

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

P. DUHEM

De l'aimantation par influence

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1^{re} série, tome 2 (1888), p. L 1-L 138.

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1888_1_2_L1_0

© Université Paul Sabatier, 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DE

L'AIMANTATION PAR INFLUENCE,

PAR M. P. DUHEM,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lille.

INTRODUCTION.

Les équations sur lesquelles repose la théorie de l'aimantation par influence des corps amorphes ou cristallisés ont été données par Poisson; mais la voie suivie par Poisson pour les établir présente des difficultés de toute sorte: complication des hypothèses fondamentales, manque de rigueur des déductions mathématiques, opposition avec les faits de quelques-unes des conséquences expérimentales.

Les physiciens qui, après Poisson, se sont occupés de cette théorie, et notamment sir W. Thomson et G. Kirchhoff, ont cherché à éliminer ces difficultés; mais ils n'y sont parvenus qu'en admettant d'emblée les équations de l'équilibre magnétique comme des hypothèses primordiales, sans les rattacher d'aucune manière à des théories plus générales ou à des lois directement accessibles à l'expérience.

Cette absence de raisons à l'appui des équations fondamentales de l'équilibre magnétique est d'autant plus regrettable que des obstacles de toute sorte rendent fort difficile la vérification expérimentale des conséquences peu nombreuses qui en ont été déduites jusqu'ici.

Dans ces conditions, nous avons cru utile de reprendre l'établissement de ces équations en nous appuyant seulement sur les lois incontestées qui règlent les actions mutuelles des aimants et sur les principes non moins incontestés de la Thermodynamique. Nous avons été ainsi conduit, pour les corps isotropes, à des conditions d'équilibre identiques à celles que

G. Kirchhoff avait imaginées; dès lors, comme les équations de G. Kirchhoff n'avaient fait l'objet presque d'aucune étude, nous avons examiné quelques-unes des conséquences de ces équations, examen qui nous a amené à rectifier quelques propositions introduites en Physique sans démonstration suffisante.

Pour les corps non isotropes, nous avons été conduit à des conditions d'équilibre d'une forme nouvelle et plus compliquée que celle qu'on pouvait attendre.

Notre travail n'aura assurément pas éliminé toutes les difficultés que présente la théorie de l'aimantation par influence; mais nous espérons au moins qu'il aura contribué à éclaircir quelques-uns des points obscurs de cette théorie.



CHAPITRE I.

POTENTIEL THERMODYNAMIQUE D'UN SYSTÈME QUI RENFERME
DES AIMANTS.

§ I. — Quelques propositions de Thermodynamique.

1. La théorie nouvelle de l'aimantation par influence, que le présent Mémoire aura pour but de développer, repose sur l'emploi des principes de la Thermodynamique. Qu'il nous soit permis de rappeler ces principes sous la forme que nous aurons à employer dans la suite.

Lorsqu'un système subit une transformation élémentaire, il dégage une quantité de chaleur dQ ; les forces extérieures auxquelles il est soumis effectuent un travail infiniment petit $d\varepsilon_e$, et l'on a

$$(1) \quad dQ = -dU + A d\varepsilon_e,$$

A étant l'équivalent calorifique du travail et U une fonction de l'état du système à laquelle on donne le nom d'*énergie interne*.

Si T désigne la température absolue que possèdent tous les points du système au moment où cette modification se produit, on a aussi

$$(2) \quad \frac{dQ}{T} = -dS + A dN,$$

S étant une fonction de l'état du système à laquelle on donne le nom d'*entropie*, et dN une quantité infiniment petite, toujours positive et nulle seulement lorsque la transformation considérée est réversible, quantité à laquelle on donne le nom de *transformation non compensée*.

Ces deux propositions si simples sont la forme donnée au principe de l'équivalence de la chaleur et du travail et au principe de Carnot par M. Clausius.

M. J.-W. Gibbs en a déduit une conséquence presque immédiate, dont la fécondité semble s'accroître chaque jour.

Posons, lorsque T demeure constant,

$$dN = \frac{d\varepsilon}{T},$$

et donnons à $d\tau$ le nom de *travail non compensé accompli dans une transformation isothermique*; nous aurons de ce travail cette remarquable expression

$$(3) \quad d\tau = -\mathbf{E} d(\mathbf{U} - \mathbf{T}\mathbf{S}) + d\mathbf{\bar{E}}_c,$$

\mathbf{E} étant l'équivalent mécanique de la chaleur.

Supposons maintenant que les forces extérieures admettent un potentiel \mathbf{W} , de telle sorte que l'on ait

$$d\mathbf{\bar{E}}_c = -d\mathbf{W},$$

et posons

$$(4) \quad \Omega = \mathbf{E}(\mathbf{U} - \mathbf{T}\mathbf{S}) + \mathbf{W};$$

l'égalité (3) deviendra

$$d\tau = -d\Omega;$$

le travail non compensé effectué durant une transformation isothermique est alors la variation changée de signe d'une fonction de l'état du système Ω .

Nous donnerons à cette fonction Ω le nom de *potentiel thermodynamique* du système.

Moyennant ces conventions, la condition d'après laquelle dN doit toujours être positif peut s'énoncer ainsi :

Pour qu'un système dont tous les points sont à la même température absolue soit en équilibre stable, il suffit que le potentiel thermodynamique de ce système ait la plus petite valeur qu'il peut prendre à la température considérée.

Tels sont les principes sur lesquels reposent les raisonnements dont il sera fait usage au cours du présent travail.

L'étude de l'équilibre d'un système quelconque suppose, en premier lieu, la détermination de la forme du potentiel thermodynamique de ce système; nous aurons donc, en premier lieu, à déterminer la forme du potentiel thermodynamique d'un système qui renferme des aimants. Pour y parvenir, nous suivrons une voie analogue à celle qui, dans un autre travail, nous a permis d'obtenir le potentiel thermodynamique d'un système électrisé. Cette voie suppose l'emploi d'un lemme fondamental dont nous allons rappeler l'énoncé et la démonstration.

2. Imaginons un système décomposé en un nombre limité ou illimité de corps finis ou infiniment petits, susceptibles d'être déplacés les uns par rapport aux autres. Imaginons qu'à chacun de ces corps on ait invariablement lié un système d'axes de coordonnées rectangulaires. Pour connaître complètement l'état du système, il faudra connaître la position de l'origine de chacun de ces systèmes d'axes et l'orientation des axes. En général, il faut aussi connaître un certain nombre d'autres quantités : forme et volume de chacun des corps, état physique et chimique dans lequel il se trouve, température qu'il possède en ses divers points, etc. Lorsque les premières quantités varieront seules, les autres demeurant invariables, nous dirons que *l'on déplace les uns par rapport aux autres les divers corps du système sans changer leur état.*

A un semblable déplacement on peut appliquer les propositions établies en Mécanique rationnelle pour les déplacements d'un système de solides invariables.

Soient

E l'équivalent mécanique de la chaleur;

T la température absolue du système supposée la même en tous les points;

U son énergie interne;

S son entropie.

Dans un déplacement infiniment petit sans changement d'état, la quantité

$$E(U - TS),$$

que nous nommerons le *potentiel thermodynamique interne*, éprouve une variation

$$E \delta(U - TS).$$

En même temps, les actions mécaniques internes que les divers corps du système exercent les uns sur les autres effectuent un certain travail $\delta \tilde{e}_i$ et l'on a

$$(5) \quad \delta \tilde{e}_i = -E(U - TS),$$

égalité que l'on peut énoncer ainsi :

Dans toute modification qui déplace les uns par rapport aux autres les divers corps qui constituent un système sans changer leur état, le travail effectué par les actions mécaniques internes du système est la

variation changée de signe d'un potentiel, et ce potentiel ne diffère du potentiel thermodynamique interne que d'une quantité qui peut bien dépendre de l'état des divers corps, mais qui ne dépend pas de leur position.

La démonstration de cette proposition est extrêmement simple.

Imposons à chacun des corps du système la liaison de demeurer dans un état invariable et appliquons au système, devenu ainsi incapable d'éprouver aucune modification autre que les déplacements que nous avons en vue d'étudier :

1^o Des forces égales et directement opposées aux forces extérieures qui agissent sur lui;

2^o Des forces qui, dans tout déplacement du genre de ceux que nous considérons, effectuent un travail $\delta\tilde{\epsilon}_i'$ égal ou inférieur à

$$E \delta(U - TS),$$

de telle façon que l'on ait, pour tout déplacement de ce genre,

$$(6) \quad E \delta(U - TS) - \delta\tilde{\epsilon}_i' \geq 0.$$

Soit Υ l'énergie interne du système ainsi modifié; soit Σ son entropie; soit $\delta\Theta$ le travail externe effectué dans un déplacement du genre de celui que nous considérons par les forces extérieures qui agissent maintenant sur le système. Dans un semblable déplacement, le travail non compensé effectué a pour valeur, d'après l'égalité (3),

$$(7) \quad \delta\tau = -E \delta(\Upsilon - T\Sigma) + \delta\Theta.$$

Mais, par hypothèse, l'état du système a été maintenu le même avant et après l'addition des nouvelles forces; on a donc

$$\begin{aligned} \Upsilon &= U, \\ \Sigma &= S. \end{aligned}$$

D'autre part, les forces extérieures qui agissent sur le système après l'addition des nouvelles forces se composent :

1^o Des forces extérieures qui agissaient auparavant sur le système; dans la modification considérée, elles effectuent un travail $\delta\tilde{\epsilon}_e$;

2^o Du premier groupe de forces ajoutées; dans la modification considérée, ces forces effectuent évidemment le travail $-\delta\tilde{\epsilon}_e$;

3° Du second groupe de forces ajoutées; dans la modification considérée, ces forces effectuent, par hypothèse, le travail $\delta\tilde{\epsilon}'_i$.

On a donc

$$\delta\Theta = \delta\tilde{\epsilon}_e - \delta\tilde{\epsilon}_e + \delta\tilde{\epsilon}'_i = \delta\tilde{\epsilon}'_i,$$

et l'égalité (7) devient

$$\delta\tau = -E\delta(U - TS) + \delta\tilde{\epsilon}'_i.$$

D'après l'inégalité (6), cette quantité est nulle ou négative; dès lors, d'après les propositions de Thermodynamique que nous rappelions au commencement de ce paragraphe, la modification correspondante, entraînant un travail non compensé nul ou négatif, ne peut se produire; le système, soumis aux actions mécaniques qui agissent réellement sur lui et à celles que nous y avons adjointes, ne peut subir aucun déplacement qui n'altère pas l'état de ses diverses parties; les liaisons qui lui interdisent toute modification autre que des déplacements de ce genre assurent l'équilibre du système.

Mais, grâce à ces liaisons par lesquelles chacun des corps qui constituent le système est supposé maintenu dans un état invariable, les propositions de la Mécanique rationnelle relatives aux systèmes formés de corps solides sont applicables au système précédent. On peut, en particulier, lui appliquer le principe des vitesses virtuelles.

D'après ce qui précède, le système est en équilibre sous l'action de quatre systèmes de forces :

1° Les forces mécaniques extérieures qui agissaient primitivement sur lui;

2° Les actions mécaniques intérieures que les divers corps qui le constituent exercent les uns sur les autres;

3° Des forces égales et directement opposées aux forces extérieures;

4° Des forces effectuant dans tout déplacement virtuel un travail $\delta\tilde{\epsilon}'_i$ égal ou inférieur à $E\delta(U - TS)$.

Le premier et le troisième système de forces se détruisent. On peut donc dire que le système est en équilibre sous l'action du second et du quatrième groupe de forces.

Mais, dans toute modification du système où ses diverses parties changent de position sans changer d'état, les forces du second groupe effectuent un travail virtuel $\delta\tilde{\epsilon}_i$; les forces du quatrième groupe effectuent un travail virtuel $\delta\tilde{\epsilon}'_i$; en vertu du principe des vitesses virtuelles, le système ne peut être

en équilibre sous l'action de ces deux groupes de forces si l'on n'a

$$\delta\mathcal{E}_i + \delta\mathcal{E}'_i \leq 0.$$

Cela doit avoir lieu toutes les fois que $\delta\mathcal{E}'_i$ vérifie l'inégalité (6). On doit donc avoir

$$\delta\mathcal{E}_i \leq -E \delta(U - TS).$$

Si l'on suppose maintenant qu'à tout déplacement virtuel des diverses parties du système on puisse faire correspondre le déplacement inverse, on verra aisément que l'inégalité précédente se réduit à l'égalité (6) :

$$\delta\mathcal{E}_i = -E \delta(U - TS),$$

que nous nous proposons de démontrer.

3. Ce théorème fondamental entraîne quelques conséquences qui en dérivent immédiatement et que nous pouvons indiquer ici.

Corollaire I. — L'égalité (3)

$$\delta\tau = -E \delta(U - TS) + \delta\mathcal{E}_e$$

devient, en vertu de cette égalité (6),

$$\delta\tau = \delta\mathcal{E}_i + \delta\mathcal{E}_e,$$

ce qui peut s'énoncer ainsi :

Lorsqu'un système subit un déplacement sans changement d'état de ses diverses parties, le travail non compensé produit dans ce système est égal au travail produit par les actions mécaniques, tant externes qu'internes, qui agissent sur les diverses parties du système.

Corollaire II. — Lorsqu'un système dont tous les points sont à la même température subit une modification isothermique, l'entropie de ce système varie de δS et l'on donne à la quantité

$$\delta\tau = -ET \delta S$$

le nom de *travail compensé* accompli dans la modification considérée.

Considérons un système défini par sa température absolue et par un cer-

tain nombre d'autres variables; nous aurons

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial T} [E(U - TS)] = E \frac{\partial U}{\partial T} - ET \frac{\partial S}{\partial T} - ES.$$

Supposons qu'il s'agisse d'un système primitivement en état d'équilibre, la modification infiniment petite considérée sera réversible; elle mettra en jeu une quantité de chaleur δQ , et le principe de Carnot-Clausius donnera [égalité (2)]

$$\delta S = -\frac{\delta Q}{T},$$

tandis que le principe de l'équivalence donnera [égalité (1)]

$$\delta Q = -\delta U + A \delta \varepsilon_e.$$

L'égalité (8) deviendra donc

$$\frac{\partial}{\partial T} [E(U - TS)] = -ES - \delta \varepsilon_e,$$

$\delta \varepsilon_e$ étant le travail accompli par les forces extérieures qui sollicitent le système lorsque la température varie de δT , les autres variables qui définissent le système conservant leur valeur.

Si, en particulier, ces variables sont choisies de telle sorte qu'aucun travail externe ne puisse être effectué dans le système si elles ne changent de valeur, on aura

$$\delta \varepsilon_e = 0$$

et

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial T} [E(U - TS)] = -ES,$$

égalité applicable à tous les systèmes pris dans un état d'équilibre.

M. Massieu a, le premier, signalé l'importance de cette égalité.

Faisons-en une application au cas qui nous occupe.

Supposons qu'un système, primitivement en équilibre, subisse un déplacement infiniment petit de ses diverses parties. Nous aurons

$$\delta S = -\frac{\partial}{\partial T} \delta(U - TS).$$

Mais $\delta(U - TS)$ peut, dans ce cas, être remplacé par la variation que subit le potentiel des actions mécaniques internes du système. Si ces actions mécaniques sont indépendantes de la température, il en sera de même de leur

potentiel, et l'on aura, par conséquent,

$$\delta S = 0,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\delta z = 0.$$

Ainsi, lorsque les actions mécaniques que diverses parties d'un système exercent les unes sur les autres ne subissent aucune variation pendant un échauffement du système qui laisse invariable le volume, la forme et la position de ses diverses parties, un déplacement sans changement d'état des diverses parties de ce système primitivement en équilibre ne fait pas varier l'entropie du système; il n'entraîne aucun travail compensé.

Corollaire III. — Dans une modification isothermique quelconque, on a

$$\begin{aligned}\delta \tau &= -\delta E(U - TS) + \delta \tilde{e}_e \\ &= -E \delta U + ET \delta S + \delta \tilde{e}_e.\end{aligned}$$

Dans les conditions moyennant lesquelles le théorème précédent est énoncé, on a

$$\begin{aligned}\delta \tau &= \delta \tilde{e}_i + \delta \tilde{e}_e, \\ \delta S &= 0.\end{aligned}$$

On a donc

$$\delta \tilde{e}_i = -\delta(EU),$$

ce qui peut s'énoncer ainsi :

Dans les conditions précédentes, le travail exercé par les actions mécaniques internes est égal à la variation changée de signe du produit de l'équivalent mécanique de la chaleur par l'énergie interne du système.

Ces corollaires si simples jouent un rôle important dans les rapprochements que l'on peut tenter de faire entre la Mécanique rationnelle et la Thermodynamique.

Les modifications qu'envisage la Mécanique rationnelle consistent exclusivement en déplacements, sans changement d'état, des diverses parties d'un système; aussitôt que le déplacement est accompagné d'un changement d'état, la Mécanique rationnelle ne suffit plus à l'étudier. Dès lors les deux premiers corollaires énoncés ci-dessus nous montrent que les travaux étudiés en Mécanique rationnelle se rangent toujours dans la catégorie du travail non compensé; que les modifications auxquelles elle s'applique n'en-

gendent jamais aucun travail compensé. Par conséquent, c'est l'étude du travail non compensé qui doit fournir en Thermodynamique des propositions analogues à celles dont la Mécanique fait usage; il serait vain et illusoire de chercher dans les exemples que nous fournit la Mécanique une quantité analogue au travail compensé.

Quant au troisième corollaire, il nous montre que l'on peut, tant que l'on n'étudie que des déplacements sans changement d'état, confondre le produit de l'énergie interne par l'équivalent mécanique de la chaleur avec le potentiel des actions intérieures du système; que l'on peut, par exemple, se servir de l'énergie interne comme d'un potentiel pour déterminer les états d'équilibre du système; mais il faut bien se garder d'étendre cette manière d'opérer lorsqu'on passe des déplacements sans changement d'état aux changements d'état accompagnés ou non de déplacements; en d'autres termes, lorsqu'on passe du domaine de la Mécanique rationnelle au domaine propre de la Thermodynamique; c'est alors le potentiel thermodynamique interne, et non l'équivalent mécanique de l'énergie interne, qui joue le même rôle que le potentiel des actions mécaniques internes en Thermodynamique. C'est faute d'avoir fait cette remarque que l'on a été conduit à deux lois inexactes qui ont joué un grand rôle en Physique et que les travaux récents de nombreux savants, en particulier de M. J.-W. Gibbs et de M. H. von Helmholtz, sont parvenus à grand'peine à rectifier. Ces lois sont, en Thermochimie, le principe du travail maximum; en Électricité, la loi de la proportionnalité entre la force électromotrice d'une pile et la quantité de chaleur mise en jeu par la réaction dont cette pile est le siège.

4. La proposition que nous venons de développer met donc en évidence les relations qui unissent la Mécanique à la Thermodynamique. Ces relations deviendront encore plus nettes par la remarque suivante :

Dans la démonstration du théorème précédent, nous avons fait appel au principe des vitesses virtuelles. Il est aisé de montrer qu'en inversement, à l'aide de ce théorème, on peut déduire le principe des vitesses virtuelles des principes fondamentaux de la Thermodynamique.

D'après ces derniers principes, un système est assurément en équilibre stable si, pour toute modification isothermique virtuelle de ce système, le travail non compensé, c'est-à-dire la quantité

$$- E \delta(U - TS) + \delta \tilde{e}_c,$$

est nulle ou négative.

Supposons-nous placé dans le seul cas qu'étudie la Mécanique rationnelle, c'est-à-dire dans le cas où les diverses parties du système ne peuvent éprouver que déplacements sans changement d'état. D'après le corollaire I, la proposition précédente pourra s'énoncer :

L'équilibre d'un système dont les diverses parties sont susceptibles de se déplacer, mais non d'éprouver des changements d'état, est assuré si le travail effectué dans tout déplacement virtuel de ce système par toutes les forces qui agissent sur lui est nul ou négatif.

Supposons que les forces extérieures qui agissent sur le système admettent un potentiel W ; l'équilibre stable du système sera assuré si le potentiel thermodynamique

$$\Omega = E(U - TS) + W$$

est minimum à la température considérée.

Supposons que les diverses parties du système ne puissent éprouver que des déplacements sans changement d'état; dans ces conditions, $E(U - TS)$ ne diffère que par une constante du potentiel des actions mécaniques internes; Ω ne diffère que par une constante du potentiel de toutes les forces qui agissent sur le système, et l'on a cette proposition :

L'équilibre stable d'un système soumis à des forces extérieures qui admettent un potentiel est assuré lorsque le potentiel total des forces, tant intérieures qu'extérieures, est minimum.

Cette dernière proposition n'est autre chose que le critérium de stabilité bien connu dont on doit l'invention à Lagrange et la démonstration à Lejeune-Dirichlet. La première rappelle l'énoncé du principe des vitesses virtuelles tel que Gauss l'a formulé le premier d'une manière complète; mais elle présente avec cet énoncé une légère différence sur laquelle il nous est nécessaire d'insister.

En Mécanique rationnelle, le principe des vitesses virtuelles se présente comme une condition d'équilibre *nécessaire et suffisante*. Déduit, au contraire, de la Thermodynamique, ce principe se présente comme une condition *suffisante*, mais non *nécessaire*, de l'équilibre. Cette différence tient à la nature même du principe de Carnot, sur lequel est fondée la Thermodynamique. En Mécanique, tout système pour lequel les conditions d'équilibre déduites du principe des vitesses virtuelles ne sont pas vérifiées est

censé se mettre en mouvement. En Thermodynamique, au contraire, on sait bien qu'un système ne saurait éprouver de changement d'état contraire au principe de Carnot-Clausius; que si, par conséquent, toute modification virtuelle du système contredit à ce principe, le système sera forcément en équilibre; mais, lorsqu'un système peut éprouver une modification virtuelle compatible avec ce principe, on ignore si réellement il éprouvera ou non cette modification.

J'ajouterais que le principe des vitesses virtuelles, présenté par la Thermodynamique comme condition suffisante, mais non nécessaire, de l'équilibre est toujours conforme à l'expérience, tandis que l'expérience nous présente chaque jour des cas d'équilibre contraires au principe des vitesses virtuelles tel qu'on l'admet en Mécanique rationnelle; on dit alors qu'il y a *frottement*, et le principe des vitesses virtuelles suppose un système soumis à des liaisons dépourvues de frottement.

Tout ce que nous venons de dire montre assez l'importance des propositions énoncées dans le présent paragraphe; ces propositions ont déjà servi de base à toutes les applications de la Thermodynamique que nous avons faites aux phénomènes électriques. Avant d'en faire le point de départ de nos recherches sur le magnétisme, nous avons cru devoir les soumettre à un rigoureux examen.

§ II. — Potentiel et fonction potentielle magnétiques.

5. Les travaux de Gilbert et de Coulomb ont conduit à regarder chaque élément de volume d'un aimant comme un *élément magnétique*. Soit $d\mathbf{v}$ le volume d'un semblable élément; son état magnétique est défini par une certaine grandeur, essentiellement positive, $\mathfrak{M} d\mathbf{v}$, que l'on nomme son *moment magnétique*, et par la direction d'une certaine demi-droite MM' , que l'on nomme son *axe magnétique*. \mathfrak{M} se nomme l'*intensité de l'aimantation* en un point de l'élément $d\mathbf{v}$; c'est, en général, une quantité finie. Si, sur l'axe magnétique, dans la direction MM' de cet axe, on porte une longueur égale à \mathfrak{M} , on obtient une grandeur géométrique ayant pour composantes \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , suivant trois axes de coordonnées rectangulaires Ox , Oy , Oz . La connaissance de ces trois quantités \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , que l'on nomme les *composantes de l'aimantation*, est nécessaire et suffisante pour déterminer l'état magnétique de l'élément $d\mathbf{v}$.

Deux aimants A , A_1 , de dimensions comparables à ceux que l'on peut

étudier expérimentalement, placés à une distance comparable à celles aux-
quelles les mesures peuvent être effectuées, exercent l'un sur l'autre des
actions mécaniques; les expériences de Coulomb et de Gauss ont précisé la
loi de ces actions; cette loi peut être énoncée de la manière suivante :

Soient $d\sigma$ un élément du corps A et $d\sigma_1$ un élément du corps A_1 .

Sur l'axe magnétique MM' de l'élément $d\sigma$ et à l'intérieur ou au voisinage immédiat de cet élément, prenons deux points infiniment voisins M et M', séparés par une distance dl . Au point M', plaçons une masse fictive $\mu = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial l}$ et au point M une masse fictive égale à $-\mu$. De même, sur l'axe magnétique $M_1 M'_1$ de l'élément $d\sigma_1$, prenons deux points infiniment voisins M_1 et M'_1 , séparés par une distance dl_1 ; au point M'_1 , plaçons une masse fictive $\mu_1 = \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial l_1}$ et au point M_1 , une masse fictive égale à $-\mu_1$.

Les deux corps A et A_1 exercent l'un sur l'autre les mêmes actions que si toute masse fictive m du corps A repoussait toute masse fictive m_1 du corps A_1 , avec une force F dirigée suivant la droite qui joint les deux masses et ayant pour valeur

$$F = h \frac{mm_1}{r^2},$$

h étant une constante positive et r la distance qui sépare les masses m et m_1 .

Il résulte de là que les actions mutuelles des deux corps A et A_1 , admettent un potentiel et que ce potentiel a pour expression

$$h \int_A \int_{A_1} \mathcal{M} \mathcal{M}_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial l \partial l_1} d\sigma d\sigma_1,$$

r étant la distance d'un point de l'élément $d\sigma$ à un point de l'élément $d\sigma_1$, dl et dl_1 étant, comme nous l'avons supposé dans ce qui précède, deux longueurs infiniment petites comptées respectivement sur les axes magnétiques des éléments, l'une des sommes s'étendant au volume entier du corps A, l'autre au volume du corps A_1 .

L'expérience n'a rien appris jusqu'ici sur la loi qui règle les actions de deux aimants extrêmement petits, rapprochés jusqu'au contact. Rien ne prouve donc *a priori* que l'on puisse appliquer cette loi aux actions mutuelles des diverses particules contiguës d'un même aimant. Nous allons

voir au contraire qu'une semblable extension serait absurde. Il nous suffira pour cela de transformer par un calcul d'identité l'expression

$$\mathfrak{M} \mathfrak{M}_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial l \partial l_1} dv dv_1.$$

Soient x, y, z les coordonnées d'un point du volume dv et x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un point du volume dv_1 ; nous aurons

$$\begin{aligned} dv &= dx dy dz, \\ dv_1 &= dx_1 dy_1 dz_1; \end{aligned}$$

nous aurons ensuite

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial l \partial l_1} &= \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial x_1} \frac{dx}{dl} \frac{dx_1}{dl_1} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y_1} \frac{dx}{dl} \frac{dy_1}{dl_1} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z_1} \frac{dx}{dl} \frac{dz_1}{dl_1} \\ &+ \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial x_1} \frac{dy}{dl} \frac{dx_1}{dl_1} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial y_1} \frac{dy}{dl} \frac{dy_1}{dl_1} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z_1} \frac{dy}{dl} \frac{dz_1}{dl_1} \\ &+ \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial x_1} \frac{dz}{dl} \frac{dx_1}{dl_1} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial y_1} \frac{dz}{dl} \frac{dy_1}{dl_1} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial z_1} \frac{dz}{dl} \frac{dz_1}{dl_1}; \end{aligned}$$

nous aurons enfin

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dl} &= \frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{M}}, & \frac{dy}{dl} &= \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{M}}, & \frac{dz}{dl} &= \frac{\mathcal{Z}}{\mathfrak{M}}, \\ \frac{dx_1}{dl_1} &= \frac{\mathcal{A}_1}{\mathfrak{M}_1}, & \frac{dy_1}{dl_1} &= \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{M}_1}, & \frac{dz_1}{dl_1} &= \frac{\mathcal{Z}_1}{\mathfrak{M}_1}. \end{aligned}$$

De toutes ces égalités, il résulte que l'on a

$$\begin{aligned} (10) \quad \mathfrak{M} \mathfrak{M}_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial l \partial l_1} dv dv_1 &= \mathcal{A} \left(\mathcal{A}_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial x_1} + \mathfrak{B}_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y_1} + \mathcal{Z}_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z_1} \right) dx dy dz dx_1 dy_1 dz_1 \\ &+ \mathfrak{B} \left(\mathcal{A}_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial x_1} + \mathfrak{B}_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial y_1} + \mathcal{Z}_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z_1} \right) dx dy dz dx_1 dy_1 dz_1 \\ &+ \mathcal{Z} \left(\mathcal{A}_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial x_1} + \mathfrak{B}_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial y_1} + \mathcal{Z}_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial z_1} \right) dx dy dz dx_1 dy_1 dz_1 \end{aligned}$$

Dès lors, si la loi précédente demeurait exacte, même pour les particules contiguës d'un aimant, les actions mutuelles des diverses particules d'un aimant devraient admettre pour potentiel la quantité

$$\frac{h}{2} \int dv \left[\begin{aligned} & \mathfrak{A}' \int \left(\mathfrak{A}' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial x'} + \mathfrak{B}' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y'} + \mathfrak{C}' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z'} \right) dv' \\ & + \mathfrak{B}' \int \left(\mathfrak{A}' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial x'} + \mathfrak{B}' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial y'} + \mathfrak{C}' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z'} \right) dv' \\ & + \mathfrak{C}' \int \left(\mathfrak{A}' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial x'} + \mathfrak{B}' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial y'} + \mathfrak{C}' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial z'} \right) dv' \end{aligned} \right],$$

toutes les intégrations s'étendant au volume entier de l'aimant. Or, nous avons vu, dans l'*Étude historique sur l'aimantation par influence* que nous avons publiée (§ I, n° 5), que les trois intégrales triples qui servent ici de coefficients à \mathfrak{A}' , \mathfrak{B}' et \mathfrak{C}' n'avaient aucun sens; il en est donc de même de l'expression précédente, et l'extension proposée de la loi expérimentale des actions magnétiques serait absurde.

Mais il est aisé de transformer l'énoncé de cette loi en un autre énoncé qui puisse s'étendre aux actions mutuelles des particules d'un même aimant.

D'après l'égalité (10), si nous désignons par ψ l'intégrale

$$\int \left(\mathfrak{A}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \mathfrak{B}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + \mathfrak{C}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \right) dv_1,$$

étendue à l'aimant A, tout entier, r étant la distance d'un point de l'élément dx, dy, dz , à un point (x, y, z) du corps A, le potentiel des actions mutuelles de l'aimant A sur l'aimant A, aura pour valeur.

$$h \int \left(\mathfrak{A} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mathfrak{B} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \mathfrak{C} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dv.$$

Cette dernière expression peut se généraliser et s'appliquer aux actions mutuelles des particules d'un même aimant, moyennant l'existence de la quantité

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial z},$$

nous avons vu (*Étude historique*, § I, n° 5) que la fonction

$$\Psi = \int \left(\mathcal{A}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \mathcal{B}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \mathcal{C}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) dv',$$

dans laquelle l'intégration s'étend à l'aimant A tout entier et dans laquelle r désigne la distance d'un point de l'élément $dx' dy' dz'$ de l'aimant A à un point (x, y, z) du même aimant, est une fonction finie, continue et uniforme des coordonnées (x, y, z) et qu'elle admet par rapport à ces coordonnées des dérivées partielles du premier ordre. Dès lors, rien ne nous empêche d'admettre, comme généralisation des faits d'expérience, que les actions mutuelles des diverses particules d'un aimant A admettent pour potentiel la quantité

$$\frac{h}{2} \left(\mathcal{A} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \mathcal{B} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) dv.$$

Dans ce qui va suivre, nous admettrons cette hypothèse.

Désormais nous désignerons par la lettre φ la somme des deux fonctions ψ et Ψ , c'est-à-dire l'intégrale

$$\int \left(\mathcal{A}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \mathcal{B}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \mathcal{C}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) dv'$$

étendue à tous les aimants du système, r étant la distance d'un point de l'élément $dx' dy' dz'$ à un point (x, y, z) de l'espace. Nous nommerons cette fonction φ la *fonction potentielle magnétique*.

Pourvu que la quantité

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z}$$

existe et soit finie en tout point des aimants que renferme le système, la fonction φ est, dans tout l'espace, une fonction finie, continue et uniforme de x, y, z admettant des dérivées premières par rapport à ces variables.

Si la quantité

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z}$$

est en outre continue, ces dérivées premières sont continues, sauf à la surface de séparation d'un aimant et d'une substance non aimantée. Si N_i et N_e

sont les normales vers l'intérieur ou l'extérieur à une telle surface, on a

$$(11) \quad \frac{\partial \psi}{\partial N_i} + \frac{\partial \psi}{\partial N_e} = -4\pi [\alpha \cos(N_i, x) + \beta \cos(N_i, y) + \gamma \cos(N_i, z)].$$

Si enfin la quantité

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}$$

admet, par rapport à x, y, z , des dérivées partielles du premier ordre, ψ admet, par rapport aux mêmes variables, des dérivées partielles du second ordre, et l'on a dans tout l'espace

$$(12) \quad \Delta \psi = -4\pi \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right),$$

égalité qui se réduit, lorsque le point (x, y, z) est extérieur aux aimants, à

$$(13) \quad \Delta \psi = 0.$$

Les actions mécaniques internes d'un système d'aimants admettent alors pour potentiel la quantité \mathfrak{F} définie par l'égalité

$$(14) \quad \mathfrak{F} = \frac{h}{2} \int \left(\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dv,$$

l'intégration s'étendant à tous les aimants du système. \mathfrak{F} est le *potentiel magnétique* du système.

Ce résultat, obtenu en généralisant la loi expérimentale de Coulomb et de Gauss, est l'hypothèse unique sur laquelle nous fonderons l'étude de l'aimantation par influence. Au moyen de cette hypothèse et du théorème développé au paragraphe précédent, nous allons, au paragraphe suivant, déterminer la forme du potentiel thermodynamique d'un système de corps aimantés.

§ III. — Potentiel thermodynamique des corps isotropes aimantés.

6. Considérons un système qui renferme des aimants et supposons que les seules actions mécaniques qui s'exercent dans l'intérieur de ce système soient les actions magnétiques, hypothèse qui ne serait pas vérifiée si le système renfermait soit des charges électriques en équilibre, soit des courants électriques constants ou variables.

D'après ce que nous venons de dire, les actions mécaniques internes de ce système admettent pour potentiel la quantité \mathfrak{F} définie par l'égalité (14).

Nous nous proposons de déterminer la forme du potentiel thermodynamique interne du système. Ce potentiel thermodynamique interne est défini par l'égalité

$$\mathfrak{f} = E(Y - T\Sigma),$$

E étant l'équivalent mécanique de la chaleur;

Y l'énergie interne du système;

Σ son entropie;

T la température absolue commune à tous ses points.

D'après ce que nous avons vu au § I, ce potentiel thermodynamique interne ne diffère du potentiel des actions mécaniques intérieures au système que d'une quantité qui peut dépendre de l'état des divers éléments magnétiques, mais non de leur position, en sorte que, si l'on désigne par \mathfrak{f}' une semblable quantité, on doit avoir

$$(15) \quad \mathfrak{f} = \mathfrak{F} + \mathfrak{f}'.$$

C'est donc la quantité \mathfrak{f}' qu'il s'agit pour nous de déterminer.

L'état de chacun des éléments du système dépend :

Du volume de l'élément;

De la forme de la surface qui le limite;

De l'orientation de l'axe magnétique par rapport à cette surface;

Si la substance n'est pas isotrope, de l'orientation de l'axe magnétique par rapport aux axes d'élasticité de la substance;

De l'intensité de l'aimantation en un point;

Enfin d'autres paramètres α, β, \dots , qui achèvent de déterminer l'état physique et chimique de la substance.

Telles sont les variables qui peuvent influer sur la valeur de \mathfrak{f}' .

Bornons-nous, pour le moment, à considérer le cas d'une substance isotrope : nous étudierons dans un Chapitre ultérieur les propriétés des corps cristallisés ; cherchons la variation que subit la quantité \mathfrak{f}' lorsque, dans un élément magnétique, on fait varier l'intensité d'aimantation et l'orientation de l'axe magnétique sans déplacer l'élément et sans faire varier ni son volume ni la forme de la surface qui le limite.

La variation que subit la quantité \mathfrak{f}' par l'effet d'une modification donnée dépend seulement de l'état du système avant et après cette modification et

non de la voie suivie par le système pour passer de l'un de ces états à l'autre. Nous pouvons donc choisir cette voie arbitrairement.

1^o Nous découperons dans le système l'élément dv , dont l'état doit varier; nous éloignerons à l'infini tous les autres éléments du système sans changer l'aimantation ou l'état d'aucun d'entre eux. Dans cette modification, qui constitue ce qu'au § I nous avons nommé un déplacement sans changement d'état, la quantité \mathcal{J}' ne subira aucune variation.

2^o Dans l'élément ainsi isolé, nous ferons subir à l'intensité d'aimantation et à l'orientation de l'axe magnétique les variations infiniment petites que nous avons en vue. Dans cette modification, \mathcal{J}' variera de $\delta_1 \mathcal{J}'$.

3^o Cette modification achevée, nous ramènerons de l'infini tous les éléments du système à leur position initiale sans changer l'état ou l'aimantation d'aucun d'entre eux. Dans ce nouveau déplacement sans changement d'état, \mathcal{J}' ne variera pas.

L'ensemble de ces trois modifications devant faire varier \mathcal{J}' de $\delta_1 \mathcal{J}'$, on a

$$\delta_1 \mathcal{J}' = \delta_1 \mathcal{J}'.$$

Il nous suffit donc d'étudier la variation de $\delta_1 \mathcal{J}'$.

Il est évident que cette variation est égale à la variation que subirait le potentiel thermodynamique d'un système formé par l'élément dv seul, si cet élément subissait le changement considéré d'axe magnétique et d'aimantation sans changer de position, de forme ou d'état.

L'intensité de l'aimantation et l'orientation de l'axe magnétique sont connues lorsqu'on connaît les composantes a , b , c de l'aimantation suivant trois axes rectangulaires invariablement liés à l'élément. Par conséquent, dans la modification précédente, on a

$$\delta_1 \mathcal{J}' = A \delta a + B \delta b + C \delta c,$$

A , B , C étant trois quantités qui peuvent dépendre :

- 1^o De a , b , c ;
- 2^o Du volume dv de l'élément;
- 3^o De la forme de la surface qui le limite;
- 4^o Des coefficients α , β ,

Quelle que soit la forme de la surface qui limite l'élément dv , quelle que soit l'orientation de l'axe magnétique par rapport à cette surface, quel que soit le volume de l'élément dv , nous pouvons le partager en une infinité de

cubes infiniment petits par rapport à cet élément, ayant un volume déterminé d'avance et dans lesquels l'axe magnétique ait une direction déterminée par rapport à la surface qui limite chacun d'eux. Une démonstration analogue à celle que nous venons de faire pour prouver que $\delta\mathcal{J}' = \delta_1\mathcal{J}'$ nous montrera que $\delta_1\mathcal{J}'$ est égal à la somme des quantités analogues obtenues, en supposant que, après avoir éloigné indéfiniment tous ces petits cubes les uns des autres, on fasse subir à chacun d'eux la même variation d'aimantation qu'à l'élément $d\nu$ tout entier.

Il est facile de conclure de là que les quantités A, B, C sont proportionnelles au volume de l'élément $d\nu$ et indépendantes de la forme de la surface qui le limite, en sorte que nous pourrons écrire

$$\delta\mathcal{J}' = \delta_1\mathcal{J}' = (A' \delta\mathcal{A} + B' \delta\mathcal{B} + C' \delta\mathcal{C}) d\nu,$$

A', B', C' dépendant uniquement des variables \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , α , β , ...

Au lieu de prendre \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} comme variables indépendantes pour définir l'état d'aimantation de l'élément $d\nu$, nous pourrons aussi bien prendre pour variables indépendantes \mathfrak{M} et deux des quantités \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , les deux premières par exemple. Nous aurons alors

$$\delta\mathcal{J}' = \delta_1\mathcal{J}' = (m \delta\mathfrak{M} + \alpha \delta\mathcal{A} + b \delta\mathcal{B}) d\nu,$$

m , α et b étant trois fonctions de \mathfrak{M} , \mathcal{A} , \mathcal{B} , α , β , ... seulement.

La forme de la surface qui limite l'élément $d\nu$ n'influant pas sur la valeur des quantités m , α et b , on peut, pour les déterminer, donner à l'élément la forme d'une sphère. Cette hypothèse admise, envisageons les deux modifications équivalentes que voici :

Dans la première modification, on suppose qu'on laisse l'élément immobile, qu'on ne fasse point varier son intensité d'aimantation \mathfrak{M} , non plus que les paramètres α , β , ..., mais qu'on change l'orientation de son axe magnétique, de telle façon que \mathcal{A} et \mathcal{B} varient de quantités quelconques $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$. Dans cette première modification, on a

$$\delta\mathcal{J}' = \delta_1\mathcal{J}' = (\alpha \delta\mathcal{A} + b \delta\mathcal{B}) d\nu.$$

Dans la seconde modification, on suppose qu'on laisse invariable l'intensité d'aimantation et les paramètres α , β , ...; que l'axe magnétique demeure invariablement lié à l'élément, mais qu'on fasse tourner celui-ci autour de son centre de manière que l'axe magnétique subisse dans l'espace le

même changement d'orientation que dans la précédente modification. Cette seconde modification constitue un déplacement sans changement d'état, en sorte que l'on a, durant cette modification,

$$\delta \tilde{\mathcal{F}}' = \delta_1 \tilde{\mathcal{F}}' = 0.$$

Or les deux modifications, amenant le système du même état initial au même état final, font subir à la quantité $\tilde{\mathcal{F}}$ la même variation. On a donc, quels que soient $\delta \mathcal{A}$ et $\delta \mathcal{B}$,

$$\begin{aligned} \text{c'est-à-dire} \quad & a \delta \mathcal{A} + b \delta \mathcal{B} = 0, \\ & a = 0, \quad b = 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que l'on peut écrire : dans toute modification où l'aimantation d'un élément varie sans que le volume, la forme et l'état de cet élément subissent de variations,

$$\delta \tilde{\mathcal{F}}' = f(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) d\mathfrak{v} \delta \mathfrak{M}.$$

Dès lors, si nous posons

$$(16) \quad \tilde{\mathcal{F}}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) = \int_0^{\mathfrak{M}} f(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) d\mathfrak{v},$$

nous pourrons écrire

$$(17) \quad \tilde{\mathcal{F}}' = \int \tilde{\mathcal{F}}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) d\mathfrak{v} + \tilde{\mathcal{F}}'',$$

l'intégrale triple s'étendant au volume entier du système et $\tilde{\mathcal{F}}''$ demeurant invariable lorsqu'on déplace les éléments ou lorsqu'on fait varier leur état magnétique sans altérer leur volume ou les paramètres α, β, \dots relatifs à chacun d'eux.

Pour déterminer $\tilde{\mathcal{F}}''$, nous remarquons, en premier lieu, que les égalités (15) et (17) permettent d'écrire

$$\tilde{\mathcal{F}} = \mathfrak{F} + \int \tilde{\mathcal{F}}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) d\mathfrak{v} + \tilde{\mathcal{F}}'.$$

Supposons que nous fassions décroître jusqu'à 0 l'intensité d'aimantation en chaque point du système sans faire varier le volume ou l'état des divers

éléments qui le constituent, \mathfrak{I} tend vers 0 ; il en est de même de $\mathfrak{J}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)$ d'après l'égalité (16) ; \mathfrak{J} tend donc vers \mathfrak{J}'' .

D'autre part, si nous désignons par U l'énergie interne que posséderait le système si tous les éléments conservaient le même état physique défini par les paramètres α, β, \dots et le même volume, mais cessaient d'être magnétiques ; par S l'entropie que posséderait le système dans les mêmes conditions, il est évident que la limite vers laquelle tend la valeur de \mathfrak{J} est $E(U - TS)$.

On a donc

$$(18) \quad \mathfrak{J}'' = E(U - TS).$$

Cette égalité (18) achève de déterminer la forme du potentiel thermodynamique interne d'un système qui renferme des corps isotropes aimantés, car des égalités (15), (17) et (18), il résulte que l'on a pour un semblable système

$$(19) \quad \mathfrak{J} = E(U - TS) + \mathfrak{I} + \int \mathfrak{J}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) dv.$$

C'est de cette égalité que nous allons déduire les lois de l'induction magnétique des substances isotropes.



CHAPITRE II.

ÉQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE MAGNETIQUE.

§ I. — Équations fondamentales de l'aimantation par influence.

1. Nous allons dans ce Chapitre chercher à déterminer la grandeur et la direction de l'aimantation en chaque point d'un corps *dénue de force coercitive* soumis à l'action d'*aimants permanents*. Commençons par définir ces deux mots.

Considérons un système renfermant un corps susceptible de s'aimanter et cherchons à quelles conditions le travail non compensé effectué dans une modification isothermique virtuelle quelconque de ce système sera nul ou négatif; parmi ces conditions, qui sont les conditions d'équilibre en Thermodynamique, nous en trouverons qui expriment la proposition suivante : l'aimantation a en chaque point du corps considéré une certaine direction et une certaine grandeur. Si, en chaque point de ce corps, l'aimantation a cette direction et cette grandeur, cette aimantation ne pourra subir aucune variation; l'équilibre magnétique sera absolument établi.

Mais, selon une remarque faite précédemment (Chap. I, § I, n° 11), il peut fort bien arriver que le système conserve un état invariable sans que les conditions d'équilibre prescrites par la Thermodynamique soient vérifiées; il peut arriver que l'aimantation du corps en question demeure invariable, bien que cette aimantation ne satisfasse point aux conditions dont il a été parlé.

Nous dirons qu'un corps est *parfaitement doux*, ou bien qu'il est dénué de force coercitive, si, en toute circonstance, l'aimantation en chacun des points de ce corps satisfait aux conditions d'équilibre indiquées par la Thermodynamique.

Au contraire, nous dirons qu'un aimant est *permanent* si l'aimantation en chaque point conserve une grandeur et une direction invariables en quelque circonstance que cet aimant se trouve placé.

Les aimants permanents et les corps parfaitement doux forment les deux limites extrêmes de la série des corps magnétiques. Il va sans dire que tous les corps magnétiques que nous présentent la nature viennent se ranger entre

ces deux limites, sans jamais réaliser complètement ni l'une ni l'autre d'entre elles. Néanmoins, ces deux limites correspondent aux seuls cas que nous puissions étudier théoriquement : nous pouvons étudier les aimants permanents parce que leur état magnétique peut être censé donné arbitrairement, et les corps parfaitement doux parce que cet état est réglé par les propositions de la Thermodynamique.

2. Envisageons un système formé d'aimants permanents et de corps dénués de force coercitive.

En un point de l'un de ces derniers, l'aimantation a pour composantes α , β , γ . On peut imaginer que, sans changer la position, le volume, la forme, l'état physique ou chimique des divers corps qui constituent le système, on fasse, au sein d'un élément $d\sigma$, varier α , β , γ , de quantités infiniment petites arbitraires $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$. D'après la définition des corps parfaitement doux, il n'en doit résulter pour le système aucun travail non compensé.

Tous les corps du système demeurant invariables de volume, de forme et de position, les forces extérieures appliquées au système n'effectuent aucun travail. Le travail non compensé effectué se réduit alors à la variation changée de signe du potentiel thermodynamique interne.

Ce dernier est fourni par l'égalité (19) du Chapitre précédent. Il a pour valeur, en conservant les notations de ce Chapitre,

$$\mathcal{F} = E(U - TS) + \mathfrak{F} + \int \mathcal{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) d\sigma.$$

Cherchons la variation subie par cette quantité lorsque, au sein de l'élément $d\sigma$, α , β , γ varient respectivement de $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, tous les autres paramètres qui fixent l'état du système demeurant invariables.

La quantité $E(U - TS)$ ne subit dans ces conditions aucune variation.

La quantité \mathfrak{F} subit une variation facile à calculer en se reportant à la définition de la fonction \mathfrak{F} donnée par l'égalité (14) du Chap. I. Il est aisé de voir que l'on a

$$\delta\mathfrak{F} = h \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} \delta\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \delta\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \delta\gamma \right] d\sigma,$$

φ étant la valeur de la fonction potentielle magnétique en un point (x, y, z) de l'élément $d\sigma$.

Enfin on a

$$\delta \int \tilde{J}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) d\nu = \frac{\partial \tilde{J}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}} \left[\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \mathfrak{A}} \delta \mathfrak{A} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \mathfrak{B}} \delta \mathfrak{B} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \mathfrak{C}} \delta \mathfrak{C} \right] d\nu.$$

Mais l'égalité

$$\mathfrak{M}^2 = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2$$

donne

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \mathfrak{A}} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{M}}, \quad \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{M}}, \quad \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{M}},$$

en sorte que l'on peut écrire

$$\delta \int \tilde{J}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) d\nu = \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{\partial \tilde{J}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}} (\mathfrak{A} \delta \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \delta \mathfrak{B} + \mathfrak{C} \delta \mathfrak{C}) d\nu.$$

Tous ces calculs conduisent à l'égalité

$$\delta \tilde{J} = \left\{ \begin{aligned} & \left[h \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{\partial \tilde{J}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}} \mathfrak{A} \right] \delta \mathfrak{A} \\ & + \left[h \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{\partial \tilde{J}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}} \mathfrak{B} \right] \delta \mathfrak{B} \\ & + \left[h \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{\partial \tilde{J}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}} \mathfrak{C} \right] \delta \mathfrak{C} \end{aligned} \right\} d\nu.$$

Cette quantité doit être égale à 0 quelles que soient les variations $\delta \mathfrak{A}$, $\delta \mathfrak{B}$, $\delta \mathfrak{C}$. Si donc on pose

$$(1) \quad \mathbf{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) = \frac{\mathfrak{M}}{\frac{\partial \tilde{J}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}}},$$

on devra avoir, en tous les points d'une masse dénuée de force coercitive et soumise à l'aimantation,

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{A} &= -h \mathbf{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \mathfrak{B} &= -h \mathbf{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \mathfrak{C} &= -h \mathbf{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

2. Ces équations sont les équations fondamentales de l'induction magnétique; avant de leur faire subir aucune transformation, nous allons en déduire quelques remarques importantes.

Ces équations donnent

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\mathfrak{A}} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\mathfrak{B}} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}{\mathfrak{C}},$$

ce qui signifie que *l'axe magnétique en un point d'une masse isotrope dénuée de force coercitive et la grandeur géométrique dont les composantes sont*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

sont dirigées suivant la même droite. Cette proposition se retrouve dans toutes les théories de l'induction magnétique proposées jusqu'ici; elle est une conséquence plus ou moins immédiate des hypothèses sur lesquelles reposent ces théories. Les équations (2) donnent encore

$$(3) \quad \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2} = h^2 [F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)]^2.$$

Le rapport de la grandeur géométrique précédente à l'intensité d'aimantation dépend de l'intensité d'aimantation et de la nature de la substance.

Cette conséquence est conforme aux hypothèses faites par M. G. Kirchhoff sur l'aimantation par influence; toutes les théories de l'aimantation autres que celles de M. G. Kirchhoff conduisent à regarder le rapport précédent comme indépendant de l'intensité d'aimantation: nous avons vu que par là ces théories se mettaient en désaccord avec l'expérience.

Si le coefficient $F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)$ est positif, l'axe magnétique et la grandeur géométrique dont les projections sont $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ sont orientés en sens contraire. Le corps est dit alors *magnétique ou paramagnétique*. Si au contraire le coefficient $F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)$ est négatif, l'axe magnétique et la grandeur géométrique dont les projections sont $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ sont orientés dans le même sens. Le corps est dit *diamagnétique*. La théorie des corps diamagnétiques et la théorie des corps magnétiques se trouvent donc comprises en une seule et même théorie; l'existence des corps diamagnétiques ne présente pas ici les difficultés qu'elle présentait dans la théorie de Poisson.

§ II. — Le problème de l'induction magnétique se ramène
à la détermination de la fonction $\varphi(x, y, z)$ ⁽¹⁾.

3. Nous allons démontrer maintenant que les équations (2) permettent, lorsqu'on connaît la valeur de la fonction $\varphi(x, y, z)$ en tous les points d'une masse dénuée de force coercitive, de déterminer les valeurs des quantités $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ en tous les points de cette masse, c'est-à-dire de résoudre complètement le problème de l'induction magnétique.

L'équation (3) peut s'écrire

$$(4) \quad \left[\frac{\mathfrak{A}}{h \mathbf{F}(\mathfrak{A}, \alpha, \beta, \dots)} \right]^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2.$$

Si l'on connaît en chaque point la nature du corps parfaitement doux que l'on étudie, $\mathbf{F}(\mathfrak{A}, \alpha, \beta, \dots)$ est, en chaque point, une fonction parfaitement déterminée de \mathfrak{A} ; nous verrons plus loin comment l'expérience permet de déterminer la forme de cette fonction. Dès lors le premier membre de l'équation précédente est une fonction parfaitement déterminée de \mathfrak{A} , et cette équation donne \mathfrak{A} en fonction de

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2.$$

Nous supposerons cette équation (4) résolue par rapport à \mathfrak{A} , et nous écrirons

$$(5) \quad \mathfrak{A} = \sigma \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right].$$

Posons maintenant, d'une manière générale,

$$(6) \quad \lambda(\zeta, \alpha, \beta, \dots) = -h \mathbf{F}[\sigma(\zeta), \alpha, \beta, \dots].$$

Les expériences qui font connaître la forme de la fonction \mathbf{F} feront con-

⁽¹⁾ Ce paragraphe et le suivant sont le développement d'idées indiquées par G. Kirchhoff [G. KIRCHHOFF, *Ueber den Magnetismus eines unbegreuzten Cylinders von weichem Eisen* (*Crell's Journal für reine und angewandte Mathematik*, t. XLVIII, 1853; *Kirchhoff's gesammelte Abhandlungen*, p. 193)].

naître aussi la forme de la fonction λ , et les équations (2) deviendront

$$(7) \quad \begin{cases} \mathcal{A} = \lambda \left\{ \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right], \alpha, \beta, \dots \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \mathcal{B} = \lambda \left\{ \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right], \alpha, \beta, \dots \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \mathcal{C} = \lambda \left\{ \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right], \alpha, \beta, \dots \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{cases}$$

Ces équations permettent, comme nous l'avions annoncé, de déterminer les trois quantités \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , lorsqu'on connaît en chaque point du corps soumis à l'aimantation la valeur de la fonction φ .

§ III. — Équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $\varphi(x, y, z)$.

4. Nous avons vu que la fonction $\varphi(x, y, z)$ satisfaisait en tous les points de l'espace non situés sur une surface de séparation de deux corps magnétiques ou d'un corps magnétique et d'un milieu non magnétique à l'équation suivante [Chapitre I, § II, éq. (12)]

$$(8) \quad \Delta \varphi = -4\pi \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z} \right).$$

De là on peut déduire la forme de l'équation différentielle du second ordre à laquelle la fonction φ satisfait en tous les points de l'espace, sauf aux divers points des surfaces limites.

Dans la partie de l'espace occupé par le milieu non magnétique, l'équation précédente se réduit à l'équation de Laplace

$$(9) \quad \Delta \varphi = 0.$$

A l'intérieur des aimants permanents, l'aimantation en chaque point est censée connue, en sorte que le second membre de l'équation (8) est une fonction connue de x , y , z . Si nous désignons cette fonction par $-4\pi\rho(x, y, z)$, la fonction φ vérifiera en tout point intérieur aux aimants permanents l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(9 \text{ bis}) \quad \Delta \varphi = -4\pi\rho(x, y, z).$$

Envisageons maintenant un point intérieur à l'une des masses magné-

tiques dénuées de force coercitive que renferme le système. En ce point, les composantes \mathfrak{a} , \mathfrak{b} , \mathfrak{c} de l'aimantation vérifient les équations (7).

Différentions la première des équations (7) par rapport à x . Posons, pour abréger,

$$G = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2.$$

Nous aurons

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \partial \lambda(G, \alpha, \beta, \dots) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \lambda(G, \alpha, \beta, \dots)}{\partial G} \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \left[\frac{\partial \lambda(G, \alpha, \beta, \dots)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial \lambda(G, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \dots \right];$$

les termes de la seconde ligne disparaissent d'eux-mêmes lorsque la substance est homogène.

Mais on a

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right).$$

Remplaçons $\frac{\partial G}{\partial x}$ par cette valeur dans l'expression de $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x}$; formons de même les expressions de $\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y}$, $\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z}$; ajoutons ces trois quantités, en tenant compte de l'équation (8), et nous aurons

Telle est l'équation aux dérivées partielles du second ordre que la fonction $\varphi(x, y, z)$ doit vérifier en tous les points d'une masse dénuée de force coercitive soumise à l'aimantation.

Les équations (9), (9 bis), (9 ter) nous fournissent donc les équations différentielles que la fonction φ doit vérifier en tous les points de l'espace, sauf aux divers points des surfaces limites.

§ IV. — Conditions aux limites auxquelles satisfait la fonction $\varphi(x, y, z)$.

5. Cherchons à quelle condition satisfait la fonction $\varphi(x, y, z)$ en un point de l'une des surfaces limites.

Supposons qu'une surface sépare deux milieux, dont l'un au moins soit magnétique. Soient, en un point de cette surface, N_1 la normale dirigée vers l'intérieur du premier milieu et N_2 la normale dirigée vers l'intérieur du second milieu. Soient $\varphi_1(x, y, z)$ la fonction φ relative au premier milieu, $\varphi_2(x, y, z)$ la fonction φ relative au second. Soit M_1 un point du premier milieu infiniment voisin du point considéré de la surface limite. Soient $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1$ les composantes de l'aimantation en ce point. Soit, en ce point, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial N_1}$ la dérivée de φ_1 suivant la normale N_1 . Soit, de même, M_2 un point du second milieu. Adoptons pour ce point des notations analogues à celles que nous avons adoptées pour le point M_1 , et nous aurons, d'une manière générale,

$$(10) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial N_2} = -4\pi [\mathfrak{A}_1 \cos(N_1, x) + \mathfrak{B}_1 \cos(N_1, y) + \mathfrak{C}_1 \cos(N_1, z) + \mathfrak{A}_2 \cos(N_2, x) + \mathfrak{B}_2 \cos(N_2, y) + \mathfrak{C}_2 \cos(N_2, z)],$$

égalité qui se réduit à l'égalité (11) du Chapitre I lorsqu'un des deux milieux n'est pas magnétique.

Les surfaces limites que l'on peut avoir à considérer sont de cinq espèces différentes :

- 1° Surface de séparation d'un aimant permanent et d'un milieu non magnétique;
- 2° Surface de séparation de deux aimants permanents;
- 3° Surface de séparation d'une substance dénuée de force coercitive et d'un milieu non magnétique;
- 4° Surface de séparation de deux substances dénuées de force coercitive;
- 5° Surface de séparation d'un aimant permanent et d'une substance dénuée de force coercitive.

1° *À la surface de séparation d'un aimant permanent et d'un milieu non magnétique*, voyons ce que devient la relation (10). Supposons que l'indice (1) se rapporte à l'aimant et l'indice (2) au milieu. Remplaçons les symboles $\frac{\partial \psi}{\partial N_1}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial N_2}$ par les symboles, plus souvent usités en pareil cas, $\frac{\partial \psi}{\partial N_i}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial N_e}$. À l'intérieur du milieu non magnétique, nous avons

$$\mathfrak{A}_2 = 0, \quad \mathfrak{B}_2 = 0, \quad \mathfrak{D}_2 = 0,$$

tandis qu'à l'intérieur de l'aimant \mathfrak{A}_1 , \mathfrak{B}_1 , \mathfrak{D}_1 sont des quantités censées connues d'avance. La relation (10) devient donc

$$(11) \quad \frac{\partial \psi}{\partial N_i} + \frac{\partial \psi}{\partial N_e} = 4\pi s(x, y, z),$$

$s(x, y, z)$ étant une fonction dont la valeur se déduit immédiatement des données du problème.

2° De même, *à la surface de séparation de deux aimants*, la relation (10) devient

$$(11 \text{ bis}) \quad \frac{\partial \psi}{\partial N_1} + \frac{\partial \psi}{\partial N_2} = -4\pi [s_1(x, y, z) + s_2(x, y, z)],$$

$s_1(x, y, z)$ et $s_2(x, y, z)$ étant deux fonctions dont la valeur se déduit immédiatement des données du problème.

3° *À la surface de séparation d'une substance dénuée de force coercitive et d'un milieu non magnétique*, examinons ce que devient la relation (10). Supposons que l'indice (1) se rapporte à la substance magnétique et l'indice (2) à la substance non magnétique. Remplaçons les symboles N_1 et N_2 par les symboles N_i et N_e .

À l'intérieur du milieu non magnétique, nous avons

$$\mathfrak{A}_2 = 0, \quad \mathfrak{B}_2 = 0, \quad \mathfrak{D}_2 = 0.$$

Au contraire, à l'intérieur de la substance dénuée de force coercitive, \mathfrak{A}_1 , \mathfrak{B}_1 , \mathfrak{D}_1 sont donnés par les équations (7) du présent Chapitre. On a donc

$$\begin{aligned} & \mathfrak{A}_1 \cos(N_i, x) + \mathfrak{B}_1 \cos(N_i, y) + \mathfrak{D}_1 \cos(N_i, z) \\ &= \tilde{\lambda}_1 \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z_i} \right)^2 \right], \alpha, \beta, \dots \} \\ & \quad \times \left[\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \cos(N_i, x) + \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \cos(N_i, y) + \frac{\partial \psi}{\partial z_i} \cos(N_i, z) \right]. \end{aligned}$$

Mais on a aussi

$$\frac{\partial \psi}{\partial N_i} = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \cos(N_i, x) + \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \cos(N_i, y) + \frac{\partial \psi}{\partial z_i} \cos(N_i, z).$$

La relation (10) devient donc, en tout point de la surface considérée,

$$(11 \text{ ter}) \quad \left(1 + 4\pi\lambda \left\{ \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z_i} \right)^2 \right], \alpha, \beta, \dots \right\} \right) \frac{\partial \psi}{\partial N_i} + \frac{\partial \psi}{\partial N_e} = 0.$$

4° De même, à la surface de séparation de deux substances dénuées de force coercitive, la relation (10) devient

$$(11 \text{ iv}) \quad \left(1 + 4\pi\lambda_1 \left\{ \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z_1} \right)^2 \right], \alpha_1, \beta_1, \dots \right\} \right) \frac{\partial \psi}{\partial N_1} + \left(1 + 4\pi\lambda_2 \left\{ \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z_2} \right)^2 \right], \alpha_2, \beta_2, \dots \right\} \right) \frac{\partial \psi}{\partial N_2} = 0.$$

5° Enfin, à la surface de séparation d'un aimant permanent (1) et d'un corps dénué de force coercitive (2), la relation (10) devient

$$(11 \text{ v}) \quad \frac{\partial \psi}{\partial N_1} + \left(1 + 4\pi\lambda_2 \left\{ \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z_2} \right)^2 \right], \alpha_2, \beta_2, \dots \right\} \right) \frac{\partial \psi}{\partial N_2} = -4\pi s_1(x, y, z),$$

$s_1(x, y, z)$ étant une fonction dont la valeur se déduit immédiatement des données du problème.

Si nous ajoutons qu'à l'infini on doit avoir

$$(12) \quad \psi = 0,$$

nous aurons énoncé toutes les équations qui déterminent la solution du problème de l'aimantation par influence.

§ VI. — Approximation de Poisson.

6. Revenons aux équations

$$(2) \quad \begin{cases} \mathcal{A} = -h \mathbf{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \mathcal{B} = -h \mathbf{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \mathcal{C} = -h \mathbf{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) \frac{\partial \psi}{\partial z}, \end{cases}$$

sur lesquelles reposent toutes les considérations exposées dans le présent

Chapitre. Si l'on supposait que la fonction F devint indépendante de \mathfrak{M} , ces équations deviendraient

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = -h\gamma(x, \beta, \dots) \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}, \\ \beta = -h\gamma(x, \beta, \dots) \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y}, \\ \gamma = -h\gamma(x, \beta, \dots) \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z}. \end{array} \right.$$

Elles auraient précisément la forme que présentent les équations de l'équilibre magnétique dans la théorie de Poisson et dans toutes les théories exposées jusqu'ici, sauf celle de M. G. Kirchhoff.

Quelle condition doit remplir la fonction $\tilde{f}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)$ pour qu'il en soit ainsi ?

S'il en était ainsi, l'égalité (1) du présent Chapitre deviendrait

$$\frac{\partial \tilde{f}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}} = \frac{\mathfrak{M}}{\gamma(\alpha, \beta, \dots)},$$

et comme, en vertu de sa définition donnée par l'égalité (16) du Chapitre I, la fonction \tilde{f} devient égale à 0 en même temps que \mathfrak{M} , on aurait

$$\tilde{f}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) = \frac{1}{2\gamma(\alpha, \beta, \dots)} \mathfrak{M}^2.$$

Ainsi, pour que la théorie de Poisson soit exacte, il est nécessaire et suffisant que la fonction \tilde{f} soit proportionnelle au carré de l'intensité d'aimantation.

Comme nous l'avons déjà dit dans l'Introduction, l'étude des substances fortement magnétiques, telles que le fer doux, montre que la théorie de Poisson est inacceptable, au moins pour ces substances. L'expérience semble prouver que, pour le fer doux, lorsque l'intensité d'aimantation \mathfrak{M} croît en valeur absolue, la fonction $F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)$ croît d'abord avec \mathfrak{M} , puis passe par un maximum, et décroît ensuite lorsque \mathfrak{M} continue à croître.

Toutefois, la théorie de Poisson est approximativement exacte pour les corps faiblement aimantés. Il faut en conclure, d'après ce que nous venons de dire, que l'on a

$$(13) \quad \tilde{f}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) = \frac{1}{2\Gamma(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)} \mathfrak{M}^2,$$

$\Gamma(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)$ tendant vers une limite finie $\gamma(\alpha, \beta, \dots)$ lorsque \mathfrak{M} tend vers 0.



CHAPITRE III.

LE PROBLÈME DE L'AIMANTATION PAR INFLUENCE ADMET UNE
ET UNE SEULE SOLUTION. — STABILITÉ DE L'AIMANTATION.

§ I. — Existence d'une solution.

1. Nous avons vu au § I du Chapitre II que le problème de l'aimantation par influence se ramenait à celui-ci : trouver une distribution magnétique qui donne un minimum à la quantité

$$(1) \quad \mathcal{F} = E(U - TS) + \mathcal{S} + \int \mathcal{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) dv.$$

Existe-t-il toujours une semblable distribution ? C'est la question à laquelle nous nous proposons de répondre dans ce paragraphe.

D'après l'égalité (14) du Chapitre I, nous avons

$$\mathcal{S} = \int \left(\mathfrak{A} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathfrak{B} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathfrak{C} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dv.$$

Cette égalité, lorsqu'on y remplace φ par l'expression

$$\varphi = \int \left(\mathfrak{A}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \mathfrak{B}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \mathfrak{C}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) dv',$$

qui lui sert de définition, devient

$$(2) \quad \mathcal{S} = \frac{h}{2} \int \left[\mathfrak{A} \frac{\partial}{\partial x} \int \left(\mathfrak{A}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \mathfrak{B}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \mathfrak{C}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) dv' \right. \\ \left. + \mathfrak{B} \frac{\partial}{\partial y} \int \left(\mathfrak{A}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \mathfrak{B}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \mathfrak{C}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) dv' \right. \\ \left. + \mathfrak{C} \frac{\partial}{\partial z} \int \left(\mathfrak{A}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \mathfrak{B}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \mathfrak{C}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) dv' \right] dv,$$

toutes les intégrales triples s'étendant au volume entier du système.

C'est cette expression de \mathfrak{F} que nous allons tout d'abord transformer.

Pour fixer les idées et ne point compliquer les formules, nous supposerons que le système renferme simplement un aimant permanent que nous désignerons par l'indice (1) et un corps magnétique dénué de force coercitive que nous désignerons par l'indice (2). L'égalité (2) pourra alors s'écrire plus explicitement

$$\begin{aligned}
 (2 \text{ bis}) \quad \mathfrak{F} = & \frac{h}{2} \int \left[-\mathfrak{A}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \int \left(\mathfrak{A}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_1} + \mathfrak{B}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_1} + \mathfrak{C}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_1} \right) dv \right. \\
 & + \mathfrak{B}_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \int \left(\mathfrak{A}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_1} + \mathfrak{B}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_1} + \mathfrak{C}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_1} \right) dv'_1 \\
 & \left. + \mathfrak{C}_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \int \left(\mathfrak{A}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_1} + \mathfrak{B}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_1} + \mathfrak{C}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_1} \right) dv'_1 \right] dv_1 \\
 & + h \int \left[-\mathfrak{A}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \int \left(\mathfrak{A}'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_2} + \mathfrak{B}'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_2} + \mathfrak{C}'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_2} \right) dv_2 \right. \\
 & + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \int \left(\mathfrak{A}'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_2} + \mathfrak{B}'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_2} + \mathfrak{C}'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_2} \right) dv_2 \\
 & \left. + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \int \left(\mathfrak{A}'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_2} + \mathfrak{B}'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_2} + \mathfrak{C}'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_2} \right) dv_2 \right] dv_1 \\
 & + \frac{h}{2} \int \left[-\mathfrak{A}'_2 \frac{\partial}{\partial x'_2} \int \left(\mathfrak{A}'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_2} + \mathfrak{B}'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_2} + \mathfrak{C}'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_2} \right) dv'_2 \right. \\
 & + \mathfrak{B}'_2 \frac{\partial}{\partial y'_2} \int \left(\mathfrak{A}'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_2} + \mathfrak{B}'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_2} + \mathfrak{C}'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_2} \right) dv'_2 \\
 & \left. + \mathfrak{C}'_2 \frac{\partial}{\partial z'_2} \int \left(\mathfrak{A}'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_2} + \mathfrak{B}'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_2} + \mathfrak{C}'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_2} \right) dv'_2 \right] dv_2.
 \end{aligned}$$

Une intégration par parties nous donne, en désignant par σ , la surface du corps (1) et par \mathbf{N} , la normale en un point de la surface σ , dirigée vers

l'intérieur du corps (1),

$$\begin{aligned} & \int \int \int \left(\mathcal{A}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_1} + \mathcal{B}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_1} + \mathcal{C}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_1} \right) dx'_1 dy'_1 dz'_1 \\ &= - \int \int \int \left(\frac{\partial \mathcal{A}'_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial \mathcal{B}'_1}{\partial y'_1} + \frac{\partial \mathcal{C}'_1}{\partial z'_1} \right) \frac{1}{r} dx'_1 dy'_1 dz'_1. \end{aligned}$$

Les limites des intégrations étendues l'une au corps (1) tout entier, l'autre à la surface qui le limite, ne dépendent pas de x_1, y_1, z_1 , en sorte que l'on aura

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \int \int \int \left(\mathcal{A}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_1} + \mathcal{B}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_1} + \mathcal{C}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_1} \right) dx'_1 dy'_1 dz'_1 \\ &= - \mathcal{A}_1 \int \int \int \left(\mathcal{A}'_1 \cos(N'_1, x) + \mathcal{B}'_1 \cos(N'_1, y) + \mathcal{C}'_1 \cos(N'_1, z) \right) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} d\sigma'_1 \\ & \quad - \mathcal{A}_1 \int \int \int \left(\frac{\partial \mathcal{A}'_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial \mathcal{B}'_1}{\partial y'_1} + \frac{\partial \mathcal{C}'_1}{\partial z'_1} \right) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} dx'_1 dy'_1 dz'_1, \end{aligned}$$

et une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} & \int \left[\mathcal{A}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \int \left(\mathcal{A}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_1} + \mathcal{B}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_1} + \mathcal{C}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_1} \right) d\sigma'_1 \right] d\sigma_1 \\ &= \int \int \left(\mathcal{A}'_1 \cos(N'_1, x) + \mathcal{B}'_1 \cos(N'_1, y) + \mathcal{C}'_1 \cos(N'_1, z) \right) \mathcal{A}_1 \cos(N_1, x) \frac{1}{r} d\sigma'_1 d\sigma_1 \\ & \quad + \int \int \left(\frac{\partial \mathcal{A}'_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial \mathcal{B}'_1}{\partial y'_1} + \frac{\partial \mathcal{C}'_1}{\partial z'_1} \right) \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} \frac{1}{r} d\sigma_1 d\sigma'_1. \end{aligned}$$

En transformant d'une manière analogue tous les termes qui figurent au second membre de l'égalité (2 bis), on trouve

$$\begin{aligned}
(3) \quad \mathfrak{F} = & \frac{h}{2} \left\{ \mathbf{SS} [\mathfrak{A}_1 \cos(\mathbf{N}_1, x) + \mathfrak{B}_1 \cos(\mathbf{N}_1, y) + \mathfrak{C}_1 \cos(\mathbf{N}_1, z)] \right. \\
& [\mathfrak{A}'_1 \cos(\mathbf{N}'_1, x) + \mathfrak{B}'_1 \cos(\mathbf{N}'_1, y) + \mathfrak{C}'_1 \cos(\mathbf{N}'_1, z)] \frac{1}{r} d\sigma_1 d\sigma'_1 \\
& + \mathbf{SS} [\mathfrak{A}_1 \cos(\mathbf{N}_1, x) + \mathfrak{B}_1 \cos(\mathbf{N}_1, y) + \mathfrak{C}_1 \cos(\mathbf{N}_1, z)] \\
& [\mathfrak{A}_2 \cos(\mathbf{N}_2, x) + \mathfrak{B}_2 \cos(\mathbf{N}_2, y) + \mathfrak{C}_2 \cos(\mathbf{N}_2, z)] \frac{1}{r} d\sigma_1 d\sigma_2 \\
& + \mathbf{SS} [\mathfrak{A}_2 \cos(\mathbf{N}_2, x) + \mathfrak{B}_2 \cos(\mathbf{N}_2, y) + \mathfrak{C}_2 \cos(\mathbf{N}_2, z)] \\
& [\mathfrak{A}'_2 \cos(\mathbf{N}'_2, x) + \mathfrak{B}'_2 \cos(\mathbf{N}'_2, y) + \mathfrak{C}'_2 \cos(\mathbf{N}'_2, z)] \frac{1}{r} d\sigma_2 d\sigma'_2 \\
& + \iint \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathfrak{B}_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \mathfrak{C}_1}{\partial z_1} \right) \left(\frac{\partial \mathfrak{A}'_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial \mathfrak{B}'_1}{\partial y'_1} + \frac{\partial \mathfrak{C}'_1}{\partial z'_1} \right) \frac{1}{r} dv_1 d\sigma'_1 \\
& + \mathbf{2} \iint \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathfrak{B}_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \mathfrak{C}_1}{\partial z_1} \right) \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathfrak{B}_2}{\partial y_2} + \frac{\partial \mathfrak{C}_2}{\partial z_2} \right) \frac{1}{r} dv_1 d\sigma_2 \\
& + \iint \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathfrak{B}_2}{\partial y_2} + \frac{\partial \mathfrak{C}_2}{\partial z_2} \right) \left(\frac{\partial \mathfrak{A}'_2}{\partial x'_2} + \frac{\partial \mathfrak{B}'_2}{\partial y'_2} + \frac{\partial \mathfrak{C}'_2}{\partial z'_2} \right) \frac{1}{r} dv_2 d\sigma'_2 \\
& + \mathbf{2} \int \mathbf{S} \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathfrak{B}_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \mathfrak{C}_1}{\partial z_1} \right) [\mathfrak{A}'_1 \cos(\mathbf{N}'_1, x) + \mathfrak{B}'_1 \cos(\mathbf{N}'_1, y) + \mathfrak{C}'_1 \cos(\mathbf{N}'_1, z)] \frac{1}{r} dv_1 d\sigma'_1 \\
& + \mathbf{2} \int \mathbf{S} \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathfrak{B}_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \mathfrak{C}_1}{\partial z_1} \right) [\mathfrak{A}_2 \cos(\mathbf{N}_2, x) + \mathfrak{B}_2 \cos(\mathbf{N}_2, y) + \mathfrak{C}_2 \cos(\mathbf{N}_2, z)] \frac{1}{r} dv_1 d\sigma_2 \\
& + \mathbf{2} \int \mathbf{S} \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathfrak{B}_2}{\partial y_2} + \frac{\partial \mathfrak{C}_2}{\partial z_2} \right) [\mathfrak{A}_1 \cos(\mathbf{N}_1, x) + \mathfrak{B}_1 \cos(\mathbf{N}_1, y) + \mathfrak{C}_1 \cos(\mathbf{N}_1, z)] \frac{1}{r} dv_2 d\sigma_1 \\
& \left. + \mathbf{2} \int \mathbf{S} \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathfrak{B}_2}{\partial y_2} + \frac{\partial \mathfrak{C}_2}{\partial z_2} \right) [\mathfrak{A}'_2 \cos(\mathbf{N}'_2, x) + \mathfrak{B}'_2 \cos(\mathbf{N}'_2, y) + \mathfrak{C}'_2 \cos(\mathbf{N}'_2, z)] \frac{1}{r} dv_2 d\sigma'_2 \right\}.
\end{aligned}$$

Cette expression de \mathfrak{F} met tout d'abord en évidence un théorème bien connu de la théorie du magnétisme. Cette expression montre en effet que \mathfrak{F} est le potentiel d'une distribution électrique ainsi obtenue :

En tout point intérieur à l'un des corps magnétiques du système, on donne à la densité électrique la valeur

$$\sqrt{\frac{h}{\varepsilon}} \left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial z} \right),$$

ε étant la constante analogue à h qui figure dans l'expression des actions électriques.

En tout point de la surface d'un corps magnétique du système, on donne

à la densité électrique la valeur

$$\sqrt{\frac{h}{\epsilon}} [\alpha \cos(N_i, x) + \beta \cos(N_i, y) + \gamma \cos(N_i, z)].$$

La quantité \mathfrak{F} étant précisément, nous l'avons vu, le potentiel des actions mécaniques que les corps magnétiques du système exercent les uns sur les autres, on voit que ces actions sont identiques aux actions qu'exerceraient les uns sur les autres les mêmes corps, électrisés de la façon que nous venons d'indiquer.

2. Il est facile, en outre, de vérifier que la fonction potentielle de cette distribution électrique coïncide avec la fonction potentielle magnétique φ . En effet, la fonction potentielle magnétique φ vérifie en tout point intérieur à l'un des corps magnétiques la relation

$$(4) \quad \Delta \varphi = -4\pi \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right);$$

en tout point du milieu non magnétique, elle vérifie l'équation de Laplace

$$(5) \quad \Delta \varphi = 0.$$

Si l'on désigne par N_e la normale vers l'extérieur en un point de l'une des surfaces σ_1 et σ_2 , elle vérifie en tout point de ces surfaces la relation

$$(6) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial N_e} = -4\pi [\alpha \cos(N_i, x) + \beta \cos(N_i, y) + \gamma \cos(N_i, z)].$$

Enfin, à l'infini, la fonction φ et le produit de la fonction φ par la distance du point auquel elle se rapporte à un point quelconque situé à distance finie sont égaux à 0.

Or ces conditions sont aussi celles auxquelles doit satisfaire la fonction potentielle de la distribution électrique fictive; et, comme on sait qu'elles ne déterminent qu'une seule fonction φ , il en résulte que les deux fonctions potentielles coïncident.

D'après cela, nous aurons

$$(7) \quad \varphi = \int \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \beta_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial z_1} \right) \frac{1}{r} dv_1 + \int \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \beta_2}{\partial y_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial z_2} \right) \frac{1}{r} dv_2 + \mathbf{S} [\alpha_1 \cos(N_1, x) + \beta_1 \cos(N_1, y) + \gamma_1 \cos(N_1, z)] \frac{1}{r} d\sigma_1 + \mathbf{S} [\alpha_2 \cos(N_2, x) + \beta_2 \cos(N_2, y) + \gamma_2 \cos(N_2, z)] \frac{1}{r} d\sigma_2.$$

Dès lors, il est aisé de voir, en vertu des égalités (4), (6) et (7), que l'expression (3) de \mathfrak{F} peut s' cire

$$(8) \quad \mathfrak{F} = -\frac{h}{8\pi} \left[\int \varphi \Delta \varphi d\nu_1 + \int \varphi \Delta \varphi d\nu_2 + \mathbf{S}^\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{N}_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{N}_e} \right) d\sigma_1 + \mathbf{S}^\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{N}_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{N}_e} \right) d\sigma_2 \right].$$

Or le théorème de Green nous donne

$$(9) \quad \begin{cases} \int \varphi \Delta \varphi d\nu_1 + \mathbf{S}^\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{N}_1} d\sigma_1 = - \int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\nu_1, \\ \int \varphi \Delta \varphi d\nu_2 + \mathbf{S}^\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{N}_2} d\sigma_2 = - \int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\nu_2. \end{cases}$$

Entourons le système d'une sphère de rayon extrêmement grand ayant pour centre un point fixe quelconque du système; désignons par l'indice (0) l'espace intérieur à cette sphère et extérieur aux corps (1) et (2). Soit $d\Sigma$ un élément de surface de cette sphère. Comme dans tout l'espace (0) nous avons

$$\Delta \varphi = 0,$$

le théorème de Green nous donnera

$$\begin{aligned} & - \int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\nu_0 \\ & = \mathbf{S}^\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{N}_0} d\Sigma + \mathbf{S}^\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{N}_0} d\sigma_1 + \mathbf{S}^\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{N}_0} d\sigma_2. \end{aligned}$$

Mais, de ce que la fonction φ tend vers 0 lorsque le rayon de la sphère augmente indéfiniment, de ce que, en outre, le produit de $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{N}_0}$ par le carré du rayon de la sphère ne devient pas infini, il résulte que l'on peut prendre le rayon de la sphère assez grand pour que l'intégrale

$$\mathbf{S}^\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{N}_0} d\Sigma$$

soit plus petite que toute quantité donnée d'avance; on peut donc écrire

$$(9 bis) \quad \mathbf{S}^\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{N}_0} d\sigma_1 + \mathbf{S}^\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{N}_0} d\sigma_2 = - \int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\nu_0,$$

l'intégrale triple s'étendant à tout l'espace extérieur aux corps (1) et (2).

Des équations (8), (9) et (9 bis), on déduit l'expression suivante de \mathfrak{F}

$$(10) \quad \mathfrak{F} = \frac{h}{8\pi} \int \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] dv,$$

l'intégrale s'étendant à tout l'espace.

En reportant cette expression de \mathfrak{F} dans l'équation (1) et en remarquant que $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$ est égal à 0 en tout milieu non magnétique, on peut écrire

$$(11) \quad \mathfrak{F} = \mathbf{E}(\mathbf{U} - \mathbf{T}\mathbf{S}) + \int \left\{ \frac{h}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] + \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, x, \beta, \dots) \right\} dv.$$

C'est l'expression de \mathfrak{F} que nous voulions obtenir. Elle est exacte, quelle que soit la distribution magnétique sur le système.

3. Cette expression peut s'écrire encore de la manière suivante

$$(11 \text{ bis}) \quad \mathfrak{F} = \mathbf{E}(\mathbf{U} - \mathbf{T}\mathbf{S}) + \int \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) dv_1 \\ + \frac{h}{8\pi} \left\{ \int \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] dv_0 \right. \\ \left. + \int \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] dv_1 \right\} \\ + \int \left\{ \frac{h}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] + \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, x, \beta, \dots) \right\} dv_2;$$

les intégrales qui portent sur $dx_0 dy_0 dz_0$ sont étendues à tout le milieu non magnétique; les intégrales qui portent sur $dx_1 dy_1 dz_1$ sont étendues à tout l'espace occupé par les aimants permanents; enfin les intégrales qui portent sur $dx_2 dy_2 dz_2$ sont étendues à tout l'espace occupé par les substances dénuées de force coercitive.

Parmi toutes les distributions que peut affecter le magnétisme sur ces dernières substances, en existe-t-il une qui donne à la quantité précédente une valeur minima?

Les termes de la première ligne de l'expression de \mathfrak{F} donnée par l'égalité (11 bis) conservent une valeur indépendante de la distribution qu'affecte le magnétisme sur les corps dénués de force coercitive. Nous n'avons donc point à en tenir compte.

Quelle que soit la distribution du magnétisme sur les substances dénuées de force coercitive, les termes de la seconde ligne forment un ensemble toujours positif.

Cherchons dans quelles conditions le terme qui forme la troisième ligne demeurera positif, quelle que soit la distribution du magnétisme sur les corps parfaitement doux.

De l'égalité (i) du Chapitre II qui définit $F(\alpha, \alpha, \beta, \dots)$, nous déduisons

$$\tilde{J}(\alpha, \alpha, \beta, \dots) = \int_0^{\alpha} \frac{\alpha}{F(\alpha, \alpha, \beta, \dots)} d\alpha.$$

Par conséquent, la quantité $\tilde{J}(\alpha, \alpha, \beta, \dots)$ est toujours positive pour les corps magnétiques et toujours négative pour les corps diamagnétiques.

Cette circonstance ne nous permet pas de prévoir, pour les corps diamagnétiques, le signe des termes de la troisième ligne de l'égalité (ii bis). Mais, pour les corps magnétiques, nous pouvons affirmer que ces termes sont toujours positifs.

Par conséquent, pour le cas où toutes les substances dénuées de force coercitive que renferme le système sont des corps magnétiques, l'égalité (ii bis) revient à la suivante

$$\tilde{J} = C + P,$$

C étant une quantité indépendante de la distribution que le magnétisme affecte sur les corps dénués de force coercitive et P une quantité qui demeure positive, quelle que soit cette distribution; de plus, pour que la quantité P soit infinie, il est nécessaire et suffisant, dans le cas où le système ne renferme que des corps magnétiques, que l'une au moins des trois quantités $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ soit infinie en tous les points d'un espace fini.

De ce que nous venons de démontrer, pouvons-nous conclure qu'il existe au moins une distribution magnétique correspondant à une valeur de \tilde{J} plus petite que toutes les autres, et par conséquent à un état magnétique stable? En le faisant, nous ne ferions que suivre la voie tracée par Sir W. Thomson pour la démonstration du principe dit de Dirichlet. Mais M. Weierstrass a signalé le défaut de rigueur que présente cette déduction; car, de ce que les variations d'une quantité sont limitées inférieurement, il ne résulte pas que cette quantité présente un minimum. C'est donc sous une réserve semblable à celle qui pèse sur le principe de Dirichlet que nous énoncerons la proposition suivante :

Des corps magnétiques quelconques étant soumis à l'action d'aimants

quelconques, on peut trouver sur ces corps une distribution magnétique au moins qui satisfait aux lois de l'aimantation par influence et qui demeure stable si l'on maintient invariables la position, la forme et l'état des divers corps du système.

§ II. — Il n'existe, pour les corps magnétiques, qu'une seule solution au problème de l'aimantation par influence. — Elle correspond à une aimantation stable.

4. Les équations du problème de l'aimantation par influence expriment simplement l'égalité à 0 de la variation première subie par la quantité \mathcal{J} lorsqu'en chaque point des substances dénuées de force coercitive que renferme le système on fait varier les composantes \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} de l'aimantation de quantités arbitraires $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$, $\delta\mathcal{C}$. Cette égalité à 0 de la variation de \mathcal{J} peut-elle avoir lieu pour plusieurs distributions magnétiques distinctes? Lorsqu'elle a lieu, la fonction \mathcal{J} est-elle minimum, de telle façon que la distribution magnétique soit stable? Telles sont les questions que nous allons maintenant examiner.

La solution de ces questions découle de l'étude de la variation seconde de \mathcal{J} .

Supposons que les composantes \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} de l'aimantation au point (x, y, z) de l'une des masses dénuées de force coercitive du système varient de $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$, $\delta\mathcal{C}$, et posons

$$\delta\mathcal{A} = a \delta t,$$

$$\delta\mathcal{B} = b \delta t,$$

$$\delta\mathcal{C} = c \delta t,$$

a , b , c étant en général des quantités finies, et δt une quantité infiniment petite et positive indépendante de x , y , z .

Conservons, pour simplifier, l'hypothèse adoptée au paragraphe précédent, hypothèse dans laquelle le système renferme seulement un aimant permanent désigné par l'indice (1) et un corps parfaitement doux désigné par l'indice (2). Prenons pour \mathcal{J} l'expression

$$(1) \quad \mathcal{J} = \mathbf{E}(\mathbf{U} - \mathbf{T}\mathbf{S}) + \mathcal{F} + \int \mathcal{J}(\mathcal{M}, \alpha, \beta, \dots) dv,$$

et remplaçons-y \mathcal{F} par sa valeur (2 bis). Il est aisément de voir que nous

aurons

$$\begin{aligned}
 \delta \tilde{\mathcal{F}} = & \int \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_2(\partial \mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \partial \mathfrak{M}} \delta \partial \mathfrak{M} dv_2 \\
 & + h \delta t \int \left[- \mathfrak{A}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \int \left(a_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_2} + b_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_2} + c_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_2} \right) dv_2 \right. \\
 & \quad \left. + \mathfrak{B}_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \int \left(a_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_2} + b_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_2} + c_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_2} \right) dv_2 \right. \\
 & \quad \left. + \mathfrak{C}_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \int \left(a_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_2} + b_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_2} + c_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_2} \right) dv_2 \right] dv_1 \\
 & + h \delta t \int \left[- \mathfrak{A}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \int \left(a'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_2} + b'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_2} + c'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_2} \right) dv'_2 \right. \\
 & \quad \left. + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \int \left(a'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_2} + b'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_2} + c'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_2} \right) dv'_2 \right. \\
 & \quad \left. + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \int \left(a'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_2} + b'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_2} + c'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_2} \right) dv'_2 \right] dv_2,
 \end{aligned}$$

puis, par une nouvelle variation,

$$\begin{aligned}
 (12) \quad \delta^2 \tilde{\mathcal{F}} = & \int \delta \left[\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_2(\partial \mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \partial \mathfrak{M}} \delta \partial \mathfrak{M} \right] dv_2 \\
 & + h \delta t^2 \int \left[- a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \int \left(a'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_2} + b'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_2} + c'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_2} \right) dv'_2 \right. \\
 & \quad \left. + b_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \int \left(a'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_2} + b'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_2} + c'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_2} \right) dv'_2 \right. \\
 & \quad \left. + c_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \int \left(a'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_2} + b'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_2} + c'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_2} \right) dv'_2 \right] dv_2.
 \end{aligned}$$

Considérons la quantité qui figure au second membre en facteur de δt^2 ; cette quantité a une interprétation qui nous permettra de suite de la transformer; supposons que, sur les masses dénuées de force coercitive, on forme une distribution magnétique telle que l'aimantation en chaque point ait pour composantes a_2, b_2, c_2 . La quantité que nous considérons sera le

potentiel \mathfrak{F} de cette distribution. Dès lors, nous pourrons faire subir à cette quantité la même transformation qu'au § I du présent Chapitre nous avons fait subir au potentiel d'une distribution magnétique quelconque.

Soit v la fonction potentielle de la distribution que nous considérons ici : v est donné par l'égalité

$$(13) \quad v(x, y, z) = \int \left(a'_2 \frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{\partial x'_2} + b'_2 \frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{\partial y'_2} + c'_2 \frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{\partial z'_2} \right) dv'_2.$$

Désignons par l'indice (3) tout l'espace non occupé par des corps parfaitement doux. Le coefficient de δt^2 au second membre de l'égalité (12) va devenir

$$\begin{aligned} & \frac{h}{8\pi} \int \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] dv_2 \\ & + \frac{h}{8\pi} \int \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] dv_3, \end{aligned}$$

et l'égalité (12) elle-même deviendra

$$\begin{aligned} (14) \quad \delta^2 \mathcal{F} &= \frac{h \delta t^2}{8\pi} \int \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] dv_3 \\ & + \frac{h \delta t^2}{8\pi} \int \left\{ \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{\delta t^2} \delta \left[\frac{\partial \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}} \delta \mathfrak{M} \right] \right\} dv_2. \end{aligned}$$

Nous allons faire subir à cette égalité (14) une dernière formation.

L'égalité (1) du Chapitre (II) nous donne

$$\mathbf{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) = \frac{\mathfrak{M}}{\frac{\partial \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}}}.$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} (15) \quad \delta \left[\frac{\partial \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}} \delta \mathfrak{M} \right] &= \delta \left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathbf{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)} \delta \mathfrak{M} \right] \\ &= \left\{ \frac{1}{\mathbf{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)} - \frac{\mathfrak{M}}{[\mathbf{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)]^2} \frac{\partial \mathbf{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}} \right\} \delta \mathfrak{M}^2 \\ & + \frac{\mathfrak{M}}{\mathbf{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)} \delta^2 \mathfrak{M}. \end{aligned}$$

Mais l'égalité

$$(16) \quad \mathfrak{M}^2 = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2$$

nous donne, en premier lieu,

$$(17) \quad \delta \mathfrak{M} = \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{\mathfrak{M}} \delta t$$

et, en second lieu,

$$\delta^2 \mathfrak{M} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\mathfrak{M}} \delta t^2 - \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{\mathfrak{M}} \delta \mathfrak{M} \delta t,$$

ou, en posant

$$\delta \mathfrak{M} = m \delta t$$

et en tenant compte de l'égalité (17),

$$\delta^2 \mathfrak{M} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - m^2}{\mathfrak{M}} \delta t^2.$$

L'égalité (15) devient donc

$$(18) \quad \delta \left[\frac{\partial \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}} \delta \mathfrak{M} \right] = \left\{ \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)} - \frac{\mathfrak{M} \frac{\partial \mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}}}{[\mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)]^2} m^2 \right\} dt^2.$$

L'égalité (14) devient alors, en tenant compte de cette égalité (18),

$$(19) \quad \delta^2 \mathcal{F} = \frac{h \delta t^2}{8\pi} \int \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] dv_3 \\ + \delta t^2 \int \left\{ \frac{h}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \right. \\ \left. + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)} - \frac{\mathfrak{M} \frac{\partial \mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}}}{[\mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)]^2} m^2 \right\} dv_2.$$

Le signe de cette quantité est impossible à préciser pour les corps diamagnétiques; pour les corps magnétiques, $\mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)$ est positif; en général, cette quantité décroît lorsque \mathfrak{M} augmente; on est alors assuré que $\delta^2 \mathcal{F}$ est toujours positif. Pour le fer doux, $\mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)$ croît pour les faibles valeurs de \mathfrak{M} ; mais les accroissements de cette quantité sont faibles, et comme \mathfrak{M} a en même temps de petites valeurs, la quantité

$$\frac{\mathfrak{M} \frac{\partial \mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}}}{[\mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)]^2} m^2$$

a, dans ces conditions, une valeur absolue beaucoup plus faible que

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{F_2(\partial\Gamma, x, \beta, \dots)},$$

en sorte que $\partial^2 \mathcal{J}$ est encore positif.

On peut donc dire que, *pour tous les corps magnétiques connus, $\partial^2 \mathcal{J}$ est toujours positif.*

De ce résultat, il est aisément de déduire en toute rigueur cette autre proposition :

Pour des corps magnétiques placés sous l'action d'aimants permanents donnés, il existe au plus une distribution telle que la variation première du potentiel thermodynamique interne soit identiquement nulle, et cette distribution est stable.

§ III. — Existe-t-il, pour les corps diamagnétiques, plus d'une solution au problème de l'influence?

5. La démonstration précédente ne permet pas de prévoir, pour les corps diamagnétiques, s'il existe une ou plusieurs distributions résolvant le problème de l'aimantation par influence pour un corps de forme et de position données soumis à l'action d'aimants donnés.

Il serait au contraire possible de démontrer qu'il existe pour un corps diamagnétique un seul état d'équilibre stable en prenant pour point de départ la théorie de Poisson.

Si l'on adopte en effet la théorie de Poisson, si l'on désigne par ψ la fonction potentielle magnétique du corps soumis à l'aimantation, et par v la fonction potentielle des aimants permanents, la fonction ψ est soumise aux conditions suivantes :

La fonction ψ est finie, continue et uniforme dans tout l'espace; elle est égale à 0 à l'infini; ses dérivées partielles sont finies, continues et uniformes dans tout l'espace, sauf sur la surface Σ qui limite le corps soumis à l'aimantation; elles sont égales à 0 à l'infini; à la traversée de la surface Σ , elles vérifient la condition

$$(20) \quad (1 + 4\pi h F) \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{N}_i} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{N}_e} + 4\pi h F \frac{\partial v}{\partial \mathbf{N}_i} = 0$$

dans tout l'espace, sauf sur la surface Σ ; les dérivées partielles du second

ordre de la fonction Ψ existent et vérifient l'équation

$$\Delta \Psi = 0.$$

Peut-il exister deux fonctions distinctes Ψ et Ψ' assujetties à ces conditions? S'il en existe deux, soit Θ leur différence.

Dans tout l'espace e , extérieur à la surface Σ , on a

$$\Delta \Psi = 0, \quad \Delta \Psi' = 0$$

et, par conséquent,

$$\Delta \Theta = 0.$$

On a donc

$$(21) \quad \int_e \Delta \Theta \, dv = 0.$$

D'ailleurs, à l'infini, on a

$$\Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{N}} = 0, \quad \Psi' = 0, \quad \frac{\partial \Psi'}{\partial \mathbf{N}'} = 0,$$

d'où

$$\Theta = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{N}} = 0.$$

L'égalité (21) devient donc, en vertu du théorème de Green,

$$(22) \quad \mathbf{S}_{\Sigma} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{N}_e} \, d\Sigma + \int_e \left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)^2 \right] dv = 0.$$

Dans tout l'espace i , intérieur à la surface Σ , on a

$$\Delta \Theta = 0$$

et, par conséquent,

$$\int_i \Delta \Theta \, dv = 0,$$

ce qui, en vertu du théorème de Green, devient

$$(23) \quad \mathbf{S}_{\Sigma} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{N}_i} \, d\Sigma + \int_i \left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)^2 \right] dv = 0.$$

Les deux fonctions φ et φ' vérifiant la condition (20), on a

$$(24) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial N_e} + (1 + 4\pi h F) \frac{\partial \Theta}{\partial N_i} = 0.$$

Multiplions les deux membres de l'égalité (23) par $(1 + 4\pi h F)$, et ajoutons membre à membre le résultat obtenu avec l'égalité (22), en tenant compte de l'égalité (24). Nous trouvons

$$\int_e \left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)^2 \right] dv + (1 + 4\pi h F) \int_i \left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)^2 \right] dv = 0.$$

Pour les corps magnétiques, F est positif; pour les corps diamagnétiques, F est négatif, mais toujours inférieur en valeur absolue à $\frac{1}{4\pi h}$. La quantité $(1 + 4\pi h F)$ est donc toujours positive pour tous les corps connus. L'égalité précédente ne peut donc avoir lieu que si l'on a dans tout l'espace

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0;$$

et comme Θ est continu dans tout l'espace et nul à l'infini, ces égalités montrent que Θ doit être égal à 0 dans tout l'espace. Donc, dans la théorie de Poisson, il n'existe qu'un seul état d'équilibre magnétique, aussi bien pour les corps magnétiques que pour les corps diamagnétiques (1).

Voici maintenant un raisonnement général qui, sans prouver rigoureusement l'existence de plusieurs états d'équilibre magnétique pour un corps diamagnétique, rend au moins très vraisemblable cette existence.

Considérons un système renfermant un corps dénué de force coercitive, que nous désignerons par l'indice (2), et des aimants permanents que nous désignerons par l'indice (1).

En désignant par φ_1 la fonction potentielle des aimants en un point de ces aimants, par φ_2 la fonction potentielle des aimants (1) en un point du corps (2), par φ_{21} la fonction potentielle du corps (2) en un point de ce

(1) Dans une Note *Sur l'aimantation des corps diamagnétiques* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CVI, p. 736; 12 mars 1888), j'avais indiqué par erreur que la proposition qui vient d'être énoncée ne peut être démontrée pour les corps diamagnétiques.

corps, le potentiel thermodynamique interne de ce corps peut s'écrire

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{F}} = & \mathbf{E}(\mathbf{U} - \mathbf{T}\mathbf{S}) + \frac{h}{2} \int \left(\mathfrak{A}_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} + \mathfrak{B}_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_1} + \mathfrak{C}_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial z_1} \right) d\nu_1 \\ & + h \int \left(\mathfrak{A}_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial z_2} \right) d\nu_2 \\ & + \frac{h}{2} \int \left(\mathfrak{A}_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial z_2} \right) d\nu_2 \\ & + \int \hat{\mathcal{F}}(\mathfrak{M}_1) d\nu_1 + \int \hat{\mathcal{F}}(\mathfrak{M}_2) d\nu_2.\end{aligned}$$

Cette expression est générale. Elle est exacte, en particulier, si la distribution magnétique sur le corps (2) est une distribution d'équilibre.

Considérons une certaine distribution d'équilibre correspondant à une certaine position du corps diamagnétique et des aimants; puis, supposons que, le corps étant placé dans la même position, on donne à toutes les particules de ce corps la même aimantation, sauf à la particule $dx_2 dy_2 dz_2 = d\nu_2$ que l'on supposera non aimantée. $\hat{\mathcal{F}}$ aura alors une nouvelle valeur $\hat{\mathcal{F}}'$ et l'on aura

$$\hat{\mathcal{F}}' - \hat{\mathcal{F}} = -h \left[\mathfrak{A}_2 \frac{\partial(\Psi_2 + \Psi_2)}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial(\Psi_2 + \Psi_2)}{\partial y_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial(\Psi_2 + \Psi_2)}{\partial z_2} \right] d\nu_2 - \hat{\mathcal{F}}(\mathfrak{M}_2) d\nu_2,$$

les quantités qui figurent au second membre ayant toutes la valeur qu'elles ont dans l'état d'équilibre considéré. Or, dans cet état d'équilibre, on a

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_2 &= -h \mathbf{F}_2(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial(\Psi_2 + \Psi_2)}{\partial x_2}, \\ \mathfrak{B}_2 &= -h \mathbf{F}_2(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial(\Psi_2 + \Psi_2)}{\partial y_2}, \\ \mathfrak{C}_2 &= -h \mathbf{F}_2(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial(\Psi_2 + \Psi_2)}{\partial z_2}.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_2 \frac{\partial(\Psi_2 + \Psi_2)}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial(\Psi_2 + \Psi_2)}{\partial y_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial(\Psi_2 + \Psi_2)}{\partial z_2} \\ = -\frac{1}{h \mathbf{F}_2(\mathfrak{M}_2)} (\mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{B}_2^2 + \mathfrak{C}_2^2) = -\frac{\mathfrak{M}_2^2}{h \mathbf{F}_2(\mathfrak{M}_2)}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\hat{\mathcal{F}}' - \hat{\mathcal{F}} = \left[\frac{\mathfrak{M}_2^2}{h \mathbf{F}_2(\mathfrak{M}_2)} - \hat{\mathcal{F}}_2(\mathfrak{M}_2) \right] d\nu_2.$$

Mais on sait que l'on a

$$F_2(\mathfrak{M}_2) = \frac{\mathfrak{M}_2}{\frac{d\mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}_2)}{d\mathfrak{M}_2}}$$

et

$$\mathfrak{F}_2(0) = 0.$$

On a donc

$$\mathfrak{F}' - \mathfrak{F} = \left[\frac{\mathfrak{M}_2^2}{F_2(\mathfrak{M}_2)} - \int_0^{\mathfrak{M}_2} \frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M})} d\mathfrak{M} \right] d\mathfrak{M}_2$$

ou bien, en désignant par μ une valeur comprise entre 0 et \mathfrak{M}_2 ,

$$\mathfrak{F}' - \mathfrak{F} = \mathfrak{M}_2^2 \left[\frac{1}{F_2(\mathfrak{M}_2)} - \frac{1}{2F_2(\mu)} \right] dx_2 dy_2 dz_2.$$

Considérons maintenant des corps diamagnétiques seulement, pour lesquels la fonction F est constamment négative, et supposons que la fonction F soit assujettie à l'une des conditions suivantes :

1° Ou bien la fonction magnétisante est indépendante de l'intensité d'aimantation ;

2° Ou bien sa valeur absolue décroît lorsque l'intensité d'aimantation croît ;

3° Ou bien sa valeur absolue croît avec l'intensité d'aimantation, mais assez faiblement pour qu'une de ses valeurs ne soit jamais double d'une autre de ses valeurs.

Ces restrictions sont certainement vérifiées par tous les corps diamagnétiques connus dans les limites où l'on a pu les étudier jusqu'ici.

Moyennant ces restrictions,

$$\frac{1}{F_2(\mathfrak{M}_2)} - \frac{1}{2F_2(\mu)}$$

est certainement négatif.

On voit, d'après cela, que, si, pour un quelconque des corps diamagnétiques vérifiant les restrictions précédentes, on considère une distribution magnétique d'équilibre correspondant à un minimum du potentiel thermodynamique, on peut toujours trouver une distribution pour laquelle le potentiel thermodynamique a une valeur moindre que dans l'état d'équilibre considéré.

Dès lors, s'il existe sur le corps diamagnétique un état d'équilibre magnétique, c'est-à-dire un minimum du potentiel thermodynamique, ou bien le potentiel thermodynamique présentera une infinité d'autres minima, ou

bien il existera un nombre fini ou infini de séries illimitées et continues de distributions magnétiques, telles que le long de chacune d'elles le potentiel thermodynamique décroisse sans cesse.

Une série semblable à celle que nous venons de considérer représenterait une transformation possible du corps diamagnétique. Si donc une circonstance quelconque amenait la distribution sur ce corps à se confondre avec l'un des termes de cette série, il pourrait se faire qu'à partir de ce moment, bien que le corps demeurât invariable de position en présence d'aimants invariables, son aimantation se mit à varier indéfiniment sans jamais parvenir à un état permanent.

Comme nous avons vu directement que, pour un corps diamagnétique dont le coefficient d'aimantation est constant, il ne peut exister plusieurs états d'équilibre magnétique, la démonstration que nous avons exposée conduit à penser qu'un semblable corps présenterait le singulier phénomène que nous venons de décrire. Pour un corps diamagnétique dont le coefficient d'aimantation est variable, il pourrait présenter soit le phénomène que nous venons de décrire, soit plusieurs états d'équilibre, soit à la fois l'une et l'autre particularité.

Ces conséquences quelque peu paradoxaux paraissent avoir déjà reçu un commencement de vérification expérimentale. Il en résulterait en effet qu'un corps diamagnétique, placé dans une position déterminée dans un champ magnétique déterminé, pourrait présenter un moment magnétique variable avec la série de transformations qui a servi à l'amener dans ce champ. C'est ce que semblent montrer de récentes expériences de M. P. Joubin (¹).

« J'avais essayé, il y a quelque temps, dit M. P. Joubin, d'utiliser l'aimantation des corps diamagnétiques pour mesurer l'intensité d'un champ magnétique, ce qui donnerait une méthode très rapide; mais, dès les premiers pas, une difficulté singulière s'était présentée, qui m'avait empêché de continuer. »

Cette difficulté résultait de l'observation suivante.

Un petit barreau de bismuth, muni d'un léger miroir, était suspendu par un bifilaire entre les deux pôles d'un électro-aimant. Sous l'influence

(¹) P. JOUBIN. *Sur la mesure des champs magnétiques par les corps diamagnétiques* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CVI, p. 735; 12 mars 1888).

des forces magnétiques et du couple de la suspension, il prenait une nouvelle position d'équilibre, *très peu différente de la première*, d'où l'on comptait déduire la valeur du champ. Mais il fut immédiatement évident que, pour le but proposé, la méthode ne valait rien.

En effet, pour un même courant, c'est-à-dire pour un même champ, la position du barreau dépendait de la suite des modifications magnétiques qu'on lui avait fait subir. Si l'on trace une courbe en prenant comme abscisse l'intensité du courant et comme ordonnées les déviations, le point figuratif se déplace sur une ligne droite quand on fait croître les intensités de 0 à 40 ampères; mais si, à partir de ce moment, on diminue graduellement le courant, le point se déplace sur une autre droite très inclinée par rapport à la précédente, de telle sorte que, lorsqu'on revient à 15 ampères, la déviation est presque double de celle qui correspondait primitivement au même courant.

Si l'on ouvre ensuite le circuit, et si l'on recommence l'expérience, on retrouve la série des déviations représentées par la première droite, ce qui exclut l'idée de chercher l'explication du phénomène observé dans une aimantation permanente du barreau de bismuth (¹).

Le même fait s'est produit avec un simple miroir de verre rectangulaire, qui s'aimante comme le bismuth, mais plus faiblement. L'augmentation du moment magnétique pour un même courant atteignait encore, dans ce cas, le quinzième de sa valeur, changement bien considérable pour pouvoir être attribué à une variation dans la grandeur du champ.

M. P. Joubin, qui avait fait ces expériences sans connaître la théorie que nous venons d'exposer, pense qu'elles peuvent servir à confirmer les conséquences paradoxales de cette théorie.

Cette question est assurément encore fort obscure, tant au point de vue théorique qu'au point de vue expérimental. M. Joubin doit reprendre ses recherches sur ce sujet. Les résultats auxquels il parviendra contribueront certainement à éclaircir quelque peu ce problème.

(¹) Ce dernier détail ne se trouve point dans la Note publiée par M. P. Joubin. Je le tiens de M. P. Joubin lui-même.



CHAPITRE IV.

ÉQUILIBRE ET MOUVEMENT D'UNE MASSE MAGNÉTIQUE EN PRÉSENCE
D'AIMANTS.§ I. — Équations d'équilibre d'une masse magnétique
en présence d'aimants.

4. Nous avons examiné les lois qui président à la distribution stable du magnétisme sur une masse magnétique ou diamagnétique mise en présence d'aimants permanents et maintenue invariable de forme, de position et d'état physique et chimique. Une nouvelle question s'impose maintenant : une masse magnétique invariable de forme, de position et d'état physique étant placée en présence d'aimants permanents, dans quelles circonstances sera-t-elle en équilibre ? Cet équilibre sera-t-il stable ? Lorsque les conditions d'équilibre ne sont pas remplies, comment se déplacera-t-elle ?

Nous supposerons, pour trouver les conditions d'équilibre d'une semblable masse, qu'elle soit soumise à des actions extérieures quelconques, et nous désignerons par X , Y , Z les composantes de la force extérieure qui a son point d'application en x , y , z .

Les conditions d'équilibre seront aisées à trouver. Pour exprimer qu'un état du système est un état d'équilibre, nous ferons subir à ce système une modification virtuelle quelconque, et, désignant par $\delta\mathcal{F}$ la variation subie par le potentiel thermodynamique interne et par $\delta\mathcal{E}$ le travail des forces extérieures, nous écrirons, conformément aux principes posés dans le Chapitre I,

$$(1) \quad \delta\mathcal{F} = \delta\mathcal{E}.$$

Les paramètres indépendants dont la variation constitue la modification virtuelle que nous avons à considérer sont les composantes δx , δy , δz de la translation imprimée à la masse magnétique; les composantes $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ de la rotation imposée à la même masse; enfin les variations $\delta\omega_1$, $\delta\omega_2$, $\delta\omega_3$ que subissent en chaque point les composantes de l'aimantation.

D'après l'égalité (19) du Chapitre I, nous avons

$$(2) \quad \dot{x} = \mathbf{E}(\mathbf{U} - \mathbf{T}\mathbf{S}) + \mathbf{F} + \int \mathbf{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) dv;$$

d'où, puisque $E(U - TS)$ demeure invariable dans la modification considérée,

$$(3) \quad \delta \tilde{\mathcal{F}} = \delta \mathcal{F} + \int \delta \tilde{\mathcal{F}}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) dv.$$

D'après l'égalité (14) du Chapitre I, nous avons

$$\mathcal{F} = \frac{h}{2} \int \left(\mathfrak{a} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mathfrak{b} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \mathfrak{c} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dv$$

l'intégration s'étendant à tout le système.

Cette égalité peut se mettre sous une forme plus explicite. Désignons les aimants permanents par l'indice (1) et les masses dénuées de force coercitive par l'indice (2); par ψ_1 , la fonction potentielle des masses distribuées sur les aimants permanents en un point (x_1, y_1, z_1) de ces aimants; par ψ_2 , la fonction potentielle des masses distribuées sur les corps dénués de force coercitive en un point (x_2, y_2, z_2) de ces corps; par ψ_2 la fonction potentielle des masses distribuées sur les aimants permanents en un point (x_2, y_2, z_2) des corps dénués de force coercitive. Nous pourrons alors écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \frac{h}{2} \int \left(\mathfrak{a}_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \mathfrak{b}_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} + \mathfrak{c}_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z_1} \right) dv_1 \\ & + h \int \left(\mathfrak{a}_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \mathfrak{b}_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} + \mathfrak{c}_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial z_2} \right) dv_2 \\ & + \frac{h}{2} \int \left(\mathfrak{a}_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \mathfrak{b}_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} + \mathfrak{c}_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial z_2} \right) dv_2. \end{aligned}$$

Cela posé, il est aisément de voir que l'égalité (3) deviendra

$$\begin{aligned} (4) \quad \delta \tilde{\mathcal{F}} = & h \delta x \int \left(\mathfrak{a} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \mathfrak{b} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} + \mathfrak{c} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial z} \right) dv \\ & + h \delta y \int \left(\mathfrak{a} \frac{\partial \psi_2}{\partial y \partial x} + \mathfrak{b} \frac{\partial \psi_2}{\partial y^2} + \mathfrak{c} \frac{\partial \psi_2}{\partial y \partial z} \right) dv \\ & + h \delta z \int \left(\mathfrak{a} \frac{\partial \psi_2}{\partial z \partial x} + \mathfrak{b} \frac{\partial \psi_2}{\partial z \partial y} + \mathfrak{c} \frac{\partial \psi_2}{\partial z^2} \right) dv \\ & + h \delta \lambda \int \left[\left(\mathfrak{a} \frac{\partial \psi_2}{\partial z \partial x} + \mathfrak{b} \frac{\partial \psi_2}{\partial z \partial y} + \mathfrak{c} \frac{\partial \psi_2}{\partial z^2} \right) y \right. \\ & \quad \left. - \left(\mathfrak{a} \frac{\partial \psi_2}{\partial y \partial x} + \mathfrak{b} \frac{\partial \psi_2}{\partial y^2} + \mathfrak{c} \frac{\partial \psi_2}{\partial y \partial z} \right) z \right] dv \\ & + h \delta \mu \int \left[\left(\mathfrak{a} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \mathfrak{b} \frac{\partial \psi_2}{\partial x \partial y} + \mathfrak{c} \frac{\partial \psi_2}{\partial x \partial z} \right) z \right. \\ & \quad \left. - \left(\mathfrak{a} \frac{\partial \psi_2}{\partial z \partial x} + \mathfrak{b} \frac{\partial \psi_2}{\partial z \partial y} + \mathfrak{c} \frac{\partial \psi_2}{\partial z^2} \right) x \right] dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + h \delta v \int \left[\left(\lambda \frac{\partial \psi_2}{\partial y \partial x} + \mu \frac{\partial \psi_2}{\partial y^2} + \varepsilon \frac{\partial \psi_2}{\partial y \partial z} \right) x \right. \\
& \quad \left. - \left(\lambda \frac{\partial \psi_2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial \psi_2}{\partial x \partial y} + \varepsilon \frac{\partial \psi_2}{\partial x \partial z} \right) y \right] dv \\
& + h \int \left[\frac{\partial (\psi_2 + \psi_2)}{\partial x} \delta \lambda + \frac{\partial (\psi_2 + \psi_2)}{\partial y} \delta \mu + \frac{\partial (\psi_2 + \psi_2)}{\partial z} \delta \varepsilon \right] dv \\
& + \int \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathcal{M}} (\lambda \delta \lambda + \mu \delta \mu + \varepsilon \delta \varepsilon) dv,
\end{aligned}$$

égalité dans laquelle toutes les intégrations se rapportent au corps dénué de force coercitive.

Le travail des forces extérieures a pour valeur

$$\begin{aligned}
(5) \quad & \delta \mathcal{E} = \delta x \Sigma \mathbf{X} + \delta y \Sigma \mathbf{Y} + \delta z \Sigma \mathbf{Z} \\
& + \delta \lambda \Sigma (Yz - Zy) - \delta \mu \Sigma (Zx - Xz) - \delta \varepsilon \Sigma (Xy - Yx).
\end{aligned}$$

Si l'on reporte ces expressions dans l'égalité (1) et si l'on écrit que cette égalité doit avoir lieu quels que soient $\delta x, \delta y, \delta z; \delta \lambda, \delta \mu, \delta \varepsilon; \delta \lambda, \delta \mu, \delta \varepsilon$, on trouve, en premier lieu, les équations (2) du Chapitre I, qui déterminent la distribution magnétique sur les conducteurs devenus immobiles, et, en second lieu, les six équations suivantes :

$$(6) \quad \left| \begin{aligned}
& h \int \left(\lambda \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y \partial x} + \varepsilon \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z \partial x} \right) dv = \Sigma \mathbf{X}, \\
& h \int \left(\lambda \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z \partial y} \right) dv = \Sigma \mathbf{Y}, \\
& h \int \left(\lambda \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y \partial z} + \varepsilon \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} \right) dv = \Sigma \mathbf{Z}, \\
& h \int \left[\left(\lambda \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y \partial z} + \varepsilon \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} \right) y \right. \\
& \quad \left. - \left(\lambda \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z \partial y} \right) z \right] dv = \Sigma (Zy - Yz), \\
& h \int \left[\left(\lambda \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y \partial x} + \varepsilon \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z \partial x} \right) z \right. \\
& \quad \left. - \left(\lambda \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y \partial z} + \varepsilon \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} \right) x \right] dv = \Sigma (Xz - Zx), \\
& h \int \left[\left(\lambda \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z \partial y} \right) x \right. \\
& \quad \left. - \left(\lambda \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y \partial x} + \varepsilon \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z \partial x} \right) y \right] dv = \Sigma (Yx - Xy).
\end{aligned} \right.$$

Ces dernières équations pourraient d'ailleurs s'établir directement en partant des résultats expérimentaux sur lesquels, au Chapitre I, nous avons fondé la détermination du potentiel thermodynamique d'un système qui renferme des aimants.

§ II. — L'état d'équilibre d'une masse magnétique en présence d'aimants permanents est-il un état d'équilibre stable?

2. Arrivons maintenant à la question principale que nous voulons examiner dans ce Chapitre ; une masse magnétique étant mise en présence d'aimants permanents, sa position d'équilibre est fixée par les équations (6) : cette position d'équilibre est-elle une position d'équilibre stable ?

Pour discuter cette question, nous supposerons que les forces extérieures admettent un potentiel W . Dans ce cas, le système admettra un potentiel thermodynamique total Φ , qui sera la somme du potentiel thermodynamique interne \mathcal{F} et du potentiel des forces extérieures W

$$\Phi = \mathcal{F} + W.$$

Si, pour toutes les modifications virtuelles qui laissent invariables la forme du corps dénué de force coercitive et son état physique ou chimique, Φ subit une variation positive, le système est en état d'équilibre stable ; la variation première de Φ étant identiquement nulle, puisque nous supposons réalisées les conditions indiquées au paragraphe précédent, nous sommes amenés à chercher si la variation seconde de Φ

$$\delta^2 \Phi = \delta^2 \mathcal{F} + \delta^2 W$$

est positive.

Nous nous contenterons d'examiner le cas où les forces extérieures se réduisent :

1° A une pression normale et uniforme sur la surface du corps magnétique ;

2° A une force constante en grandeur et en direction appliquée à chacun des éléments du corps magnétique.

C'est sensiblement le cas présenté par un corps magnétique placé dans l'air et soumis à l'action de la pesanteur.

De plus, nous commencerons par rechercher si $\delta^2 \Phi$ est positif non pas pour toute modification virtuelle, mais seulement *pour toute translation*

virtuelle. Dans ces conditions, il n'est pas difficile de voir que

$$\delta^2 \mathbf{W} = 0,$$

et que la question se ramène à chercher le signe de $\delta^2 \mathcal{J}$.

Cette quantité a alors une expression très simple; elle se présente comme une forme homogène et du second ordre de δx , δy , δz et cette forme est la suivante :

$$(7) \quad \delta^2 \mathcal{J} = h \left[\begin{aligned} & \delta x^2 \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x^3} + \mathcal{B} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial y \partial x^2} + \mathcal{C} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial z \partial x^2} \right) dv \\ & + \delta y^2 \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial y^2} + \mathcal{B} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial y^3} + \mathcal{C} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial z \partial y^2} \right) dv \\ & + \delta z^2 \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial z^2} + \mathcal{B} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial y \partial z^2} + \mathcal{C} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial z^3} \right) dv \\ & + 2 \delta y \delta z \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial y \partial z} + \mathcal{B} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial y^2 \partial z} + \mathcal{C} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial z^2 \partial y} \right) dv \\ & + 2 \delta z \delta x \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x^2 \partial z} + \mathcal{B} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial y \partial z} + \mathcal{C} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial z^2 \partial x} \right) dv \\ & + 2 \delta x \delta y \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x^2 \partial y} + \mathcal{B} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial y^2 \partial x} + \mathcal{C} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial y \partial z} \right) dv \end{aligned} \right].$$

Avant d'étudier le signe de cette quantité, demandons-nous si elle peut être identiquement nulle.

L'égalité à 0 de tous les coefficients de cette forme a un sens très simple.

Imaginons la masse magnétique que nous considérons placée dans sa position d'équilibre; elle y prend une certaine aimantation; les aimants permanents en présence desquels elle se trouve exercent sur elle certaines actions réductibles à une force et à un couple; soient \mathfrak{X} , \mathfrak{Y} , \mathfrak{Z} les composantes de la force et R cette force. Les choses étant dans cet état, imaginons que nous fixions invariablement l'aimantation de la masse magnétique et que nous imprimions à cette masse une translation ayant pour composante δx , δy , δz , \mathfrak{X} , \mathfrak{Y} , \mathfrak{Z} subiront certaines variations

$$\delta \mathfrak{X} = \xi \delta x + \xi' \delta y + \xi'' \delta z,$$

$$\delta \mathfrak{Y} = \eta \delta x + \eta' \delta y + \eta'' \delta z,$$

$$\delta \mathfrak{Z} = \zeta \delta x + \zeta' \delta y + \zeta'' \delta z.$$

Or il est aisé de voir que l'on a

$$\begin{aligned}\eta'' &= \xi', \\ \zeta &= \xi'', \\ \xi' &= \eta\end{aligned}$$

et que l'égalité (7) peut s'écrire

$$-\delta^2 \mathcal{F} = \xi \delta x^2 + \eta' \delta y^2 + \zeta'' \delta z^2 + (\xi' + \eta'') \delta y \delta z + (\zeta + \xi'') \delta z \delta x + (\xi' + \eta) \delta x \delta y.$$

Si donc la quantité $\delta^2 \mathcal{F}$ est identiquement nulle, c'est que la force R ne varie ni en grandeur ni en direction dans cette translation.

Il peut arriver que ce cas se réalise; il serait réalisé, par exemple, si le champ engendré par les aimants permanents et dans lequel se trouve la masse magnétique était un champ magnétique uniforme. Toutefois le cas dont il s'agit est certainement très particulier.

Excluons maintenant ce cas de nos recherches, et supposons que la quantité $\delta^2 \mathcal{F}$ déterminée par l'égalité (7) ne soit pas identiquement nulle. Peut-il arriver qu'elle demeure toujours positive, quels que soient δx , δy , δz ? Il serait évidemment nécessaire, pour qu'il en fût ainsi, que les trois coefficients de δx^2 , δy^2 , δz^2 fussent tous les trois positifs. Or la somme de ces trois coefficients peut s'écrire

$$h \int \left(A \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi_2 + B \frac{\partial}{\partial y} \Delta \psi_2 + C \frac{\partial}{\partial z} \Delta \psi_2 \right) dv,$$

l'intégration s'étendant au volume entier de la masse dénuée de force coer-
citive.

Mais, en chaque point de cette masse, on a

$$\Delta \psi_2 = 0,$$

puisque ψ_2 est, en un point de cette masse, la fonction potentielle d'une aimantation qui lui est extérieure. On a donc aussi en tous ces points

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi_2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \Delta \psi_2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \Delta \psi_2 = 0.$$

La somme des coefficients de δx^2 , δy^2 , δz^2 étant identiquement nulle dans l'expression de $\delta^2 \mathcal{F}$, il existe certainement des translations virtuelles pour lesquelles $\delta^2 \mathcal{F}$ est négatif.

Dès lors nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Si l'on excepte un certain cas particulier qui comprend, comme cas encore plus particulier, celui où les aimants permanents engendreraient un champ uniforme, un corps magnétique ou diamagnétique, soumis à l'action d'aimants permanents, d'une pression extérieure normale et uniforme et de forces extérieures constantes en grandeur et en direction appliquées à chacun de ses éléments, ne peut prendre aucune position d'équilibre qui ne soit instable.

3. Pour parvenir à la proposition précédente, nous avons regardé les rotations et translations imposées au corps solide d'une part et les variations imposées à l'aimantation d'autre part comme des paramètres que l'on pouvait faire varier d'une manière indépendante dans les modifications virtuelles et nous avons fait varier seulement les premiers. On peut se placer à un autre point de vue ; on peut admettre que sur la masse magnétique que l'on considère la distribution magnétique est à chaque instant la distribution d'équilibre pour la position que la masse occupe à cet instant. Les équations (2) du Chapitre I deviennent alors, pour les modifications virtuelles, des équations de *liaison*.

Ce point de vue, qui revient à regarder la vitesse avec laquelle s'établit l'équilibre magnétique sur un corps qui se déplace comme infinie par rapport à la vitesse de son déplacement, est évidemment plus restreint que le premier. Toutes les modifications virtuelles possibles dans les nouvelles conditions le sont dans les anciennes, mais la réciproque n'est pas vraie. Il pourrait donc se faire qu'un état d'équilibre instable au premier point de vue ne le fût plus au second (¹).

Nous allons donc reprendre l'étude de la stabilité de l'équilibre en supposant que l'aimantation de la masse magnétique vérifie sans cesse les égalités

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_2 = -h \mathbf{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathfrak{W}_2)}{\partial x}, \\ \mathfrak{B}_2 = -h \mathbf{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathfrak{W}_2)}{\partial y}, \\ \mathfrak{C}_2 = -h \mathbf{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathfrak{W}_2)}{\partial z}. \end{array} \right.$$

(¹) Cette distinction a déjà été indiquée, pour un corps électrisé très petit, par Maxwell, sous le nom de *théorème d'Earnshaw* (*Traité d'Électricité et de Magnétisme*, traduit par Seligmann-Lui, t. I, p. 182).

Pour que $\delta^2 \mathcal{F}$ soit positif pour tous les déplacements virtuels de la masse magnétique, il est nécessaire tout d'abord qu'il soit positif pour toutes les translations. Supposons donc que l'on ait

$$\delta\lambda = 0, \quad \delta\mu = 0, \quad \delta\nu = 0.$$

Le corps subissant la translation dont les composantes sont $\delta x, \delta y, \delta z$ pour que les équations (8) demeurent vérifiées, λ, μ, ν doivent varier de quantités que nous désignerons par $\delta'\lambda, \delta'\mu, \delta'\nu$. On a alors, en vertu de l'égalité (4),

$$(9) \quad \delta\tilde{\mathcal{F}} = h \left\{ \begin{aligned} & \delta x \int \left(\lambda \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y \partial x} + \nu \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z \partial x} \right) dv \\ & + \delta y \int \left(\lambda \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z \partial y} \right) dv \\ & + \delta z \int \left(\lambda \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y \partial z} + \nu \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z^2} \right) dv \\ & + \int \left[\frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \Psi_2)}{\partial x} \delta'\lambda + \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \Psi_2)}{\partial y} \delta'\mu + \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \Psi_2)}{\partial z} \delta'\nu \right] dv \Big\} \\ & + \int \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}} (\lambda \delta'\lambda + \mu \delta'\mu + \nu \delta'\nu) dv. \end{aligned} \right.$$

Les équations de l'équilibre magnétique doivent être vérifiées dans la position initiale du système. On sait que ces équations (8) signifient simplement que l'on a

$$(10) \quad h \int \left[\frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \Psi_2)}{\partial x} \delta\lambda + \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \Psi_2)}{\partial y} \delta\mu + \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \Psi_2)}{\partial z} \delta\nu \right] dv + \int \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}} (\lambda \delta\lambda + \mu \delta\mu + \nu \delta\nu) dv = 0,$$

quels que soient $\delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu$.

Ces équations (8) doivent être encore vérifiées après que la masse magnétique a subi la translation $\delta x, \delta y, \delta z$ et que λ, μ, ν sont devenus $\lambda + \delta'\lambda, \mu + \delta'\mu, \nu + \delta'\nu$; en d'autres termes, cette modification doit faire éprouver au premier membre de l'égalité (10) une variation égale à 0, quels que soient $\delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu$.

Cherchons l'expression de cette variation.

La quantité

$$h \int \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \delta\lambda + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \delta\mu + \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \delta\nu \right) dv$$

varie simplement de

$$h \left[\delta x \int \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} \delta \mathcal{A} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} \delta \mathcal{B} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z \partial x} \delta \mathcal{C} \right) dv \right. \\ \left. + \delta y \int \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} \delta \mathcal{A} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} \delta \mathcal{B} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z \partial y} \delta \mathcal{C} \right) dv \right. \\ \left. + \delta z \int \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial z} \delta \mathcal{A} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y \partial z} \delta \mathcal{B} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} \delta \mathcal{C} \right) dv \right].$$

Pour trouver la variation de

$$h \int \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \delta \mathcal{A} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \delta \mathcal{B} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \delta \mathcal{C} \right) dv,$$

nous devons nous souvenir de l'expression ψ_2

$$\psi_2 = \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mathcal{B} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dv,$$

l'intégration s'étendant au volume entier du corps magnétique. Il sera alors évident que la variation de la quantité précédente a pour valeur

$$h \int \left[\delta \mathcal{A} \frac{\partial}{\partial x} \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \delta' \mathcal{A}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \delta' \mathcal{B}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \delta' \mathcal{C}' \right) dv' \right. \\ \left. + \delta \mathcal{B} \frac{\partial}{\partial y} \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \delta' \mathcal{A}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \delta' \mathcal{B}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \delta' \mathcal{C}' \right) dv' \right. \\ \left. + \delta \mathcal{C} \frac{\partial}{\partial z} \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \delta' \mathcal{A}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \delta' \mathcal{B}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \delta' \mathcal{C}' \right) dv' \right] dv,$$

toutes les intégrations s'étendant au volume entier du corps magnétique.

Enfin, la quantité

$$\int \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}} (\mathcal{A} \delta \mathcal{A} + \mathcal{B} \delta \mathcal{B} + \mathcal{C} \delta \mathcal{C}) dv$$

subit, on le voit aisément, la variation

$$\int \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}} (\delta \mathcal{A} \delta' \mathcal{A} + \delta \mathcal{B} \delta' \mathcal{B} + \delta \mathcal{C} \delta' \mathcal{C}) dv \\ + \int \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{M}} \left[\frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}} \right] (\mathcal{A} \delta \mathcal{A} + \mathcal{B} \delta \mathcal{B} + \mathcal{C} \delta \mathcal{C}) \\ (\delta \mathcal{A} \delta' \mathcal{A} + \delta \mathcal{B} \delta' \mathcal{B} + \delta \mathcal{C} \delta' \mathcal{C}) dv.$$

Ainsi donc, en égalant à 0 la variation du premier membre de l'égalité (10), on trouve

$$\begin{aligned}
 (11) \quad h \Big\{ & \delta x \int \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x^2} \delta \mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y \partial x} \delta \mathcal{B} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z \partial x} \delta \mathcal{C} \right) dv \\
 & + \delta y \int \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial y} \delta \mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y^2} \delta \mathcal{B} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial y} \delta \mathcal{C} \right) dv \\
 & + \delta z \int \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial z} \delta \mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y \partial z} \delta \mathcal{B} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z^2} \delta \mathcal{C} \right) dv \\
 & + \int \left[\delta \mathcal{A} \frac{\partial}{\partial x} \int \left(\frac{\partial^1}{\partial x'} \delta' \mathcal{A}' + \frac{\partial^1}{\partial y'} \delta' \mathcal{B}' + \frac{\partial^1}{\partial z'} \delta' \mathcal{C}' \right) dv' \right. \\
 & \quad \left. + \delta \mathcal{B} \frac{\partial}{\partial y} \int \left(\frac{\partial^1}{\partial x'} \delta' \mathcal{A}' + \frac{\partial^1}{\partial y'} \delta' \mathcal{B}' + \frac{\partial^1}{\partial z'} \delta' \mathcal{C}' \right) dv' \right. \\
 & \quad \left. + \delta \mathcal{C} \frac{\partial}{\partial z} \int \left(\frac{\partial^1}{\partial x'} \delta' \mathcal{A}' + \frac{\partial^1}{\partial y'} \delta' \mathcal{B}' + \frac{\partial^1}{\partial z'} \delta' \mathcal{C}' \right) dv' \right] dv' \Big\} \\
 & + \int \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}} (\delta \mathcal{A} \delta' \mathcal{A} + \delta \mathcal{B} \delta' \mathcal{B} + \delta \mathcal{C} \delta' \mathcal{C}) dv \\
 & + \int \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{M}} \left[\frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}} \right] (\mathcal{A} \delta \mathcal{A} + \mathcal{B} \delta \mathcal{B} + \mathcal{C} \delta \mathcal{C}) \\
 & \quad (\mathcal{A} \delta' \mathcal{A} + \mathcal{B} \delta' \mathcal{B} + \mathcal{C} \delta' \mathcal{C}) dv = 0.
 \end{aligned}$$

Dans cette égalité, toutes les intégrations sont étendues au corps magnétique tout entier; *les quantités* $\delta \mathcal{A}$, $\delta \mathcal{B}$, $\delta \mathcal{C}$ *sont arbitraires, tandis que les quantités* $\delta' \mathcal{A}$, $\delta' \mathcal{B}$, $\delta' \mathcal{C}$ *sont des fonctions déterminées de* δx , δy , δz .

Après avoir donné au corps magnétique une translation δx , δy , δz qui faisait varier \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} de $\delta' \mathcal{A}$, $\delta' \mathcal{B}$, $\delta' \mathcal{C}$ et \mathcal{F} de la quantité $\delta \mathcal{F}$ donnée par l'égalité (9), imprimons une seconde fois à ce corps la translation δx , δy , δz ; $\delta' \mathcal{A}$, $\delta' \mathcal{B}$, $\delta' \mathcal{C}$ vont varier de $\delta'^2 \mathcal{A}$, $\delta'^2 \mathcal{B}$, $\delta'^2 \mathcal{C}$ et $\delta \mathcal{F}$ va varier de $\delta^2 \mathcal{F}$. Proposons-nous de calculer $\delta^2 \mathcal{F}$, d'après l'expression (9) de $\delta \mathcal{F}$.

La quantité

$$\begin{aligned}
 h \left[& \delta x \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x^2} + \mathcal{B} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y \partial x} + \mathcal{C} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z \partial x} \right) dv \right. \\
 & + \delta y \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial y} + \mathcal{B} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y^2} + \mathcal{C} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z \partial y} \right) dv \\
 & \left. + \delta z \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial z} + \mathcal{B} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y \partial z} + \mathcal{C} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z^2} \right) dv \right]
 \end{aligned}$$

va subir la variation

$$\begin{aligned}
 h \left[& \delta x^2 \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x^3} + \mathcal{B} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial y \partial x^2} + \mathcal{C} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial z \partial x^2} \right) dv \\
 & + \delta y^2 \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial y^2} + \mathcal{B} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial y^3} + \mathcal{C} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial z \partial y^2} \right) dv \\
 & + \delta z^2 \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial z^2} + \mathcal{B} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial y \partial z^2} + \mathcal{C} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial z^3} \right) dv \\
 & + 2 \delta y \delta z \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial y \partial z} + \mathcal{B} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial y^2 \partial z} + \mathcal{C} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial z^2 \partial y} \right) dv \\
 & + 2 \delta z \delta x \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x^2 \partial z} + \mathcal{B} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial y \partial z} + \mathcal{C} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial z^2 \partial x} \right) dv \\
 & + 2 \delta x \delta y \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x^2 \partial y} + \mathcal{B} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial y^2 \partial x} + \mathcal{C} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial y \partial z} \right) dv \\
 & + \delta x \int \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x^2} \delta' \mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y \partial x} \delta' \mathcal{B} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z \partial x} \delta' \mathcal{C} \right) dv \\
 & + \delta y \int \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial y} \delta' \mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y^2} \delta' \mathcal{B} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z \partial y} \delta' \mathcal{C} \right) dv \\
 & + \delta z \int \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial z} \delta' \mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y \partial z} \delta' \mathcal{B} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z^2} \delta' \mathcal{C} \right) dv \right].
 \end{aligned}$$

La quantité

$$h \int \left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x} \delta' \mathcal{A} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y} \delta' \mathcal{B} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z} \delta' \mathcal{C} \right) dv$$

subit une variation

$$\begin{aligned}
 h \left[& \delta x \int \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x^2} \delta' \mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y \partial x} \delta' \mathcal{B} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z \partial x} \delta' \mathcal{C} \right) dv \\
 & + \delta y \int \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial y} \delta' \mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y^2} \delta' \mathcal{B} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z \partial y} \delta' \mathcal{C} \right) dv \\
 & + \delta z \int \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial z} \delta' \mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y \partial z} \delta' \mathcal{B} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z^2} \delta' \mathcal{C} \right) dv \\
 & + \int \left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x} \delta'^2 \mathcal{A} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y} \delta'^2 \mathcal{B} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z} \delta'^2 \mathcal{C} \right) dv \right].
 \end{aligned}$$

La quantité

$$h \int \left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x} \delta' \mathcal{A} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y} \delta' \mathcal{B} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z} \delta' \mathcal{C} \right) dv$$

subit une variation

$$\begin{aligned}
 h \int \left[& \delta' \mathcal{A} \frac{\partial}{\partial x} \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \delta' \mathcal{A}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \delta' \mathcal{B}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \delta' \mathcal{C}' \right) dv' \right. \\
 & + \delta' \mathcal{B} \frac{\partial}{\partial y} \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \delta' \mathcal{A}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \delta' \mathcal{B}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \delta' \mathcal{C}' \right) dv' \\
 & \left. + \delta' \mathcal{C} \frac{\partial}{\partial z} \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \delta' \mathcal{A}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \delta' \mathcal{B}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \delta' \mathcal{C}' \right) dv' \right] dv \\
 & + h \int \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \delta' \mathcal{A} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \delta' \mathcal{B} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \delta' \mathcal{C} \right) dv.
 \end{aligned}$$

Enfin la quantité

$$\int \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}} (\mathcal{A} \delta' \mathcal{A} + \mathcal{B} \delta' \mathcal{B} + \mathcal{C} \delta' \mathcal{C}) dv$$

subit la variation

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}} [(\delta' \mathcal{A})^2 + (\delta' \mathcal{B})^2 + (\delta' \mathcal{C})^2] dv \\
 & + \int \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}} [\mathcal{A} \delta'^2 \mathcal{A} + \mathcal{B} \delta'^2 \mathcal{B} + \mathcal{C} \delta'^2 \mathcal{C}] dv \\
 & + \int \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{M}} \left[\frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}} \right] (\mathcal{A} \delta' \mathcal{A} + \mathcal{B} \delta' \mathcal{B} + \mathcal{C} \delta' \mathcal{C})^2 dv.
 \end{aligned}$$

Nous avons obtenu ainsi les variations subies par les divers termes de $\delta \tilde{\mathcal{F}}$. En les réunissant dans un ordre convenablement choisi, nous arrivons à la formule suivante :

$$(1) \quad \delta^2 \tilde{\mathcal{F}} = h \left[\delta x^2 \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x^3} + \mathcal{B} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial y \partial x^2} + \mathcal{C} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial z \partial x^2} \right) dv \right. \quad (1)$$

$$\left. + \delta y^2 \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial y^2} + \mathcal{B} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial y^3} + \mathcal{C} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial z \partial y^2} \right) dv \right. \quad (2)$$

$$\left. + \delta z^2 \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial z^2} + \mathcal{B} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial y \partial z^2} + \mathcal{C} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial z^3} \right) dv \right. \quad (3)$$

$$\left. + 2 \delta y \delta z \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial y \partial z} + \mathcal{B} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial y^2 \partial z} + \mathcal{C} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial z^2 \partial y} \right) dv \right. \quad (4)$$

$$+ 2 \delta z \delta x \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x^2 \partial z} + \mathcal{B} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial y \partial z} + \mathcal{C} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial z^2 \partial x} \right) dv \quad (5)$$

$$+ 2 \delta x \delta y \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x^2 \partial y} + \mathcal{B} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial y^2 \partial x} + \mathcal{C} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial y \partial z} \right) dv \quad (6)$$

$$+ \int \left\{ \left[h \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial x} + \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{M}} \frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathcal{M}} \right] \delta'^2 \mathcal{A} \right. \quad (7)$$

$$\left. + \left[h \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial y} + \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{M}} \frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathcal{M}} \right] \delta'^2 \mathcal{B} \right. \quad (8)$$

$$\left. + \left[h \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial z} + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{M}} \frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathcal{M}} \right] \delta'^2 \mathcal{C} \right\} dv \quad (9)$$

$$+ h \left\{ \delta x \int \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x^2} \delta' \mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y \partial x} \delta' \mathcal{B} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z \partial x} \delta' \mathcal{C} \right) dv \right. \quad (10)$$

$$\left. + \delta y \int \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial y} \delta' \mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y^2} \delta' \mathcal{B} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z \partial y} \delta' \mathcal{C} \right) dv \right. \quad (11)$$

$$\left. + \delta z \int \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial z} \delta' \mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y \partial z} \delta' \mathcal{B} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z^2} \delta' \mathcal{C} \right) dv \right. \quad (12)$$

$$+ h \int \left[\delta' \mathcal{A} \frac{\partial}{\partial x} \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \delta' \mathcal{A}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \delta' \mathcal{B}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \delta' \mathcal{C}' \right) dv' \right. \quad (13)$$

$$\left. + \delta' \mathcal{B} \frac{\partial}{\partial y} \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \delta' \mathcal{A}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \delta' \mathcal{B}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \delta' \mathcal{C}' \right) dv' \right. \quad (14)$$

$$\left. + \delta' \mathcal{C} \frac{\partial}{\partial z} \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \delta' \mathcal{A}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \delta' \mathcal{B}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \delta' \mathcal{C}' \right) dv' \right\} \quad (15)$$

$$+ \int \frac{1}{\mathcal{M}} \frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathcal{M}} [(\delta' \mathcal{A})^2 + (\delta' \mathcal{B})^2 + (\delta' \mathcal{C})^2] dv \quad (16)$$

$$+ \int \frac{1}{\mathcal{M}} \frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathcal{M}} [(\mathcal{A} \delta' \mathcal{A} + \mathcal{B} \delta' \mathcal{B} + \mathcal{C} \delta' \mathcal{C})^2] dv \quad (17)$$

$$+ h \left[\delta x \int \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x^2} \delta' \mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y \partial x} \delta' \mathcal{B} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z \partial x} \delta' \mathcal{C} \right) dv \right. \quad (18)$$

$$\left. + \delta y \int \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial y} \delta' \mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y^2} \delta' \mathcal{B} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z \partial y} \delta' \mathcal{C} \right) dv \right. \quad (19)$$

$$\left. + \delta z \int \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial z} \delta' \mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y \partial z} \delta' \mathcal{B} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z^2} \delta' \mathcal{C} \right) dv \right]. \quad (20)$$

Cette égalité, passablement compliquée en apparence, va pouvoir se mettre sous une forme qui nous donnera une interprétation immédiate de la quantité $\delta^2 \mathcal{J}$.

Conservons leur forme aux termes des lignes (1), (2), (3), (4), (5) et (6).

Si l'on observe que λ , μ , ε doivent vérifier les équations (8) et si, dans ces équations, on remplace $\mathcal{J}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)$ par sa valeur

$$\frac{\mathfrak{M}}{\partial \mathcal{J}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)},$$

on verra sans peine que les termes qui occupent les lignes (7), (8) et (9) s'évanouissent.

L'égalité (11) doit avoir lieu quels que soient $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\varepsilon$. Elle aura donc lieu, en particulier, si l'on y fait

$$\delta\lambda = \delta'\lambda, \quad \delta\mu = \delta'\mu, \quad \delta\varepsilon = \delta'\varepsilon.$$

Son premier membre devient alors identique à l'ensemble des termes qui, dans l'égalité (12) occupent les lignes (10), (11), (12), (13), (14), (15), (16) et (17). L'ensemble de tous ces termes est donc égal à 0.

Quant aux termes qui occupent les lignes (18), (19) et (20), ils sont identiques aux termes qui occupent les lignes (10), (11), (12). Ce que nous venons de dire permet donc de remplacer les termes des lignes (18), (19) et (20) par l'ensemble *change de signe* des termes des lignes (13), (14), (15), (16) et (17). Nous avons alors

$$(13) \quad \delta^2 \mathcal{J} = h \left[\delta x^2 \int \left(\lambda \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x^3} + \mu \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial y \partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial z \partial x^2} \right) dv \right. \quad (1)$$

$$\left. + \delta y^2 \int \left(\lambda \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x \partial y^2} + \mu \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial y^3} + \varepsilon \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial z \partial y^2} \right) dv \right. \quad (2)$$

$$\left. + \delta z^2 \int \left(\lambda \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x \partial z^2} + \mu \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial y \partial z^2} + \varepsilon \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial z^3} \right) dv \right. \quad (3)$$

$$\left. + 2\delta y \delta z \int \left(\lambda \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x \partial y \partial z} + \mu \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial z \partial y^2} + \varepsilon \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial y \partial z^2} \right) dv \right. \quad (4)$$

$$\left. + 2\delta z \delta x \int \left(\lambda \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x^2 \partial z} + \mu \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x \partial y \partial z} + \varepsilon \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x \partial z^2} \right) dv \right. \quad (5)$$

$$\left. + 2\delta x \delta y \int \left(\lambda \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial y \partial x^2} + \mu \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial y^2 \partial x} + \varepsilon \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x \partial y \partial z} \right) dv \right] \quad (6)$$

$$-h \int \left[\delta' \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \delta' \cdot \mathbf{b}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \delta' \cdot \mathbf{b}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \delta' \cdot \mathbf{b}' \right) dv' \right. \quad (7)$$

$$+ \delta' \cdot \frac{\partial}{\partial y} \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \delta' \cdot \mathbf{b}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \delta' \cdot \mathbf{b}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \delta' \cdot \mathbf{b}' \right) dv' \quad (8)$$

$$+ \delta' \cdot \frac{\partial}{\partial z} \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \delta' \cdot \mathbf{b}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \delta' \cdot \mathbf{b}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \delta' \cdot \mathbf{b}' \right) dv' \right] dv \quad (9)$$

$$- \int \frac{1}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{M}, x, \beta, \dots)}{\partial \mathbf{r}} [(\delta' \cdot \mathbf{b})^2 + (\delta' \cdot \mathbf{b})^2 + (\delta' \cdot \mathbf{b})^2] dv \quad (10)$$

$$- \int \frac{1}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{\partial \mathbf{r}} \left[\frac{1}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{M}, x, \beta, \dots)}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{b} \cdot \delta' \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \delta' \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \delta' \cdot \mathbf{b}) \right] dv. \quad (11)$$

Nous avons dit que cette forme simplifiée de $\delta^2 \tilde{\mathbf{r}}$ se prêtait à une interprétation très simple.

Imaginons en premier lieu que, le corps étant placé dans sa position d'équilibre et y ayant pris l'aimantation d'équilibre, on rende son magnétisme rigide, puis qu'on lui imprime deux fois de suite une translation quelconque δx , δy , δz ; $\tilde{\mathbf{r}}$ aura une certaine variation seconde que nous désignerons par $\delta_1^2 \tilde{\mathbf{r}}$.

Imaginons, en second lieu, que, le même corps étant placé dans la même position d'équilibre et y ayant de même pris l'aimantation d'équilibre, on maintienne ce corps immobile et que l'on fasse subir à l'aimantation, en chaque point, deux fois de suite des variations précisément égales à $\delta' \cdot \mathbf{b}$, $\delta' \cdot \mathbf{b}$; $\tilde{\mathbf{r}}$ subira une variation seconde que nous désignerons par $\delta_2^2 \tilde{\mathbf{r}}$.

Or il est aisément de voir que l'ensemble des termes qui, dans l'égalité (13), occupent les lignes (1), (2), (3), (4), (5) et (6) forment l'expression de $\delta_1^2 \tilde{\mathbf{r}}$, tandis que l'ensemble des termes qui occupent les lignes (7), (8), (9), (10) et (11) forment l'expression *changée de signe de* $\delta_2^2 \tilde{\mathbf{r}}$. On a, par conséquent,

$$(14) \quad \delta^2 \tilde{\mathbf{r}} = \delta_1^2 \tilde{\mathbf{r}} - \delta_2^2 \tilde{\mathbf{r}}.$$

Les conséquences de cette égalité si simple sont maintenant faciles à tirer.

Supposons que le corps, étant maintenu dans la position d'équilibre considéré, se recouvre d'une distribution magnétique qui demeure stable pour cette position du corps. Dans ces conditions, si l'on fait subir deux fois de suite à l'aimantation en chaque point une variation quelconque $\delta \cdot \mathbf{b}$, $\delta \cdot \mathbf{b}$,

$\delta\vartheta$, δ subira une variation seconde positive. Il en sera ainsi en particulier pour la variation seconde $\delta_2^2\delta$ correspondant au cas où l'on fait $\delta_{\text{v}} = \delta'_{\text{v}}$, $\delta_{\text{w}} = \delta'_{\text{w}}$ et $\delta\vartheta = \delta'\vartheta$.

La quantité $-\delta_2^2\delta$ sera donc une quantité toujours négative. D'autre part, nous savons que la quantité $\delta_1^2\delta$ est, ou bien identiquement nulle, ou bien positive pour certaines translations et négative pour d'autres. Donc il existe assurément des translations pour lesquelles la quantité $\delta_1^2\delta$ est négative, et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

S'il existe une position d'équilibre pour une masse magnétique ou diamagnétique quelconque, soumise à l'action d'aimants permanents, d'une pression normale et uniforme aux divers points de sa surface et d'une force constante en grandeur et en direction agissant sur ses divers éléments, et si de plus l'aimantation de cette masse demeure stable lorsqu'on maintient cette masse dans cette position, l'équilibre de cette masse est un équilibre instable.

Ainsi, si l'on regarde l'aimantation d'un corps comme liée à chaque instant à sa position par les équations de l'aimantation par influence, il n'existe pas de moyen de réaliser, par des aimants, l'équilibre d'un corps magnétique ou diamagnétique soumis à l'action de la pesanteur et à la pression atmosphérique.

§ III. — Sur une loi de Faraday.

4. Il n'est peut-être pas inutile d'insister sur ce que le résultat précédent (¹) présente de paradoxal. Il pourrait sembler au premier abord que la deuxième manière d'envisager la stabilité de l'équilibre d'un corps placé dans un champ magnétique, en astreignant tout déplacement virtuel du corps à produire une perturbation au sein d'une distribution magnétique stable, doit augmenter les chances de stabilité du système. On voit au contraire que cette circonstance diminue la stabilité du système, puisqu'elle diminue la variation seconde du potentiel thermodynamique précisément de la quantité qui constituerait cette variation seconde si l'on dérangeait l'aimantation du corps sans déranger sa position.

(¹) Ce résultat avait déjà été obtenu par Maxwell pour un corps électrisé infiniment petit (*Traité d'Électricité et de Magnétisme*, trad. par Seligmann-Lui, t. I, p. 181).

Cette remarque fait comprendre combien il était nécessaire de traiter le problème précédent par des raisonnements entièrement rigoureux ; il suffit, pour s'en convaincre, de comparer les conclusions précédentes à celles que Sir W. Thomson a cru pouvoir énoncer sans démonstration :

« Dans le Mémoire que j'ai publié dans le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, dit Sir W. Thomson (¹), j'ai indiqué qu'une petite sphère d'une substance ferromagnétique ou diamagnétique placée au voisinage d'aimants et soustraite à l'action de toute force non magnétique était en équilibre lorsqu'elle se trouvait en un point où la *force résultante* (que je désignais par R) était maximum, ou minimum, ou avait une valeur *stationnaire* ; je disais de plus que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une petite sphère diamagnétique soit en équilibre stable est que la force R soit minima en valeur absolue ; enfin, j'ajoutais : « S'il existe un » point extérieur aux aimants où la force résultante ait une valeur maxima, » ce point est une position d'équilibre stable pour une sphère infiniment » petite de fer doux, et toute autre position est nécessairement instable. »

» Postérieurement à la publication de ce Mémoire, j'ai réussi à prouver que la force résultante ne pouvait avoir aucun maximum absolu en un point extérieur à l'aimant et que, par conséquent, il ne pouvait exister de position d'équilibre stable pour une sphère ferromagnétique infiniment petite parfaitement libre de toute liaison. J'ai trouvé tout récemment qu'il existait des points où la force résultante avait un minimum absolu différent de zéro, et, par conséquent, qu'il existait pour une sphère diamagnétique des positions d'équilibre stable non comprises dans le cas où la force s'évanouit, cas noté dans le Mémoire en question. Ce cas offre l'exemple le plus simple de ce fait extraordinaire présenté par un corps solide qui, repoussé par des aimants, se trouve en équilibre stable. Par exemple, fixons deux barreaux aimantés au voisinage l'un de l'autre, leurs pôles de même nom en regard ; il y aura évidemment entre ces deux pôles un point où la force résultante sera nulle ; une petite sphère diamagnétique placée dans une position quelconque suffisamment voisine de ce point serait repoussée. Il apparaît bien aisément qu'une sphère infiniment petite d'une substance diamagnétique

(¹) Sir W. THOMSON, *Remarks on the forces experienced by inductively magnetized ferromagnetic or diamagnetic non-crystalline substances* (*Philosophical Magazine*, 1850. — *Reprint of papers on electrostatics and magnetism*, 1^{re} édit., p. 508; 2^e édit., p. 511).

soumise à l'action de la pesanteur, sans aucun support ni soutien, serait en équilibre stable un peu au-dessous de cette position, pourvu seulement que les aimants soient assez puissants.

» Il est toutefois extrêmement improbable qu'un essai pour réaliser cette expérience soit couronné de succès; car, même dans les cas les plus favorables, on n'a jamais obtenu une répulsion diamagnétique d'un solide qui approchât en grandeur du poids du corps. Toutefois nous pouvons considérer comme obtenue la véritable solution théorique du célèbre problème suggéré par le cercueil de Mahomet, et ce n'est pas la moins curieuse parmi les conséquences des découvertes de Faraday. »

Il est aisé de voir où se trouvent les points inexacts de la déduction de Sir W. Thomson.

Il est facile d'abord de vérifier l'exactitude de cette proposition qu'il a énoncée et dont il n'a point publié de démonstration :

La valeur absolue de la force résultante R en un point d'un champ magnétique ne peut présenter de maximum, mais elle peut être minimum.

Pour démontrer cette proposition, il suffit d'en prouver l'exactitude pour le carré R^2 de la force résultante.

Soit φ la fonction potentielle magnétique en un point du champ.

Nous avons

$$R^2 = h^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right].$$

De là nous déduisons

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^2}{\partial x} &= 2h^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \right), \\ \frac{\partial R^2}{\partial y} &= 2h^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \right), \\ \frac{\partial R^2}{\partial z} &= 2h^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Calculons la variation seconde de R^2 . Nous aurons

$$\partial^2 R^2 = A \partial x^2 + B \partial y^2 + C \partial z^2 + 2D \partial y \partial z + 2E \partial z \partial x + 2F \partial x \partial y,$$

égalité dans laquelle

$$\begin{aligned}
 A &= 2h^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} \right)^2 \right] \\
 &\quad + 2h^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z \partial x^2} \right), \\
 B &= 2h^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} \right)^2 \right] \\
 &\quad + 2h^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z \partial y^2} \right), \\
 C &= 2h^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)^2 \right] \\
 &\quad + 2h^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial z^2} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial z^2} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} \right), \\
 D &= 2h^2 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \right] \\
 &\quad + 2h^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y \partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^2 \partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2 \partial y} \right), \\
 E &= 2h^2 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \right] \\
 &\quad + 2h^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y \partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2 \partial x} \right), \\
 F &= 2h^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right) \right] \\
 &\quad + 2h^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y \partial z} \right).
 \end{aligned}$$

Peut-il se faire qu'en un point du champ la quantité $\partial^2 R^2$ soit négative pour tous les déplacements virtuels possibles $\delta x, \delta y, \delta z$? Pour cela, il serait nécessaire, en premier lieu, que l'on eût

$$A < 0, \quad B < 0, \quad C < 0$$

et, par conséquent,

$$A + B + C < 0.$$

Or on a

$$\begin{aligned}
 A + B + C &= 2h^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \\
 &\quad + 2h^2 \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \Delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial z} \Delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Mais, en tout point du champ, on a

$$\Delta \psi = 0$$

et, par conséquent,

$$\Delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi = 0,$$

$$\Delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \Delta \psi = 0,$$

$$\Delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \Delta \psi = 0.$$

La quantité $A + B + C$ se réduit donc à une somme de carrés et ne peut jamais être négative. Il est donc bien démontré que la valeur absolue de la force ne peut jamais, dans un champ magnétique, présenter de maximum. Elle peut au contraire présenter des minima; Sir W. Thomson en a donné un exemple dans le passage que nous citions tout à l'heure.

5. La proposition énoncée par Sir W. Thomson sur la possibilité des maxima ou des minima de la valeur absolue de la force en un point d'un champ magnétique étant démontrée vraie, l'explication de la contradiction entre les résultats auxquels il est parvenu relativement à la stabilité de l'équilibre d'une masse diamagnétique en présence d'aimants permanents et ceux que nous avons obtenus doit être cherchée dans l'examen de la loi sur laquelle il fait reposer son analyse.

Cette loi, énoncée par Faraday, puis précisée et démontrée par Sir W. Thomson, est la suivante :

Un corps magnétique très petit placé sans vitesse initiale dans un champ magnétique se déplace dans un sens tel que la valeur absolue de la force du champ soit plus grande au point où il se rend qu'au point où il se trouvait; l'inverse a lieu pour un corps diamagnétique.

Si cette loi était exacte, la proposition de Sir W. Thomson sur la stabilité de l'équilibre d'une masse diamagnétique en présence d'aimants permanents en résulterait nécessairement. Comme nous avons vu directement que cette proposition ne pouvait être exacte, la loi de Faraday ne peut l'être non plus. Examinons donc en quel point pèche la démonstration qui en est donnée.

Pour que le petit corps considéré puisse subir une translation $\delta x, \delta y, \delta z$,

durant laquelle les composantes de l'aimantation varient de δa , δb , $\delta \varphi$, il faut que le potentiel thermodynamique diminue durant l'accomplissement de cette modification.

Or la variation du potentiel thermodynamique a pour valeur

$$\begin{aligned} \delta \tilde{F} = & -h \delta x \int \left(\alpha_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x_2^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y_2 \partial x_2} + \varphi_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z_2 \partial x_2} \right) d\mathfrak{v}_2 \\ & + h \delta y \int \left(\alpha_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x_2 \partial y_2} + \beta_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y_2^2} + \varphi_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z_2 \partial y_2} \right) d\mathfrak{v}_2 \\ & + h \delta z \int \left(\alpha_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x_2 \partial z_2} + \beta_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y_2 \partial z_2} + \varphi_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z_2^2} \right) d\mathfrak{v}_2 \\ & + h \int \left[\frac{\partial}{\partial x_2} (\mathcal{V}_2 + \mathfrak{W}_2) \delta \alpha_2 + \frac{\partial}{\partial y_2} (\mathcal{V}_2 + \mathfrak{W}_2) \delta \beta_2 + \frac{\partial}{\partial z_2} (\mathcal{V}_2 + \mathfrak{W}_2) \delta \varphi_2 \right] d\mathfrak{v}_2 \\ & + \int \frac{1}{\mathfrak{M}_2} \frac{d \tilde{F}(\mathfrak{M}_2)}{d \mathfrak{M}_2} (\alpha_2 \delta \alpha_2 + \beta_2 \delta \beta_2 + \varphi_2 \delta \varphi_2) d\mathfrak{v}_2. \end{aligned}$$

Mais, l'équilibre magnétique étant établi sur le corps, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathfrak{M}_2} \frac{d \tilde{F}(\mathfrak{M}_2)}{d \mathfrak{M}_2} \alpha_2 + h \frac{\partial}{\partial x_2} (\mathcal{V}_2 + \mathfrak{W}_2) &= 0, \\ \frac{1}{\mathfrak{M}_2} \frac{d \tilde{F}(\mathfrak{M}_2)}{d \mathfrak{M}_2} \beta_2 + h \frac{\partial}{\partial y_2} (\mathcal{V}_2 + \mathfrak{W}_2) &= 0, \\ \frac{1}{\mathfrak{M}_2} \frac{d \tilde{F}(\mathfrak{M}_2)}{d \mathfrak{M}_2} \varphi_2 + h \frac{\partial}{\partial z_2} (\mathcal{V}_2 + \mathfrak{W}_2) &= 0, \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -h F(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial}{\partial x_2} (\mathcal{V}_2 + \mathfrak{W}_2), \\ \beta_2 &= -h F(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial}{\partial y_2} (\mathcal{V}_2 + \mathfrak{W}_2), \\ \varphi_2 &= -h F(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial}{\partial z_2} (\mathcal{V}_2 + \mathfrak{W}_2). \end{aligned}$$

Moyennant ces diverses égalités, l'égalité précédente devient

$$\begin{aligned}
\delta \vec{F} = & -\frac{1}{2} h \delta x \int F(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z_2} \right)^2 \right] d\psi_2 \\
& -\frac{1}{2} h \delta y \int F(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial}{\partial y_2} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z_2} \right)^2 \right] d\psi_2 \\
& -\frac{1}{2} h \delta z \int F(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial}{\partial z_2} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z_2} \right)^2 \right] d\psi_2 \\
& -h \delta x \int F(\mathfrak{M}_2) \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y_2 \partial x_2} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial z_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z_2 \partial x_2} \right) d\psi_2 \\
& -h \delta y \int F(\mathfrak{M}_2) \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x_2 \partial y_2} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial z_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z_2 \partial y_2} \right) d\psi_2 \\
& -h \delta z \int F(\mathfrak{M}_2) \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x_2 \partial z_2} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y_2 \partial z_2} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial z_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z_2^2} \right) d\psi_2.
\end{aligned}$$

Le corps est jusqu'ici de forme quelconque. Supposons-le infiniment petit. Soit R la force au point (x_2, y_2, z_2) du champ où il se trouve placé. Nous aurons

$$R^2 = h^2 \left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \right)^2 \right]$$

et par conséquent l'égalité précédente deviendra

$$\begin{aligned}
\delta \vec{F} = & -\frac{F(\mathfrak{M}_2)}{2h} \left(\frac{\partial R^2}{\partial x_2} \delta x + \frac{\partial R^2}{\partial y_2} \delta y + \frac{\partial R^2}{\partial z_2} \delta z \right) d\psi_2 \\
& -h \int F(\mathfrak{M}_2) \left[\delta x \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y_2 \partial x_2} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial z_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z_2 \partial x_2} \right) \right. \\
& \quad + \delta y \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x_2 \partial y_2} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial z_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z_2 \partial y_2} \right) \\
& \quad \left. + \delta z \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x_2 \partial z_2} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y_2 \partial z_2} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial z_2} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z_2^2} \right) \right] d\psi_2.
\end{aligned}$$

Sir W. Thomson a admis que, grâce à l'infinité petitesse du corps, on avait dans tout l'espace

$$\Psi_2 = 0,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial z_2} = 0.$$

L'égalité précédente devenait alors simplement

$$\delta \vec{F} = -\frac{F(\mathfrak{M}_2)}{2h} \left(\frac{\partial R^2}{\partial x_2} \delta x + \frac{\partial R^2}{\partial y_2} \delta y + \frac{\partial R^2}{\partial z_2} \delta z d\psi_2 \right)$$

Pour que la transformation soit possible, il faut que l'on ait

$$\partial \mathfrak{F} < 0$$

ou

$$F(\mathfrak{M}_2) \left(\frac{\partial R^2}{\partial x} \partial x + \frac{\partial R^2}{\partial y} \partial y + \frac{\partial R^2}{\partial z} \partial z \right) > 0.$$

Pour les corps magnétiques, $F(\mathfrak{M}_2)$ est positif et l'inégalité précédente devient

$$\frac{\partial R^2}{\partial x} \partial x + \frac{\partial R^2}{\partial y} \partial y + \frac{\partial R^2}{\partial z} \partial z > 0.$$

Pour les corps diamagnétiques, $F(\mathfrak{M}_2)$ est négatif, et l'inégalité précédente devient

$$\frac{\partial R^2}{\partial x} \partial x + \frac{\partial R^2}{\partial y} \partial y + \frac{\partial R^2}{\partial z} \partial z < 0.$$

Ces deux inégalités sont bien l'expression algébrique de la loi de Faraday qui se trouverait ainsi démontrée.

Mais il est aisément de voir que l'on ne peut poser en un point du corps aimanté très petit

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} = 0.$$

Ces inégalités ne sont exactes que pour les points extérieurs au corps et situés à distance finie de ce corps.

Considérons en effet un point de la surface de notre petit corps. En ce point, nous avons

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial N_i} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial N_e} = 4\pi [\mathfrak{A}_2 \cos(N_i, x) + \mathfrak{B}_2 \cos(N_i, y) + \mathfrak{C}_2 \cos(N_i, z)]$$

ou bien

$$[1 + 4\pi h F(\mathfrak{M}_2)] \frac{\partial \Psi_2}{\partial N_i} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial N_e} + 4\pi h F(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial \Psi_2}{\partial N_i} = 0,$$

condition qui ne peut être réalisée que si $\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}$, $\frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2}$, $\frac{\partial \Psi_2}{\partial z_2}$ sont en général au voisinage du corps des quantités de l'ordre de $F(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial \Psi_2}{\partial N_i}$, et par conséquent que si le terme supprimé par Sir W. Thomson est du même ordre de grandeur que celui qu'il a conservé.

On voit, par conséquent, que la démonstration de la loi énoncée par Fa-

raday est insuffisante, et ce que nous avons dit nous oblige à rejeter cette loi.

6. Les calculs que nous venons de faire peuvent nous servir presque immédiatement à la discussion d'une méthode proposée par Jamin pour l'étude de la distribution du magnétisme sur un aimant permanent.

On sait que la partie expérimentale de cette étude revient à déterminer la valeur de $\frac{\partial \psi}{\partial N_e}$ aux divers points de la surface de cet aimant permanent.

Voici comment Jamin s'y prenait pour déterminer cette quantité.

Une petite masse de fer doux était placée au point de la surface de l'aimant où l'on voulait déterminer $\frac{\partial \psi}{\partial N_e}$. On déterminait la force qu'il fallait lui appliquer pour l'arracher dans la direction de la normale à la surface.

Jamin pensait que la force ainsi déterminée était proportionnelle à $\left(\frac{\partial \psi}{\partial N_e}\right)^2$.

Pour justifier cette manière de voir, il admettait trois hypothèses :

1^o Le contact du morceau de fer doux ne modifie pas sensiblement la distribution sur l'aimant étudié.

2^o Dans les conditions où l'on opère, on peut négliger pour le fer doux la variation de $F(\mathfrak{M}_2)$ avec \mathfrak{M}_2 .

3^o L'aimantation de la particule de fer doux est donnée par les équations

$$A_2 = -h F \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2},$$

$$B_2 = -h F \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2},$$

$$C_2 = -h F \frac{\partial \psi_2}{\partial z_2}.$$

Admettons sans discussion les deux premières hypothèses.

La troisième est en tous cas inacceptable. On a en effet

$$A_2 = -h F \frac{\partial}{\partial x_2} (\psi_2 + \Psi_2),$$

$$B_2 = -h F \frac{\partial}{\partial y_2} (\psi_2 + \Psi_2),$$

$$C_2 = -h F \frac{\partial}{\partial z_2} (\psi_2 + \Psi_2),$$

et nous venons de voir que l'on ne pouvait poser

$$\frac{\partial \mathfrak{W}_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}_2}{\partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{W}_2}{\partial z_2} = 0.$$

Acceptons toutefois pour un instant cette hypothèse.

Soit T la force normale nécessaire pour arracher la particule magnétique suivant la normale; sous l'action de la force T , cette particule peut subir un déplacement infiniment petit δN_e suivant la normale extérieure à l'aimant étudié. On a donc, lorsque δN_e est positif,

$$T \delta N_e - \delta \mathcal{F} > 0.$$

Mais, d'après les hypothèses faites, on peut écrire

$$\delta \mathcal{F} = - \frac{F}{2h} \left(\frac{\partial R^2}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial R^2}{\partial y_2} \delta y_2 + \frac{\partial R^2}{\partial z_2} \delta z_2 \right) dv_2.$$

On a d'ailleurs

$$\delta x_2 = \delta N_e \cos(N_e, x),$$

$$\delta y_2 = \delta N_e \cos(N_e, y),$$

$$\delta z_2 = \delta N_e \cos(N_e, z)$$

et, par conséquent,

$$\delta \mathcal{F} = - \frac{F}{2h} \frac{\partial R^2}{\partial N_e} dv_2 \delta N_e,$$

et l'inégalité précédente devient

$$T + \frac{F}{2h} \frac{\partial R^2}{\partial N_e} dv_2 > 0.$$

La plus petite force qui puisse produire l'arrachement aurait alors pour valeur

$$T = - \frac{F}{2h} \frac{\partial R^2}{\partial N_e} dv_2.$$

Elle mesurerait donc non pas $\left(\frac{\partial \mathfrak{W}_2}{\partial N_e} \right)^2$, comme le pensait Jamin, mais $\frac{\partial R^2}{\partial N_e}$ ou, si l'on préfère,

$$\frac{\partial}{\partial N_e} \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{W}_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{W}_2}{\partial y_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{W}_2}{\partial z_2} \right)^2 \right].$$

Ainsi l'une au moins des hypothèses admises par Jamin pour justifier l'emploi de la méthode d'arrachement dans l'étude de la distribution magnétique est inacceptable. D'ailleurs, même en admettant cette hypothèse,

on voit que la méthode ne peut servir à déterminer la quantité que Jamin pensait mesurer.

§ IV. — Comparaison des corps magnétiques et des corps diamagnétiques.

7. La forme la plus précise adoptée pour distinguer les corps magnétiques des corps diamagnétiques était fournie par la loi de Faraday : en un champ magnétique, un corps magnétique très petit tend à se déplacer dans le sens où la valeur absolue de la force croît, et un corps diamagnétique dans le sens où cette force décroît. La discussion précédente, en nous forçant de rejeter cette loi, nous oblige à chercher ailleurs un critérium qui distingue les corps magnétiques des corps diamagnétiques.

La question que nous nous proposons de résoudre maintenant peut s'énoncer brièvement ainsi : une masse dénuée de force coercitive est-elle attirée ou repoussée par des aimants permanents ?

Commençons par préciser le sens de cette question.

Supposons une masse magnétique mise en présence d'aimants et soumise à l'action d'une pression normale et uniforme, seule force extérieure qui agisse sur elle.

Plaçons-la d'abord à une distance très grande et comme infinie des aimants permanents. Le potentiel thermodynamique interne du système a alors une valeur \mathcal{F}_0 .

Supposons ensuite qu'on l'amène à une distance finie des aimants permanents et que, la maintenant dans cette position, on laisse prendre à l'aimantation sa distribution d'équilibre. Le potentiel thermodynamique interne du système aura alors une certaine valeur \mathcal{F} .

Si $\mathcal{F}_0 - \mathcal{F}$ est positif, le passage de la masse de la position infiniment éloignée à la position située à distance finie sera, au point de vue de la Thermodynamique, un phénomène possible. Le phénomène inverse sera impossible. Nous dirons alors qu'une masse magnétique très éloignée d'aimants permanents est *attirée* par ces aimants.

Si $\mathcal{F}_0 - \mathcal{F}$ est au contraire négatif, nous dirons que la masse très éloignée d'aimants permanents est *repoussée* par ces aimants. C'est dans ce sens seulement que, dans ce qui va suivre, doivent être pris les mots *attraction* et *répulsion*.

Or le signe de $\mathcal{F} - \mathcal{F}_0$ est facile à trouver. On voit aisément en effet que

cette quantité peut s'écrire

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{F}} - \tilde{\mathcal{F}}_0 &= h \int \left(\mathfrak{A}_2 \frac{\partial \mathcal{O}_2}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial \mathcal{O}_2}{\partial y_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial \mathcal{O}_2}{\partial z_2} \right) d\nu_2 \\ &\quad + \frac{h}{2} \int \left(\mathfrak{A}_2 \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial y_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial z_2} \right) d\nu_2 + \int \tilde{\mathcal{F}}(\mathfrak{M}_2) d\nu_2.\end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_2 &= -h \mathbf{F}(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial(\mathcal{O}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial x_2}, \\ \mathfrak{B}_2 &= -h \mathbf{F}(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial(\mathcal{O}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial y_2}, \\ \mathfrak{C}_2 &= -h \mathbf{F}(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial(\mathcal{O}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial z_2},\end{aligned}$$

en sorte que l'on a

$$\tilde{\mathcal{F}} - \tilde{\mathcal{F}}_0 = \int \left[\tilde{\mathcal{F}}(\mathfrak{M}_2) - \frac{\mathfrak{M}_2^2}{\mathbf{F}(\mathfrak{M}_2)} \right] d\nu_2 - \frac{h}{2} \int \left(\mathfrak{A}_2 \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial y_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial z_2} \right) d\nu_2.$$

Mais un calcul analogue à celui que nous avons fait au commencement du Chapitre III nous donne

$$\begin{aligned}\int \left(\mathfrak{A}_2 \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial y_2} + \mathfrak{C}_2 \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial z_2} \right) d\nu_2 \\ = \frac{1}{4\pi} \int \left[\left(\frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial z} \right)^2 \right] d\nu,\end{aligned}$$

la seconde intégrale triple s'étendant à tout l'espace.

D'autre part, l'égalité

$$\mathbf{F}(\mathfrak{M}) = \frac{\mathfrak{M}}{\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}(\mathfrak{M})}{\partial \mathfrak{M}}}$$

donne

$$\tilde{\mathcal{F}}(\mathfrak{M}_2) = \int_0^{\mathfrak{M}_2} \frac{\mathfrak{M}}{\mathbf{F}(\mathfrak{M})} d\mathfrak{M},$$

ou, en désignant par μ une valeur de \mathfrak{M} comprise entre 0 et \mathfrak{M}_2 ,

$$\tilde{\mathcal{F}}(\mathfrak{M}_2) = \frac{\mathfrak{M}_2^2}{2\mathbf{F}(\mu)},$$

On a donc finalement

$$\tilde{\mathcal{F}} - \tilde{\mathcal{F}}_0 = \int \left[\frac{1}{2\mathbf{F}(\mu)} - \frac{1}{\mathbf{F}(\mathfrak{M}_2)} \right] \mathfrak{M}_2^2 d\nu_2 - \frac{h}{8\pi} \int \left[\left(\frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial z} \right)^2 \right] d\nu.$$

Le second terme est assurément négatif: quant au premier, si la valeur absolue du coefficient d'aimantation diminue, demeure constante ou croît assez faiblement pour ne jamais varier du simple au double lorsque l'aimantation croît, il sera certainement de signe contraire à $F(\mathfrak{M}_2)$; par conséquent, pour les corps magnétiques \mathfrak{F} — \mathfrak{F}_0 est sûrement négatif; son signe est inconnu pour les corps diamagnétiques et ne peut être fixé que si l'on possède certains renseignements complémentaires. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Toute substance magnétique dénuée de force coercitive et placée à grande distance d'aimants permanents est attirée par ces aimants; on ne peut prévoir le signe du mouvement d'une masse diamagnétique.

8. La proposition que nous venons d'obtenir ne suffit point à différencier les corps magnétiques d'avec les corps diamagnétiques; dans les actions exercées par les aimants permanents, peut-on marquer une opposition entre le rôle joué par ces deux sortes de corps? Cette opposition résultera de deux propositions extrêmement simples, que nous allons démontrer.

L'expérience classique qui sert à distinguer les corps diamagnétiques des corps magnétiques consiste dans l'observation de la position d'équilibre qu'ils prennent lorsqu'on les suspend par un fil entre les deux pôles d'un puissant électro-aimant. En réalité, le poids du corps est, pour tous les corps diamagnétiques et pour la plupart des corps magnétiques, si grand par rapport aux actions que le corps subit de la part de l'électro-aimant, que le fil n'est pas sensiblement dévié de la verticale, en sorte que l'on peut regarder le phénomène comme étant le même que si le corps était assujetti à se mouvoir autour d'un axe vertical.

Considérons donc un corps magnétique ou diamagnétique mobile autour d'un axe vertical OZ dans un champ magnétique. Lorsqu'on fait exécuter au corps un tour complet autour de l'axe OZ, le potentiel thermodynamique interne du système, qui en général a varié pendant le mouvement, reprend sa valeur primitive. Il a donc passé par un certain nombre de maxima et un certain nombre de minima; en d'autres termes, le corps a passé par un certain nombre de positions d'équilibre alternativement stables et instables.

Prenons l'une de ces positions d'équilibre. Soient, toujours suivant notre notation, \mathfrak{v}_2 la fonction potentielle des aimants permanents en un point du corps étudié et \mathfrak{w}_2 la fonction potentielle au même point du magnétisme distribué sur ce corps.

En chaque point du corps, on a

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} = -F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathfrak{W}_2)}{\partial x}, \\ \mathfrak{B} = -F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathfrak{W}_2)}{\partial y}, \\ \mathcal{C} = -F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathfrak{W}_2)}{\partial z}. \end{array} \right.$$

On a de plus

$$(16) \quad \int \left[\left(\mathcal{A} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x \partial y} + \mathfrak{B} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y^2} + \mathcal{C} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z \partial y} \right) x - \left(\mathcal{A} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x^2} + \mathfrak{B} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y \partial x} + \mathcal{C} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z \partial x} \right) y \right] d\nu = 0,$$

l'intégration s'étendant au corps considéré.

Supposons que le corps soit très faiblement magnétique ou très faiblement diamagnétique; $F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)$ est alors une quantité très petite; d'après les égalités (15), \mathcal{A} , \mathfrak{B} , \mathcal{C} sont en général des quantités très petites du même ordre; la quantité \mathfrak{W}_2 , définie par l'égalité

$$\mathfrak{W}_2 = \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mathfrak{B} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\nu,$$

dans laquelle l'intégration s'étend à tout le corps magnétique, est encore une quantité très petite du même ordre, et il en est de même de ses dérivées partielles. On peut donc, en négligeant les quantités très petites du second ordre, écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x}, \\ \mathfrak{B} &= -F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y}, \\ \mathcal{C} &= -F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z}, \end{aligned}$$

ou encore

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} = \lambda \left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x}, \\ \mathfrak{B} = \lambda \left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y}, \\ \mathcal{C} = \lambda \left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z}, \end{array} \right.$$

la fonction λ étant définie par l'égalité (6) du Chapitre II.

Moyennant ces égalités, la condition d'équilibre (16) devient

$$\int \lambda \left[\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z \partial y} \right) x - \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z \partial x} \right) y \right] d\psi = 0.$$

Cette équation suffit à déterminer les positions d'équilibre du corps. Or il est aisé de voir que, si elle est vérifiée pour un corps, correspondant à une fonction λ que nous désignerons par λ_1 , c'est-à-dire à une certaine fonction $F(\mathfrak{M})$ que nous désignerons par F_1 , elle l'est encore pour un corps de même forme et de même position, correspondant à une fonction λ identique à $-\lambda_1$, c'est-à-dire à une fonction $F(\mathfrak{M})$ identique à $-F_1$, ce qu'on peut énoncer de la manière suivante :

Dans les conditions que nous avons indiquées, deux corps, l'un très peu magnétique, l'autre très peu diamagnétique, ayant même forme et des fonctions magnétisantes égales en valeur absolue, ont les mêmes positions d'équilibre.

Considérons maintenant l'expression de $\delta^2 \mathcal{J}$ donnée par l'égalité (7) et remplaçons-y ψ_a , ψ_b , ψ par leurs valeurs tirées des égalités (17). Nous verrons aisément que $\delta^2 \mathcal{J}$ change de signe en même temps que

$$\lambda \left[\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right)^2 \right],$$

en sorte que le théorème précédent peut être complété de la manière suivante :

Les positions d'équilibre stable de l'un des deux corps sont les positions d'équilibre instable de l'autre.

Si, par exemple, une aiguille allongée d'un corps paramagnétique, suspendue entre les deux pôles d'un électro-aimant, s'oriente dans la direction de ces deux pôles, une aiguille diamagnétique se mettra en croix avec cette direction.

Les théorèmes précédents, que l'on peut démontrer quelles que soient les liaisons qui assujettissent le corps magnétique, marquent l'opposition qui existe entre les corps magnétiques et les corps diamagnétiques.



CHAPITRE V.

MÉTHODES DE DÉTERMINATION DE LA FONCTION MAGNÉTISANTE.

§ I. — Méthode fondée sur l'emploi des équations de Poisson.

1. L'intégration des équations différentielles d'un problème quelconque d'aimantation par influence implique évidemment la connaissance de la valeur de la fonction

$$\lambda \left\{ \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right], \alpha, \beta, \dots \right\},$$

pour toute valeur du paramètre

$$\zeta = \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right],$$

ou, ce qui revient au même, de la valeur de la fonction

$$F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots).$$

Ces deux déterminations sont corrélatives. Nous avons vu, en effet, au Chapitre II, comment, de la connaissance de la fonction F , on déduisait la fonction λ . Si inversement on se donne la fonction λ , les équations de l'induction magnétique permettront d'écrire

$$\mathfrak{M}^2 = \lambda^2 \left\{ \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right], \alpha, \beta, \dots \right\} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right].$$

Cette équation, résolue par rapport à

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2,$$

donnera

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 = \psi(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots),$$

et l'on aura

$$\lambda[\psi(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots), \alpha, \beta, \dots] = -h F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots).$$

De la fonction λ on aura ainsi déduit la fonction F .

2. Il existe deux types de méthodes pour déterminer la fonction λ : l'un et l'autre ont été sommairement indiqués par G. Kirchhoff; le présent Chapitre aura donc seulement pour but de développer les vues de l'illustre physicien.

La première méthode consiste à déduire la connaissance de la fonction λ des expériences faites en supposant, conformément à la théorie de Poisson, que λ est une constante, en vue de déterminer la valeur de cette constante.

Dans cette théorie de Poisson, si l'on désigne par μ la constante par laquelle on remplace la fonction λ , les équations de l'équilibre magnétique deviennent

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a} = \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \mathbf{b} = \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \mathbf{c} = \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{array} \right.$$

La fonction φ est déterminée par les conditions suivantes :

1° A l'intérieur des aimants permanents, on a la même équation différentielle que dans la théorie développée dans le présent Mémoire; cette équation est l'équation (9 bis) du Chapitre II,

$$(2) \quad \Delta \varphi = -4\pi \rho(x, y, z).$$

2° En tout autre point de l'espace, sauf aux surfaces de séparation des divers corps, on a, en supposant homogènes les divers corps dénués de force coercitive,

$$(3) \quad \Delta \varphi = 0.$$

3° A la surface de séparation d'un aimant permanent et d'un milieu non magnétique, on a, comme dans la théorie actuelle [Chapitre II, égalité (11)],

$$(4) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{N}_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{N}_e} = -4\pi s(x, y, z).$$

4° A la surface de séparation d'une substance dénuée de force coercitive et d'un milieu non magnétique, on a

$$(5) \quad (1 + 4\pi\mu) \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{N}_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{N}_e} = 0.$$

5° A l'infini, on a

$$(6) \quad \varphi = 0.$$

Ces conditions déterminent la fonction φ lorsqu'on connaît la forme du corps soumis à l'aimantation et la valeur du coefficient μ . Si l'on intègre ces équations pour un corps dont la forme et la position sont données, mais dont le coefficient μ est laissé indéterminé, on trouvera pour φ une expression de la forme

$$\varphi = f(x, y, z, \mu).$$

Il suffira alors, lorsqu'on voudra déterminer la valeur du coefficient μ pour une substance, de former avec cette substance un corps de la forme que l'on considère, et de déterminer expérimentalement la valeur en un point d'une quantité dont l'expression puisse se déduire de celle de φ .

Si l'on applique cette méthode à une substance pour laquelle on ne puisse pas regarder μ comme constant, pour laquelle le coefficient μ doive être remplacé par la fonction $\lambda \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right]$, quelle sera la signification des nombres, variables avec l'intensité du champ magnétique, que l'on obtiendra ainsi, au lieu du nombre constant qui devrait représenter μ ?

Si le corps mis en expérience est un ellipsoïde et si le champ magnétique constitué par les aimants permanents est un champ uniforme, le corps s'aimante uniformément, en sorte que la quantité $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2$ a, en tout point de ce corps, la même valeur. G. Kirchhoff a montré qu'alors les nombres variables obtenus par la méthode que nous venons d'indiquer représentaient précisément la quantité

$$\lambda \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right],$$

et il a fait usage de cette remarque pour déduire d'expériences de Weber quelques déterminations de la fonction λ propre au fer doux.

Cette proposition de G. Kirchhoff peut se généraliser de la manière suivante :

THEOREME I. — *Si un corps homogène, possédant une fonction magnétisante déterminée, s'aimante uniformément dans des conditions déterminées, la fonction magnétisante a alors une même valeur M en tous les points du corps; un corps de même forme, ayant un coefficient d'aiman-*

tation μ constant et égal à M , prendra la même aimantation uniforme que le précédent.

Il nous suffit pour cela de démontrer que la fonction φ , qui intègre les équations différentielles du premier problème, intègre aussi les équations différentielles du second; car, cette proposition une fois démontrée, l'aimantation en un point sera, dans le premier problème, déterminée par les équations

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \lambda \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \mathcal{B} &= \lambda \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \mathcal{C} &= \lambda \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial \varphi}{\partial z},\end{aligned}$$

et, dans le second problème, par les équations

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \mathcal{B} &= \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \mathcal{C} &= \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z},\end{aligned}$$

qui conduisent aux mêmes valeurs de \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , puisque μ et

$$\lambda \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right]$$

ont la même valeur M .

Or il est aisément de voir que les deux problèmes conduisent à la même fonction $\varphi(x, y, z)$.

En effet, les équations (2), (4) et (6) sont communes aux deux problèmes; dans chacun des deux problèmes, la fonction φ vérifie l'équation

$$\Delta \varphi = 0$$

en tout point du milieu non magnétique.

Dans le premier problème, en tout point du corps dénué de force coercitive, la fonction φ vérifie l'équation différentielle (9 *ter*) du Chapitre II,

équation qui peut s'écrire, pour un corps homogène,

$$\left\{ 1 + 4\pi\lambda \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} \Delta \varphi$$

$$+ \frac{\partial \lambda \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right]}{\partial \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right]} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} = 0.$$

Mais, si l'aimantation est uniforme, on a

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = \text{const.},$$

en sorte que l'équation précédente devient

$$\Delta \varphi = 0.$$

C'est aussi l'équation que, dans le second problème, la fonction φ doit vérifier à l'intérieur du corps soumis à l'aimantation.

Enfin, dans le premier problème, à la surface de séparation du corps soumis à l'aimantation et du milieu non magnétique, la fonction φ vérifie l'équation (11 *ter*) du Chapitre II,

$$\left\{ 1 + 4\pi\lambda \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial N_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial N_e} = 0,$$

qui devient ici

$$(1 + 4\pi M) \frac{\partial \varphi}{\partial N_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial N_e} = 0,$$

et coïncide avec l'équation (5) du second problème où l'on donne à μ la valeur M .

Par une voie analogue, on démontre la réciproque suivante :

THÉORÈME II. — *Considérons un cas particulier où un corps homogène soumis à l'aimantation et possédant un coefficient d'aimantation μ indépendant de la grandeur de l'aimantation s'aimante uniformément pour toutes les valeurs de ce coefficient; remplaçons ce corps par un*

corps homogène de même forme correspondant à une certaine fonction magnétisante λ . Ce corps prendra identiquement la même aimantation qu'un corps de la première série pour lequel le coefficient ψ aurait une valeur M déterminée de la manière suivante :

En un point intérieur à l'un quelconque des corps de la première série, nous avons

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 = \psi(\mu),$$

et M satisfait à l'équation

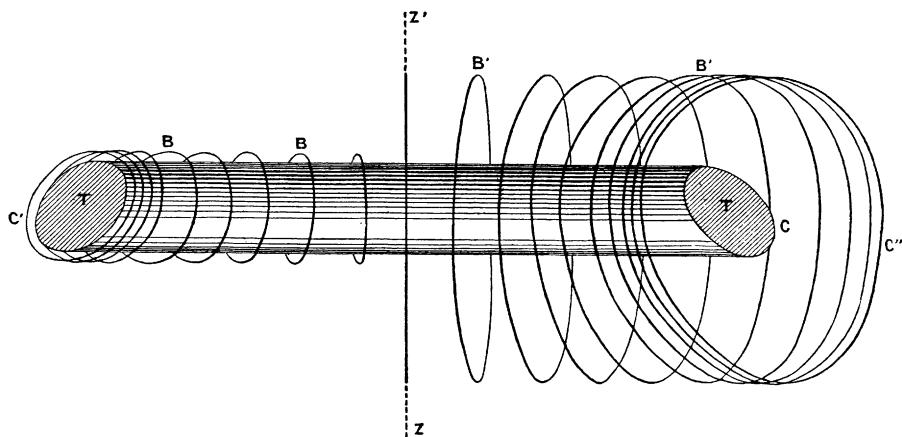
$$\psi(M) - M = 0.$$

Ce théorème entraîne l'exactitude de la méthode proposée par G. Kirchhoff pour la détermination de la fonction λ . Il se peut que le cas de l'ellipsoïde placé dans un champ uniforme soit le seul cas où un corps de forme donnée, placé dans un champ donné, s'aimante uniformément, quelle que soit la valeur de son coefficient d'aimantation. Dans ce cas, le théorème précédent se réduirait à celui de G. Kirchhoff.

§ II. — Méthode du tore.

3. Soit C une courbe (fig. 1) qui, par sa révolution autour de l'axe ZZ' ,

Fig. 1.



engendre un tore T , que nous supposerons formé par une certaine substance magnétique.

Une courbe C' , infiniment voisine de la courbe C , mais extérieure à cette courbe C , par sa révolution autour du même axe ZZ' , engendre un second tore B renfermant le premier dans son intérieur. Sur ce tore sont placés n fils conducteurs, fermés sur eux-mêmes, équidistants les uns des autres (disposition qui, dans la pratique, sera remplacée par un enroulement continu, à tours assez rapprochés).

Une troisième courbe C'' , renfermant à son intérieur les courbes C et C' , et non infiniment voisine de ces dernières, forme, par sa révolution autour de l'axe ZZ' , un troisième tore B' enfermant les deux premiers à son intérieur. Sur ce tore B' sont placés n' fils conducteurs, fermés sur eux-mêmes, équidistants les uns des autres (disposition remplacée, dans la pratique, par un second enroulement continu).

Dans le tore B' faisons passer un courant d'intensité i ; ce courant va aimanter le tore T . Il est facile de préciser les lois de cette aimantation.

D'après les lois connues de l'Électromagnétisme, lois que nous admettons ici sans discussion, l'action de la bobine B' crée dans l'espace un champ magnétique dont nous désignons par ψ la fonction potentielle. En un point (x, y, z) extérieur à la bobine B' , on a

$$(7) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$$

A l'intérieur de la bobine B' , la fonction potentielle n'est plus constante. Prenons pour coordonnées d'un point intérieur à la bobine les coordonnées polaires ρ et θ de sa projection sur un plan perpendiculaire à l'axe du tore, le pôle étant au point où l'axe du tore rencontre ce plan, et la hauteur z de ce point au-dessus de ce plan. Nous aurons alors, en tout point intérieur à la bobine,

$$(7 bis) \quad \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 2K n' i,$$

K étant une constante qui dépend du système d'unités choisi.

Admettons que ce champ aimante le tore magnétique suivant les mêmes lois qu'un champ créé par un aimant.

Les propositions suivantes sont évidentes, grâce à la symétrie de la figure autour de l'axe ZZ' :

L'aimantation est, en chaque point du tore T , dirigée normalement au plan passant par ce point et par l'axe ZZ' du tore.

En tous les points intérieurs au tore qui correspondent aux mêmes valeurs de ρ et de z , l'aimantation a la même valeur.

Cela étant, si l'on désigne par φ la fonction potentielle totale en un point du tore, on aura, d'après les lois de l'induction magnétique,

$$(8) \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{\rho} \lambda \left[\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 \right] \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}.$$

Soit ψ la fonction potentielle au point considéré de l'aimantation distribuée sur le tore. Nous aurons

$$\psi = \mathbf{S} \int_0^{2\pi} \mathfrak{M} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \theta} \omega d\theta,$$

ω étant l'aire d'un élément de la courbe C et le signe \mathbf{S} indiquant une sommation qui s'étend à tous ces éléments.

Cette expression peut s'écrire

$$\psi = \mathbf{S} \mathfrak{M} \omega \int_0^{2\pi} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \theta} d\theta,$$

et il est alors évident que

$$\psi = 0,$$

en tout point intérieur à l'aimant.

Dès lors l'égalité évidente

$$\varphi = \psi + \psi$$

devient, à l'intérieur de l'aimant,

$$\varphi = \psi,$$

et, en vertu des égalités (7 bis), l'égalité (8) devient

$$(9) \quad \mathfrak{M} = \frac{2K n' i}{\rho} \lambda \left[\left(\frac{2K n' i}{\rho} \right)^2 \right].$$

D'après les principes de l'Électromagnétisme, le potentiel du tore ainsi aimanté sur un des anneaux de la bobine B , cet anneau étant supposé par-

couru par un courant d'intensité égale à l'unité, a pour valeur

$$w = 4\pi K \int \omega,$$

ω étant un élément de l'aire enveloppée par la courbe C' (ou, ce qui revient au même, par la courbe C) et ω l'aimantation du tore en un point de cet élément. D'après l'égalité (9), cette dernière égalité devient

$$(10) \quad w = 8\pi K^2 n' i \int \lambda \left[\left(\frac{2Kn'i}{\rho} \right)^2 \right] \frac{\omega}{\rho}.$$

Sur un des anneaux de la bobine B , parcouru par un courant supposé égal à l'unité, la bobine B' admet un potentiel qui a pour valeur

$$(11) \quad v = 2K^2 n' i \int \frac{\omega}{\rho}.$$

Il en résulte que l'ensemble du tore aimanté et de la bobine B' ont sur la bobine B , parcourue par un courant égal à l'unité, un potentiel

$$(12) \quad v = n(\psi + w) = 2K^2 nn' i \int \left\{ 1 + 4\pi \lambda \left[\left(\frac{2Kn'i}{\rho} \right)^2 \right] \right\} \frac{\omega}{\rho}.$$

Supposons que l'on ouvre la bobine B' de façon à supprimer le courant i . Le tore se désaimante ; la désaimantation du tore et l'interruption du courant i produisent dans la bobine B un courant d'induction. Soit Q la quantité d'électricité que ce courant met en mouvement, quantité que l'on peut mesurer par l'impulsion donnée à une aiguille de galvanomètre ; soit R la résistance de la bobine B . Les lois de l'induction montrent que l'on a

$$Q = \frac{v}{R}$$

ou bien, en vertu de l'égalité (12),

$$(13) \quad Q = \frac{2K^2 nn' i}{R} \int \left\{ 1 + 4\pi \lambda \left[\left(\frac{2Kn'i}{\rho} \right)^2 \right] \right\} \frac{\omega}{\rho}.$$

Désignons par ρ_0 une des valeurs que prend ρ à l'intérieur du tore. Posons

$$\rho = \rho_0 + r$$

et supposons que r soit toujours petit. Posons en outre, pour abréger,

$$\xi = \left(\frac{2K n' i}{\rho} \right)^2;$$

Q pourra se développer ainsi :

$$(14) \quad Q = \frac{2K^2 nn' i}{R} \left(P_0 \mathbf{S} \omega + P_1 \mathbf{S} r\omega + \dots + P_m \mathbf{S} r^m \omega + \dots \right),$$

P_0, P_1, \dots, P_m ayant les valeurs suivantes :

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_0 = \frac{1}{\rho_0} [1 + 4\pi\lambda(\xi)], \\ P_1 = - \left\{ \frac{1}{\rho_0^2} [1 + 4\pi\lambda(\xi)] + 32\pi K^2 n'^2 i^2 \frac{2}{\rho_0^4} \frac{\partial\lambda(\xi)}{\partial\xi} \right\}, \\ P_2 = \left\{ \frac{1}{\rho_0^3} [1 + 4\pi\lambda(\xi)] + \frac{32\pi K^2 n'^2 i^2}{\rho_0^5} \left[2 \frac{\partial\lambda(\xi)}{\partial\xi} + 3 \frac{\partial^2\lambda(\xi)}{\partial\xi^2} \right] \right\}, \\ \dots \dots \dots \\ P_m = (-1)^m \left\{ \frac{1}{\rho_0^{m+1}} [1 + 4\pi\lambda(\xi)] + \frac{32\pi K^2 n'^2 i^2}{\rho_0^{m+3}} \left[2 \frac{\partial\lambda(\xi)}{\partial\xi} + 3 \frac{\partial^2\lambda(\xi)}{\partial\xi^2} + \dots + (m+1) \frac{\partial^{m+1}\lambda(\xi)}{\partial\xi^{m+1}} \right] \right\}, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Si, en particulier, la distance des divers points du tore à l'axe varie assez peu pour que les intégrales

$$\mathbf{S} r\omega, \quad \mathbf{S} r^2\omega, \quad \dots, \quad \mathbf{S} r^m\omega, \quad \dots$$

soient négligeables devant l'intégrale

$$\Omega = \mathbf{S} \omega,$$

ce qui arrive si le tore est un anneau infiniment délié ou un tube cylindrique infiniment mince, la formule (15) devient simplement

$$Q = \frac{2K^2 nn' i \Omega}{R \rho_0} \left\{ 1 + 4\pi\lambda \left[\left(\frac{2K n' i}{\rho} \right)^2 \right] \right\}.$$

Cette formule, qui serait vraie, quelles que soient la forme et les dimensions

du tore dans la théorie de Poisson, où la fonction λ est remplacée par une constante, permet alors de déterminer expérimentalement la fonction λ . Cette méthode, nous l'avons dit, a été indiquée par G. Kirchhoff⁽¹⁾; elle a été employée par plusieurs expérimentateurs, notamment par M. Rowland.

Si l'on voulait l'employer avec un tore de dimensions quelconques et en tenant compte des variations de λ , il faudrait supposer $\lambda(\zeta)$ développable en série uniformément convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de ζ ,

$$\lambda(\zeta) = A_0 + A_1 \zeta + A_2 \zeta^2 + \dots,$$

et supposer aussi ses dérivées de tous les ordres développables de la même manière. On en déduirait pour Q un développement de la forme suivante

$$Q = \frac{2K^2 nn' i}{R} (B_0 + B_1 \zeta + B_2 \zeta^2 + \dots),$$

développement dans lequel on aurait

$$B_i = \alpha_0^i A_0 + \alpha_1^i A_1 + \alpha_2^i A_2 + \dots,$$

la quantité α_j^i elle-même étant une série de la forme

$$\alpha_j^i = \beta_0 \sum \omega + \beta_1 \sum r \omega + \beta_2 \sum r^2 \omega + \dots,$$

les quantités $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots$ étant des coefficients connus. Il serait impossible d'employer un développement aussi compliqué à déterminer les coefficients A_0, A_1, A_2, \dots dont dépend le développement de la quantité $\lambda(\zeta)$.

M. Paul Janet⁽²⁾ a donné récemment une méthode de détermination de la fonction magnétisante, qui permet, au contraire, l'emploi d'un développement de ce genre.

⁽¹⁾ G. KIRCHHOFF, *Zur Theorie des in einem Eisenkörper inducirten Magnetismus* (*Poggendorff's Annalen*, Ergänzungsband V, 1870. *G. Kirchhoff's gesammelte Abhandlungen*, p. 223).

⁽²⁾ Paul JANET, *Sur l'application du phénomène de l'aimantation transversale à l'étude du coefficient d'aimantation du fer* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CVI, p. 200; 16 janvier 1888).



CHAPITRE VI.

PHÉNOMÈNES THERMIQUES.

§ I. — Quantité de chaleur dégagée dans une transformation d'un système qui renferme des aimants.

1. On a souvent étudié, au point de vue expérimental, les phénomènes thermiques qui accompagnent l'aimantation ou la désaimantation d'un morceau de fer doux placé à l'intérieur d'une spirale parcourue par un courant, mais il n'entre pas dans nos intentions d'étudier ici ces phénomènes, car cette étude rentre dans l'étude plus générale de l'aimantation par les courants, que nous ne voulons point faire ici. Nous nous bornerons donc aux phénomènes thermiques que peuvent présenter des systèmes ne renfermant que des aimants.

Rappelons, à cet égard, une relation dont nous aurons à faire un usage constant au cours de ce Chapitre.

L'état d'un système est défini par la température T et par un certain nombre de paramètres α, β, \dots . Ces paramètres sont choisis de telle sorte que, si T varie sans qu'aucun d'eux change de valeur, les forces extérieures n'effectuent aucun travail; c'est ce qui arrive, par exemple, lorsque l'état d'un système soumis à une pression normale et uniforme est défini par la température et le volume du système.

Le système considéré admet un potentiel thermodynamique interne \mathcal{F} , une énergie interne Y , une entropie Σ ; les forces extérieures qui agissent sur lui admettent, à température constante, un potentiel W , en sorte que le système admet un potentiel thermodynamique total Ω . On a, par définition,

$$(1) \quad \begin{cases} \Omega = \mathcal{F} + W, \\ \mathcal{F} = E(Y - T\Sigma). \end{cases}$$

Élevons de dT la température du système, en laissant constants les autres paramètres. On a ainsi une modification réversible dans laquelle aucun travail extérieur n'est effectué, modification dans laquelle par conséquent

$$dY = T d\Sigma,$$

ce qui donne

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial T} - T \frac{\partial \Sigma}{\partial T} = 0.$$

Mais, d'autre part, les égalités (1) donnent

$$\frac{\partial \Omega}{\partial T} = E \left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial T} - T \frac{\partial \Sigma}{\partial T} - \Sigma \right) + \frac{\partial W}{\partial T}.$$

La comparaison de ces égalités donne

$$(2) \quad \begin{cases} E\Sigma = -\frac{\partial}{\partial T}(\Omega - W) = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}, \\ E\Upsilon = \mathcal{F} - T \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}. \end{cases}$$

De là, se déduit une conséquence simple. Dans une modification isothermique, le corps dégage une quantité de chaleur dQ , et l'on a

$$dQ = -d\Upsilon - \frac{1}{E} dW.$$

D'après les égalités (2), cette relation peut s'écrire

$$(3) \quad E dQ = -d(\mathcal{F} + W) + d\left(T \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}\right).$$

Si le système était en équilibre, on aurait

$$d(\mathcal{F} + W) = 0$$

et, par conséquent,

$$(4) \quad dQ = A d\left(T \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}\right),$$

A désignant, suivant l'usage, l'inverse de l'équivalent mécanique de la chaleur.

Ces deux relations (3) et (4) se mettent immédiatement sous forme finie; dans une modification isothermique, qui fait passer le système de l'état (α) à l'état (β), le système dégage une quantité de chaleur Q donnée par la relation

$$(5) \quad EQ = \mathcal{F}_\alpha + W_\alpha - T \frac{\partial \mathcal{F}_\alpha}{\partial T} - \mathcal{F}_\beta - W_\beta + T \frac{\partial \mathcal{F}_\beta}{\partial T},$$

et, si la modification est réversible, par la relation

$$(6) \quad EQ = T \frac{\partial}{\partial T} (\mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_\alpha).$$

Nous allons appliquer ces relations aux modifications subies par des systèmes qui renferment des aimants.

2. Pour un semblable système, nous avons

$$(7) \quad \mathcal{F} = E(U - TS) + \mathcal{F} + \int \mathcal{F}(\mathcal{M}) dv,$$

conformément à l'égalité (19) du Chapitre I.

Parmi les paramètres autres que l'intensité d'aimantation dont dépend la fonction $\mathcal{F}(\mathcal{M})$, figure la température T , ce que nous mettrons en évidence en écrivant non plus $\mathcal{F}(\mathcal{M})$, mais $\mathcal{F}(\mathcal{M}, T)$.

L'état du système est défini par la température T et un certain nombre d'autres paramètres. Nous supposons ces derniers choisis de telle sorte que, lorsque T varie, ces paramètres demeurent constants, chacun des corps du système garde sa forme et sa position. Il en résulte que, dans ces conditions, la variation du seul paramètre T n'entraîne aucun travail des forces extérieures, comme le suppose l'établissement des équations précédentes. Il en résulte aussi que la variation du seul paramètre T ne fait pas varier \mathcal{F} . On a alors

$$(8) \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} = E \frac{\partial}{\partial T} (U - TS) + \int \frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{M}, T)}{\partial T} dv.$$

D'après les égalités (7) et (8), l'égalité (5) devient, pour un système qui renferme des aimants,

$$(9) \quad EQ = E(U_\alpha - TS_\alpha) + W_\alpha + \mathcal{F}_\alpha - ET \frac{\partial}{\partial T} (U_\alpha - TS_\alpha) + \int \left[\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{M}, T) - T \frac{\partial \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{M}, T)}{\partial T} \right] dv - \left\{ E(U_\beta - TS_\beta) + W_\beta + \mathcal{F}_\beta - ET \frac{\partial}{\partial T} (U_\beta - TS_\beta) + \int \left[\mathcal{F}_\beta(\mathcal{M}, T) - T \frac{\partial \mathcal{F}_\beta(\mathcal{M}, T)}{\partial T} \right] dv \right\}.$$

Posons

$$EQ_1 = E(U_\alpha - TS_\alpha) + W_\alpha - E(U_\beta - TS_\beta) - W_\beta - ET \frac{\partial}{\partial T} (U_\alpha - TS_\alpha) + ET \frac{\partial}{\partial T} (U_\beta - TS_\beta)$$

et

$$Q = Q - Q_1.$$

L'égalité (9) pourra s'écrire

$$(10) \quad E\mathcal{Q} = \mathfrak{F}_\alpha - \mathfrak{F}_\beta + \int \left[\tilde{f}_\alpha(\mathfrak{M}, T) - T \frac{\partial}{\partial T} \tilde{f}_\alpha(\mathfrak{M}, T) \right] dv - \int \left[\tilde{f}_\beta(\mathfrak{M}, T) - T \frac{\partial}{\partial T} \tilde{f}_\beta(\mathfrak{M}, T) \right] dv;$$

Q_1 représente la quantité de chaleur qui serait dégagée si l'on faisait subir au système exactement les mêmes changements d'état en le maintenant constamment à l'état non magnétique; la quantité \mathcal{Q} mesure donc la part d'influence exercée sur le phénomène thermique par l'aimantation du système et par ses variations.

La plupart des auteurs qui se sont occupés des phénomènes thermiques produits au sein de systèmes qui renferment des aimants ont remplacé l'égalité (10) par l'égalité incomplète

$$(11) \quad E\mathcal{Q} = \mathfrak{F}_\alpha - \mathfrak{F}_\beta$$

et ont été ainsi conduits à des conclusions erronées, comme nous l'allons voir dans les paragraphes suivants.

§ II. — Influence de l'aimantation sur la chaleur dégagée dans une réaction chimique.

3. Supposons qu'un fragment d'une substance aimantée entre en une combinaison chimique. Quelle relation existera entre la quantité de chaleur Q dégagée par cette réaction et la quantité de chaleur Q_1 dégagée par la même réaction préparée au moyen d'une substance non aimantée?

Ce problème comprend deux cas distincts : dans le premier, le corps aimanté est un corps doué de force coercitive et le système ne renferme point d'autre aimant; dans le second, le corps aimanté est dénué de force coercitive et le système renferme des aimants permanents qui produisent l'aimantation de la substance considérée.

Envisageons tout d'abord le premier cas. Supposons négligeable le magnétisme de la combinaison formée; dans ces conditions, le système, dans l'état final, ne renferme plus aucun aimant, et nous avons

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_\beta &= 0, \\ \tilde{f}_\beta(\mathfrak{M}_\beta, T) &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{f}_\beta(\mathfrak{M}_\beta, T)}{\partial T} &= 0, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(12) \quad Q = Q_1 + A \mathfrak{F}_\alpha + A \int \left[\mathfrak{F}_\alpha(\mathfrak{M}_\alpha, T) - T \frac{\partial \mathfrak{F}_\alpha(\mathfrak{M}_\alpha, T)}{\partial T} \right] d\mathfrak{v}.$$

L'égalité (10) du Chapitre III nous donne

$$\mathfrak{F}_\alpha = \frac{h}{8\pi} \int \left[\left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial z} \right)^2 \right] d\mathfrak{v},$$

l'intégration s'étendant au système tout entier.

D'autre part, nous avons

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, T) = \int_0^{\mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, T)} d\mathfrak{M}.$$

L'égalité (12) peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} Q = Q_1 + \frac{A h}{8\pi} \int \left[\left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial z} \right)^2 \right] d\mathfrak{v} \\ + A \int \left\{ \int_0^{\mathfrak{M}_\alpha} \frac{\mathfrak{M}}{F_\alpha(\mathfrak{M}, T)} \left[1 + \frac{T}{F_\alpha(\mathfrak{M}, T)} \frac{\partial F_\alpha(\mathfrak{M}, T)}{\partial T} \right] d\mathfrak{M} \right\} d\mathfrak{v}. \end{aligned}$$

Si le corps entrant en combinaison est magnétique et si son coefficient d'aimantation croît ou demeure constant lorsque la température croît, la chaleur dégagée par la combinaison est plus grande lorsque le corps est aimanté que lorsqu'il ne l'est pas. En tout autre cas, le signe de la différence entre ces deux quantités de chaleur ne peut être prévu, a priori, sans données numériques.

4. Envisageons maintenant le cas où le corps entrant en combinaison est un corps dénué de force coercitive et où la combinaison s'effectue sous l'influence d'aimants permanents. Réservons, suivant notre notation habituelle, l'indice (1) aux aimants permanents et l'indice (2) à la substance dénuée de force coercitive. Soit ψ_1 la fonction potentielle en un point des aimants permanents du magnétisme répandu en ces aimants; soit ψ_2 la fonction potentielle en un point de la masse magnétique du magnétisme répandu sur cette masse; soit enfin ψ_3 la fonction potentielle en un point de la masse magnétique du magnétisme répandu sur les aimants perma-

nents. Nous aurons

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} = & \frac{h}{2} \int \left(\lambda_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} + \mathfrak{B}_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_1} + \mathcal{E}_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial z_1} \right) dv_1 \\ & + h \int \left(\lambda_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2} + \mathcal{E}_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial z_2} \right) dv_2 \\ & + \frac{h}{2} \int \left(\lambda_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2} + \mathcal{E}_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial z_2} \right) dv_2.\end{aligned}$$

Dans l'état initial (α) du système comme dans l'état final (β), le premier terme garde la même valeur ; les deux derniers sont nuls dans l'état final. On a donc

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_\alpha - \mathfrak{F}_\beta = & h \int \left(\lambda_\alpha \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_\alpha \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2} + \mathcal{E}_\alpha \frac{\partial \Psi_2}{\partial z_2} \right) dv_2 \\ & + \frac{h}{2} \int \left(\lambda_\alpha \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_\alpha \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2} + \mathcal{E}_\alpha \frac{\partial \Psi_2}{\partial z_2} \right) dv_2.\end{aligned}$$

Pour les aimants permanents, $\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, T)$ et $\frac{\partial}{\partial T} \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, T)$ ont la même valeur dans l'état initial et dans l'état final. Pour le corps magnétique, ces quantités sont nulles dans l'état final, puisque la combinaison est supposée non magnétique. On a donc

$$\begin{aligned}& \int \left[\mathfrak{F}_\alpha(\mathfrak{M}, T) - T \frac{\partial}{\partial T} \mathfrak{F}_\alpha(\mathfrak{M}, T) \right] dv \\ & + \int \left[\mathfrak{F}_\beta(\mathfrak{M}, T) - T \frac{\partial}{\partial T} \mathfrak{F}_\beta(\mathfrak{M}, T) \right] dv \\ & = \int \left[\mathfrak{F}_\alpha(\mathfrak{M}, T) - T \frac{\partial}{\partial T} \mathfrak{F}_\alpha(\mathfrak{M}, T) \right] dv_2,\end{aligned}$$

et l'égalité (12) devient, dans ce cas,

$$\begin{aligned}Q = Q_1 + A \left[& h \int \left(\lambda_\alpha \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_\alpha \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2} + \mathcal{E}_\alpha \frac{\partial \Psi_2}{\partial z_2} \right) dv_2 \\ & + \frac{h}{2} \int \left(\lambda_\alpha \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} + \mathfrak{B}_\alpha \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2} + \mathcal{E}_\alpha \frac{\partial \Psi_2}{\partial z_2} \right) dv_2 + \int \mathfrak{F}_\alpha(\mathfrak{M}, T) dv_2 \right] \\ & - AT \int \frac{\partial \mathfrak{F}_\alpha(\mathfrak{M}, T)}{\partial T} dv_2.\end{aligned}$$

Par un calcul analogue à celui que nous avons effectué au Chapitre IV,

§ III, n° 5, le coefficient de A peut s'écrire

$$\int \left[\frac{1}{2F(M, T)} - \frac{1}{F(\mathfrak{M}, T)} \right] \mathfrak{M}^2 dv_2 - \frac{h}{8\pi} \int \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{M}_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{M}_2}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{M}_2}{\partial z} \right)^2 \right] dv_2,$$

M étant compris entre 0 et \mathfrak{M} , et la dernière intégrale s'étendant à tout l'espace.

On voit alors aisément que ce coefficient est négatif pour tous les corps magnétiques connus, et de signe inconnu pour les corps diamagnétiques.

Quant au dernier terme du second membre de l'égalité précédente, il peut s'écrire

$$AT \int \left\{ \int_0^{\mathfrak{M}_2} \frac{\mathfrak{M}}{[F(\mathfrak{M}, T)]^2} \frac{\partial F(\mathfrak{M}, T)}{\partial T} d\mathfrak{M} \right\} dv_2.$$

Pour toute substance magnétique ou diamagnétique, il est positif si le coefficient d'aimantation croît avec la température, négatif s'il décroît lorsque la température croît. Par conséquent, on peut énoncer la proposition suivante :

Lorsqu'une substance magnétique entre en réaction pour fournir une combinaison chimique dont le magnétisme soit négligeable, elle dégage une moindre quantité de chaleur lorsque la combinaison s'effectue dans un champ magnétique que lorsque la combinaison s'effectue en dehors du champ, pourvu que le coefficient d'aimantation diminue ou demeure constant lorsque la température croît; si ce coefficient augmente avec la température, on ne peut plus rien prévoir en dehors des données numériques. Il en est de même pour tous les corps diamagnétiques.

La proposition que nous venons d'énoncer montre combien il importait de distinguer l'un de l'autre les deux cas que nous avons examinés. Si les variations du coefficient d'aimantation avec la température sont négligeables et si le corps est magnétique, on est assuré que l'aimantation exerce, dans les deux cas, des effets inverses sur la chaleur de combinaison (¹).

L'analogie du calcul effectué au présent paragraphe avec celui que nous avons effectué au Chapitre IV, § III, n° 5, ne doit pas surprendre. On aurait, en effet, pu obtenir le résultat précédent en supposant que l'on éloigne à l'infini la masse dénuée de force coercitive, que l'on effectue la réaction chimique à l'infini et que l'on ramène ensuite de l'infini la combinaison non magnétique formée.

(¹) Voir la Note à la fin du Mémoire.

§ III. — Influence de l'aimantation sur la possibilité d'une réaction chimique. Théorie des phénomènes observés par M. Remsen.

5. C'est dans le second des deux cas que nous venons d'examiner que s'est placé M. P. Janet qui, le premier, à notre connaissance, a signalé l'influence de l'aimantation sur la chaleur de combinaison. Rappelons dans quelles circonstances.

Depuis fort longtemps, les physiciens ont cherché à mettre en évidence l'influence du magnétisme sur les réactions chimiques. Après bien des tentatives infructueuses ou incertaines (¹), M. Ira Remsen (²), plus heureux que ses prédecesseurs, parvint aux résultats suivants :

Dans une nacelle de fer mince, on place une solution de sulfate de cuivre. Dans les conditions ordinaires, le cuivre se dépose sur cette nacelle d'une façon uniforme; mais, si l'on place cette nacelle sur les pôles d'un puissant électro-aimant, l'épaisseur du dépôt devient très irrégulière. Nulle aux points en contact avec les pôles de l'électro-aimant, elle croît au fur et à mesure que l'on s'éloigne de ces points, et les lignes d'égale épaisseur, qui sont le lieu des points où la réaction chimique s'est produite avec une égale vitesse, dessinent des formes analogues à celles des lignes équipotentielles. Selon M. H.-V. Jueptner, résumant les vues de M. Ira Remsen, « le phénomène est facile à expliquer. L'attraction que l'aimant exerce sur le fer du récipient met obstacle à la dissolution de ce même fer et par suite à la séparation du cuivre; il en résulte que la quantité de cuivre séparée est inversement proportionnelle à l'attraction magnétique. Ainsi il est évident que, dans l'expérience précédente, l'attraction magnétique au pôle même est supérieure à l'action des forces chimiques : le fer ne pouvant se dissoudre, il est impossible que le cuivre se sépare. A mesure qu'on s'éloigne du pôle, l'action magnétique diminue; la quantité de fer dissous augmente avec la quantité de cuivre déposé ».

M. P. Janet (³), partant de la relation incomplète (11), a énoncé cette

(¹) Ces tentatives sont résumées dans G. WIEDEMANN, *Die Lehre von der Elektricität*, t. III, p. 967.

(²) Voir *Action chimique dans un champ magnétique* (*La Lumière électrique*, t. IV, p. 126; 1881) et H.-V. JUEPTNER, *L'influence du magnétisme sur les métaux au point de vue électrolytique* (*La Lumière électrique*, t. X, p. 469; 1883).

(³) P. JANET, *De l'influence du magnétisme sur les phénomènes chimiques* (*Journal de Physique*, 2^e série, t. VI, p. 286; 1887).

proposition qui, nous l'avons vu, est soumise à certaines restrictions : *La chaleur de combinaison du fer est plus grande hors du champ magnétique que dans ce champ.* Si alors, conformément aux principes de la Thermochimie, on prend pour mesure de la facilité avec laquelle une réaction s'effectue la quantité de chaleur qu'elle dégage, on arrive à une explication des phénomènes observés par M. Remsen.

Au dernier Congrès de l'Association Britannique, tenu en 1887 à Manchester (¹), M. Rowland « a décrit quelques expériences remarquables, soit personnelles, soit dues à d'autres physiciens, sur l'action chimique dans un champ magnétique. Ces expériences ont montré qu'un morceau de fer soumis à une aimantation intense étant dissous, dans l'acide nitrique par exemple, les parties les plus fortement aimantées sont à demi protégées et sont moins rapidement attaquées que les autres. Par exemple, les angles et les arêtes se trouvent dans ces conditions protectrices, tandis que les parties concaves et les parties planes sont dissoutes les premières ».

L'explication adoptée est identique à celle qu'a adoptée M. P. Janet. « ... Il est évident que la dissolution du fer, qui se détache au voisinage d'un pôle aimanté, produit moins de travail que si ce fer n'était point aimanté; par conséquent, la tendance protectrice de l'aimantation était à prévoir.... »

Nous nous sommes proposé de donner des phénomènes précédents une théorie qui ne reposât point sur l'égalité incomplète (11) et qui, surtout, ne fit point usage des principes erronés de la Thermochimie; on sait aujourd'hui que la possibilité d'une réaction ne dépend point du signe de la quantité de chaleur qu'elle met en jeu, mais du signe du travail non compensé qu'elle engendre; qu'il ne faut point par conséquent prendre pour mesure de la facilité avec laquelle une réaction se produit la grandeur du dégagement calorifique qui l'accompagne, mais plutôt la grandeur de la diminution qu'elle fait subir au potentiel thermodynamique. Dans cet ordre d'idées, on peut obtenir quelques résultats qui sont les suivants.

6. Comme dans l'étude qui a fait l'objet du paragraphe précédent, il importe de distinguer deux cas : celui où le système ne renferme qu'une

(¹) Oliver J. LODGE, *Sketch of the principal electrical Papers read before Section A during the late Meeting of the British Association at Manchester 1887* (*Electrical Review*, 23 septembre 1887).

masse magnétique douée de force coercitive et soumise à une action chimique, et celui où la masse soumise à l'action chimique est une masse dénuée de force coercitive et soumise à l'action d'aimants permanents.

Commençons par donner une relation générale qui s'applique également à ces deux cas.

Supposons qu'une particule superficielle de la masse magnétique ayant pour volume $dx dy dz$, dont l'aimantation \mathfrak{M} a pour composantes \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , se dissolve de manière à donner un liquide non magnétique et soit remplacée par une particule non magnétique. Si ψ désigne la fonction potentielle magnétique en un point (x, y, z) de la particule $dx dy dz$, il est aisé de voir que le potentiel thermodynamique du système subira la variation suivante :

$$d\Omega = Ed(U - TS) + dW - h \left(\mathfrak{A} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mathfrak{B} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \mathfrak{C} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dx dy dz - \mathfrak{f}(\mathfrak{M}) dx dy dz.$$

Si le système n'était pas aimanté, la même réaction lui ferait subir la variation

$$d_1\Omega = Ed(U - TS) + dW.$$

On a donc

$$(13) \quad d\Omega - d_1\Omega = - \left[h \left(\mathfrak{A} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mathfrak{B} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \mathfrak{C} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \mathfrak{f}(\mathfrak{M}) \right] dx dy dz.$$

Dans le cas où le corps dissous est un corps doué de force coercitive, il est impossible de préciser le signe du second membre. Mais, si le corps est formé avec l'une quelconque des substances magnétiques ou diamagnétiques dénuées de force coercitive, on peut démontrer, comme nous l'allons voir, que le second membre est positif pour les substances magnétiques et négatif pour les substances diamagnétiques, ce qui permet d'énoncer la proposition suivante :

La dissolution dans un réactif d'une masse magnétique dénuée de force coercitive et placée dans un champ magnétique entraîne une moindre diminution de potentiel thermodynamique que si cette masse n'était pas aimantée. L'inverse a lieu pour une masse diamagnétique.

Démontrons la proposition pour une masse magnétique ; la démonstration est analogue pour une masse diamagnétique.

Les équations de l'induction magnétique

$$a = -hF(\mathfrak{M}) \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$b = -hF(\mathfrak{M}) \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$c = -hF(\mathfrak{M}) \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

permettent de donner à l'égalité (13) la forme suivante :

$$(14) \quad d\Omega - d_1\Omega = \left[\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M})} - \mathcal{J}(\mathfrak{M}) \right] dx dy dz.$$

L'altération que l'aimantation de la particule dissoute fait subir à la variation éprouvée par le potentiel thermodynamique du système dépend uniquement de l'intensité d'aimantation de cette particule.

L'égalité

$$F(\mathfrak{M}) = \frac{\mathfrak{M}}{\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathfrak{M}}}$$

nous permet d'écrire, en observant que \mathfrak{M} et $F(\mathfrak{M})$ ont des signes constants,

$$\mathcal{J}(\mathfrak{M}) = \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mu)},$$

μ étant compris entre 0 et \mathfrak{M} . On a alors, au lieu de l'égalité (14),

$$(15) \quad d\Omega - d_1\Omega = \mathfrak{M}^2 \left[\frac{1}{F(\mathfrak{M})} - \frac{1}{2F(\mu)} \right] dx dy dz.$$

On voit alors directement que $(d\Omega - d_1\Omega)$ sera certainement positif, si, pour toute valeur de μ comprise entre 0 et \mathfrak{M} , on a

$$2F(\mu) > F(\mathfrak{M}),$$

ce qui aura lieu pour toutes les substances magnétiques connues, puisque, pour toutes ces substances, lorsque l'aimantation croît, le coefficient d'aimantation croît faiblement, décroît ou demeure constant. La même quantité sera négative si l'on a

$$2F(\mu) < F(\mathfrak{M}),$$

ce qui a lieu pour toutes les substances diamagnétiques pour lesquelles la fonction magnétisante est indépendante de l'aimantation ou décroît en valeur absolue lorsque l'aimantation croît; ou bien encore pour celles pour lesquelles elle croîtrait en valeur absolue avec l'aimantation, mais pas assez rapidement pour passer du simple au double.

La proposition que nous avons énoncée tout à l'heure est donc démontrée.

On voit de plus que, si l'on néglige l'influence de l'aimantation sur le coefficient d'aimantation, on aura sensiblement

$$d\Omega - d_1\Omega = \frac{M^2}{2F} dx dy dz.$$

La diminution que subit le potentiel thermodynamique par la dissolution de la particule aimantée est d'autant moindre que l'aimantation de la particule est plus énergique; la quantité dont cette aimantation varie est sensiblement proportionnelle au carré de l'intensité d'aimantation de la particule.

Ces diverses propositions donnent la théorie des phénomènes observés par M. Remsen et par M. Rowland.

Supposons que $d_1\Omega$ soit négatif, c'est-à-dire que la substance considérée puisse se dissoudre dans le liquide considéré, lorsque cette substance n'est pas aimantée.

Aimantons maintenant la substance. Si l'aimantation est assez énergique, $d\Omega$ pourra, aux points où l'intensité d'aimantation est assez grande, devenir positif; en ces points, la dissolution de la substance magnétique sera impossible; dans l'expérience de M. Remsen, le cuivre ne se déposera pas en ces points; c'est ce qui arrive au voisinage des pôles d'un électro-aimant énergique. Si l'électro-aimant est plus faible, $d\Omega$ demeurera négatif en tout point, et, comme l'a constaté M. Remsen, le cuivre pourra partout se déposer.

S'il existe des régions où $d\Omega$ est positif, c'est-à-dire où le cuivre ne peut se déposer, elles seront séparées des régions où $d\Omega$ est négatif et où l'on peut observer un dépôt de cuivre, par une ligne le long de laquelle on aura

$$d\Omega = 0,$$

c'est-à-dire, d'après l'égalité (14),

$$\partial\mathfrak{N} = \text{const.}$$

La ligne de séparation entre les régions où le cuivre ne se dépose pas et les régions où il se dépose sera, non pas une ligne équipotentielle, mais une ligne d'égale intensité magnétique.

Admettons que la vitesse de réaction, mesurée dans l'expérience de M. Remsen par l'épaisseur du dépôt de cuivre, dépende seulement de la diminution de potentiel thermodynamique et croisse avec la grandeur de cette diminution. Les lignes d'égale épaisseur seront données par l'équation

$$d\Omega = \text{const.},$$

ou bien, d'après l'équation (14), par l'équation

$$\partial\mathfrak{N} = \text{const.}$$

Les lignes le long desquelles le dépôt a une épaisseur constante sont des lignes d'égale intensité magnétique.

Pour une substance magnétique, dont le coefficient d'aimantation varie peu avec l'intensité d'aimantation, l'épaisseur du dépôt en un point est d'autant plus grande que l'aimantation est moindre en ce point.

On obtient ainsi une théorie qui rend compte, d'une façon précise, des principaux phénomènes observés par M. Ira Remsen et M. Rowland.

§ IV. — Chaleur dégagée durant le déplacement d'une masse magnétique.

7. Abordons maintenant l'étude de la quantité de chaleur mise en jeu lorsqu'on déplace dans un champ magnétique une masse magnétique dénuée ou non de force coercitive. Supposons que cette masse magnétique, placée d'abord à distance finie des autres aimants que renferme le système, s'en éloigne ensuite infiniment, et faisons usage de l'égalité (9).

Réservons l'indice (1) aux aimants qui demeurent immobiles et l'indice (2) à la masse déplacée.

Soient

ψ_1 , la fonction potentielle en un point des aimants (1) du magnétisme distribué sur ces aimants;

ψ_2 la fonction potentielle en un point de la masse (2) du magnétisme distribué sur cette masse;

v_2 la fonction potentielle en un point de la masse (2) du magnétisme distribué sur les aimants (1).

Nous aurons

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} = & \frac{h}{2} \int \left(\lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \mu_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} + \varepsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z_1} \right) dv_1 \\ & + h \int \left(\lambda_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \mu_2 \frac{\partial v_2}{\partial y_2} + \varepsilon_2 \frac{\partial v_2}{\partial z_2} \right) dv_2 \\ & + \frac{h}{2} \int \left(\lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \mu_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} + \varepsilon_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial z_2} \right) dv_2.\end{aligned}$$

Supposons que la masse déplacée soit un aimant permanent. Le premier et le troisième terme ne subiront dans le déplacement aucune variation. La valeur finale du second terme sera 0. Le terme

$$E(v - TS) + \Psi + \int \mathcal{F}(\mathfrak{M}) dv - \int T \frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M})}{\partial T} dv$$

ne subit aucune variation. L'égalité (9) devient alors

$$EQ = h \int \left(\lambda_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \mu_2 \frac{\partial v_2}{\partial y_2} + \varepsilon_2 \frac{\partial v_2}{\partial z_2} \right) dv_2.$$

La quantité de chaleur dégagée est simplement équivalente, dans ce cas, au travail effectué par les forces intérieures.

Ce résultat pouvait se prévoir d'après les principes posés au § I du Chapitre I, puisqu'il s'agit ici d'un déplacement sans changement d'état.

Considérons maintenant le cas où la masse déplacée est dénuée de force coercitive. Dans ce cas, la valeur finale de

$$\mathfrak{F} + \int \mathcal{F}(\mathfrak{M}) dv$$

se réduit, puisque la masse, éloignée à l'infini, n'est plus aimantée, à

$$\frac{h}{2} \int \left(\lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \mu_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} + \varepsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z_1} \right) dv_1 + \int \mathcal{F}_1(\mathfrak{M}) dv_1.$$

On a donc, en vertu de l'égalité (9),

$$\begin{aligned} \text{EQ} = & -h \int \left(\lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \psi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} + \varepsilon_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial z_2} \right) dv_2 \\ & + \frac{h}{2} \int \left(\lambda_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} + \psi_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2} + \varepsilon_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial z_2} \right) dv_2 \\ & + \int \tilde{\mathcal{J}}_2(\mathfrak{M}) dv_2 - T \int \frac{\partial \tilde{\mathcal{J}}_2(\mathfrak{M})}{\partial T} dv_2. \end{aligned}$$

Nous avons déjà discuté, au § III, le signe du second membre de cette égalité. Il nous suffit donc de reprendre ici le résultat de cette discussion pour pouvoir énoncer la proposition suivante :

Lorsqu'une substance magnétique (mais non diamagnétique) se trouve soumise à l'action d'aimants et lorsqu'on l'éloigne ensuite à l'infini, elle absorbe de la chaleur si son coefficient d'aimantation diminue ou demeure constant lorsque la température croît. En dehors des conditions que nous venons d'énoncer, le sens du phénomène thermique produit dans ces circonstances ne peut être prévu sans données numériques.

Sir W. Thomson (¹) a énoncé la proposition suivante : *Une masse magnétique que l'on éloigne d'aimants permanents s'échauffe si son coefficient d'aimantation croît avec la température et se refroidit si son coefficient d'aimantation diminue lorsque la température croît. L'inverse aura lieu pour une masse diamagnétique.*

Cette proposition est d'accord avec la précédente pour le cas d'une masse magnétique dont le coefficient d'aimantation diminue lorsque la température croît; mais l'accord s'arrête là. Lorsqu'on éloigne d'aimants permanents une masse magnétique dont le coefficient d'aimantation est indépendant de la température, la quantité de chaleur dégagée est nulle d'après Sir W. Thomson, tandis qu'elle est négative d'après la proposition précédente.

Nous bornerons à ces remarques nos recherches sur les phénomènes thermiques produits au sein de systèmes qui renferment des aimants.

(¹) W. Thomson, cité par MASCART et JOUBERT, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 712.

M. Stefan (¹) et M. Waszsmuth (²) ont examiné, au point de vue de la Thermodynamique, l'influence qu'exerce l'aimantation sur la chaleur spécifique et sur la chaleur de compression d'un corps; mais, pour les suivre dans cet ordre de recherches, il nous faudrait étudier les déformations des corps aimantés; nous réservons pour un autre Mémoire l'examen des problèmes où figurent ces déformations, nous limitant dans celui-ci aux questions où les corps aimantés peuvent être regardés comme rigides.

(¹) STEFAN, *Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, t. LXIV, II^e Partie, p. 219 (1871).

(²) WASZMUTH, *Sitzungsberichte der Wiener Academie*, t. LXXXV, p. 297 (1882); t. LXXXVI, p. 539 (1882); t. LXXXVII, p. 82 (1883). — Voir aussi G. WIEDEMANN, *Die Lehre der Elektricität*, t. III, p. 782.

CHAPITRE VII.

PHÉNOMÈNES ÉLECTRIQUES AU SEIN D'UN SYSTÈME QUI RENFERME DES AIMANTS.

§ I. — Potentiel thermodynamique d'un système qui renferme des corps électrisés et des aimants.

1. Jusqu'ici, nous avons supposé que les aimants étudiés par nous ne portaient aucune charge électrique; nous allons nous départir maintenant de cette restriction, de manière à pouvoir étudier quelques questions intéressantes qui se rattachent aux lois de la distribution électrique sur les corps aimantés. En même temps, nous préparerons ainsi la voie à l'étude de l'Électromagnétisme, qui fera l'objet d'un autre Mémoire.

Le premier problème que nous avons à résoudre est celui-ci : former l'expression du potentiel thermodynamique interne d'un système qui renferme des aimants et des corps électrisés sur lesquels les charges électriques sont immobiles.

La forme du potentiel thermodynamique interne d'un système à l'état neutre nous étant connue par le Chapitre I, nous pouvons écrire, en conservant les notations employées dans les Chapitres précédents, que l'on a en général, pour un système électrisé,

$$(1) \quad \mathcal{F} = E(v - TS) + \mathfrak{F} + \int \mathcal{F}(\mathfrak{R}) dv + \mathcal{F}',$$

\mathcal{F}' étant une quantité qui devient égale à 0 si toutes les charges électriques du système deviennent égales à 0, et toutes les autres quantités ayant la valeur qu'elles doivent avoir dans un système obtenu en amenant à l'état neutre le système donné, sans changer la forme, le volume, la position, l'aimantation, l'état physique ou chimique d'aucun des éléments du système donné.

Pour déterminer \mathcal{F}' , suivons la voie que nous avons suivie ailleurs⁽¹⁾ pour parvenir à l'expression du potentiel thermodynamique d'un système électrisé, mais non aimanté.

(1) *Le potentiel thermodynamique et ses applications.* III^e Partie.

Commençons par supposer que l'on déplace les uns par rapport aux autres les divers corps qui constituent le système, en laissant invariables leur volume, leur forme, leur état d'aimantation ou d'électrisation, leur état physique et chimique. Dans ces conditions, les actions mécaniques intérieures au système effectuent un certain travail $d\varepsilon$; et, comme la modification considérée constitue ce que nous avons appelé au § I du Chapitre I *un déplacement sans changement d'état*, on a, d'après le principe énoncé au même endroit,

$$d\tilde{\mathfrak{F}} = -d\varepsilon.$$

Or le travail $d\varepsilon$ se compose : 1^o du travail des actions mécaniques qui s'exercent, en vertu des lois de Coulomb, entre les divers éléments électrisés du système; 2^o du travail des actions mécaniques qui s'exercent, en vertu des lois de Coulomb et de Gauss, entre les divers éléments magnétiques du système.

Si l'on désigne par Y le potentiel électrostatique, le premier travail a pour valeur $-dY$, le second a pour valeur $-d\tilde{\mathfrak{F}}$; on a donc

$$d\tilde{\mathfrak{F}} = d(Y + \tilde{\mathfrak{F}}).$$

D'autre part, l'égalité (1) donne

$$d\tilde{\mathfrak{F}} = d\tilde{\mathfrak{F}} + d\tilde{\mathfrak{F}}'.$$

Par conséquent, dans tout déplacement sans changement d'état, on a

$$d\tilde{\mathfrak{F}}' = dY,$$

et l'on peut écrire

$$(2) \quad \tilde{\mathfrak{F}}' = Y + \tilde{\mathfrak{F}}'',$$

$\tilde{\mathfrak{F}}''$ demeurant invariable lorsque les diverses parties du système se déplacent les unes par rapport aux autres, en gardant leur volume, leur forme, leur aimantation et leur électrisation, leur état physique ou chimique; de plus, $\tilde{\mathfrak{F}}''$ est égal à 0 lorsque le système est à l'état neutre.

Supposons qu'une charge électrique dq passe dans le système d'un point M à un autre point M' , le conducteur étant isotrope en M et en M' , la nature de ce conducteur étant la même en chacun des deux points, et l'aimantation ayant la même intensité \mathfrak{M} en chacun de ces deux points.

A cette transformation, nous pouvons substituer la suivante, qui conduit le système du même état initial au même état final et qui, par conséquent, fait subir à $\tilde{\mathfrak{F}}''$ la même variation :

Autour du point M , nous découpons une petite sphère portant la charge dq ; autour du point M' , nous découpons une petite sphère identique, mais à l'état neutre; puis nous déplaçons les diverses parties du système les unes par rapport aux autres sans rien changer à leur état, à leur électrisation, à leur aimantation, de telle sorte qu'à la fin de ce déplacement les deux petites sphères se soient substituées l'une à l'autre après avoir été tellement orientées que l'aimantation au point M et au point M' ait gardé la même direction qu'auparavant, et que toutes les autres parties du système aient repris leur position primitive.

D'après ce que nous avons vu il y a un instant, \mathcal{J}'' ne varie pas dans cette nouvelle modification; il ne varie donc pas non plus dans la première. Ainsi \mathcal{J}'' ne varie pas par le passage d'une charge électrique d'un point à un autre, si le conducteur en ces deux points est isotrope, a la même nature et est aimanté avec la même intensité.

Supposons maintenant qu'une charge électrique dq passe d'un point M en un autre point M' . Le conducteur étant isotrope en ces deux points, mais ayant en ces deux points une nature différente et une intensité d'aimantation différente, \mathcal{J}'' éprouve une variation Ψdq . Quelles sont les propriétés de la fonction Ψ ?

Du point M , faisons partir un long fil MN ayant partout la même nature et la même intensité d'aimantation qu'au point M ; de même, du point M' , faisons partir un long fil $M'N'$ ayant partout la même nature et la même intensité d'aimantation qu'au point N' . Réunissons les extrémités N et N' , qui sont à très grande distance du système. Pour faire passer la charge dq du point M au point M' , nous pouvons lui faire suivre le trajet $MNN'M'$; \mathcal{J}'' subira toujours la même variation Ψdq . Or, comme \mathcal{J}'' ne varie ni durant le trajet MN , ni durant le trajet $N'M'$, Ψdq est la variation que subit \mathcal{J}'' lorsque la charge dq passe du point M au point M' .

Dès lors, il est facile de voir que Ψ dépend uniquement des intensités d'aimantation en M et M' et de la nature des conducteurs en ces deux points, mais nullement des circonstances présentées par les conducteurs interposés. Il est facile de voir en outre que, si l'on a trois points M , M' , M'' en lesquels l'aimantation a des valeurs différentes et les corps électrisés des constitutions différentes, on aura

$$\Psi_{M''}^{M''} dq = \Psi_M^M dq + \Psi_{M'}^{M'} dq,$$

$\Psi_A^B dq$ désignant, d'une manière générale, la variation que subit \mathcal{J}'' lorsque la charge dq passe du point A au point B.

De tout cela il résulte qu'il existe une fonction $f(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)$ de l'intensité d'aimantation \mathfrak{M} en un point et des coefficients α, β, \dots qui définissent la nature du corps en ce point, telle que l'on ait

$$\Psi_A^B = f(\mathfrak{M}', \alpha', \beta', \dots) - f(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots),$$

et, par conséquent, en désignant par ρ la densité électrique en un point,

$$(3) \quad \mathcal{J}''' = \int \rho f(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) d\varphi + \mathcal{J}'',$$

la fonction \mathcal{J}''' demeurant invariable lorsque les charges du système et les corps qui le composent se déplacent sans changement d'état physique ou chimique de ses diverses parties, ni d'aimantation de ses diverses substances magnétiques.

Pour déterminer \mathcal{J}''' , nous envisagerons une modification du système dans laquelle certaines de ses parties subissent des changements d'état physique ou chimique ou d'aimantation, et nous chercherons la variation que \mathcal{J}''' subit dans une telle modification. Dans cette modification, \mathcal{J}''' subit la même variation que dans une autre modification isothermique conduisant le système du même état initial au même état final.

Voici la modification que nous adopterons :

1° Nous commencerons par faire passer toutes les charges électriques sur l'un des corps qui n'éprouvent aucune modification dans cette première transformation; \mathcal{J}''' ne variera pas.

2° Nous éloignerons le corps ainsi électrisé à une distance infinie du reste du système ramené à l'état neutre; dans cette deuxième transformation, \mathcal{J}''' ne variera pas.

3° Nous supposerons que le système subisse alors le changement d'état physique et chimique et d'aimantation que nous avons en vue; dans cette modification, la variation subie par \mathcal{J}''' sera évidemment la somme des variations subies, durant la même modification, par les fonctions \mathcal{J}'' de deux systèmes partiels, l'un formé par la partie du système total que l'on a emmenée à l'infini, l'autre formé par la partie du système total qui est demeurée à distance finie. Or le premier système partiel ne subissant aucune variation, sa fonction \mathcal{J}'' demeure constante; quant au second système par-

tiel, il est à l'état neutre; sa fonction \mathcal{F}'' est donc et demeure égale à 0. Ainsi, dans la troisième phase de notre modification, la fonction \mathcal{F}'' relative au système total ne subit aucune variation.

4° Nous ramenons de l'infini le corps qui y avait été emmené, nous restituons à chacun des conducteurs les charges électriques qu'il doit porter à la fin de la modification; \mathcal{F}'' ne subit encore aucune variation.

De tout cela, nous devons conclure que \mathcal{F}'' ne varie dans aucune modification, ce qu'exprime l'égalité

$$(4) \quad \mathcal{F}'' = \text{const.}$$

Les égalités (1), (2), (3), (4) déterminent \mathcal{F} . Si nous posons

$$f(0, \alpha, \beta, \dots) = \Theta(\alpha, \beta, \dots)$$

et

$$f(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) = \Theta(\alpha, \beta, \dots) + G(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots),$$

nous aurons

$$(5) \quad \begin{aligned} \mathcal{F} &= \mathbf{E}(\mathbf{U} - \mathbf{T}\mathbf{S}) + \mathcal{F} + \mathbf{Y} \\ &+ \int [\mathcal{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) + \rho G(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) + \rho \Theta(\alpha, \beta, \dots)] d\mathfrak{v} + \text{const.} \end{aligned}$$

Telle est l'expression du potentiel thermodynamique interne d'un système électrisé et aimanté.

Il faut bien remarquer que le raisonnement qui nous a conduit à ce résultat suppose que les actions internes d'un système électrisé et aimanté se réduisent aux actions mutuelles des particules magnétiques et aux actions mutuelles des particules électrisées données par la loi de Coulomb. S'il existait une action mutuelle des particules aimantées et des particules électrisées, le potentiel thermodynamique contiendrait un nouveau terme qui serait le potentiel de ces actions.

§ II. — Équations de l'équilibre électrique et de l'équilibre magnétique.

2. Cette formule étant obtenue, proposons-nous de déterminer les lois de l'équilibre électrique et de l'équilibre magnétique sur un des corps du système supposé conducteur et dénué de force coercitive.

Pour déterminer les conditions de l'équilibre électrique, nous allons supposer qu'une charge dq passe d'un point M du système en un autre point M' ,

et nous égalerons à 0 la variation subie par le potentiel thermodynamique interne du système. Soient

V la fonction potentielle électrique au point M ;

V' la fonction potentielle électrique au point M' ;

ε le coefficient positif et constant qui figure dans la formule

$$F = \varepsilon \frac{qq'}{r^2},$$

par laquelle on exprime l'action mutuelle de deux charges électriques à la distance r ;

\mathfrak{M} l'intensité d'aimantation au point M ;

\mathfrak{M}' l'intensité d'aimantation au point M' .

La condition dont il s'agit sera la suivante :

$$(6) \quad \varepsilon V + \Theta(\alpha, \beta, \dots) + G(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) = \varepsilon V' + \Theta(\alpha', \beta', \dots) + G(\mathfrak{M}', \alpha', \beta', \dots).$$

Si l'aimantation était nulle en ces deux points, on aurait

$$\varepsilon V + \Theta(\alpha, \beta, \dots) = \varepsilon V' + \Theta(\alpha', \beta', \dots).$$

La différence de niveau potentiel entre deux points d'un conducteur électrisé et aimanté varie avec l'intensité de l'aimantation en ces deux points.

Ce théorème n'a rien qui nous doive surprendre. L'intensité d'aimantation en chaque point étant un des paramètres qui définissent l'état du système, il est simplement un cas particulier de celui-ci : la différence du niveau potentiel entre deux corps dépend de l'état de ces deux corps.

Remarquons que la variation dont il s'agit ici suppose qu'en faisant varier l'aimantation, on maintienne invariables la densité, l'état physique et chimique du conducteur. Si l'on fait varier l'état d'aimantation d'un conducteur en maintenant constante la pression qu'il supporte, ses dimensions varient, ainsi que l'a montré M. Joule. Il en résulte en ses divers points des changements de densité et, partant, entre ces divers points, des changements de différence de niveau potentiel qui ne sont dues qu'indirectement au changement d'aimantation et qui ne sont point considérés ici.

Supposons que le conducteur au point M' soit formé par une substance

non magnétique. On a alors

$$G(\mathfrak{M}', \alpha', \beta', \dots) = 0.$$

Soit D la différence de niveau potentiel entre le point M et la substance non magnétique qui se trouve en M' . L'égalité (6) peut encore s'écrire

$$(7) \quad \varepsilon D = \Theta'(\alpha', \beta', \dots) - \Theta(\alpha, \beta, \dots) - G(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots).$$

Pour déterminer les conditions de l'équilibre magnétique, faisons varier de $\delta \mathfrak{A}$, $\delta \mathfrak{B}$, $\delta \mathfrak{C}$ les composantes de l'aimantation à l'intérieur d'un élément de volume du système; soient ψ la fonction potentielle magnétique et ρ la densité électrique en ce point. Le potentiel thermodynamique interne subira alors la variation suivante

$$(8) \quad \delta \tilde{J} = h \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \delta \mathfrak{A} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \delta \mathfrak{B} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \delta \mathfrak{C} \right) dx dy dz + \frac{1}{\mathfrak{M}} \left[\frac{\partial \tilde{J}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}} + \rho \frac{\partial G(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}} \right] (\mathfrak{A} \delta \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \delta \mathfrak{B} + \mathfrak{C} \delta \mathfrak{C}) dx dy dz.$$

En égalant à 0 cette variation, on obtiendra les conditions cherchées. Si l'on pose

$$(8) \quad F(\mathfrak{M}, \rho, \alpha, \beta, \dots) = \frac{\mathfrak{M}}{\frac{\partial \tilde{J}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}} + \rho \frac{\partial G(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \mathfrak{M}}},$$

ces conditions seront

$$(9) \quad \begin{cases} \mathfrak{A} = -hF(\mathfrak{M}, \rho, \alpha, \beta, \dots) \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \mathfrak{B} = -hF(\mathfrak{M}, \rho, \alpha, \beta, \dots) \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \mathfrak{C} = -hF(\mathfrak{M}, \rho, \alpha, \beta, \dots) \frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{cases}$$

Ces égalités montrent que *la fonction magnétisante en un point d'une substance dénuée de force coercitive dépend de la densité électrique en ce point*, théorème que nous pouvions, comme le précédent, prévoir *a priori*.

La comparaison des égalités (7) et (8) donne

$$(9) \quad \varepsilon \frac{\partial D}{\partial \mathfrak{M}} = -h \mathfrak{M} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{F(\mathfrak{M}, \rho, \alpha, \beta, \dots)} \right],$$

relation remarquable entre la variation de différence de niveau potentiel électrique par l'aimantation et la variation de la force magnétisante par l'électrisation.

Cette relation peut s'énoncer ainsi :

Lorsque la densité électrique varie en un point d'un corps aimanté, la fonction magnétisante subit des variations; ces variations sont de même signe que celles que subit, par l'effet d'un accroissement de l'intensité d'aimantation, la différence de niveau potentiel entre ce corps aimanté et un corps non aimanté quelconque.

Le quotient de cette dernière variation par l'intensité d'aimantation est proportionnel à la variation subie par l'inverse de la fonction magnétisante.

Les considérations précédentes pourraient servir de base à une étude mathématique complète de l'équilibre simultané de l'électricité et du magnétisme. Mais la longueur et la complication de cette étude n'auraient même pas pour excuse l'importance du sujet, puisque jusqu'ici il n'a donné lieu à aucune recherche expérimentale. Aussi, laissant de côté cette étude, nous nous bornerons à l'examen de quelques questions ayant un intérêt physique.

§ III. — Influence de l'aimantation sur la force électromotrice d'une pile.

3. Considérons, en premier lieu, un morceau de fer doux placé dans un champ magnétique et plongé dans une solution d'un sel de fer, de sulfate de fer par exemple, dont nous négligerons les propriétés magnétiques.

Considérons à la surface de ce morceau de fer en contact avec la dissolution deux points M et M' . Supposons qu'une quantité d'électricité dq passe du point M au point M' au travers de la dissolution. Ce déplacement entraîne la dissolution au point M d'un poids de fer λdq et le dépôt au point M' d'un poids de fer égal, λ étant une constante positive proportionnelle au poids moléculaire du métal.

Pour que l'équilibre électrique ait lieu sur le morceau de fer doux considéré, il faut en général que la modification virtuelle précédente, qui n'entraîne aucun travail externe si la seule force à laquelle le système est soumis est une pression normale et uniforme, n'entraîne aucune variation du potentiel thermodynamique interne du système.

Or on a, d'après l'égalité (5),

$$d\tilde{\mathcal{Y}} = \mathbf{E} d(\mathbf{U} - \mathbf{T}\mathbf{S}) + d\mathbf{Y} + d\tilde{\mathcal{Y}} \\ + d \int [\tilde{\mathcal{F}}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) + \rho \mathcal{G}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) + \rho \Theta(\alpha, \beta, \dots)] dv.$$

Calculons les divers termes du second membre de cette égalité.

La dissolution en un point d'un certain poids de fer et la précipitation en un autre point d'un même poids de fer, que nous supposerons précipité dans un état physique et chimique identique, ne peut faire varier le terme $(\mathbf{U} - \mathbf{T}\mathbf{S})$.

La variation du terme \mathbf{Y} est donnée par la formule

$$d\mathbf{Y} = \varepsilon(\mathbf{V}' - \mathbf{V}) dq,$$

\mathbf{V} étant la fonction potentielle électrique au point \mathbf{M} et \mathbf{V}' la fonction potentielle électrique au point \mathbf{M}' .

La variation $d\tilde{\mathcal{Y}}$ du potentiel magnétique est la somme de deux autres variations, l'une due simplement à la suppression d'une particule de fer λdq au point \mathbf{M} , l'autre de l'addition d'une particule de fer égale au point \mathbf{M}' .

Étudions d'abord la première variation. La particule de fer de poids λdq enlevée au point \mathbf{M} occupe un volume $\frac{\lambda dq}{\delta}$, δ étant le poids spécifique du fer. Si cette suppression ne faisait point varier l'aimantation du morceau de fer, elle ferait diminuer $\tilde{\mathcal{Y}}$ de

$$-h \left(\mathfrak{A} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \mathfrak{B} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} + \mathfrak{C} \frac{\partial \psi}{\partial z_i} \right) \frac{\lambda dq}{\delta},$$

\mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} étant les composantes de l'aimantation en un point x_i, y_i, z_i intérieur au morceau de fer doux et infiniment voisin du point \mathfrak{M} , et ψ la fonction potentielle magnétique au même point. Mais, de plus, cette suppression fait varier la forme du morceau de fer doux, par suite l'aimantation en chaque point. Si \mathfrak{A}_2 , \mathfrak{B}_2 , \mathfrak{C}_2 , composantes de l'aimantation au point x_2, y_2, z_2 du fer doux, varient ainsi de $d\mathfrak{A}_2$, $d\mathfrak{B}_2$, $d\mathfrak{C}_2$, $\tilde{\mathcal{Y}}$ varie de

$$h \int \left(d\mathfrak{A}_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + d\mathfrak{B}_2 \frac{\partial \psi}{\partial y_2} + d\mathfrak{C}_2 \frac{\partial \psi}{\partial z_2} \right) dv_2,$$

l'intégration s'étendant au volume entier du fer doux.

Si le fer qui se précipite au point \mathbf{M}' est parfaitement doux, il prendra une aimantation ayant pour composantes \mathfrak{A}' , \mathfrak{B}' , \mathfrak{C}' , et la deuxième partie

de la variation de \mathfrak{F} aura pour valeur

$$h \left(\mathfrak{A}' \frac{\partial \psi'}{\partial x'_i} + \mathfrak{B}' \frac{\partial \psi'}{\partial y'_i} + \mathfrak{C}' \frac{\partial \psi'}{\partial z'_i} \right) \frac{\lambda dq}{\delta} + h \int \left(d' \mathfrak{A}_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + d' \mathfrak{B}_2 \frac{\partial \psi}{\partial y_2} + d' \mathfrak{C}_2 \frac{\partial \psi}{\partial z_2} \right) dv_2.$$

Enfin le terme

$$d \int [\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) + \rho \mathcal{G}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) + \rho \Theta(\alpha, \beta, \dots)] dv$$

aura pour valeur

$$\begin{aligned} & [\mathfrak{F}(\mathfrak{M}', \alpha, \beta, \dots) - \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)] \frac{\lambda dq}{\delta} \\ & + \int \frac{1}{\mathfrak{M}_2} \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial \mathfrak{M}_2} (\mathfrak{A}_2 d \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2 d \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{C}_2 d \mathfrak{C}_2) dv_2 \\ & + \int \frac{1}{\mathfrak{M}_2} \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial \mathfrak{M}_2} (\mathfrak{A}_2 d' \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2 d' \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{C}_2 d' \mathfrak{C}_2) dv_2 \\ & + [\mathcal{G}(\mathfrak{M}', \alpha, \beta, \dots) - \mathcal{G}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)] dq \\ & + \int \frac{\rho}{\mathfrak{M}_2} \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial \mathfrak{M}_2} (\mathfrak{A}_2 d \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2 d \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{C}_2 d \mathfrak{C}_2) dv_2 \\ & + \int \frac{\rho}{\mathfrak{M}_2} \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial \mathfrak{M}_2} (\mathfrak{A}_2 d' \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2 d' \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{C}_2 d' \mathfrak{C}_2) dv_2. \end{aligned}$$

On a donc, en résumé,

$$\begin{aligned} d\mathfrak{F} = & \left[h \left(\mathfrak{A}' \frac{\partial \psi'}{\partial x'} + \mathfrak{B}' \frac{\partial \psi'}{\partial y'} + \mathfrak{C}' \frac{\partial \psi'}{\partial z'} \right) + \mathfrak{F}(\mathfrak{M}', \alpha, \beta, \dots) \right. \\ & \left. - h \left(\mathfrak{A} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mathfrak{B} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \mathfrak{C} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) \right] \frac{\lambda dq}{\delta} \\ & + [\varepsilon V' + \mathcal{G}(\mathfrak{M}', \alpha, \beta, \dots) - \varepsilon V - \mathcal{G}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)] dq \\ & + \int \left\{ \left[h \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \left(\frac{1}{\mathfrak{M}_2} \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial \mathfrak{M}_2} + \frac{\rho}{\mathfrak{M}_2} \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial \mathfrak{M}_2} \right) \mathfrak{A}_2 \right] (d \mathfrak{A}_2 + d' \mathfrak{A}_2) \right. \\ & \left. + \left[h \frac{\partial \psi}{\partial y_2} + \left(\frac{1}{\mathfrak{M}_2} \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial \mathfrak{M}_2} + \frac{\rho}{\mathfrak{M}_2} \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial \mathfrak{M}_2} \right) \mathfrak{B}_2 \right] (d \mathfrak{B}_2 + d' \mathfrak{B}_2) \right. \\ & \left. + \left[h \frac{\partial \psi}{\partial z_2} + \left(\frac{1}{\mathfrak{M}_2} \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial \mathfrak{M}_2} + \frac{\rho}{\mathfrak{M}_2} \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial \mathfrak{M}_2} \right) \mathfrak{C}_2 \right] (d \mathfrak{C}_2 + d' \mathfrak{C}_2) \right\} dv_2. \end{aligned}$$

Mais, en vertu des égalités (8) et (9), le dernier terme se trouve être égal

à 0. Les mêmes égalités donnent

$$h \left(\mathfrak{A}' \frac{\partial \psi'}{\partial x'} + \mathfrak{B}' \frac{\partial \psi'}{\partial y'} + \mathfrak{C}' \frac{\partial \psi'}{\partial z'} \right) = - \frac{\mathfrak{M}'^2}{F(\mathfrak{M}', \rho')},$$

$$h \left(\mathfrak{A} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mathfrak{B} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \mathfrak{C} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = - \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, \rho)}.$$

En égalant à 0 l'expression précédente de $d\mathfrak{F}$, on trouve

$$(11) \quad \varepsilon V + G(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) + \frac{\lambda}{\delta} \left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) - \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, \rho, \alpha, \beta, \dots)} \right]$$

$$= \varepsilon V' + G(\mathfrak{M}', \alpha, \beta, \dots) + \frac{\lambda}{\delta} \left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}', \alpha, \beta, \dots) - \frac{\mathfrak{M}'^2}{F(\mathfrak{M}', \alpha, \beta, \dots)} \right];$$

telle est la condition d'équilibre que l'on obtient en envisageant une modification virtuelle dans laquelle l'électricité passe du point M au point M' en traversant l'électrolyte.

Si l'on suppose, au contraire, que l'électricité passe du point M au point M' en traversant le fer doux, on trouve la condition d'équilibre

$$(12) \quad \varepsilon V + G(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) = \varepsilon V' + G(\mathfrak{M}', \alpha, \beta, \dots).$$

Ces conditions (11) et (12) ne sont pas compatibles en général, car elles exigent que l'on ait

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) - \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, \rho, \alpha, \beta, \dots)} = \mathfrak{F}(\mathfrak{M}', \alpha, \beta, \dots) - \frac{\mathfrak{M}'^2}{F(\mathfrak{M}', \rho, \alpha, \beta, \dots)},$$

ce qui n'aura point lieu ordinairement, à moins que l'on n'ait

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}',$$

$$\rho = \rho'.$$

Ainsi, *si une masse de fer doux, placée dans un champ magnétique et plongée dans un électrolyte, présente la même aimantation et la même densité électrique en tous les points de sa surface, l'équilibre électrique sera possible sur cette masse; si ces conditions ne sont pas réalisées, l'équilibre électrique sera en général impossible: des courants particulières s'établiront d'un point à l'autre de la masse.*

Supposons dorénavant la densité électrique assez faible pour pouvoir négliger le terme $\rho G(\mathfrak{M})$ et demandons-nous si le courant particulaire ira, au sein de l'électrolyte, du point M au point M' ou du point M' au point M.

On sait qu'il ira, au travers de l'électrolyte, du point M' au point M si, dans ces conditions, le travail non compensé effectué sur son parcours tout entier est positif. Or ce travail non compensé a pour valeur

$$\left\{ \left[\mathcal{F}(\mathfrak{M}) - \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M})} \right] - \left[\mathcal{F}(\mathfrak{M}') - \frac{\mathfrak{M}'^2}{F(\mathfrak{M}')} \right] \right\} \frac{\lambda dq}{\delta}.$$

Négligeons les variations de la fonction magnétisante avec l'aimantation et posons simplement

$$F(\mathfrak{M}) = F.$$

La quantité précédente deviendra

$$\frac{\mathfrak{M}'^2 - \mathfrak{M}^2}{2F}.$$

On voit alors que le courant ira, au travers de l'électrolyte, des points les moins aimantés aux points les plus aimantés; en d'autres termes, les régions les moins aimantées seront électronégatives par rapport aux régions les plus fortement aimantées.

Des considérations semblables s'appliquent évidemment au cas où les points M et M' appartiendraient à deux morceaux de fer doux distincts. Ainsi, *si dans un sel de fer on plonge deux morceaux de fer doux inégalement aimantés par un champ magnétique, le plus fortement aimanté sera électropositif par rapport au plus faiblement aimanté. L'inverse aura lieu pour un corps diamagnétique.*

Ce phénomène a été constaté, en premier lieu, par M. Gross (¹). Ils ont été vérifiés, plus récemment, par M. Rowland (²).

Il en résulte évidemment que la force électromotrice d'une pile qui renferme une électrode en fer doux ne doit pas être la même suivant qu'on place cette pile à l'intérieur d'un champ magnétique ou en dehors de ce champ. M. Paul Janet (³) a, le premier, déduit cette conséquence d'idées théoriques.

(¹) Th. Gross, *Ueber eine neue Entstehungsweise galvanischer Ströme durch Magnetismus* (*Verhandl. d. phys. Ges. in Berlin*, p. 33; 1885. *Beiblätter*, t. IX, p. 540; 1885, et t. X, p. 425; 1886. *Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, 2^e série, t. XCII, p. 1378; 1886).

(²) Oliver J. Lodge, *Sketch of the principal electrical Papers read before Section A during the late Meeting of the British Association at Manchester 1887* (*Electrical Review*, 23 septembre 1877).

(³) P. JANET, *De l'influence du magnétisme sur les phénomènes chimiques* (*Journal de Physique*, 2^e série, t. VI, p. 286; 1887).

Les principes précédemment posés permettent de traiter très complètement la question soulevée par les recherches de M. Paul Janet. Supposons que le fer doux forme l'électrode négative d'une pile dont l'électrode positive est formée d'un métal non magnétique, de cuivre par exemple; nous supposerons la pile placée dans un champ magnétique et la forme de ce champ et de l'électrode de fer choisie de telle sorte que l'aimantation de l'électrode de fer soit uniforme; nous supposerons, en outre, la quantité $\rho g(\mathfrak{M})$ négligeable; de cette façon, nous serons assurés qu'il n'y a pas de courants particulaires d'un point à l'autre de la masse de fer doux.

Cela étant, supposons qu'une charge électrique dq passe du fer au cuivre au travers de la dissolution: un poids λdq de fer est dissous; un poids équivalent de cuivre est précipité. Dans ces conditions, le potentiel thermodynamique total

$$\Omega = \tilde{\mathcal{F}} + \mathbf{W}$$

du système subit une variation qui, pour l'équilibre, doit être égale à 0. Si l'on distingue par des accents les quantités qui se rapportent au cuivre, on obtient ainsi l'égalité

$$0 = (\varepsilon V' + \Theta' - \varepsilon V - \Theta) dq + \mathbf{E} d(\mathbf{U} - \mathbf{T} \mathbf{S}) + d\mathbf{W} - \frac{\lambda}{\delta} \left[\tilde{\mathcal{F}}(\mathfrak{M}) - \mathfrak{M} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}(\mathfrak{M})}{\partial \mathfrak{M}} \right] dq.$$

Si la masse de fer doux et la masse de cuivre étaient en contact par un conducteur et non par un électrolyte, la condition d'équilibre serait

$$\varepsilon V'_1 + \Theta' - \varepsilon V_1 - \Theta = 0.$$

La quantité

$$\mathcal{E} = \varepsilon (V' - V) - \varepsilon (V'_1 - V_1)$$

est, d'après la théorie de la pile constituée par les travaux de MM. Gibbs et H. von Helmholtz, la force électromotrice de la pile considérée. On a alors

$$\mathcal{E} dq = -\mathbf{E} d(\mathbf{U} - \mathbf{T} \mathbf{S}) - d\mathbf{W} + \frac{\lambda}{\delta} \left[\tilde{\mathcal{F}}(\mathfrak{M}) - \mathfrak{M} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}(\mathfrak{M})}{\partial \mathfrak{M}} \right] dq.$$

Supposons cette pile soustraite à l'action du champ magnétique, elle aura pour nouvelle force électromotrice la quantité \mathcal{E}_1 , donnée par

$$\mathcal{E}_1 = -\mathbf{E} d(\mathbf{U} - \mathbf{T} \mathbf{S}) - d\mathbf{W}.$$

On a donc

$$(13) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \frac{\lambda}{\delta} \left[\tilde{\mathcal{F}}(\mathfrak{M}) - \mathfrak{M} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}(\mathfrak{M})}{\partial \mathfrak{M}} \right].$$

Si l'on place dans un champ magnétique une pile renfermant pour électrode négative une masse de fer doux susceptible de s'aimanter uniformément, la force électromotrice de cette pile subit une variation qui dépend exclusivement de la nature du fer doux et de l'intensité de son aimantation; l'effet change de sens sans changer de grandeur si l'électrode en fer doux est prise pour électrode négative.

Si l'on désigne par μ une certaine quantité comprise entre 0 et ∞ , l'égalité précédente peut s'écrire

$$(14) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_1 - \frac{\lambda}{\delta} \left[\frac{\partial \mathcal{E}^2}{\mathbf{F}(\partial \mathcal{E})} - \frac{\partial \mathcal{E}^2}{2 \mathbf{F}(\mu)} \right].$$

On voit alors que, *pour toutes les substances magnétiques connues, l'aimantation diminue la force électromotrice de la pile si la substance magnétique forme l'électrode négative et l'augmente si la substance magnétique forme l'électrode positive. L'inverse a lieu pour les substances diamagnétiques.*

Si l'on néglige les variations de la fonction magnétisante avec l'aimantation, l'égalité précédente devient simplement

$$(15) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_1 - \frac{\lambda}{2\delta} \frac{\partial \mathcal{E}^2}{\mathbf{F}}.$$

La variation subie par la force électromotrice est proportionnelle au carré de l'intensité d'aimantation de l'électrode et en raison inverse de son coefficient d'aimantation.

Ces quelques propositions contribueront, nous l'espérons, à jeter quelque jour sur cette question, à peine ébauchée encore au point de vue expérimental, de l'influence de l'aimantation sur les phénomènes chimiques, et à compléter les vues théoriques émises par M. P. Janet.



CHAPITRE VIII.

AIMANTATION DES CRISTAUX.

§ I. — Potentiel thermodynamique d'un système qui renferme des cristaux aimantés.

1. Dans la détermination du potentiel thermodynamique interne d'un système qui renferme des aimants, nous avons introduit la restriction que tous les corps aimantés du système étaient des corps isotropes. Nous allons maintenant nous affranchir de cette restriction.

Nous pouvons, comme au § III du Chapitre I, écrire

$$\mathcal{F} = \mathfrak{F} + \mathcal{F}',$$

et, comme au lieu que nous venons de citer, nous trouverons que si les composantes de l'aimantation au sein d'un volume $d\nu$ du système subissent des variations $\delta_{\mathfrak{A}}, \delta_{\mathfrak{B}}, \delta_{\mathfrak{C}}$, l'élément demeurant fixe, \mathcal{F}' subit une variation

$$\delta\mathcal{F}' = A \delta_{\mathfrak{A}} + B \delta_{\mathfrak{B}} + C \delta_{\mathfrak{C}},$$

A, B, C étant trois quantités qui peuvent dépendre :

- 1° De $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$;
- 2° Du volume $d\nu$ de l'élément;
- 3° De la forme de la surface qui le limite;
- 4° De l'orientation de l'aimantation à l'intérieur de la substance, orientation déterminée par les cosinus des angles que la direction de l'aimantation fait avec trois directions liées à l'élément, par exemple ses trois axes d'élasticité;
- 5° Des coefficients α, β, \dots qui définissent l'état de la substance en un point de l'élément.

Soient $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ les composantes de l'aimantation suivant les axes d'élasticité de l'élément. Les cosinus des angles que la direction de l'aimantation fait avec ces axes auront pour valeur respective

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}, \quad \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}, \quad \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}.$$

Dès lors, en raisonnant comme au § III du Chapitre I, nous verrons sans peine que les quantités A , B , C sont :

- 1° Indépendantes de la forme de la surface de l'élément;
- 2° Proportionnelles à son volume dv ;
- 3° Fonctions de α , β , γ , \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , α , β , ...

Soient θ , φ , ψ les trois angles d'Euler qui fixent la position des axes d'élasticité de l'élément par rapport aux axes des coordonnées. α , β , γ pourront s'exprimer en fonction de \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} et de θ , φ , ψ . Dans la transformation considérée, θ , φ , ψ demeurent constants, en sorte que $\partial\alpha$, $\partial\beta$, $\partial\gamma$ s'expriment en fonction linéaire de $\partial\mathfrak{A}$, $\partial\mathfrak{B}$, $\partial\mathfrak{C}$, et l'on peut écrire

$$\partial\tilde{\mathcal{J}}' = (A' \partial\mathfrak{A} + B' \partial\mathfrak{B} + C' \partial\mathfrak{C}) dv,$$

A' , B' , C' étant trois fonctions de \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , θ , φ , ψ , α , β , ..., ...

Dans la modification qui donne cette expression de $\partial\tilde{\mathcal{J}}'$, θ , φ , ψ demeurent constants. Supposons maintenant que, sans rien changer à l'aimantation ou à l'état de l'élément, on le fasse tourner sur lui-même; θ , φ , ψ varient seuls. Or, dans ce déplacement sans changement d'état, $\tilde{\mathcal{J}}'$ ne doit pas varier. $\tilde{\mathcal{J}}'$ est donc indépendant de θ , φ , ψ et l'on a

$$\tilde{\mathcal{J}}' = \int \mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha, \beta, \dots) dv + \tilde{\mathcal{J}}'',$$

$\tilde{\mathcal{J}}''$ ne variant pas lorsque l'état physique et chimique du système demeure invariable. $\tilde{\mathcal{J}}''$ se déterminera alors comme au Chapitre I et l'on aura, pour un système qui renferme des cristaux aimantés,

$$(1) \quad \tilde{\mathcal{J}} = E(U - TS) + \mathfrak{F} + \int \mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha, \beta, \dots) dv.$$

Pour un corps isotrope, la fonction $\mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha, \beta, \dots)$ se réduit à la fonction $\mathcal{J}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)$ que nous avons eue à considérer dans tous les Chapitres précédents.

A la fin du Chapitre II, nous avons vu que l'on avait [égalité (13)]

$$\mathcal{J}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots) = \frac{1}{2\Gamma(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)} \mathfrak{M}^2,$$

$\Gamma(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \dots)$ tendant vers une limite finie lorsque \mathfrak{M} tend vers 0. Généralisant ce résultat, nous admettrons que le rapport

$$\frac{\mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha, \beta, \dots)}{\mathfrak{M}^2}$$

tend vers une limite finie lorsque \mathfrak{M} tend vers 0, ce qui suppose que l'on ait

$$(2) \quad \mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = \varphi_{11}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \mathfrak{A}^2 + \varphi_{22}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \mathfrak{B}^2 + \varphi_{33}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \mathfrak{C}^2 \\ + 2\varphi_{23}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \mathfrak{B}\mathfrak{C} + 2\varphi_{31}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \mathfrak{C}\mathfrak{A} + 2\varphi_{12}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

les quantités φ_{pq} demeurant finies pour $\mathfrak{A} = 0, \mathfrak{B} = 0, \mathfrak{C} = 0$.

L'étude de cette forme nous amènera parfois à considérer la surface du second ordre

$$(3) \quad \varphi_{11}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) x^2 + \varphi_{22}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) y^2 + \varphi_{33}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) z^2 \\ + 2\varphi_{23}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) yz + 2\varphi_{31}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) zx + 2\varphi_{12}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) xy = 1,$$

surface variable avec la grandeur et l'orientation de l'intensité d'aimantation à laquelle nous donnerons le nom de *surface d'induction magnétique* du cristal.

§ II. — Équations de l'équilibre magnétique.

2. Supposons maintenant qu'à l'intérieur de l'élément $dx dy dz$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ varient de quantités arbitraires $\delta\mathfrak{A}, \delta\mathfrak{B}, \delta\mathfrak{C}$. Soient $O\xi, O\eta, O\zeta$ les directions des axes d'élasticité de l'élément $dx dy dz$. En égalant à 0 la variation subie par la fonction \mathcal{F} , nous trouverons

$$(4) \quad \begin{cases} h \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{A}} \mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha, \beta, \dots) = 0, \\ h \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{B}} \mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha, \beta, \dots) = 0, \\ h \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{C}} \mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha, \beta, \dots) = 0. \end{cases}$$

Ce sont les équations fondamentales de l'équilibre magnétique sur une substance cristalline.

L'égalité (2) permet de transformer ces équations; elle nous donne, en effet :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \zeta}{\partial \mathfrak{A}} = 2(\varphi_{11}\mathfrak{A} + \varphi_{12}\mathfrak{B} + \varphi_{13}\mathfrak{C}) \\ \quad + \left(\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \mathfrak{A}} \mathfrak{A}^2 + \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial \mathfrak{A}} \mathfrak{B}^2 + \frac{\partial \varphi_{33}}{\partial \mathfrak{A}} \mathfrak{C}^2 + 2 \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial \mathfrak{A}} \mathfrak{B}\mathfrak{C} + 2 \frac{\partial \varphi_{31}}{\partial \mathfrak{A}} \mathfrak{C}\mathfrak{A} + 2 \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial \mathfrak{A}} \mathfrak{A}\mathfrak{B} \right), \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \mathfrak{B}} = 2(\varphi_{21}\mathfrak{A} + \varphi_{22}\mathfrak{B} + \varphi_{23}\mathfrak{C}) \\ \quad + \left(\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \mathfrak{B}} \mathfrak{A}^2 + \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial \mathfrak{B}} \mathfrak{B}^2 + \frac{\partial \varphi_{33}}{\partial \mathfrak{B}} \mathfrak{C}^2 + 2 \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial \mathfrak{B}} \mathfrak{B}\mathfrak{C} + 2 \frac{\partial \varphi_{31}}{\partial \mathfrak{B}} \mathfrak{C}\mathfrak{A} + 2 \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial \mathfrak{B}} \mathfrak{A}\mathfrak{B} \right), \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \mathfrak{C}} = 2(\varphi_{31}\mathfrak{A} + \varphi_{32}\mathfrak{B} + \varphi_{33}\mathfrak{C}) \\ \quad + \left(\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \mathfrak{C}} \mathfrak{A}^2 + \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial \mathfrak{C}} \mathfrak{B}^2 + \frac{\partial \varphi_{33}}{\partial \mathfrak{C}} \mathfrak{C}^2 + 2 \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial \mathfrak{C}} \mathfrak{B}\mathfrak{C} + 2 \frac{\partial \varphi_{31}}{\partial \mathfrak{C}} \mathfrak{C}\mathfrak{A} + 2 \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial \mathfrak{C}} \mathfrak{A}\mathfrak{B} \right), \end{array} \right.$$

égalités dans lesquelles φ_{pq} et φ_{qp} ont la même signification que dans l'égalité (2). Moyennant ces égalités (5), les égalités (4) vont prendre la forme suivante :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} h \frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{A}} + \left(2\varphi_{11} + \mathfrak{A} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \mathfrak{A}} + \mathfrak{B} \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial \mathfrak{A}} + \mathfrak{C} \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial \mathfrak{A}} \right) \mathfrak{A} \\ \quad + \left(2\varphi_{12} + \mathfrak{A} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial \mathfrak{A}} + \mathfrak{B} \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial \mathfrak{A}} + \mathfrak{C} \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial \mathfrak{A}} \right) \mathfrak{B} \\ \quad + \left(2\varphi_{13} + \mathfrak{A} \frac{\partial \varphi_{31}}{\partial \mathfrak{A}} + \mathfrak{B} \frac{\partial \varphi_{32}}{\partial \mathfrak{A}} + \mathfrak{C} \frac{\partial \varphi_{33}}{\partial \mathfrak{A}} \right) \mathfrak{C} = 0, \\ h \frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{B}} + \left(2\varphi_{21} + \mathfrak{A} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \mathfrak{B}} + \mathfrak{B} \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial \mathfrak{B}} + \mathfrak{C} \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial \mathfrak{B}} \right) \mathfrak{A} \\ \quad + \left(2\varphi_{22} + \mathfrak{A} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial \mathfrak{B}} + \mathfrak{B} \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial \mathfrak{B}} + \mathfrak{C} \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial \mathfrak{B}} \right) \mathfrak{B} \\ \quad + \left(2\varphi_{23} + \mathfrak{A} \frac{\partial \varphi_{31}}{\partial \mathfrak{B}} + \mathfrak{B} \frac{\partial \varphi_{32}}{\partial \mathfrak{B}} + \mathfrak{C} \frac{\partial \varphi_{33}}{\partial \mathfrak{B}} \right) \mathfrak{C} = 0, \\ h \frac{\partial \psi}{\partial \mathfrak{C}} + \left(2\varphi_{31} + \mathfrak{A} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \mathfrak{C}} + \mathfrak{B} \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial \mathfrak{C}} + \mathfrak{C} \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial \mathfrak{C}} \right) \mathfrak{A} \\ \quad + \left(2\varphi_{32} + \mathfrak{A} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial \mathfrak{C}} + \mathfrak{B} \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial \mathfrak{C}} + \mathfrak{C} \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial \mathfrak{C}} \right) \mathfrak{B} \\ \quad + \left(2\varphi_{33} + \mathfrak{A} \frac{\partial \varphi_{31}}{\partial \mathfrak{C}} + \mathfrak{B} \frac{\partial \varphi_{32}}{\partial \mathfrak{C}} + \mathfrak{C} \frac{\partial \varphi_{33}}{\partial \mathfrak{C}} \right) \mathfrak{C} = 0. \end{array} \right.$$

Posons

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_{1q} = \left(2\varphi_{1q} + \mathfrak{A} \frac{\partial \varphi_{q1}}{\partial \mathfrak{A}} + \mathfrak{B} \frac{\partial \varphi_{q2}}{\partial \mathfrak{A}} + \mathfrak{C} \frac{\partial \varphi_{q3}}{\partial \mathfrak{A}} \right), \\ \psi_{2q} = \left(2\varphi_{2q} + \mathfrak{A} \frac{\partial \varphi_{q1}}{\partial \mathfrak{B}} + \mathfrak{B} \frac{\partial \varphi_{q2}}{\partial \mathfrak{B}} + \mathfrak{C} \frac{\partial \varphi_{q3}}{\partial \mathfrak{B}} \right), \\ \psi_{3q} = \left(2\varphi_{3q} + \mathfrak{A} \frac{\partial \varphi_{q1}}{\partial \mathfrak{C}} + \mathfrak{B} \frac{\partial \varphi_{q2}}{\partial \mathfrak{C}} + \mathfrak{C} \frac{\partial \varphi_{q3}}{\partial \mathfrak{C}} \right) \quad (q = 1, 2, 3). \end{array} \right.$$

$$(8) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{21} & \psi_{31} \\ \psi_{12} & \psi_{22} & \psi_{32} \\ \psi_{13} & \psi_{23} & \psi_{33} \end{vmatrix},$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_{11} = \psi_{22}\psi_{33} - \psi_{23}\psi_{32}, \\ \delta_{12} = \psi_{23}\psi_{31} - \psi_{21}\psi_{33}, \\ \delta_{13} = \psi_{21}\psi_{32} - \psi_{22}\psi_{31}; \\ \delta_{21} = \psi_{32}\psi_{13} - \psi_{33}\psi_{12}, \\ \delta_{22} = \psi_{33}\psi_{11} - \psi_{31}\psi_{13}, \\ \delta_{23} = \psi_{31}\psi_{12} - \psi_{32}\psi_{11}; \\ \delta_{31} = \psi_{12}\psi_{23} - \psi_{13}\psi_{22}, \\ \delta_{32} = \psi_{13}\psi_{21} - \psi_{11}\psi_{23}, \\ \delta_{33} = \psi_{11}\psi_{22} - \psi_{12}\psi_{21}, \end{array} \right.$$

et les égalités (6) deviendront

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} = -\frac{h}{\Delta} \left(\delta_{11} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \delta_{12} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \delta_{13} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right), \\ \mathfrak{B} = -\frac{h}{\Delta} \left(\delta_{21} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \delta_{22} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \delta_{23} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right), \\ \mathfrak{C} = -\frac{h}{\Delta} \left(\delta_{31} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \delta_{32} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \delta_{33} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) \quad (\text{avec } \delta_{pq} = \delta_{qp}). \end{array} \right.$$

Cette nouvelle forme des conditions d'équilibre nous montre que, dans les corps cristallisés, la direction de l'aimantation en un point ne coïncide plus, comme dans les corps isotropes, avec la grandeur géométrique dont les composantes sont $\frac{\partial \psi}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \psi}{\partial \eta}$, $\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}$.

§ III. — Détermination de la distribution qui convient à l'équilibre.

3. Supposons que l'expérience ait fait connaître pour un corps déterminé, de structure homogène ou continûment variable, la surface d'induction magnétique représentée par l'égalité (3).

Les équations (8) et (9) feront alors connaître Δ et les δ_{pq} en fonction de \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} . Les équations (10) deviendront des relations entre \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C}

et $\frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}$; on pourra les supposer résolues en $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ et écrire

$$(11) \quad \begin{cases} \mathfrak{A} = \theta_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right), \\ \mathfrak{B} = \theta_2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right), \\ \mathfrak{C} = \theta_3 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right). \end{cases}$$

On voit alors que, moyennant ces équations, la détermination de la distribution qui convient à l'équilibre se ramène à la détermination de la fonction ψ . Voyons comment cette dernière est déterminée.

Si, dans les expressions de Δ et des δ_{pq} , nous remplaçons $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ par leurs expressions (11), Δ et les δ_{pq} deviendront des fonctions de $\frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}$, et nous pourrons poser en général

$$(12) \quad -h \frac{\delta_{pq}}{\Delta} = D_{pq} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right).$$

Les équations (10) deviendront alors

$$(13) \quad \begin{cases} \mathfrak{A} = D_{11} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + D_{12} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + D_{13} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}, \\ \mathfrak{B} = D_{21} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + D_{22} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + D_{23} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}, \\ \mathfrak{C} = D_{31} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + D_{32} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + D_{33} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \end{cases}$$

avec

$$D_{pq} = D_{qp}.$$

Nous allons imposer à ces égalités une nouvelle transformation. Soient, au point considéré,

a, a' , a'' les cosinus des angles de Ox avec $O\xi, O\eta, O\zeta$;
 b, b' , b'' les cosinus des angles de Oy avec $O\xi, O\eta, O\zeta$;
 c, c' , c'' les cosinus des angles de Oz avec $O\xi, O\eta, O\zeta$.

Nous aurons

$$(14) \quad \begin{cases} \mathfrak{A} = a \mathfrak{a} + b \mathfrak{b} + c \mathfrak{c}, \\ \mathfrak{B} = a' \mathfrak{a} + b' \mathfrak{b} + c' \mathfrak{c}, \\ \mathfrak{C} = a'' \mathfrak{a} + b'' \mathfrak{b} + c'' \mathfrak{c} \end{cases}$$

et

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = a \frac{\partial \psi}{\partial x} + b \frac{\partial \psi}{\partial y} + c \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = a' \frac{\partial \psi}{\partial x} + b' \frac{\partial \psi}{\partial y} + c' \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} = a'' \frac{\partial \psi}{\partial x} + b'' \frac{\partial \psi}{\partial y} + c'' \frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{cases}$$

Les égalités (15) nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} D_{pq} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}, \alpha, \beta, \dots \right) \\ = d_{pq} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z}; \alpha, \beta, \dots; a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' \right), \end{aligned}$$

et les égalités (13) deviennent

$$\begin{aligned} a \mathfrak{A} + b \mathfrak{B} + c \mathfrak{C} &= (ad_{11} + a'd_{12} + a''d_{13}) \frac{\partial \psi}{\partial x} + (bd_{11} + b'd_{12} + b''d_{13}) \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ &\quad + (cd_{11} + c'd_{12} + c''d_{13}) \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ a' \mathfrak{A} + b' \mathfrak{B} + c' \mathfrak{C} &= (ad_{21} + a'd_{22} + a''d_{23}) \frac{\partial \psi}{\partial x} + (bd_{21} + b'd_{22} + b''d_{23}) \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ &\quad + (cd_{21} + c'd_{22} + c''d_{23}) \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ a'' \mathfrak{A} + b'' \mathfrak{B} + c'' \mathfrak{C} &= (ad_{31} + a'd_{32} + a''d_{33}) \frac{\partial \psi}{\partial x} + (bd_{31} + b'd_{32} + b''d_{33}) \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ &\quad + (cd_{31} + c'd_{32} + c''d_{33}) \frac{\partial \psi}{\partial z}, \end{aligned}$$

ou bien, en désignant par Φ_{pq} des fonctions de $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z}, a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$, faciles à former en fonction des d_{pq} ,

$$(16) \quad \begin{cases} \mathfrak{A} = \Phi_{11} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Phi_{12} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \Phi_{13} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ \mathfrak{B} = \Phi_{21} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Phi_{22} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \Phi_{23} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ \mathfrak{C} = \Phi_{31} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Phi_{32} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \Phi_{33} \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{cases}$$

avec

$$\Phi_{pq} = \Phi_{qp}.$$

Différentions les deux membres de la première équation (16) par rapport à x , les deux membres de la deuxième équation (16) par rapport à y , les deux membres de la troisième équation (16) par rapport à z et ajou-

lons, membre à membre, les résultats obtenus, en remarquant que

$$\Delta \psi = -4\pi \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right);$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
 (17) \quad \frac{\Delta \psi}{4\pi} - \left\{ \right. & \left[\psi_{11} + \frac{\partial \psi_{11}}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{12}}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{13}}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \\
 & + \left[\psi_{22} + \frac{\partial \psi_{21}}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{22}}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{23}}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\
 & + \left[\psi_{33} + \frac{\partial \psi_{31}}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{32}}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{33}}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \\
 & + \left[\psi_{23} + \psi_{32} + \left[\frac{\partial \psi_{21}}{\partial z} + \frac{\partial \psi_{31}}{\partial y} \right] \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left[\frac{\partial \psi_{22}}{\partial z} + \frac{\partial \psi_{32}}{\partial y} \right] \frac{\partial \psi}{\partial y} + \left[\frac{\partial \psi_{23}}{\partial z} + \frac{\partial \psi_{33}}{\partial y} \right] \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \\
 & + \left[\psi_{31} + \psi_{13} + \left[\frac{\partial \psi_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{31}}{\partial z} \right] \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left[\frac{\partial \psi_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{32}}{\partial z} \right] \frac{\partial \psi}{\partial y} + \left[\frac{\partial \psi_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{33}}{\partial z} \right] \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \\
 & + \left[\psi_{12} + \psi_{21} + \left[\frac{\partial \psi_{11}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{21}}{\partial x} \right] \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left[\frac{\partial \psi_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{22}}{\partial x} \right] \frac{\partial \psi}{\partial y} + \left[\frac{\partial \psi_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{23}}{\partial x} \right] \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \\
 & + \left. \left(\frac{\partial \psi_{11}}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{11}}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{11}}{\partial z} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{11}}{\partial x} \frac{\partial \alpha'}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{11}}{\partial y} \frac{\partial b'}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{11}}{\partial z} \frac{\partial c'}{\partial x} + \dots \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} = 0,
 \end{aligned}$$

les points remplaçant des termes analogues au dernier écrit, termes qui, comme le dernier écrit, disparaissent si le cristal considéré est homogène.

L'équation (17) représente l'équation différentielle que la fonction φ doit vérifier en tous les points d'un cristal soumis à l'aimantation par influence.

A la limite du cristal et du milieu extérieur, on doit avoir

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial N_e} = -4\pi [\alpha \cos(N_i, x) + \beta \cos(N_i, y) + \gamma \cos(N_i, z)],$$

ou bien, en vertu des équations (16),

$$(18) \quad \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial N_e} \right) + [\Theta_{11} \cos(N_i, x) + \Theta_{12} \cos(N_i, y) + \Theta_{13} \cos(N_i, z)] \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ + [\Theta_{21} \cos(N_i, x) + \Theta_{22} \cos(N_i, y) + \Theta_{23} \cos(N_i, z)] \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \\ + [\Theta_{31} \cos(N_i, x) + \Theta_{32} \cos(N_i, y) + \Theta_{33} \cos(N_i, z)] \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} = 0.$$

Ces équations (17) et (18), jointes à d'autres équations qui sont les mêmes que pour les corps isotropes (*voir* Chapitre II), déterminent la fonction φ et partant la distribution qui convient à l'équilibre.

§ IV. — Détermination de la surface d'induction magnétique d'un cristal.

4. Admettons que les quantités φ_{pq} soient indépendantes de \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} . Les quantités φ_{pq} , que nous désignerons alors par Δ_{pq} , seront indépendantes de $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$. Les équations (16) continueront à être exactes, ainsi que l'équation (18); mais l'équation (17) se simplifiera notablement. Si le cristal est homogène, elle deviendra simplement

$$(19) \quad \left(\frac{1}{4\pi} - \Delta_{11} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{4\pi} - \Delta_{22} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \left(\frac{1}{4\pi} - \Delta_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) \\ - 2\Delta_{23} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - 2\Delta_{31} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} - 2\Delta_{12} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0.$$

On est alors amené aux équations données par Poisson pour résoudre le problème de l'aimantation des cristaux.

En se plaçant dans les conditions admises par la théorie de Poisson, on possède des méthodes expérimentales qui permettent de déterminer la sur-

face

$$(20) \quad \Delta_{11}x^2 + \Delta_{22}y^2 + \Delta_{33}z^2 + 2\Delta_{23}yz + 2\Delta_{31}zx + 2\Delta_{12}xy = -\frac{1}{h},$$

surface qui, dans cette théorie de Poisson, remplace la surface variable donnée par l'égalité (3).

Or nous allons voir qu'il en résulte une méthode pour déterminer la surface

$$\Omega_{11}x^2 + \Omega_{22}y^2 + \Omega_{33}z^2 + 2\Omega_{23}yz + 2\Omega_{31}zx + 2\Omega_{12}xy = -\frac{1}{h},$$

surface identique à la surface (3), mais où l'on a pris pour axes de coordonnées Ox , Oy , Oz au lieu de $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, et pour paramètres variables $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ en place de \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} .

Supposons un corps cristallin de forme telle et tellement placé dans un champ magnétique que, d'après la théorie de Poisson, il s'aimante uniformément dans ce champ, quelles que soient la grandeur et la forme de sa surface d'aimantation (20). C'est ce qui arrive, notamment, si le cristal a la forme d'une sphère et si le champ magnétique est uniforme. On aura alors, quels que soient les Δ_{pq} ,

$$\mathfrak{a} = f(\Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{33}, \Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{12}),$$

$$\mathfrak{b} = g(\Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{33}, \Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{12}),$$

$$\mathfrak{c} = h(\Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{33}, \Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{12}).$$

Remplaçons \mathfrak{a} , \mathfrak{b} , \mathfrak{c} par ces expressions dans la fonction Ω_{pq} relative à une substance déterminée, après avoir exprimé cette fonction Ω_{pq} elle-même non au moyen de $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi}{\partial z}$, mais au moyen de \mathfrak{a} , \mathfrak{b} , \mathfrak{c} ; Ω_{pq} deviendra

$$\mathfrak{D}_{pq}(\Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{33}, \Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{12}),$$

\mathfrak{D}_{pq} étant, pour une substance déterminée, une fonction d'une forme déterminée.

Choisissons les six constantes Δ_{11} , Δ_{22} , Δ_{33} , Δ_{23} , Δ_{31} , Δ_{12} , de manière

qu'elles vérifient les équations

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{11}(\Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{33}, \Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{12}) &= \Delta_{11}, \\ \mathfrak{D}_{22}(\Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{33}, \Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{12}) &= \Delta_{22}, \\ \mathfrak{D}_{33}(\Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{33}, \Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{12}) &= \Delta_{33}, \\ \mathfrak{D}_{23}(\Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{33}, \Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{12}) &= \Delta_{23}, \\ \mathfrak{D}_{31}(\Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{33}, \Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{12}) &= \Delta_{31}, \\ \mathfrak{D}_{12}(\Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{33}, \Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{12}) &= \Delta_{12}.\end{aligned}$$

Soit $\Delta'_{11}, \Delta'_{22}, \Delta'_{33}, \Delta'_{23}, \Delta'_{31}, \Delta'_{12}$ une solution de ces équations. Si l'on remplace dans les équations différentielles du problème de Poisson les Δ_{pq} par les Δ'_{pq} , l'intégration de ces équations fournira sur le cristal une aimantation uniforme correspondant à une certaine fonction potentielle ψ .

Cette fonction potentielle est aussi celle qui intègre nos équations générales, en supposant le cristal formé avec la substance que nous considérons.

La démonstration de ce théorème est trop facile pour qu'il soit utile de la développer.

Le théorème précédent étant admis, on en déduit aisément la proposition que nous allons énoncer.

Dans un champ magnétique, on place un cristal qui, dans la théorie de Poisson, s'aimanterait uniformément, quelle que fût sa surface d'aimantation. Le cristal étant homogène, ses axes d'élasticité ont la même direction en tous ses points. Prenons-les pour axes de coordonnées. Si l'on admettait la théorie de Poisson, la fonction potentielle serait, en chaque point extérieur au cristal et aux aimants, donnée par la formule

$$(21) \quad \psi = F(x, y, z, \Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{33}, \Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{12}).$$

La détermination expérimentale de la valeur de ψ aux divers points de l'espace permettrait alors de déterminer $\Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{33}, \Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{12}$.

Bien que la théorie de Poisson ne soit pas exacte, notre cristal va prendre une aimantation uniforme, dont les composantes seront $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, et ψ va vérifier l'équation (21); seulement les valeurs qu'il faudra donner dans cette équation aux quantités

$$\Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{33}, \Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{12}$$

seront

$$-h\varphi_{11}, \quad -h\varphi_{22}, \quad -h\varphi_{33}, \quad -h\varphi_{23}, \quad -h\varphi_{31}, \quad -h\varphi_{12},$$

en sorte que l'on aura ainsi déterminé la surface d'aimantation (3), qui convient à l'aimantation prise par le cristal dans ces circonstances.

Nous nous contenterons de ces quelques remarques sur l'aimantation des cristaux, laissant au lecteur le soin de généraliser les théories que nous avons exposées à propos des corps isotropes.

Le travail précédent n'aborde point, il s'en faut, tous les problèmes qui constituent l'étude de l'aimantation par influence dans les corps dénués de force coercitive. Nous nous sommes limités à un cas relativement très particulier.

En premier lieu, nous n'avons étudié que des corps magnétiques formés par des solides rigides. Quels phénomènes présentent, lorsqu'ils sont aimantés par influence, les fluides d'une part et les solides élastiques de l'autre? C'est un problème qui a sollicité, dans ces dernières années, les recherches de plusieurs physiciens illustres et que nous n'avons point abordé dans ce qui précède.

En second lieu, nous avons étudié les phénomènes que présentent des aimants qui portent des charges d'électricité statique; mais nous n'avons point considéré les effets qui se manifestent dans le système renfermant à la fois des courants électriques et des aimants, laissant ainsi de côté l'électromagnétisme, les phénomènes d'induction par les aimants et la théorie de la propagation de l'électricité dans les conducteurs aimantés.

Nous souhaitons de pouvoir plus tard, poussant plus loin nos recherches, aborder quelques-uns au moins de ces problèmes qui abondent en difficultés; mais nous espérons que le présent travail, quelque restreint qu'il soit, aura contribué à élucider quelques points obscurs ou douteux dans la théorie de l'aimantation par influence.



NOTE.

DE L'INFLUENCE DU MAGNÉTISME SUR LA CHALEUR DE COMBINAISON.

Au Chapitre VI du Mémoire précédent, nous avons cité un certain nombre de travaux, soit théoriques, soit expérimentaux, relatifs à l'influence que l'aimantation exerce sur la chaleur de combinaison d'une substance magnétique. Nous avons, dans ce Chapitre, omis de citer quelques travaux qui se rapportent à la même question, les uns parce qu'ils n'étaient point encore publiés au moment où fut rédigé notre Mémoire, les autres parce qu'ils n'étaient pas parvenus à notre connaissance.

Le premier travail relatif aux problèmes dont l'étude fait l'objet des Chapitres VI et VII est dû à M. Th. Gross. M. Th. Gross en communiqua les principaux résultats à la Société de Physique de Berlin dès le 13 avril 1885 (¹). Peu de temps après, il le publia *in extenso* dans les *Comptes rendus de l'Académie de Vienne* (²).

Dans ce travail, M. Th. Gross constate qu'il se produit des courants entre les parties différemment aimantées d'un même morceau de fer plongé dans un acide. M. Th. Gross explique ce fait par l'influence que l'aimantation du fer exerce sur la chaleur de combinaison du fer avec l'acide.

Cette manière de voir est entièrement conforme à celle que M. Paul Janet (³) a émise un peu plus tard sans avoir connaissance des travaux de M. Th. Gross; mais là s'arrête l'analogie entre le travail de M. Th. Gross et celui de M. Paul Janet. M. Th. Gross énonce cette proposition :

La chaleur de combinaison entre le fer et un acide doit être regardée comme plus grande s'il existe entre eux une énergie potentielle magnétique que s'il n'en existe pas.

Au contraire, M. Janet énonce cette loi que *la chaleur de combinaison du fer est plus grande hors du champ magnétique que dans ce champ.*

Le travail de M. Paul Janet avait été précédé de quelques mois par un travail de M. Nichols (⁴). Comme M. Paul Janet, M. Nichols admet en principe que *le travail*

(¹) Voir *Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin*, 13 avril 1885.

(²) Th. GROSS, *Ueber eine neue Entstehungsweise galvanischer Ströme durch Magnetismus* (*Wiener Sitzungsberichte*, 2^e Folge, Band XCII, p. 1373, décembre 1885).

(³) P. JANET, *De l'influence du magnétisme sur les phénomènes chimiques* (*Journal de Physique*, 2^e série, t. VI, p. 286; 1887).

(⁴) NICHOLS, *On the chemical behaviour of iron in the magnetic field* (*Sillimann's Journal*, 3^e série, t. XXXI; avril 1886).

magnétique effectué dans la dissolution du fer est le même que si le fer était enlevé à l'infini; comme M. Paul Janet, M. Nichols en conclut que la chaleur de combinaison du fer est plus grande hors du champ magnétique que dans ce champ.

M. Nichols a essayé de contrôler par l'expérience les conséquences de la théorie; mais ses expériences lui donnent pour le fer aimanté une chaleur de combinaison tantôt plus grande et tantôt plus petite que pour le fer non aimanté.

Dans un plus récent travail, M. Th. Gross (¹) a repris de nouveau l'étude de la question. Il s'est attaché à démontrer, par la discussion des expériences de M. Nichols, que les résultats n'en pouvaient être concluants. Puis, allant plus loin, il a été amené à contester cette proposition que M. Nichols avait prise comme point de départ de sa théorie : le travail magnétique effectué dans la dissolution du fer est le même que si le fer était enlevé à l'infini. « Je suis obligé, dit-il, de regarder ce principe comme inexact, car... la dissolution du fer correspond à une désaimantation et non à une création d'énergie magnétique. »

Ces discussions montrent combien l'étude théorique de l'influence que l'aimantation exerce sur la chaleur de combinaison était confuse et combien il était nécessaire de reprendre cette étude par des méthodes rigoureuses.

(¹) TH. GROSS, *Ueber die Verbindungswärme des magnetisierten Eisens* (*Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin*, 22 avril 1887).

