'_1),$$

ϖ_1 dépendant uniquement de l'état initial du système S_1.

L'égalité (20) devient alors

$$Q_2 = \varpi_1(\alpha''_1 - \alpha'_1).$$

Si donc nous avons soin de toujours prendre le système S_1 dans le même état initial, et si, dans diverses modifications des ensembles (S_1, S_2), (S'_1, S'_2), (S''_1, S''_2), ..., nous observons les variations

$(\alpha_1'' - \alpha_1')$, $(\alpha_1'' - \alpha_1')'$, $(\alpha_1'' - \alpha_1')''$, ... subies par la variable qui définit l'état du système S_1, nous pourrons déterminer les valeurs relatives des quantités de chaleur Q_2, Q_2', Q_2'', ... dégagées par les systèmes S_2, S_2', S_2'', ... dans ces diverses modifications.

Le système S_1 que nous venons de définir se nomme un *calorimètre*. Les calorimètres usités dans la pratique ne réalisent que d'une manière approchée ce type idéal du calorimètre; par des corrections diverses, fondées soit sur des hypothèses directes, soit sur les conséquences de diverses théories physiques, on s'efforce de diminuer l'écart entre leurs indications et celles du calorimètre idéal. Nous laissons au lecteur le soin de rechercher par quelle suite d'idées, dans chaque cas particulier, on est conduit à admettre que le calorimètre réel vérifie sensiblement les sept hypothèses que nous avons énumérées [1].

Le calorimètre détermine le rapport de deux quantités de chaleur dégagées par deux systèmes différents dans deux circonstances différentes; il permettra donc de déterminer la valeur d'une quantité de chaleur, de la mesurer d'une manière absolue, si l'on connaît la quantité de chaleur prise pour unité.

La définition donnée par les égalités (10), (12), (12 *bis*) et (13), de la quantité de chaleur dégagée durant une modification réelle ou virtuelle d'un système, montre qu'une quantité de chaleur est une grandeur de même espèce qu'une œuvre; l'unité de quantité de chaleur est donc déterminée lorsqu'on connaît l'unité d'œuvre. Effectivement, de l'égalité (10), il est facile de conclure la proposition suivante :

Si l'œuvre accomplie, durant une modification quelconque d'un système, par les corps étrangers à ce système, est égale à l'unité d'œuvre; et si, durant cette modification, les actions exercées sur ce système par les corps étrangers n'effectuent aucun travail, le sys-

---

[1] Dans la pratique, le système S_1, invariablement lié à la terre, n'a pas *rigoureusement* le même mouvement absolu au début et à la fin de chaque modification; mais, étant données les hypothèses admises au sujet du mouvement absolu de la terre, le mouvement absolu du calorimètre subit, au cours d'une opération, des variations qui n'exercent qu'une influence négligeable sur les résultats des déterminations expérimentales.

tème absorbe durant cette modification une quantité de chaleur égale à l'unité.

A l'égard de l'unité d'œuvre, nous n'avons jusqu'ici établi aucune convention; une seule convention a été établie au sujet du *signe* de l'œuvre; nous sommes convenus de choisir ce signe de telle sorte que l'œuvre accomplie pour mettre un système en mouvement, sans changer son état, soit positive. Nous pouvons donc prendre pour unité d'œuvre une œuvre quelconque, pourvu qu'elle soit positive.

Nous allons prouver que l'œuvre accomplie pour élever la température de l'unité de masse d'eau (dont nous supposons l'état défini uniquement par la température) d'une première température déterminée, que nous nommons le o de l'échelle centigrade, à une autre température déterminée, que nous nommons le $+1$ de l'échelle centigrade, est positive. Nous pourrons alors prendre cette œuvre pour unité d'œuvre, l'unité de quantité de chaleur sera la quantité de chaleur absorbée par l'unité de masse d'eau, lorsque, sans travail externe, sa température s'élève de $0°$ C. à $+1°$ C.

Pour démontrer la proposition énoncée, imaginons que nous ayons un système complexe et isolé, formé lui-même de deux systèmes indépendants S et S'. Le système S est immobile; son état est supposé défini uniquement par sa température; le système S' est un corps mobile dont l'état est supposé invariable. Ces deux systèmes S et S' n'exercent aucune action l'un sur l'autre. Si l'on désigne par $U(\mathfrak{S})$ l'énergie interne du système S, supposé isolé et porté à la température $\mathfrak{S}$; par $\mathfrak{T}$ la force vive du système S', l'énergie totale de notre système complexe aura la forme très simple

$$\mathcal{E} = U(\mathfrak{S}) + \frac{\mathfrak{T}}{E}.$$

Au début de la modification, le système S a la température $\mathfrak{S}$; le système S' est en mouvement, et sa force vive a la valeur $\mathfrak{T}$. Le système S' vient heurter le système S et rebondit. Après le choc, il a une force vive $\mathfrak{T}'$; le système S a une température $\mathfrak{S}'$. Le système étant supposé isolé, l'énergie totale n'a pas varié. On a donc

$$U(\mathfrak{T}) + \frac{\mathfrak{C}}{E} = U(\mathfrak{T}') + \frac{\mathfrak{C}'}{E}$$

ou

$$\frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{C}'}{E} = U(\mathfrak{T}') - U(\mathfrak{T}). \tag{21}$$

L'expérience montre que $\mathfrak{C}'$ est inférieur à $\mathfrak{C}$; donc

$$[U(\mathfrak{T}') - U(\mathfrak{T})]$$

est positif.

Le système S, passant sans travail externe et sans variation de force vive de la température $\mathfrak{T}$ à la température $\mathfrak{T}'$, absorberait une quantité de chaleur *positive* donnée par l'égalité

$$Q = U(\mathfrak{T}') - U(\mathfrak{T}). \tag{22}$$

Nous connaissons donc une modification qui absorbe une quantité de chaleur positive. Le calorimètre, qui nous donne en grandeur et en signe le rapport des quantités de chaleur dégagées dans deux modifications, nous permet, dès lors, de déterminer le signe de toute quantité de chaleur et de prouver *expérimentalement* la proposition énoncée.

L'unité de quantité de chaleur étant déterminée, le calorimètre nous permet de mesurer une quantité quelconque de chaleur, en particulier la quantité de chaleur Q, donnée par l'égalité (22). Si l'on mesure, d'autre part, la variation de force vive $(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}')$, on déduira de l'égalité (21) une détermination expérimentale de l'équivalent mécanique de la chaleur E.

On sait que G.-A. Hirn a réalisé une expérience réelle voisine de l'expérience idéale que nous venons de décrire.

D'autres méthodes ont été employées, notamment par Joule, pour déterminer la valeur de E. Les principes posés conduisent aisément à la justification de ces méthodes.