ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

P. DUHEM

Recherches sur l'élasticité

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 21 (1904), p. 99-139.
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1904_3_21__99_0>

RECHERCHES SUR L'ÉLASTICITÉ,

PAR M. P. DUHEM.

PREMIÈRE PARTIE.

DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT DES MILIEUX VITREUX.

INTRODUCTION.

La plupart des travaux dont la théorie de l'élasticité a été l'objet se bornent à étudier des corps dont les déformations sont extrêmement petites, soit que leurs divers points matériels demeurent immobiles, soit qu'un mouvement de très faible amplitude les anime.

La limite qui restreint ainsi les problèmes étudiés ne constitue pas une entrave gênante lorsqu'on se propose seulement d'analyser les modifications des corps très peu déformables auxquels on réserve le nom de solides élastiques; mais elle rend inutilisables les résultats obtenus par le théoricien, lorsque celui-ci se propose d'étudier ces corps mous ou pâteux qui forment la transition entre les fluides et les solides; il est alors indispensable de formuler des lois applicables aux milieux qui ont subi des déformations finies.

G. Kirchhoff (¹) et M. J. Boussinesq (²) nous ont fait connaître les

(¹) G. KIRCHHOFF, *Ueber die Gleichungen des Gleichgewichtes eines elastischen Körpers bei nicht unendlich kleinen Verschiebungen seiner Theile* (*Sitzungsberichte der mathematisch naturwissenschaftlichen Classe der Akademie der Wissenschaften*, Bd. IX, S. 762. Vienne 1852). Cet écrit n'a pas été réimprimé dans les *Abhandlungen* de G. Kirchhoff.

(²) J. BOUSSINESQ, *Théorie des Ondes liquides périodiques*, Note III (Mémoires présentés par divers savants à l'Institut de France, t. XX).

lois qui président à l'équilibre de semblables milieux, du moins lorsque leurs éléments sont simplement soumis à des *actions newtoniennes*. Il était intéressant d'étendre leur analyse au cas beaucoup plus général et insoupçonné avant nos recherches sur la Mécanique des fluides [1], où les masses élémentaires qui composent le milieu sont soumises à des *actions non newtoniennes;* le présent Mémoire apporte ce complément aux recherches de nos illustres prédécesseurs et met en évidence, dans le cas où les actions ne sont pas newtoniennes, l'existence de *couples élémentaires* auxquels les actions newtoniennes ne sauraient donner naissance.

Les lois du mouvement de milieux affectés de déformations finies se tireraient des lois qui président à leur équilibre au moyen du principe de d'Alembert, si les milieux étudiés n'étaient affectés d'aucune viscosité; mais les corps mous et pâteux, qui offrent à cette analyse ses plus intéressantes applications, sont, en même temps, dans la plupart des cas, des corps très visqueux; il serait illusoire d'en étudier les mouvements si l'on devait faire abstraction de leur viscosité.

Nous sommes donc naturellement conduits à préciser les lois auxquelles obéit la viscosité au sein de milieux élastiques.

Ce problème n'a tenté jusqu'ici, à notre connaissance, que les efforts d'un seul analyste, M. Oskar Emil Meyer [2]. Mais les recherches de M. Meyer se sont bornées aux mouvements très petits d'un corps isotrope à la fois élastique et visqueux; en outre elles reposent sur certaines hypothèses moléculaires que nous nous gardons toujours d'invoquer. Il y avait donc lieu de créer les formules qui régissent les actions de viscosité au sein de milieux élastiques affectés de déformations finies. C'est l'un des principaux objets du présent Mémoire.

Ces formules nous ont permis d'obtenir certains résultats; en particulier, elles nous ont permis d'étendre à tous les milieux élastiques visqueux, qu'ils soient vitreux ou cristallisés, une proposition que

---

(1) *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. X, 1893, p. 183).

(2) O.-E. Meyer, *Zur Theorie der inneren Reibung* (*Borchardt's Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. LXXVIII, 1874, p. 130).

nous avions déjà démontrée pour les fluides visqueux : *Les seules ondes qui puissent persister en un milieu visqueux sont des ondes sans propagation, qui séparent sans cesse les deux mêmes portions du milieu.*

D'ailleurs, l'emploi de méthodes semblables à celles dont nous avions fait usage dans l'étude des fluides nous a permis de donner, de la propagation des ondes au sein des milieux élastiques non visqueux, une analyse qui ne laisse place à aucun cas d'exception.

Les milieux que nous avons étudiés ont toujours été supposés dénués d'hystérésis; la possibilité des déformations permanentes a donc été exclue, ce qui restreint la généralité de notre analyse et la portée expérimentale des résultats obtenus. Mais les formules cinématiques qui nous ont permis d'étudier la viscosité des milieux élastiques nous permettront également d'étendre à de tels milieux les principes de notre théorie des déformations permanentes.

CHAPITRE I.

LES DÉFORMATIONS D'UN MILIEU CONTINU.

I. — Les déformations finies d'un milieu continu.

Nous commencerons par établir quelques formules relatives aux déformations finies d'un milieu continu. Ces formules, dues à G. Kirchhoff et à M. Boussinesq, ont été magistralement exposées par MM. E. et F. Cosserat dans un *Premier Mémoire sur la Théorie de l'Élasticité* (¹). Nous aurions pu nous borner à renvoyer le lecteur à ce Mémoire, si complet au double point de vue historique et théorique ; si nous ne l'avons pas fait, si nous avons repris la démonstration des formules strictement indispensables, c'est surtout afin de fixer les notations dont nous ferons usage.

(¹) EUGÈNE et FRANÇOIS COSSERAT, *Sur la Théorie de l'Élasticité. Premier Mémoire* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. X, 1896).

Prenons un milieu continu dans un certain état, fixé une fois pour toutes, que nous nommerons l'*état initial;* un point matériel déterminé occupe, dans cet état, une position déterminée μ dont les coordonnées sont a, b, c. La connaissance de ces coordonnées permettra de reconnaître ce point matériel après que le milieu aura subi un déplacement et une déformation quelconque, selon le procédé employé en Hydrodynamique et appelé *procédé de Lagrange*.

Au sein du milieu déformé et déplacé, le même point matériel occupe la position M dont les coordonnées sont x, y, z; x, y, z sont des fonctions continues de a, b, c, dont la connaissance définit la déformation et le déplacement subis par le système.

Dans la plupart des cas, nous poserons

$$(1) \qquad x = a + \xi, \qquad y = b + \eta, \qquad z = c + \zeta.$$

ξ, η, ζ seront également des fonctions de a, b, c. Nous aurons

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial a} = 1 + \frac{\partial \xi}{\partial a}, && \frac{\partial x}{\partial b} = \frac{\partial \xi}{\partial b}, && \frac{\partial x}{\partial c} = \frac{\partial \xi}{\partial c}, \\ &\frac{\partial y}{\partial a} = \frac{\partial \eta}{\partial a}, && \frac{\partial y}{\partial b} = 1 + \frac{\partial \eta}{\partial b}, && \frac{\partial y}{\partial c} = \frac{\partial \eta}{\partial c}, \\ &\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial \zeta}{\partial a}, && \frac{\partial z}{\partial b} = \frac{\partial \zeta}{\partial b}, && \frac{\partial z}{\partial c} = 1 + \frac{\partial \zeta}{\partial c}. \end{aligned} \right.$$

Soit un point matériel qui, dans l'état initial, occupe une position $\mu'(a', b', c')$ infiniment voisine de la position $\mu(a, b, c)$; dans l'état déformé, il occupe une position $M'(x', y', z')$, infiniment voisine de la position $M(x, y, z)$. En se bornant aux infiniment petits du premier ordre, on a

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} (x' - x) &= \frac{\partial x}{\partial a}(a' - a) + \frac{\partial x}{\partial b}(b' - b) + \frac{\partial x}{\partial c}(c' - c), \\ (y' - y) &= \frac{\partial y}{\partial a}(a' - a) + \frac{\partial y}{\partial b}(b' - b) + \frac{\partial y}{\partial c}(c' - c), \\ (z' - z) &= \frac{\partial z}{\partial a}(a' - a) + \frac{\partial z}{\partial b}(b' - b) + \frac{\partial z}{\partial c}(c' - c). \end{aligned} \right.$$

Ces équations peuvent être regardées comme des équations en $(a' - a)$,

$(b'-b)$, $(c'-c)$. Leur déterminant est

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)}. \tag{4}$$

Ce déterminant ne s'annule jamais en une déformation qui laisse finie la densité en chaque point; nous savons, en effet, par l'équation de continuité, mise sous la forme de Lagrange, que le produit de la densité par le déterminant Δ est égal à la densité dans l'état initial. Il résulte, en outre, de là que la valeur de Δ est indépendante du choix des axes de coordonnées.

En résolvant les équations (3), nous trouvons

$$\left\{\begin{aligned} \Delta(a'-a) &= \frac{D(y, z)}{D(b, c)}(x'-x) + \frac{D(z, x)}{D(b, c)}(y'-y) + \frac{D(x, y)}{D(b, c)}(z'-z), \\ \Delta(b'-b) &= \frac{D(y, z)}{D(c, a)}(x'-x) + \frac{D(z, x)}{D(c, a)}(y'-y) + \frac{D(x, y)}{D(c, a)}(z'-z), \\ \Delta(c'-c) &= \frac{D(y, z)}{D(a, b)}(x'-x) + \frac{D(z, x)}{D(a, b)}(y'-y) + \frac{D(x, y)}{D(a, b)}(z'-z). \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Moyennant les égalités (2), on peut mettre les égalités (3) sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} (x'-x) &= \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial a}\right)(a'-a) + \frac{\partial \xi}{\partial b}(b'-b) + \frac{\partial \xi}{\partial c}(c'-c), \\ (y'-y) &= \frac{\partial \eta}{\partial a}(a'-a) + \left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial b}\right)(b'-b) + \frac{\partial \eta}{\partial c}(c'-c), \\ (z'-z) &= \frac{\partial \zeta}{\partial a}(a'-a) + \frac{\partial \zeta}{\partial b}(b'-b) + \left(1 + \frac{\partial \zeta}{\partial c}\right)(c'-c). \end{aligned}\right. \tag{3 bis}$$

En même temps, le déterminant Δ devient

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial \xi}{\partial a} & \frac{\partial \xi}{\partial b} & \frac{\partial \xi}{\partial c} \\ \frac{\partial \eta}{\partial a} & 1 + \frac{\partial \eta}{\partial b} & \frac{\partial \eta}{\partial c} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial a} & \frac{\partial \zeta}{\partial b} & 1 + \frac{\partial \zeta}{\partial c} \end{vmatrix}. \tag{4 bis}$$

Dans les égalités (3 *bis*), regardons a, b, c et x, y, z comme des constantes; a', b', c' et x', y', z' comme des variables; ces équations définissent une transformation homographique d'un espace $\mu'(a', b', c')$ en un autre espace $M'(x', y', z')$, transformation qui fait correspondre le point $M(x, y, z)$ au point $\mu(a, b, c)$. Cette transformation représente la partie principale du déplacement et de la déformation que subit une masse infiniment petite à laquelle appartient le point matériel placé successivement en μ et en M.

Étudions d'une manière générale cette transformation.

Considérons, dans l'espace des (x', y', z'), la sphère S de centre M et de rayon 1 et cherchons de quelle surface elle est la transformée.

Pour que le point $M'(x', y', z')$ se trouve sur cette sphère, il faut et il suffit que l'on ait

$$(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2=1.$$

Pour cela, selon les égalités (3 *bis*), il faut et il suffit que ce point M' corresponde à un point μ' dont les coordonnées a', b', c' vérifient l'équation

$$\begin{aligned}(6)\qquad & \left[\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)(a'-a)+\frac{\partial\xi}{\partial b}(b'-b)+\frac{\partial\xi}{\partial c}(c'-c)\right]^2\\ &+\left[\frac{\partial\eta}{\partial a}(a'-a)+\left(1+\frac{\partial\eta}{\partial b}\right)(b'-b)+\frac{\partial\eta}{\partial c}(c'-c)\right]^2\\ &+\left[\frac{\partial\zeta}{\partial a}(a'-a)+\frac{\partial\zeta}{\partial b}(b'-b)+\left(1+\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)(c'-c)\right]^2=1.\end{aligned}$$

Cette équation exprime que le point $\mu'(a', b', c')$ a pour lieu un certain ellipsoïde E ayant pour centre le point $\mu(a, b, c)$.

L'équation de cet ellipsoïde E, développée, s'écrit

$$\begin{aligned}(7)\quad & (1+2\varepsilon_1)(a'-a)^2+(1+2\varepsilon_2)(b'-b)^2+(1+2\varepsilon_3)(c'-c)^2\\ &+2\gamma_1(b'-b)(c'-c)+2\gamma_2(c'-c)(a'-a)+2\gamma_3(a'-a)(b'-b)=1,\end{aligned}$$

en désignant par ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 les six fonctions suivantes de a, b, c:

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned}\varepsilon_1&=\frac{\partial\xi}{\partial a}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial a}\right)^2\right],\\ \varepsilon_2&=\frac{\partial\eta}{\partial b}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial b}\right)^2\right],\\ \varepsilon_3&=\frac{\partial\zeta}{\partial c}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial c}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial c}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)^2\right];\end{aligned}\right.$$

$$(8)\ (\textit{suite})\quad \left\{\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\partial\eta}{\partial c} + \frac{\partial\zeta}{\partial b} + \frac{\partial\xi}{\partial b}\frac{\partial\xi}{\partial c} + \frac{\partial\eta}{\partial b}\frac{\partial\eta}{\partial c} + \frac{\partial\zeta}{\partial b}\frac{\partial\zeta}{\partial c},\\ \gamma_2 &= \frac{\partial\zeta}{\partial a} + \frac{\partial\xi}{\partial c} + \frac{\partial\xi}{\partial c}\frac{\partial\xi}{\partial a} + \frac{\partial\eta}{\partial c}\frac{\partial\eta}{\partial a} + \frac{\partial\zeta}{\partial c}\frac{\partial\zeta}{\partial a},\\ \gamma_3 &= \frac{\partial\xi}{\partial b} + \frac{\partial\eta}{\partial a} + \frac{\partial\xi}{\partial a}\frac{\partial\xi}{\partial b} + \frac{\partial\eta}{\partial a}\frac{\partial\eta}{\partial b} + \frac{\partial\zeta}{\partial a}\frac{\partial\zeta}{\partial b}.\end{aligned}\right.$$

Cet ellipsoïde admet trois axes rectangulaires; soient σ la longueur de l'un des demi-axes et $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ses cosinus directeurs; ces quatre quantités s'obtiendront, comme l'on sait, de la manière suivante :

Si nous posons

$$(9)\qquad S = \frac{1}{\sigma^2},$$

S sera l'une des trois racines de l'équation du troisième degré

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_1 - S & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 1 + 2\varepsilon_2 - S & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 1 + 2\varepsilon_3 - S \end{vmatrix} = 0$$

et $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ s'obtiendront alors en résolvant les équations

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} (1 + 2\varepsilon_1)\mathcal{A} + \gamma_3\mathcal{B} + \gamma_2\mathcal{C} &= S\mathcal{A},\\ \gamma_3\mathcal{A} + (1 + 2\varepsilon_2)\mathcal{B} + \gamma_1\mathcal{C} &= S\mathcal{B},\\ \gamma_2\mathcal{A} + \gamma_1\mathcal{B} + (1 + 2\varepsilon_3)\mathcal{C} &= S\mathcal{C},\end{aligned}\right.$$

$$(12)\qquad \mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2 = 1.$$

Aux trois racines S_1, S_2, S_3 de l'équation (10) correspondent trois systèmes de valeurs de σ, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ (pourvu que nous ne regardions pas comme distincts deux sytèmes de cosinus qui définissent une même droite), systèmes que nous désignerons par

$$(13)\qquad \left\{\begin{matrix} \sigma_1, & \mathcal{A}_1, & \mathcal{B}_1, & \mathcal{C}_1,\\ \sigma_2, & \mathcal{A}_2, & \mathcal{B}_2, & \mathcal{C}_2,\\ \sigma_3, & \mathcal{A}_3, & \mathcal{B}_3, & \mathcal{C}_3.\end{matrix}\right.$$

Considérons le demi-axe de longueur σ et de cosinus directeurs $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$; il correspond à un rayon de la sphère S, rayon qui a pour longueur 1 et pour cosinus directeurs $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$. Selon les égalités (3 *bis*), on a

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathcal{X} &= \sigma\left[\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)\mathcal{A}+\frac{\partial\xi}{\partial b}\mathcal{B}+\frac{\partial\xi}{\partial c}\mathcal{C}\right],\\ \mathcal{Y} &= \sigma\left[\frac{\partial\eta}{\partial a}\mathcal{A}+\left(1+\frac{\partial\eta}{\partial b}\right)\mathcal{B}+\frac{\partial\eta}{\partial c}\mathcal{C}\right],\\ \mathcal{Z} &= \sigma\left[\frac{\partial\zeta}{\partial a}\mathcal{A}+\frac{\partial\zeta}{\partial b}\mathcal{B}+\left(1+\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)\mathcal{C}\right]. \end{aligned}\right.$$

Aux trois systèmes (13), ces relations font correspondre trois systèmes de valeurs de $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$, que nous désignerons respectivement par

$$(15)\qquad \left\{\begin{matrix} \mathcal{X}_1, & \mathcal{Y}_1, & \mathcal{Z}_1,\\ \mathcal{X}_2, & \mathcal{Y}_2, & \mathcal{Z}_2,\\ \mathcal{X}_3, & \mathcal{Y}_3, & \mathcal{Z}_3. \end{matrix}\right.$$

Formons $(\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3+\mathcal{Y}_2\mathcal{Y}_3+\mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_3)$. Selon les égalités (14), nous aurons

$$\begin{aligned} &\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3+\mathcal{Y}_2\mathcal{Y}_3+\mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_3\\ &\quad=\sigma_2\sigma_3\Big\{\left[\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)\mathcal{A}_2+\frac{\partial\xi}{\partial b}\mathcal{B}_2+\frac{\partial\xi}{\partial c}\mathcal{C}_2\right]\left[\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)\mathcal{A}_3+\frac{\partial\xi}{\partial b}\mathcal{B}_3+\frac{\partial\xi}{\partial c}\mathcal{C}_3\right]\\ &\qquad+\left[\frac{\partial\eta}{\partial a}\mathcal{A}_2+\left(1+\frac{\partial\eta}{\partial b}\right)\mathcal{B}_2+\frac{\partial\eta}{\partial c}\mathcal{C}_2\right]\left[\frac{\partial\eta}{\partial a}\mathcal{A}_3+\left(1+\frac{\partial\eta}{\partial b}\right)\mathcal{B}_3+\frac{\partial\eta}{\partial c}\mathcal{C}_3\right]\\ &\qquad+\left[\frac{\partial\zeta}{\partial a}\mathcal{A}_2+\frac{\partial\zeta}{\partial b}\mathcal{B}_2+\left(1+\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)\mathcal{C}_2\right]\left[\frac{\partial\zeta}{\partial a}\mathcal{A}_3+\frac{\partial\zeta}{\partial b}\mathcal{B}_3+\left(1+\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)\mathcal{C}_3\right]\Big\} \end{aligned}$$

ou bien, en vertu des égalités (8),

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_2\mathcal{X}_3+\mathcal{Y}_2\mathcal{Y}_3+\mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_3=\sigma_2\sigma_3\Big\{&[(1+2\varepsilon_1)\mathcal{A}_2+\gamma_3\mathcal{B}_2+\gamma_2\mathcal{C}_2]\mathcal{A}_3\\ &+[(\gamma_3\mathcal{A}_2+(1+2\varepsilon_2)\mathcal{B}_2+\gamma_1\mathcal{C}_2]\mathcal{B}_3\\ &+[(\gamma_2\mathcal{A}_2+\gamma_1\mathcal{B}_2+(1+2\varepsilon_3)\mathcal{C}_2]\mathcal{C}_3\Big\} \end{aligned}$$

ou enfin, en vertu des égalités (9) et (11),

$$\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3+\mathcal{Y}_2\mathcal{Y}_3+\mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_3=\frac{\sigma_3}{\sigma_2}(\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3+\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3+\mathcal{C}_2\mathcal{C}_3).$$

Or on a

$$\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3+\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3+\mathcal{C}_2\mathcal{C}_3=0.$$

On a donc la première des trois égalités

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_2\mathcal{X}_3+\mathcal{Y}_2\mathcal{Y}_3+\mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_3&=0,\\ \mathcal{X}_3\mathcal{X}_1+\mathcal{Y}_3\mathcal{Y}_1+\mathcal{Z}_3\mathcal{Z}_1&=0,\\ \mathcal{X}_1\mathcal{X}_2+\mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2+\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2&=0. \end{aligned}$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue. On voit que *les trois axes de l'ellipsoïde* E *correspondent à trois diamètres rectangulaires de la sphère* S.

μ' étant un point quelconque de l'espace (a', b', c'), projetons la longueur $\mu\mu'$ sur les trois demi-axes rectangulaires de l'ellipsoïde E; soient A_1, A_2, A_3 les trois projections; nous aurons

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} A_1 &= \mathcal{A}_1(a'-a) + \mathcal{B}_1(b'-b) + \mathcal{C}_1(c'-c),\\ A_2 &= \mathcal{A}_2(a'-a) + \mathcal{B}_2(b'-b) + \mathcal{C}_2(c'-c),\\ A_3 &= \mathcal{A}_3(a'-a) + \mathcal{B}_3(b'-b) + \mathcal{C}_3(c'-c).\end{aligned}\right.$$

Au point μ' correspond, dans l'espace des (x', y', z'), un point M'; projetons le segment MM' sur les trois diamètres rectangulaires de la sphère S qui correspondent aux trois axes de l'ellipsoïde E; soient X_1, X_2, X_3, les trois projections. Nous aurons

$$\begin{aligned} X_1 &= \mathcal{X}_1(x'-x) + \mathcal{Y}_1(y'-y) + \mathcal{Z}_1(z'-z),\\ X_2 &= \mathcal{X}_2(x'-x) + \mathcal{Y}_2(y'-y) + \mathcal{Z}_2(z'-z),\\ X_3 &= \mathcal{X}_3(x'-x) + \mathcal{Y}_3(y'-y) + \mathcal{Z}_3(z'-z).\end{aligned}$$

En vertu des égalités (3 *bis*) et (14), la première de ces égalités devient

$$\begin{aligned} X_1 = \sigma_1 \Big\{ &\left[\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)\mathcal{A}_1 + \frac{\partial\xi}{\partial b}\mathcal{B}_1 + \frac{\partial\xi}{\partial c}\mathcal{C}_1\right]\left[\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)(a'-a) + \frac{\partial\xi}{\partial b}(b'-b) + \frac{\partial\xi}{\partial c}(c'-c)\right]\\ &+ \left[\frac{\partial\eta}{\partial a}\mathcal{A}_1 + \left(1+\frac{\partial\eta}{\partial b}\right)\mathcal{B}_1 + \frac{\partial\eta}{\partial c}\mathcal{C}_1\right]\left[\frac{\partial\eta}{\partial a}(a'-a) + \left(1+\frac{\partial\eta}{\partial b}\right)(b'-b) + \frac{\partial\eta}{\partial c}(c'-c)\right]\\ &+ \left[\frac{\partial\zeta}{\partial a}\mathcal{A}_1 + \frac{\partial\zeta}{\partial b}\mathcal{B}_1 + \left(1+\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)\mathcal{C}_1\right]\left[\frac{\partial\zeta}{\partial a}(a'-a) + \frac{\partial\zeta}{\partial b}(b'-b) + \left(1+\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)(c'-c)\right]\Big\}\end{aligned}$$

ou bien, en vertu des égalités (8),

$$\begin{aligned} X_1 = \sigma_1 \big\{ &[(1+2\varepsilon_1)\mathcal{A}_1 + \gamma_3\mathcal{B}_1 + \gamma_2\mathcal{C}_1](a'-a)\\ &+ [\gamma_3\mathcal{A}_1 + (1+2\varepsilon_2)\mathcal{B}_1 + \gamma_1\mathcal{C}_1](b'-b)\\ &+ [\gamma_2\mathcal{A}_1 + \gamma_1\mathcal{B}_1 + (1+2\varepsilon_3)\mathcal{C}_1](c'-c)\big\}\end{aligned}$$

ou enfin, en vertu des égalités (9) et (11), la première des égalités

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{\sigma_1}[\mathcal{A}_1(a'-a) + \mathcal{B}_1(b'-b) + \mathcal{C}_1(c'-c)],\\ X_2 &= \frac{1}{\sigma_2}[\mathcal{A}_2(a'-a) + \mathcal{B}_2(b'-b) + \mathcal{C}_2(c'-c)],\\ X_3 &= \frac{1}{\sigma_3}[\mathcal{A}_3(a'-a) + \mathcal{B}_3(b'-b) + \mathcal{C}_3(c'-c)].\end{aligned}$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

En comparant ces égalités aux égalités (16), nous trouvons

$$X_1 = \frac{A_1}{\sigma_1}, \qquad X_2 = \frac{A_2}{\sigma_2}, \qquad X_3 = \frac{A_3}{\sigma_3}. \tag{17}$$

Donc, *pour passer de l'espace des (a', b', c') à l'espace des (x', y', z'), il est nécessaire et suffisant :*

1° *De donner au premier espace un déplacement d'ensemble qui vient appliquer les axes de l'ellipsoïde* E *sur les trois diamètres rectangulaires de la sphère* S *qui sont les transformées de ces axes;*

2° *De réduire respectivement dans les rapports $\frac{1}{\sigma_1}$, $\frac{1}{\sigma_2}$, $\frac{1}{\sigma_3}$ les coordonnées de chaque point rapportées à ce trièdre trirectangle.*

Revenons maintenant à la transformation la plus générale d'un milieu continu. A chaque point matériel occupant la position $\mu(a, b, c)$ dans l'état initial et la position $M(x, y, z)$ dans l'état déformé, on peut faire correspondre une déformation homographique analogue à celle que nous venons d'étudier. Si l'on néglige les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, cette déformation coïncide avec la déformation réelle qui se produit au sein d'une masse infiniment petite comprenant le point matériel considéré.

A cette masse est lié invariablement un certain trièdre trirectangle qui, dans l'état initial, coïncide avec les axes de l'ellipsoïde E relatif au point matériel considéré, et qui, dans l'état déformé, coïncide avec les trois diamètres de la sphère S, relative au même point, en lesquels se transforment les axes de l'ellipsoïde E. Ce trièdre est le trièdre des *axes de dilatation* relatifs au point matériel considéré.

L'étude complète de la déformation au voisinage d'un point matériel donné est achevée lorsque l'on connaît les valeurs des vingt et une quantités (13) et (15). Celles-ci, à leur tour, par les équations (8), (9), (10), (11), (12) et (14), dépendent des valeurs prises au point $\mu(a, b, c)$ par

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial\xi}{\partial a}, & \frac{\partial\xi}{\partial b}, & \frac{\partial\xi}{\partial c}, \\ \frac{\partial\eta}{\partial a}, & \frac{\partial\eta}{\partial b}, & \frac{\partial\eta}{\partial c}, \\ \frac{\partial\zeta}{\partial a}, & \frac{\partial\zeta}{\partial b}, & \frac{\partial\zeta}{\partial c}. \end{array}$$

Il peut arriver qu'une grandeur dépende seulement de la déformation proprement dite et nullement de l'orientation des axes de dilatation, soit au sein du milieu initial, soit au sein du milieu déformé. Cette grandeur sera alors une fonction symétrique de σ_1, σ_2, σ_3. En vertu de l'égalité (9), il revient au même de dire qu'elle est fonction symétrique des racines de l'équation (10) ou qu'elle est fonction rationnelle des coefficients de S^3, S^2, S, S^0 dans cette équation.

Développée, cette équation devient

$$(18)\qquad S^3-(3+2J_1)S^2+(3+4J_1+J_2)S-(1+2J_1+J_2+2J_3)=0,$$

en posant

$$(19)\qquad \begin{cases} J_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3, \\ J_2=4(\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_2)-(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2), \\ J_3=4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3-\varepsilon_1\gamma_1^2-\varepsilon_2\gamma_2^2-\varepsilon_3\gamma_3^2+\gamma_1\gamma_2\gamma_3. \end{cases}$$

Donc, *toute grandeur qui dépend uniquement de la déformation par laquelle on passe de l'état initial à l'état déformé, et nullement de l'orientation des axes de dilatation soit au sein du milieu initial, soit au sein du milieu déformé, est une fonction des trois seules grandeurs* J_1, J_2, J_3.

La signification mécanique du déterminant ω nous enseigne qu'il se trouve précisément dans ce cas; ce doit donc être une fonction des seules quantités J_1, J_2, J_3; en effet, si l'on part de l'expression de ω donnée par l'égalité (4 *bis*) et si l'on en forme le carré en tenant compte des égalités (8), on trouve

$$(20)\qquad \omega^2=\begin{vmatrix} 1+2\varepsilon_1 & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 1+2\varepsilon_2 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 1+2\varepsilon_3 \end{vmatrix}=1+2J_1+J_2+2J_3.$$

Cette expression peut se trouver d'une autre manière.

Prenons, dans l'état initial, un parallélépipède rectangle infiniment petit dont $\mu\mu'$ soit la diagonale et dont les arêtes, dirigées suivant les axes de dilatation, soient A_1, A_2, A_3; son volume est $A_1A_2A_3$ et sa masse $\rho_0A_1A_2A_3$, ρ_0 étant la densité au point μ dans l'état initial.

Dans l'état déformé, ce volume devient un nouveau parallélépipède rectangle, dont la diagonale est MM′, et dont les arêtes, dirigées suivant les axes de dilatation, sont X_1, X_2, X_3; son volume est $X_1 X_2 X_3$ et sa masse $\rho X_1 X_2 X_3$, ρ étant la densité au point M dans l'état déformé.

La masse se conservant dans la déformation, on a

$$\rho X_1 X_2 X_3 = \rho_0 A_1 A_2 A_3$$

ou, selon les égalités (17),

$$\rho = \rho_0 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3.$$

En vertu des égalités (9), cette égalité devient

$$\rho^2 S_1 S_2 S_3 = \rho_0^2$$

ou bien, en vertu de l'égalité (18),

$$(21) \qquad \rho^2(1 + 2J_1 + J_2 + 2J_3) = \rho_0^2.$$

Mais, d'autre part, on a l'égalité bien connue

$$(22) \qquad \rho\omega = \rho_0.$$

Ces égalités (21) et (22) redonnent l'égalité (20).

II. — Variation infiniment petite d'une déformation finie (1).

Imaginons qu'à partir d'un état déjà déformé quelconque, nous imposions au système une modification, réelle ou virtuelle, infiniment petite. Nous aurons, en cette modification,

$$\delta x = \delta\xi, \qquad \delta y = \delta\eta, \qquad \delta z = \delta\zeta.$$

Supposons les quantités $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ données en fonctions de a, b, c.

(1) P. DUHEM, *Sur quelques formules de cinématique, utiles dans la théorie générale de l'élasticité* (*Comptes rendus*, t. CXXXVI, 19 janvier 1903, p. 139).

Les égalités (8) nous donneront

3)
$$\left\{\begin{aligned}
\delta\varepsilon_1 &= \left(1+\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a}+\frac{\partial\eta}{\partial a}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial a}+\frac{\partial\zeta}{\partial a}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial a},\\
\delta\gamma_1 &= \frac{\partial\,\delta\eta}{\partial c}+\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial b}+\frac{\partial\xi}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial c}+\frac{\partial\xi}{\partial c}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial b}+\frac{\partial\eta}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial c}+\frac{\partial\eta}{\partial c}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial b}+\frac{\partial\zeta}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial c}+\frac{\partial\zeta}{\partial c}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial b},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.$$

les points remplaçant quatre égalités qui se tirent des deux premières en permutant les lettres a, b, c.

La modification considérée peut être regardée comme un déplacement infiniment petit imposé au système déjà déplacé et déformé; selon la méthode de Cauchy, ce déplacement infiniment petit est défini, en chaque point, par trois translations, qui sont $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, trois rotations $\frac{1}{2}\omega_1$, $\frac{1}{2}\omega_2$, $\frac{1}{2}\omega_3$, trois dilatations D_1, D_2, D_3 et trois glissements G_1, G_2, G_3.

Si l'on suppose les grandeurs $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ exprimées en fonctions de x, y, z, on a

$$(24)\quad\left\{\begin{array}{lll}
D_1=\dfrac{\partial\,\delta\xi}{\partial x}, & D_2=\dfrac{\partial\,\delta\eta}{\partial y}, & D_3=\dfrac{\partial\,\delta\zeta}{\partial z},\\[2ex]
2G_1=\dfrac{\partial\,\delta\zeta}{\partial y}+\dfrac{\partial\,\delta\eta}{\partial z}, & 2G_2=\dfrac{\partial\,\delta\xi}{\partial z}+\dfrac{\partial\,\delta\zeta}{\partial x}, & 2G_3=\dfrac{\partial\,\delta\eta}{\partial x}+\dfrac{\partial\,\delta\xi}{\partial y},\\[2ex]
\omega_1=\dfrac{\partial\,\delta\zeta}{\partial y}-\dfrac{\partial\,\delta\eta}{\partial z}, & \omega_2=\dfrac{\partial\,\delta\xi}{\partial z}-\dfrac{\partial\,\delta\zeta}{\partial x}, & \omega_3=\dfrac{\partial\,\delta\eta}{\partial x}-\dfrac{\partial\,\delta\xi}{\partial y}.
\end{array}\right.$$

Mais on a neuf égalités que l'on peut tirer de celle-ci :

$$(25)\qquad \frac{\partial\,\delta\xi}{\partial x}=\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}$$

en permutant entre elles les lettres x, y, z d'une part et les lettres ξ, η, ζ d'autre part; puis les égalités (5) donnent

$$(26)\quad\left\{\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial a}{\partial x}=\dfrac{1}{\varpi}\dfrac{D(y,z)}{D(b,c)}, & \dfrac{\partial a}{\partial y}=\dfrac{1}{\varpi}\dfrac{D(z,x)}{D(b,c)}, & \dfrac{\partial a}{\partial z}=\dfrac{1}{\varpi}\dfrac{D(x,y)}{D(b,c)},\\[2ex]
\dfrac{\partial b}{\partial x}=\dfrac{1}{\varpi}\dfrac{D(y,z)}{D(c,a)}, & \dfrac{\partial b}{\partial y}=\dfrac{1}{\varpi}\dfrac{D(z,x)}{D(c,a)}, & \dfrac{\partial b}{\partial z}=\dfrac{1}{\varpi}\dfrac{D(x,y)}{D(c,a)},\\[2ex]
\dfrac{\partial c}{\partial x}=\dfrac{1}{\varpi}\dfrac{D(y,z)}{D(a,b)}, & \dfrac{\partial c}{\partial y}=\dfrac{1}{\varpi}\dfrac{D(z,x)}{D(a,b)}, & \dfrac{\partial c}{\partial z}=\dfrac{1}{\varpi}\dfrac{D(x,y)}{D(a,b)}.
\end{array}\right.$$

Les égalités (24), (25) et (26) donnent

$$
(27)\quad \left\{
\begin{array}{l}
D_1 = \dfrac{1}{\mathfrak{D}}\left[\dfrac{D(y,z)}{D(b,c)}\dfrac{\partial\delta\xi}{\partial a} + \dfrac{D(y,z)}{D(c,a)}\dfrac{\partial\delta\xi}{\partial b} + \dfrac{D(y,z)}{D(a,b)}\dfrac{\partial\delta\xi}{\partial c}\right],\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{array}
\right.
$$

$$
(28)\quad \left\{
\begin{array}{l}
2G_1 = \dfrac{1}{\mathfrak{D}}\left[\dfrac{D(z,x)}{D(b,c)}\dfrac{\partial\delta\zeta}{\partial a} + \dfrac{D(z,x)}{D(c,a)}\dfrac{\partial\delta\zeta}{\partial b} + \dfrac{D(z,x)}{D(a,b)}\dfrac{\partial\delta\zeta}{\partial c}\right.\\
\qquad\qquad \left. + \dfrac{D(x,y)}{D(b,c)}\dfrac{\partial\delta\eta}{\partial a} + \dfrac{D(x,y)}{D(c,a)}\dfrac{\partial\delta\eta}{\partial b} + \dfrac{D(x,y)}{D(a,b)}\dfrac{\partial\delta\eta}{\partial c}\right],\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{array}
\right.
$$

$$
(29)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\omega_1 = \dfrac{1}{\mathfrak{D}}\left[\dfrac{D(z,x)}{D(b,c)}\dfrac{\partial\delta\zeta}{\partial a} + \dfrac{D(z,x)}{D(c,a)}\dfrac{\partial\delta\zeta}{\partial b} + \dfrac{D(z,x)}{D(a,b)}\dfrac{\partial\delta\zeta}{\partial c}\right.\\
\qquad\qquad \left. - \dfrac{D(x,y)}{D(b,c)}\dfrac{\partial\delta\eta}{\partial a} - \dfrac{D(x,y)}{D(c,a)}\dfrac{\partial\delta\eta}{\partial b} - \dfrac{D(x,y)}{D(a,b)}\dfrac{\partial\delta\eta}{\partial c}\right],\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
\right.
$$

Dans chacun de ces trois groupes, les points remplacent deux égalités qui se déduisent de la première en permutant entre elles d'une part les lettres ξ, η, ζ, d'autre part les lettres x, y, z.

Des formules (29) on tire sans peine celles dont Cauchy a fait usage pour établir, en Hydrodynamique, le théorème de Lagrange et la conservation du mouvement tourbillonnaire.

Les six quantités $\delta\varepsilon_1$, $\delta\varepsilon_2$, $\delta\varepsilon_3$, $\delta\gamma_1$, $\delta\gamma_2$, $\delta\gamma_3$ s'expriment sans peine en fonctions linéaires et homogènes de D_1, D_2, D_3, G_1, G_2, G_3.

Les égalités (2) et (23) donnent

$$
\begin{array}{l}
\delta\varepsilon_1 = \dfrac{\partial x}{\partial a}\dfrac{\partial\delta\xi}{\partial c} + \dfrac{\partial y}{\partial a}\dfrac{\partial\delta\eta}{\partial a} + \dfrac{\partial z}{\partial a}\dfrac{\partial\delta\zeta}{\partial a},\\
\delta\gamma_1 = \dfrac{\partial x}{\partial b}\dfrac{\partial\delta\xi}{\partial c} + \dfrac{\partial x}{\partial c}\dfrac{\partial\delta\xi}{\partial b} + \dfrac{\partial y}{\partial b}\dfrac{\partial\delta\eta}{\partial c} + \dfrac{\partial y}{\partial c}\dfrac{\partial\delta\eta}{\partial b} + \dfrac{\partial z}{\partial b}\dfrac{\partial\delta\zeta}{\partial c} + \dfrac{\partial z}{\partial c}\dfrac{\partial\delta\zeta}{\partial b},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

Développons les dérivées partielles de $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ par rapport à a, b, c en fonctions des dérivées partielles des mêmes quantités par rapport à x, y, z, et nous trouverons

$$
(30)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta\varepsilon_1 &= \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2 D_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2 D_2 + \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)^2 D_3 + 2\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial a} G_1 + 2\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial a} G_2 + 2\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial a} G_3,\\
\delta\varepsilon_2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)^2 D_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)^2 D_2 + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)^2 D_3 + 2\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial b} G_1 + 2\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial b} G_2 + 2\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial b} G_3,\\
\delta\varepsilon_3 &= \left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)^2 D_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)^2 D_2 + \left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)^2 D_3 + 2\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial c} G_1 + 2\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial c} G_2 + 2\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial c} G_3,\\
\delta\gamma_1 &= 2\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} D_1 + 2\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} D_2 + 2\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} D_3\\
&\quad + 2\left(\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}\right) G_1 + 2\left(\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b}\right) G_2 + 2\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b}\right) G_3,\\
\delta\gamma_2 &= 2\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a} D_1 + 2\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a} D_2 + 2\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a} D_3\\
&\quad + 2\left(\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c}\right) G_1 + 2\left(\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial c}\right) G_2 + 2\left(\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial c}\right) G_3,\\
\delta\gamma_3 &= 2\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} D_1 + 2\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} D_2 + 2\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c} D_3\\
&\quad + 2\left(\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a}\right) G_1 + 2\left(\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a}\right) G_2 + 2\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}\right) G_3.
\end{aligned}
\right.
$$

Moyennant les égalités (2), on peut, si l'on veut, dans ces égalités (30), substituer les dérivées partielles des quantités ξ, η, ζ aux dérivées partielles des quantités x, y, z.

Aux axes rectangulaires considérés, substituons un nouveau système de coordonnées rectangulaires x', y', z'. Désignons le cosinus de l'angle formé par un axe ancien, l'axe des x, par exemple, et un axe nouveau, l'axe des x', par exemple, au moyen du symbole (x, x'). Au moyen de D_1, D_2, D_3, G_1, G_2, G_3, formons les expressions des trois dilatations D'_1, D'_2, D'_3 et des trois glissements G'_1, G'_2, G'_3 rapportés aux nouveaux axes.

Les composantes du déplacement virtuel suivant les nouveaux axes sont

$$
\begin{aligned}
\delta\xi' &= (x, x')\,\delta\xi + (y, x')\,\delta\eta + (z, x')\,\delta\zeta,\\
\delta\eta' &= (x, y')\,\delta\xi + (y, y')\,\delta\eta + (z, y')\,\delta\zeta,\\
\delta\zeta' &= (x, z')\,\delta\xi + (y, z')\,\delta\eta + (z, z')\,\delta\zeta.
\end{aligned}
$$

D'ailleurs, nous avons

$$D_1' = \frac{\partial \delta \xi'}{\partial x'} = (x, x') \frac{\partial \delta \xi}{\partial x'} + (y, x') \frac{\partial \delta \eta}{\partial x'} + (z, x') \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x'}$$

et

$$\frac{\partial \delta \xi}{\partial x'} = (x, x') \frac{\partial \delta \xi}{\partial x} + (y, x') \frac{\partial \delta \xi}{\partial y} + (z, x') \frac{\partial \delta \xi}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \delta \eta}{\partial x'} = (x, x') \frac{\partial \delta \eta}{\partial x} + (y, x') \frac{\partial \delta \eta}{\partial y} + (z, x') \frac{\partial \delta \eta}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \delta \zeta}{\partial x'} = (x, x') \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} + (y, x') \frac{\partial \delta \zeta}{\partial y} + (z, x') \frac{\partial \delta \zeta}{\partial z}.$$

Ces égalités, jointes aux égalités (24), donnent la première égalité

$$(31) \left\{ \begin{aligned} D_1' &= (x, x')^2 D_1 + (y, x')^2 D_2 + (z, x')^2 D_3 \\ &\quad + 2(y, x')(z, x') G_1 + 2(z, x')(x, x') G_2 + 2(x, x')(y, x') G_3, \\ D_2' &= (x, y')^2 D_1 + (y, y')^2 D_2 + (z, y')^2 D_3 \\ &\quad + 2(y, y')(z, y') G_1 + 2(z, y')(x, y') G_2 + 2(x, y')(y, y') G_3, \\ D_3' &= (x, z')^2 D_1 + (y, z')^2 D_2 + (z, z')^2 D_3 \\ &\quad + 2(y, z')(z, z') G_1 + 2(z, z')(x, z') G_2 + 2(x, z')(y, z') G_3. \end{aligned} \right.$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

Une démonstration semblable à la précédente nous donnera les formules

$$(32) \left\{ \begin{aligned} 2G_1' &= 2(x, y')(x, z') D_1 + 2(y, y')(y, z') D_2 + 2(z, y')(z, z') D_3 \\ &\quad + 2[(z, y')(y, z') + (y, y')(z, z')] G_1 + 2[(x, y')(z, z') + (z, y')(x, z')] G_2 \\ &\qquad + 2[(y, y')(x, z') + (x, y')(y, z')] G_3 \\ 2G_2' &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 2G_3' &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \end{aligned} \right.$$

Les expressions de G_2' et de G_3' se tirent de l'expression de G_1' en permutant entre elles les lettres x', y', z'.

Supposons, en particulier, que les nouveaux axes soient les axes de dilatation relatifs au point M du milieu déformé (x, y, z); rapportés à ces axes, les trois dilatations infiniment petites et les trois glissements infiniment petits qui correspondent à la variation infiniment petite imposée au milieu déjà déformé, seront

$$
(33)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Delta_1 &= D_1\mathcal{X}_1^2 + D_2\mathcal{Y}_1^2 + D_3\mathcal{Z}_1^2 + 2G_1\mathcal{Y}_1\mathcal{Z}_1 + 2G_2\mathcal{Z}_1\mathcal{X}_1 + 2G_3\mathcal{X}_1\mathcal{Y}_1,\\
\Delta_2 &= D_1\mathcal{X}_2^2 + D_2\mathcal{Y}_2^2 + D_3\mathcal{Z}_2^2 + 2G_1\mathcal{Y}_2\mathcal{Z}_2 + 2G_2\mathcal{Z}_2\mathcal{X}_2 + 2G_3\mathcal{X}_2\mathcal{Y}_2.\\
\Delta_3 &= D_1\mathcal{X}_3^2 + D_2\mathcal{Y}_3^2 + D_3\mathcal{Z}_3^2 + 2G_1\mathcal{Y}_3\mathcal{Z}_3 + 2G_2\mathcal{Z}_3\mathcal{X}_3 + 2G_3\mathcal{X}_3\mathcal{Y}_3,\\
\Gamma_1 &= \mathcal{X}_2\mathcal{X}_3 D_1 + \mathcal{Y}_2\mathcal{Y}_3 D_2 + \mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_3 D_3\\
&\quad + (\mathcal{Z}_2\mathcal{Y}_3 + \mathcal{Y}_2\mathcal{Z}_3)G_1 + (\mathcal{X}_2\mathcal{Z}_3 + \mathcal{Z}_2\mathcal{X}_3)G_2 + (\mathcal{Y}_2\mathcal{X}_3 + \mathcal{X}_2\mathcal{Y}_3)G_3,\\
\Gamma_2 &= \mathcal{X}_3\mathcal{X}_1 D_1 + \mathcal{Y}_3\mathcal{Y}_1 D_2 + \mathcal{Z}_3\mathcal{Z}_1 D_3\\
&\quad + (\mathcal{Z}_3\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_3\mathcal{Z}_1)G_1 + (\mathcal{X}_3\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_3\mathcal{X}_1)G_2 + (\mathcal{Y}_3\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_3\mathcal{Y}_1)G_3,\\
\Gamma_3 &= \mathcal{X}_1\mathcal{X}_2 D_1 + \mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2 D_2 + \mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2 D_3\\
&\quad + (\mathcal{Z}_1\mathcal{Y}_2 + \mathcal{Y}_1\mathcal{Z}_2)G_1 + (\mathcal{X}_1\mathcal{Z}_2 + \mathcal{Z}_1\mathcal{X}_2)G_2 + (\mathcal{Y}_1\mathcal{X}_2 + \mathcal{X}_1\mathcal{Y}_2)G_3.
\end{aligned}
\right.
$$

Les six quantités Δ_1, Δ_2, Δ_3, Γ_1, Γ_2, Γ_3 sont des fonctions déterminées de a, b, c (ou de x, y, z) lorsque l'on connaît, en fonctions des mêmes variables, les six quantités ξ, η, ζ, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$. Nous aurons souvent, par la suite, à considérer les six fonctions (33).

On peut se proposer de rechercher quelle variation subissent, au cours de la modification virtuelle considérée, les quantités σ_1, σ_2, σ_3 et comment se modifient les axes de dilatation soit au sein du milieu initial, soit au sein du milieu déformé.

Les égalités (19) donnent, en premier lieu,

$$
(34)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta J_1 &= \delta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2 + \delta\varepsilon_3,\\
\delta J_2 &= 4(\varepsilon_2+\varepsilon_3)\,\delta\varepsilon_1 + 4(\varepsilon_3+\varepsilon_1)\,\delta\varepsilon_2 + 4(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,\delta\varepsilon_3 - 2\gamma_1\,\delta\gamma_1 - 2\gamma_2\,\delta\gamma_2 - 2\gamma_3\,\delta\gamma_3,\\
\delta J_3 &= (4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2)\,\delta\varepsilon_1 + (4\varepsilon_3\varepsilon_1 - \gamma_2^2)\,\delta\varepsilon_2 + (4\varepsilon_1\varepsilon_2 - \gamma_3^2)\,\delta\varepsilon_3\\
&\quad + (\gamma_2\gamma_3 - 2\varepsilon_1\gamma_1)\,\delta\gamma_1 + (\gamma_3\gamma_1 - 2\varepsilon_2\gamma_2)\,\delta\gamma_2 + (\gamma_1\gamma_2 - 2\varepsilon_3\gamma_3)\,\delta\gamma_3.
\end{aligned}
\right.
$$

L'égalité (18) donne alors

$$
(35)\quad
\begin{aligned}
&[3S^2 - (6 + 4J_1)S + (3 + 4J_1 + J_2)]\,\delta S\\
&\qquad = 2(S-1)^2\,\delta J_1 - (S-1)\,\delta J_2 + 2\,\delta J_3.
\end{aligned}
$$

Si, dans cette égalité, on remplace δJ_1, δJ_2, δJ_3 par leurs expressions (34) et si, ensuite, on substitue à S soit S_1, soit S_2, soit S_3, on obtient les expressions de δS_1, δS_2, δS_3 en fonctions linéaires et homogènes de $\delta\varepsilon_1$, $\delta\varepsilon_2$, $\delta\varepsilon_3$, $\delta\gamma_1$, $\delta\gamma_2$, $\delta\gamma_3$.

L'égalité (9) donne

$$\delta\sigma = -\frac{\sigma}{2}\delta S, \tag{36}$$

expression qui permettra de calculer $\delta\sigma_1$, $\delta\sigma_2$, $\delta\sigma_3$ en fonctions linéaires et homogènes des mêmes quantités.

Les égalités (11) et (12) donnent

$$\left\{\begin{array}{l} (1+2\varepsilon_1-S)\,\delta\mathcal{A}+\gamma_3\,\delta\mathcal{B}+\gamma_2\,\delta\mathcal{C}+\mathcal{A}(2\,\delta\varepsilon_1-\delta S)+\mathcal{B}\,\delta\gamma_3+\mathcal{C}\,\delta\gamma_2=0,\\ \gamma_3\,\delta\mathcal{A}+(1+2\varepsilon_2-S)\,\delta\mathcal{B}+\gamma_1\,\delta\mathcal{C}+\mathcal{A}\,\delta\gamma_3+\mathcal{B}(2\,\delta\varepsilon_2-\delta S)+\mathcal{C}\,\delta\gamma_1=0,\\ \gamma_2\,\delta\mathcal{A}+\gamma_1\,\delta\mathcal{B}+(1+2\varepsilon_3-S)\,\delta\mathcal{C}+\mathcal{A}\,\delta\gamma_2+\mathcal{B}\,\delta\gamma_1+\mathcal{C}(2\,\delta\varepsilon_3-\delta S)=0, \end{array}\right. \tag{37}$$

$$\mathcal{A}\,\delta\mathcal{A}+\mathcal{B}\,\delta\mathcal{B}+\mathcal{C}\,\delta\mathcal{C}=0. \tag{38}$$

Les trois équations (37) ne sont pas plus indépendantes les unes des autres que les équations (11) dont elles proviennent; chacune d'elles est la conséquence des deux autres. Deux quelconques de ces équations, jointes à l'équation (38) et à l'équation (35), déterminent $\delta\varepsilon_1$, $\delta\varepsilon_2$, $\delta\varepsilon_3$, $\delta\gamma_1$, $\delta\gamma_2$, $\delta\gamma_3$.

Enfin, la première égalité (15) donne

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{X} = {} & \left[\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)\mathcal{A}+\frac{\partial\xi}{\partial b}\mathcal{B}+\frac{\partial\xi}{\partial c}\mathcal{C}\right]\delta\sigma \\ & +\left[\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)\delta\mathcal{A}+\frac{\partial\xi}{\partial b}\delta\mathcal{B}+\frac{\partial\xi}{\partial c}\delta\mathcal{C}\right]\sigma \\ & +\left(\mathcal{A}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a}+\mathcal{B}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial b}+\mathcal{C}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial c}\right)\sigma. \end{aligned} \tag{39}$$

Mais les égalités (2) permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a} &= \left(1+\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial a}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial a}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial z},\\ \frac{\partial\,\delta\xi}{\partial b} &= \frac{\partial\xi}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial x}+\left(1+\frac{\partial\eta}{\partial b}\right)\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial b}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial z},\\ \frac{\partial\,\delta\xi}{\partial c} &= \frac{\partial\xi}{\partial c}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial c}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial y}+\left(1+\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial z}. \end{aligned}$$

Ces égalités, jointes aux égalités (15), transforment l'égalité (39) en la première des égalités

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta\mathcal{X} &= \frac{\mathcal{X}}{\sigma}\,\delta\sigma + \sigma\left[\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)\delta\mathcal{A} + \frac{\partial\xi}{\partial b}\,\delta\mathcal{B} + \frac{\partial\xi}{\partial c}\,\delta\mathcal{C}\right] \\
&\quad + \frac{1}{\sigma}\left(\mathcal{X}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial x} + \mathcal{Y}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial y} + \mathcal{Z}\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial z}\right), \\
\delta\mathcal{Y} &= \frac{\mathcal{Y}}{\sigma}\,\delta\sigma + \sigma\left[\frac{\partial\eta}{\partial a}\,\delta\mathcal{A} + \left(1+\frac{\partial\eta}{\partial b}\right)\delta\mathcal{B} + \frac{\partial\eta}{\partial c}\,\delta\mathcal{C}\right] \\
&\quad + \frac{1}{\sigma}\left(\mathcal{X}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial x} + \mathcal{Y}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial y} + \mathcal{Z}\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial z}\right), \\
\delta\mathcal{Z} &= \frac{\mathcal{Z}}{\sigma}\,\delta\sigma + \sigma\left(\frac{\partial\zeta}{\partial a}\,\delta\mathcal{A} + \frac{\partial\zeta}{\partial b}\,\delta\mathcal{B} + \frac{\partial\zeta}{\partial c}\,\delta\mathcal{C}\right) \\
&\quad + \frac{1}{\sigma}\left(\mathcal{X}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial x} + \mathcal{Y}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial y} + \mathcal{Z}\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right.$$

Au second membre de chacune de ces égalités, les deux premiers termes sont des fonctions linéaires et homogènes de $\delta\varepsilon_1$, $\delta\varepsilon_2$, $\delta\varepsilon_3$, $\delta\gamma_1$, $\delta\gamma_2$, $\delta\gamma_3$, mais il n'en est pas de même du troisième terme, qui ne se laisse point écrire sous cette forme.

CHAPITRE II.

ÉQUILIBRE ET MOUVEMENT D'UN CORPS VITREUX.

I. — Du potentiel interne d'un corps vitreux.

Considérons un système continu et divisons-le en masses infiniment petites; soient dm, dm' deux quelconques de ces masses. Le potentiel $\mathcal{F}$ de ce système peut toujours se mettre [1] sous la forme

$$(41)\qquad \mathcal{F} = \int \Phi\, dm + \frac{1}{2}\int\!\!\int \Psi\, dm\, dm',$$

[1] *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. X, 1893, p. 183).

chacune des intégrations s'étendant à la masse entière du système et les grandeurs Φ et Ψ dépendant d'éléments variables qui ont été énumérés dans notre Mémoire *Sur le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique*.

Nous allons particulariser de la manière suivante la nature des systèmes que nous allons étudier.

Nous supposerons que l'on puisse toujours concevoir, pour chacun des milieux continus que nous aurons à considérer, un état où il serait homogène, où il aurait en tout point la même densité et où il serait *isotrope;* nous prendrons cet état pour *état initial.* Nous supposerons, en second lieu, que l'état d'une masse élémentaire dans un état déformé quelconque dépende de sa température absolue T et des trois grandeurs σ_1, σ_2, σ_3, *comptées à partir de l'état initial,* mais point de l'orientation des axes de dilatation en l'état déformé.

Quand un milieu remplira ces conditions, nous dirons que c'est un *milieu vitreux;* un milieu non vitreux sera dit *milieu cristallisé.*

En un milieu vitreux, la fonction Φ, qui est une fonction de l'état de la masse dm, *y compris sa température absolue,* dépendra de T et des grandeurs $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ relatives à un point de la masse dm, sans dépendre de l'orientation des axes de dilatation au sein de la masse dm. Dès lors, selon ce qui a été vu au Chapitre I, § I, elle dépendra de T et des valeurs de J_1, J_2, J_3 en un point de la masse dm :

$$\Phi = \Phi(T, J_1, J_2, J_3). \tag{42}$$

Quant à la fonction Ψ, elle ne peut pas dépendre des températures T, T' des éléments dm, dm', mais elle peut dépendre :

1° Des grandeurs σ_1, σ_2, σ_3 relatives à l'élément dm, et cela d'une manière symétrique, partant des valeurs J_1, J_2, J_3 relatives à un point de cet élément;

2° Des grandeurs σ'_1, σ'_2, σ'_3 relatives à l'élément dm', partant des valeurs J'_1, J'_2, J'_3 relatives à un point de cet élément;

3° De la distance r d'un point de l'élément dm à un point de l'élément dm';

4° De l'orientation mutuelle des axes de dilatation de l'élément dm et des axes de dilatation de l'élément dm'.

Cette orientation est définie par les neuf cosinus dont on obtient les valeurs en prenant l'expression

$$(i, j') = \mathfrak{X}_i \mathfrak{X}'_j + \mathfrak{Y}_i \mathfrak{Y}'_j + \mathfrak{Z}_i \mathfrak{Z}'_j,$$

et en y remplaçant de toutes les manières possibles l'indice i, d'une part, et l'indice j', d'autre part, par chacun des indices 1, 2, 3;

5° De l'orientation de la droite de jonction r des deux éléments par rapport aux axes de dilatation du premier élément; cette orientation est définie par les trois cosinus

$$\begin{aligned}
(r, 1) &= \frac{x'-x}{r}\mathfrak{X}_1 + \frac{y'-y}{r}\mathfrak{Y}_1 + \frac{z'-z}{r}\mathfrak{Z}_1,\\
(r, 2) &= \frac{x'-x}{r}\mathfrak{X}_2 + \frac{y'-y}{r}\mathfrak{Y}_2 + \frac{z'-z}{r}\mathfrak{Z}_2,\\
(r, 3) &= \frac{x'-x}{r}\mathfrak{X}_3 + \frac{y'-y}{r}\mathfrak{Y}_3 + \frac{z'-z}{r}\mathfrak{Z}_3;
\end{aligned}$$

6° De l'orientation de la droite de jonction r des deux éléments par rapport aux axes de dilatation du second élément; cette orientation est définie par les trois cosinus

$$\begin{aligned}
(r', 1') &= \frac{x-x'}{r}\mathfrak{X}'_1 + \frac{y-y'}{r}\mathfrak{Y}'_1 + \frac{z-z'}{r}\mathfrak{Z}'_1,\\
(r', 2') &= \frac{x-x'}{r}\mathfrak{X}'_2 + \frac{y-y'}{r}\mathfrak{Y}'_2 + \frac{z-z'}{r}\mathfrak{Z}'_2,\\
(r', 3') &= \frac{x-x'}{r}\mathfrak{X}'_3 + \frac{y-y'}{r}\mathfrak{Y}'_3 + \frac{z-z'}{r}\mathfrak{Z}'_3.
\end{aligned}$$

En résumé, Ψ peut dépendre des variables suivantes :

$$(43) \qquad \left\{\begin{array}{llllll}
J_1, & J_2, & J_3, & J'_1, & J'_2, & J'_3,\\
\mathfrak{X}_i, & \mathfrak{Y}_i, & \mathfrak{Z}_i, & \mathfrak{X}'_i, & \mathfrak{Y}'_i, & \mathfrak{Z}'_i,\\
\multicolumn{6}{l}{(x'-x), \quad (y'-y), \quad (z'-z).}
\end{array}\right.$$

Un cas très simple est celui où les actions mutuelles entre éléments du milieu sont *newtoniennes;* on a alors simplement

$$(44) \qquad \Psi = \Psi(r).$$

II. — Variation virtuelle du potentiel interne.

Posons, en général,

$$(45)\qquad \left\{ \begin{aligned} e_1 &= -\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}, & e_2 &= -\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}, & e_3 &= -\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_3}, \\ g_1 &= -\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_1}, & g_2 &= -\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_2}, & g_3 &= -\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_3}, \end{aligned} \right.$$

égalités qui, en vertu des égalités (34) et (42), deviendront, pour un milieu vitreux,

$$(45\ bis)\qquad \left\{ \begin{aligned} e_1 &= -\frac{\partial\Phi}{\partial J_1} - 4(\varepsilon_2+\varepsilon_3)\frac{\partial\Phi}{\partial J_2} - (4\varepsilon_2\varepsilon_3-\gamma_1^2)\frac{\partial\Phi}{\partial J_3}, \\ e_2 &= -\frac{\partial\Phi}{\partial J_1} - 4(\varepsilon_3+\varepsilon_1)\frac{\partial\Phi}{\partial J_2} - (4\varepsilon_3\varepsilon_1-\gamma_2^2)\frac{\partial\Phi}{\partial J_3}, \\ e_3 &= -\frac{\partial\Phi}{\partial J_1} - 4(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\frac{\partial\Phi}{\partial J_2} - (4\varepsilon_1\varepsilon_2-\gamma_3^2)\frac{\partial\Phi}{\partial J_3}, \\ g_1 &= 2\gamma_1\frac{\partial\Phi}{\partial J_2} - (2\varepsilon_1\gamma_1-\gamma_2\gamma_3)\frac{\partial\Phi}{\partial J_3}, \\ g_2 &= 2\gamma_2\frac{\partial\Phi}{\partial J_2} - (2\varepsilon_2\gamma_2-\gamma_3\gamma_1)\frac{\partial\Phi}{\partial J_3}, \\ g_3 &= 2\gamma_3\frac{\partial\Phi}{\partial J_2} - (2\varepsilon_3\gamma_3-\gamma_1\gamma_2)\frac{\partial\Phi}{\partial J_3}. \end{aligned} \right.$$

Ces six quantités e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3 ont des valeurs déterminées, au point (x, y, z) et à l'instant t, lorsque l'on connaît seulement les valeurs, en ce point et à cet instant, de la température T et des six quantités

$$\varepsilon_1,\quad \varepsilon_2,\quad \varepsilon_3,\qquad \gamma_1,\quad \gamma_2,\quad \gamma_3.$$

En vertu des égalités (45), la variation virtuelle la plus générale de Φ est

$$(46)\qquad -\delta\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial T}\delta T + e_1\,\delta\varepsilon_1 + e_2\,\delta\varepsilon_2 + e_3\,\delta\varepsilon_3 + g_1\,\delta\gamma_1 + g_2\,\delta\gamma_2 + g_3\,\delta\gamma_3.$$

La variation virtuelle la plus générale de Ψ peut, en se rappelant ce que nous avons dit au Chapitre I au sujet des variations des variables (43), se mettre sous la forme

$$\delta\Psi = A + A' + B + B' + C + C'. \tag{47}$$

Les termes A, B, C sont les suivants :

$$A = \frac{\partial\Psi}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\,\delta z = \frac{\partial\Psi}{\partial x}\,\delta\xi + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\,\delta\eta + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\,\delta\zeta, \tag{48}$$

$$\begin{aligned} B = \sum_{j=1,2,3} \Bigg[& \frac{\partial\Psi}{\partial \mathfrak{X}_j}\,\frac{1}{\sigma_j}\left(\mathfrak{X}_j\,\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial x} + \mathfrak{Y}_i\,\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial y} + \mathfrak{Z}_i\,\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial z}\right) \\ & + \frac{\partial\Psi}{\partial \mathfrak{Y}_j}\,\frac{1}{\sigma_j}\left(\mathfrak{X}_j\,\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial x} + \mathfrak{Y}_j\,\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial y} + \mathfrak{Z}_j\,\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial z}\right) \\ & + \frac{\partial\Psi}{\partial \mathfrak{Z}_j}\,\frac{1}{\sigma_j}\left(\mathfrak{X}_j\,\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial x} + \mathfrak{Y}_j\,\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial y} + \mathfrak{Z}_j\,\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial z}\right)\Bigg], \end{aligned} \tag{49}$$

$$C = \psi_1\,\delta\varepsilon_1 + \psi_2\,\delta\varepsilon_2 + \psi_3\,\delta\varepsilon_3 + \chi_1\,\delta\gamma_1 + \chi_2\,\delta\gamma_2 + \chi_3\,\delta\gamma_3, \tag{50}$$

ψ_1, ψ_2, ψ_3, χ_1, χ_2, χ_3 étant des quantités dont les valeurs dépendent des valeurs prises, à l'instant t, par ξ, η, ζ et leurs neuf dérivées par rapport à x, y, z, en un point (x, y, z) de l'élément dm et des valeurs prises au même instant, par les mêmes quantités, en un point x', y', z' de l'élément dm'.

Les termes A′, B′, C′ se tirent respectivement des termes A, B, C en intervertissant les rôles des deux éléments dm et dm'.

On voit alors que l'on a

$$\delta \int\!\!\int \Psi\,dm'\,dm = 2\int\!\!\int (A + B + C)\,dm'\,dm. \tag{51}$$

Posons

$$\left\{\begin{array}{lll} X_i = -\displaystyle\int \frac{\partial\Psi}{\partial x}\,dm', & Y_i = -\displaystyle\int \frac{\partial\Psi}{\partial y}\,dm', & Z_i = -\displaystyle\int \frac{\partial\Psi}{\partial z}\,dm', \\ L_{1i} = -\displaystyle\int \frac{\partial\Psi}{\partial \mathfrak{X}_1}\,dm', & M_{1i} = -\displaystyle\int \frac{\partial\Psi}{\partial \mathfrak{Y}_1}\,dm', & N_{1i} = -\displaystyle\int \frac{\partial\Psi}{\partial \mathfrak{Z}_1}\,dm', \\ L_{2i} = -\displaystyle\int \frac{\partial\Psi}{\partial \mathfrak{X}_2}\,dm', & M_{2i} = -\displaystyle\int \frac{\partial\Psi}{\partial \mathfrak{Y}_2}\,dm', & N_{2i} = -\displaystyle\int \frac{\partial\Psi}{\partial \mathfrak{Z}_2}\,dm', \\ L_{3i} = -\displaystyle\int \frac{\partial\Psi}{\partial \mathfrak{X}_3}\,dm', & M_{3i} = -\displaystyle\int \frac{\partial\Psi}{\partial \mathfrak{Y}_3}\,dm', & N_{3i} = -\displaystyle\int \frac{\partial\Psi}{\partial \mathfrak{Z}_3}\,dm', \\ \mathcal{E}_{1i} = -\displaystyle\int \psi_1\,dm', & \mathcal{E}_{2i} = -\displaystyle\int \psi_2\,dm', & \mathcal{E}_{3i} = -\displaystyle\int \psi_3\,dm', \\ \mathcal{G}_{1i} = -\displaystyle\int \chi_1\,dm', & \mathcal{G}_{2i} = -\displaystyle\int \chi_2\,dm', & \mathcal{G}_{3i} = -\displaystyle\int \chi_3\,dm'. \end{array}\right. \tag{52}$$

Les dix-huit quantités ainsi définies ne dépendent pas seulement de l'élément dm. Leurs valeurs au point (x, y, z) et à l'instant t dépendent de l'état du système tout entier à cet instant.

Les égalités (48), (49), (50), (51), (52) donnent

$$
\begin{aligned}
(53)\quad \frac{1}{2}\,\delta \int\!\!\int \Psi\, dm'\, dm = & -\int (X_t\,\delta\xi + Y_t\,\delta\eta + Z_t\,\delta\zeta)\, dm \\
& -\int \Bigg[\left(\frac{L_{1t}\,\mathfrak{X}_1}{\sigma_1} + \frac{L_{2t}\,\mathfrak{X}_2}{\sigma_2} + \frac{L_{3t}\,\mathfrak{X}_3}{\sigma_3}\right)\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial x} \\
& \qquad + \left(\frac{L_{1t}\,\mathfrak{Y}_1}{\sigma_1} + \frac{L_{2t}\,\mathfrak{Y}_2}{\sigma_2} + \frac{L_{3t}\,\mathfrak{Y}_3}{\sigma_3}\right)\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial y} \\
& \qquad + \left(\frac{L_{1t}\,\mathfrak{Z}_1}{\sigma_1} + \frac{L_{2t}\,\mathfrak{Z}_2}{\sigma_2} + \frac{L_{3t}\,\mathfrak{Z}_3}{\sigma_3}\right)\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial z} \\
& \qquad + \left(\frac{M_{1t}\,\mathfrak{X}_1}{\sigma_1} + \frac{M_{2t}\,\mathfrak{X}_2}{\sigma_2} + \frac{M_{3t}\,\mathfrak{X}_3}{\sigma_3}\right)\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial x} \\
& \qquad + \left(\frac{M_{1t}\,\mathfrak{Y}_1}{\sigma_1} + \frac{M_{2t}\,\mathfrak{Y}_2}{\sigma_2} + \frac{M_{3t}\,\mathfrak{Y}_3}{\sigma_3}\right)\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial y} \\
& \qquad + \left(\frac{M_{1t}\,\mathfrak{Z}_1}{\sigma_1} + \frac{M_{2t}\,\mathfrak{Z}_2}{\sigma_2} + \frac{M_{3t}\,\mathfrak{Z}_3}{\sigma_3}\right)\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial z} \\
& \qquad + \left(\frac{N_{1t}\,\mathfrak{X}_1}{\sigma_1} + \frac{N_{2t}\,\mathfrak{X}_2}{\sigma_2} + \frac{N_{3t}\,\mathfrak{X}_3}{\sigma_3}\right)\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial x} \\
& \qquad + \left(\frac{N_{1t}\,\mathfrak{Y}_1}{\sigma_1} + \frac{N_{2t}\,\mathfrak{Y}_2}{\sigma_2} + \frac{N_{3t}\,\mathfrak{Y}_3}{\sigma_3}\right)\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial y} \\
& \qquad + \left(\frac{N_{1t}\,\mathfrak{Z}_1}{\sigma_1} + \frac{N_{2t}\,\mathfrak{Z}_2}{\sigma_2} + \frac{N_{3t}\,\mathfrak{Z}_3}{\sigma_3}\right)\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial z}\Bigg]\, dm \\
& -\int (\mathcal{E}_{1t}\,\delta\varepsilon_1 + \mathcal{E}_{2t}\,\delta\varepsilon_2 + \mathcal{E}_{3t}\,\delta\varepsilon_3 + \mathcal{G}_{1t}\,\delta\gamma_1 + \mathcal{G}_{2t}\,\delta\gamma_2 + \mathcal{G}_{3t}\,\delta\gamma_3)\, dm.
\end{aligned}
$$

Les égalités (41), (46) et (53) font connaître la variation subie par le potentiel interne $\mathcal{F}$ en une modification virtuelle quelconque du système.

L'expression de cette variation est d'une extrême complication.

Elle se simplifie beaucoup lorsque les actions mutuelles des divers éléments du système sont *newtoniennes*.

Dans ce cas, en effet, si l'on pose

$$(54)\qquad \left\{\begin{aligned} X_i &= -\int \frac{d\Psi(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}\,dm', \\ Y_i &= -\int \frac{d\Psi(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}\,dm', \\ Z_i &= -\int \frac{d\Psi(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}\,dm', \end{aligned}\right.$$

l'égalité (44) donne simplement

$$(55)\qquad \frac{1}{2}\,\delta\int\int \Psi\,dm'\,dm = -\int (X_i\,\delta\xi + Y_i\,\delta\eta + Z_i\,\delta\zeta)\,dm.$$

III. — Travail des actions extérieures.

Nous admettrons que le travail virtuel $d\varpi_e$ des actions extérieures se compose de deux termes

$$(56)\qquad d\varpi_e = d\varpi'_e + d\varpi''_e.$$

Le premier est le travail de pressions appliquées en chaque point de la surface S qui limite le système dans son état actuel de déformation

$$(57)\qquad \left\{\begin{aligned} d\varpi'_e &= \int (P_x\,\delta x + P_y\,\delta y + P_z\,\delta z)\,dS, \\ &= \int (P_x\,\delta\xi + P_y\,\delta\eta + P_z\,\delta\zeta)\,dS. \end{aligned}\right.$$

Le second provient d'actions exercées sur chacun des éléments de masse du milieu, actions analogues à celles que ces éléments exercent les uns sur les autres. L'expression de ce travail sera donc de la forme

$$(58)\qquad \begin{aligned} d\varpi''_e = {} & \int (X_e\,\delta\xi + Y_e\,\delta\eta + Z_e\,\delta\zeta)\,dm \\ & + \int \left[\left(\frac{L_{1e}\,\mathfrak{X}_1}{\sigma_1} + \frac{L_{2e}\,\mathfrak{X}_2}{\sigma_2} + \frac{L_{3e}\,\mathfrak{X}_3}{\sigma_3}\right)\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial x} + \ldots\right] dm \\ & + \int (\mathcal{E}_{1e}\,\delta\varepsilon_1 + \mathcal{E}_{2e}\,\delta\varepsilon_2 + \mathcal{E}_{3e}\,\delta\varepsilon_3 + \mathcal{G}_{1e}\,\delta\gamma_1 + \mathcal{G}_{2e}\,\delta\gamma_2 + \mathcal{G}_{3e}\,\delta\gamma_3)\,dm. \end{aligned}$$

Dans le cas où les actions extérieures sont *newtoniennes,* ce terme se réduit à

$$d\mathfrak{T}''_e = \int (X_e \delta\xi + Y_e \delta\eta + Z_e \delta\zeta)\, dm. \tag{59}$$

Les diverses égalités que nous venons d'écrire nous fournissent, pour toute modification *isothermique* virtuelle, l'expression de

$$d\mathfrak{T}_e - \delta\mathfrak{F}.$$

Posons

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\,\mathfrak{L}_x &= \frac{\mathfrak{X}_1}{\sigma_1}(L_{1i} + L_{1e}) + \frac{\mathfrak{X}_2}{\sigma_2}(L_{2i} + L_{2e}) + \frac{\mathfrak{X}_3}{\sigma_3}(L_{3i} + L_{3e}),\\
\frac{1}{\rho}\,\mathfrak{L}_y &= \frac{\mathfrak{Y}_1}{\sigma_1}(L_{1i} + L_{1e}) + \frac{\mathfrak{Y}_2}{\sigma_2}(L_{2i} + L_{2e}) + \frac{\mathfrak{Y}_3}{\sigma_3}(L_{3i} + L_{3e}),\\
\frac{1}{\rho}\,\mathfrak{L}_z &= \frac{\mathfrak{Z}_1}{\sigma_1}(L_{1i} + L_{1e}) + \frac{\mathfrak{Z}_2}{\sigma_2}(L_{2i} + L_{2e}) + \frac{\mathfrak{Z}_3}{\sigma_3}(L_{3i} + L_{3e}),\\
\frac{1}{\rho}\,\mathfrak{M}_x &= \frac{\mathfrak{X}_1}{\sigma_1}(M_{1i} + M_{1e}) + \frac{\mathfrak{X}_2}{\sigma_2}(M_{2i} + M_{2e}) + \frac{\mathfrak{X}_3}{\sigma_3}(M_{3i} + M_{3e}),\\
\frac{1}{\rho}\,\mathfrak{M}_y &= \frac{\mathfrak{Y}_1}{\sigma_1}(M_{1i} + M_{1e}) + \frac{\mathfrak{Y}_2}{\sigma_2}(M_{2i} + M_{2e}) + \frac{\mathfrak{Y}_3}{\sigma_3}(M_{3i} + M_{3e}),\\
\frac{1}{\rho}\,\mathfrak{M}_z &= \frac{\mathfrak{Z}_1}{\sigma_1}(M_{1i} + M_{1e}) + \frac{\mathfrak{Z}_2}{\sigma_2}(M_{2i} + M_{2e}) + \frac{\mathfrak{Z}_3}{\sigma_3}(M_{3i} + M_{3e}),\\
\frac{1}{\rho}\,\mathfrak{N}_x &= \frac{\mathfrak{X}_1}{\sigma_1}(N_{1i} + N_{1e}) + \frac{\mathfrak{X}_2}{\sigma_2}(N_{2i} + N_{2e}) + \frac{\mathfrak{X}_3}{\sigma_3}(N_{3i} + N_{3e}),\\
\frac{1}{\rho}\,\mathfrak{N}_y &= \frac{\mathfrak{Y}_1}{\sigma_1}(N_{1i} + N_{1e}) + \frac{\mathfrak{Y}_2}{\sigma_2}(N_{2i} + N_{2e}) + \frac{\mathfrak{Y}_3}{\sigma_3}(N_{3i} + N_{3e}),\\
\frac{1}{\rho}\,\mathfrak{N}_z &= \frac{\mathfrak{Z}_1}{\sigma_1}(N_{1i} + N_{1e}) + \frac{\mathfrak{Z}_2}{\sigma_2}(N_{2i} + N_{2e}) + \frac{\mathfrak{Z}_3}{\sigma_3}(N_{3i} + N_{3e}).
\end{aligned}\right. \tag{60}$$

Posons également

$$\left\{\begin{aligned}
&\mathcal{E}_1 = e_1 + \mathcal{E}_{1i} + \mathcal{E}_{2e}, &\quad &\mathcal{E}_2 = e_2 + \mathcal{E}_{2i} + \mathcal{E}_{2e}, &\quad &\mathcal{E}_3 = e_3 + \mathcal{E}_{3i} + \mathcal{E}_{3e},\\
&\mathcal{G}_1 = g_1 + \mathcal{G}_{1i} + \mathcal{G}_{1e}, &\quad &\mathcal{G}_2 = g_2 + \mathcal{G}_{2i} + \mathcal{G}_{2e}, &\quad &\mathcal{G}_3 = g_3 + \mathcal{G}_{3i} + \mathcal{G}_{3e},
\end{aligned}\right. \tag{61}$$

puis

$$
(62)\quad\left\{
\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\mathrm{N}_x &= \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2 \mathcal{E}_1 + \left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)^2 \mathcal{E}_2 + \left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)^2 \mathcal{E}_3 + 2\,\frac{\partial x}{\partial b}\,\frac{\partial x}{\partial c}\,\mathcal{G}_1 + 2\,\frac{\partial x}{\partial c}\,\frac{\partial x}{\partial a}\,\mathcal{G}_2 + 2\,\frac{\partial x}{\partial a}\,\frac{\partial x}{\partial b}\,\mathcal{G}_3,\\
\frac{1}{\rho}\mathrm{N}_y &= \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2 \mathcal{E}_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)^2 \mathcal{E}_2 + \left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)^2 \mathcal{E}_3 + 2\,\frac{\partial y}{\partial b}\,\frac{\partial y}{\partial c}\,\mathcal{G}_1 + 2\,\frac{\partial y}{\partial c}\,\frac{\partial y}{\partial a}\,\mathcal{G}_2 + 2\,\frac{\partial y}{\partial a}\,\frac{\partial y}{\partial b}\,\mathcal{G}_3,\\
\frac{1}{\rho}\mathrm{N}_z &= \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)^2 \mathcal{E}_1 + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)^2 \mathcal{E}_2 + \left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)^2 \mathcal{E}_3 + 2\,\frac{\partial z}{\partial b}\,\frac{\partial z}{\partial c}\,\mathcal{G}_1 + 2\,\frac{\partial z}{\partial c}\,\frac{\partial z}{\partial a}\,\mathcal{G}_2 + 2\,\frac{\partial z}{\partial a}\,\frac{\partial z}{\partial b}\,\mathcal{G}_3,\\
\frac{1}{\rho}\mathrm{T}_x &= \frac{\partial y}{\partial a}\,\frac{\partial z}{\partial a}\,\mathcal{E}_1 + \frac{\partial y}{\partial b}\,\frac{\partial z}{\partial b}\,\mathcal{E}_2 + \frac{\partial y}{\partial c}\,\frac{\partial z}{\partial c}\,\mathcal{E}_3 + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\,\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial c}\,\frac{\partial z}{\partial b}\right)\mathcal{G}_1\\
&\quad + \left(\frac{\partial y}{\partial c}\,\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial a}\,\frac{\partial z}{\partial c}\right)\mathcal{G}_2 + \left(\frac{\partial y}{\partial a}\,\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial b}\,\frac{\partial z}{\partial a}\right)\mathcal{G}_3,\\
\frac{1}{\rho}\mathrm{T}_y &= \frac{\partial z}{\partial a}\,\frac{\partial x}{\partial a}\,\mathcal{E}_1 + \frac{\partial z}{\partial b}\,\frac{\partial x}{\partial b}\,\mathcal{E}_2 + \frac{\partial z}{\partial c}\,\frac{\partial x}{\partial c}\,\mathcal{E}_3 + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\,\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial c}\,\frac{\partial x}{\partial b}\right)\mathcal{G}_1\\
&\quad + \left(\frac{\partial z}{\partial c}\,\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial a}\,\frac{\partial x}{\partial c}\right)\mathcal{G}_2 + \left(\frac{\partial z}{\partial a}\,\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial b}\,\frac{\partial x}{\partial a}\right)\mathcal{G}_3,\\
\frac{1}{\rho}\mathrm{T}_z &= \frac{\partial x}{\partial a}\,\frac{\partial y}{\partial a}\,\mathcal{E}_1 + \frac{\partial x}{\partial b}\,\frac{\partial y}{\partial b}\,\mathcal{E}_2 + \frac{\partial x}{\partial c}\,\frac{\partial y}{\partial c}\,\mathcal{E}_3 + \left(\frac{\partial x}{\partial b}\,\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial x}{\partial c}\,\frac{\partial y}{\partial b}\right)\mathcal{G}_1\\
&\quad + \left(\frac{\partial x}{\partial c}\,\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial x}{\partial a}\,\frac{\partial y}{\partial c}\right)\mathcal{G}_2 + \left(\frac{\partial x}{\partial a}\,\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial x}{\partial b}\,\frac{\partial y}{\partial a}\right)\mathcal{G}_3.
\end{aligned}\right.
$$

En vertu des égalités (30), ces égalités (61) et (62) nous donneront

$$
(63)\quad
\begin{aligned}
&[\,(e_1 + \mathcal{E}_{1i} + \mathcal{E}_{1e})\,\delta\varepsilon_1 + (e_2 + \mathcal{E}_{2i} + \mathcal{E}_{2e})\,\delta\varepsilon_2 + (e_3 + \mathcal{E}_{3i} + \mathcal{E}_{3e})\,\delta\varepsilon_3\\
&\quad + (g_1 + \mathcal{G}_{1i} + \mathcal{G}_{1e})\,\delta\gamma_1 + (g_2 + \mathcal{G}_{2i} + \mathcal{G}_{2e})\,\delta\gamma_2 + (g_3 + \mathcal{G}_{3i} + \mathcal{G}_{3e})\,\delta\gamma_3]\,dm\\
&= [\mathrm{N}_x \mathrm{D}_1 + \mathrm{N}_y \mathrm{D}_2 + \mathrm{N}_z \mathrm{D}_3 + 2\mathrm{T}_x \mathrm{G}_1 + 2\mathrm{T}_y \mathrm{G}_2 + 2\mathrm{T}_z \mathrm{G}_3]\,d\varpi,
\end{aligned}
$$

$d\varpi$ étant le volume de l'élément dm.

Arrêtons-nous un instant à cette égalité et aux égalités (61) et (62).

Si les actions, tant intérieures qu'extérieures, sont *newtoniennes*, les quantités $\mathcal{E}$ et $\mathcal{G}$ sont nulles; les grandeurs e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3 dépendent exclusivement de la température T au point x, y, z et des valeurs de ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 au même point; celles-ci s'expriment, selon les égalités (8), en fonctions des dérivées partielles de ξ, η, ζ par rapport à a, b, c, au point considéré; il en est de même, selon les égalités (2), de $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial x}{\partial b}$, ... Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Si les actions, tant intérieures qu'extérieures, auxquelles sont soumis *les divers éléments du système, sont newtoniennes, les valeurs de* N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z, *en chaque point et à chaque instant, s'expriment par les équations* (62) *en fonctions des valeurs de*

$$\begin{array}{ccc} & T, & \\ \frac{\partial \xi}{\partial a}, & \frac{\partial \xi}{\partial b}, & \frac{\partial \xi}{\partial c}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial a}, & \frac{\partial \eta}{\partial b}, & \frac{\partial \eta}{\partial c}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial a}, & \frac{\partial \zeta}{\partial b}, & \frac{\partial \zeta}{\partial c}, \end{array}$$

au même point et au même instant.

Cette proposition n'est plus vraie lorsque les actions extérieures ou intérieures ne sont plus newtoniennes, car les quantités $\mathcal{E}$ et $\mathcal{G}$ dépendent alors non seulement de la déformation au voisinage du point considéré, mais encore de l'état de tout le système et des corps extérieurs à l'instant t.

Dans ce cas général, les équations (41), (46), (53), (57), (58), (60), (61), (62) et (24) permettent d'écrire

$$(64)\quad \begin{aligned} d\mathfrak{T}_e - \delta_T \mathcal{F} = & \int (P_x\,\delta\xi + P_y\,\delta\eta + P_z\,\delta\zeta)\,dS \\ & + \int [(X_i + X_e)\,\delta\xi + (Y_i + Y_e)\,\delta\eta + (Z_i + Z_e)\,\delta\zeta]\,dm \\ & + \int \Big(\mathfrak{L}_x \frac{\partial\,\delta\xi}{\partial x} + \mathfrak{L}_y \frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial y} + \mathfrak{L}_z \frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial z} \\ & \qquad + \mathfrak{M}_x \frac{\partial\,\delta\eta}{\partial x} + \mathfrak{M}_y \frac{\partial\,\delta\eta}{\partial y} + \mathfrak{M}_z \frac{\partial\,\delta\eta}{\partial z} \\ & \qquad + \mathfrak{N}_x \frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial x} + \mathfrak{N}_y \frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial y} + \mathfrak{N}_z \frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial z} \Big)\,d\varpi \\ & + \int \Big[N_x \frac{\partial\,\delta\xi}{\partial x} + N_y \frac{\partial\,\delta\eta}{\partial y} + N_z \frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial z} \\ & \qquad + T_x \Big(\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial z} + \frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial y} \Big) + T_y \Big(\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta\xi}{\partial z} \Big) + T_z \Big(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta\eta}{\partial x} \Big) \Big]\,d\varpi. \end{aligned}$$

Posons

$$
(65)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\mathcal{N}_y + \mathcal{M}_z}{2} = \mathcal{T}_x, &\qquad &\frac{\mathcal{N}_y - \mathcal{M}_z}{2} = \mathcal{R}_x,\\
&\frac{\mathcal{L}_z + \mathcal{N}_x}{2} = \mathcal{T}_y, & &\frac{\mathcal{L}_z - \mathcal{N}_x}{2} = \mathcal{R}_y,\\
&\frac{\mathcal{M}_x + \mathcal{L}_y}{2} = \mathcal{T}_z, & &\frac{\mathcal{M}_x - \mathcal{L}_y}{2} = \mathcal{R}_z,
\end{aligned}
\right.
$$

et l'égalité (64) pourra s'écrire

$$
\begin{aligned}
(66)\qquad d\mathcal{T}_e - \delta_I\mathfrak{F} = {} & \int (P_x\,\delta\xi + P_y\,\delta\eta + P_z\,\delta\zeta)\,dS \\
& + \int [(X_i + X_e)\,\delta\xi + (Y_i + Y_e)\,\delta\eta + (Z_i + Z_e)\,\delta\zeta]\,dm \\
& + \int \Big[(N_x + \mathcal{L}_x)\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial x} + (N_y + \mathcal{M}_y)\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial y} + (N_z + \mathcal{N}_z)\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial z} \\
& \qquad + (T_x + \mathcal{T}_x)\left(\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial z} + \frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial y}\right) + (T_y + \mathcal{T}_y)\left(\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta\xi}{\partial z}\right) \\
& \qquad\qquad + (T_z + \mathcal{T}_z)\left(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta\eta}{\partial x}\right)\Big]\,d\varpi \\
& + \int \Big[\mathcal{R}_x\left(\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\,\delta\eta}{\partial z}\right) + \mathcal{R}_y\left(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial z} - \frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial x}\right) + \mathcal{R}_z\left(\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial x} - \frac{\partial\,\delta\xi}{\partial y}\right)\Big]\,d\varpi.
\end{aligned}
$$

Au dernier terme du second membre de cette égalité, la quantité sous le signe $\int$, qui peut s'écrire

$$(\mathcal{R}_x\omega_1 + \mathcal{R}_y\omega_2 + \mathcal{R}_z\omega_3)\,d\varpi,$$

a pris la forme du travail virtuel d'un *couple élémentaire. Ce couple est nul lorsque les actions sont newtoniennes.*

Moyennant des intégrations par parties et en désignant par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à l'élément dS menée vers l'intérieur du milieu étudié, on peut remplacer l'égalité (66) par

$$
\begin{aligned}
(67)\quad d\mathfrak{T}_e-\delta_{\mathrm{T}}\mathcal{F}= \int\Big\{ & [\mathrm{P}_x-(\mathrm{N}_x+\mathcal{L}_x)\alpha-(\mathrm{T}_z+\mathcal{T}_z)\beta-(\mathrm{T}_y+\mathcal{T}_y)\gamma \\
& \qquad -(\mathcal{R}_y\gamma-\mathcal{R}_z\beta)]\,\delta\xi \\
& +[\mathrm{P}_y-(\mathrm{T}_z+\mathcal{T}_z)\alpha-(\mathrm{N}_y+\mathcal{M}_y)\beta-(\mathrm{T}_x+\mathcal{T}_x)\gamma \\
& \qquad -(\mathcal{R}_z\alpha-\mathcal{R}_x)\gamma]\,\delta\eta \\
& +[\mathrm{P}_z-(\mathrm{T}_y+\mathcal{T}_y)\alpha-(\mathrm{T}_x+\mathcal{T}_x)\beta-(\mathrm{N}_z+\mathcal{N}_z)\gamma \\
& \qquad -(\mathcal{R}_x\beta-\mathcal{R}_y\alpha)]\,\delta\zeta\Big\}\,dS \\
+\int\Big\{ & \Big[\rho(\mathrm{X}_i+\mathrm{X}_e)-\frac{\partial(\mathrm{N}_x+\mathcal{L}_x)}{\partial x}-\frac{\partial(\mathrm{T}_z+\mathcal{T}_z)}{\partial x}-\frac{\partial(\mathrm{T}_y+\mathcal{T}_y)}{\partial z} \\
& \qquad -\left(\frac{\partial\mathcal{R}_y}{\partial z}-\frac{\partial\mathcal{R}_z}{\partial y}\right)\Big]\,\delta\xi \\
& +\Big[\rho(\mathrm{Y}_i-\mathrm{Y}_e)-\frac{\partial(\mathrm{T}_z+\mathcal{T}_z)}{\partial x}-\frac{\partial(\mathrm{N}_y+\mathcal{M}_y)}{\partial y}-\frac{\partial(\mathrm{T}_x+\mathcal{T}_x)}{\partial z} \\
& \qquad -\left(\frac{\partial\mathcal{R}_z}{\partial x}-\frac{\partial\mathcal{R}_x}{\partial z}\right)\Big]\,\delta\eta \\
& +\Big[\rho(\mathrm{Z}_i-\mathrm{Z}_e)-\frac{\partial(\mathrm{T}_y+\mathcal{T}_y)}{\partial x}-\frac{\partial(\mathrm{T}_x+\mathcal{T}_x)}{\partial y}-\frac{\partial(\mathrm{N}_z+\mathcal{N}_z)}{\partial z} \\
& \qquad -\left(\frac{\partial\mathcal{R}_x}{\partial y}-\frac{\partial\mathcal{R}_y}{\partial x}\right)\Big]\,\delta\zeta\Big\}\,d\varpi.
\end{aligned}
$$

La première intégrale s'étend à tous les éléments de la surface qui limite le milieu, la seconde à tous les éléments de volume du milieu.

IV. — Équations d'équilibre d'un milieu vitreux.

Les résultats déjà obtenus nous permettent d'écrire les conditions d'équilibre d'un milieu vitreux. Ces conditions s'obtiennent, en effet, en écrivant que l'on a

$$d\mathfrak{T}_e-\delta_{\mathrm{T}}\mathcal{F}=0,$$

quelle que soit la modification virtuelle imposée au système, partant quelles que soient, en chaque point, les valeurs de $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$. Nous devons donc avoir, en tout point du milieu vitreux,

$$(68)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial(\mathrm{N}_x+\mathcal{L}_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\mathrm{T}_z+\mathcal{T}_z)}{\partial y}+\frac{\partial(\mathrm{T}_y+\mathcal{T}_y)}{\partial z}+\frac{\partial\mathcal{R}_y}{\partial z}-\frac{\partial\mathcal{R}_z}{\partial y}=\rho(\mathrm{X}_i+\mathrm{X}_e),\\
&\frac{\partial(\mathrm{T}_z+\mathcal{T}_z)}{\partial x}+\frac{\partial(\mathrm{N}_y+\mathcal{M}_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\mathrm{T}_x+\mathcal{T}_x)}{\partial z}+\frac{\partial\mathcal{R}_z}{\partial x}-\frac{\partial\mathcal{R}_x}{\partial z}=\rho(\mathrm{Y}_i+\mathrm{Y}_e),\\
&\frac{\partial(\mathrm{T}_y+\mathcal{T}_y)}{\partial x}+\frac{\partial(\mathrm{T}_x+\mathcal{T}_x)}{\partial y}+\frac{\partial(\mathrm{N}_z+\mathcal{N}_z)}{\partial z}+\frac{\partial\mathcal{R}_x}{\partial y}-\frac{\partial\mathcal{R}_y}{\partial x}=\rho(\mathrm{Z}_i+\mathrm{Z}_e)
\end{aligned}\right.$$

et, en tout point de la surface qui limite le milieu,

$$(69)\quad \left\{\begin{aligned}
&(\mathrm{N}_x+\mathcal{L}_x)\alpha+(\mathrm{T}_z+\mathcal{T}_z)\beta+(\mathrm{T}_y+\mathcal{T}_y)\gamma+\mathcal{R}_y\gamma-\mathcal{R}_z\beta=\mathrm{P}_x,\\
&(\mathrm{T}_z+\mathcal{T}_z)\alpha+(\mathrm{N}_y+\mathcal{M}_y)\beta+(\mathrm{T}_x+\mathcal{T}_x)\gamma+\mathcal{R}_z\alpha-\mathcal{R}_x\gamma=\mathrm{P}_y,\\
&(\mathrm{T}_y+\mathcal{T}_y)\alpha+(\mathrm{T}_x+\mathcal{T}_x)\beta+(\mathrm{N}_z+\mathcal{N}_z)\gamma+\mathcal{R}_x\beta-\mathcal{R}_y\alpha=\mathrm{P}_z.
\end{aligned}\right.$$

Ces équations, excessivement compliquées, se simplifient beaucoup lorsque les actions, tant intérieures qu'extérieures, sont *newtoniennes;* dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_x=0, && \mathcal{M}_y=0, && \mathcal{N}_z=0,\\
&\mathcal{T}_x=0, && \mathcal{T}_y=0, && \mathcal{T}_z=0,\\
&\mathcal{R}_x=0, && \mathcal{R}_y=0, && \mathcal{R}_z=0
\end{aligned}$$

et les équations (68) et (69) prennent la forme classique

$$(70)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathrm{N}_x}{\partial x}+\frac{\partial\mathrm{T}_z}{\partial y}+\frac{\partial\mathrm{T}_y}{\partial z}=\rho(\mathrm{X}_i+\mathrm{X}_e),\\
&\frac{\partial\mathrm{T}_z}{\partial x}+\frac{\partial\mathrm{N}_y}{\partial y}+\frac{\partial\mathrm{T}_x}{\partial z}=\rho(\mathrm{Y}_i+\mathrm{Y}_e),\\
&\frac{\partial\mathrm{T}_y}{\partial x}+\frac{\partial\mathrm{T}_x}{\partial y}+\frac{\partial\mathrm{N}_z}{\partial z}=\rho(\mathrm{Z}_i+\mathrm{Z}_e),
\end{aligned}\right.$$

$$(71)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{N}_x\alpha+\mathrm{T}_z\beta+\mathrm{T}_y\gamma=\mathrm{P}_x,\\
&\mathrm{T}_z\alpha+\mathrm{N}_y\beta+\mathrm{T}_x\gamma=\mathrm{P}_y,\\
&\mathrm{T}_y\alpha+\mathrm{T}_x\beta+\mathrm{N}_z\gamma=\mathrm{P}_z.
\end{aligned}\right.$$

Dans ces égalités figurent les six quantités

$$\begin{matrix}\mathrm{N}_x, & \mathrm{N}_y, & \mathrm{N}_z,\\ \mathrm{T}_x, & \mathrm{T}_y, & \mathrm{T}_z\end{matrix}$$

qui se tirent des équations (62) en y remplaçant respectivement

$$\mathcal{E}_1, \quad \mathcal{E}_2, \quad \mathcal{E}_3, \quad \mathcal{G}_1, \quad \mathcal{G}_2, \quad \mathcal{G}_3$$

par

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3, \quad g_1, \quad g_2, \quad g_3.$$

Les conditions d'équilibre que l'on obtient ainsi sont équivalentes à celles qu'a données M. Boussinesq [1].

V. — Équations du mouvement d'un milieu vitreux [2].

Pour parvenir à la mise en équations du mouvement d'un milieu vitreux, il nous reste encore à former le *travail virtuel des forces d'inertie* et le *travail virtuel de la viscosité*.

Le premier de ces deux travaux, immédiatement connu, a pour expression

$$(72) \qquad d\mathfrak{T}_j = -\int\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\,\delta\xi + \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\,\delta\eta + \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\,\delta\zeta\right)\rho\,d\varpi.$$

Le travail des actions de viscosité est d'une forme beaucoup plus compliquée.

Dans le temps dt, un élément de masse du système éprouve une déformation infiniment petite que l'on peut définir, en la rapportant aux axes Ox, Oy, Oz, par les six quantités

$$\begin{aligned} &D_1 = D'_1\,dt, \qquad D_2 = D'_2\,dt, \qquad D_3 = D'_3\,dt, \\ &G_1 = G'_1\,dt, \qquad G_2 = G'_2\,dt, \qquad G_3 = G'_3\,dt. \end{aligned}$$

Au lieu de rapporter cette déformation à des axes arbitrairement choisis, on peut la rapporter aux seuls axes privilégiés que l'on recon-

---

(1) J. Boussinesq, *Théorie des ondes liquides périodiques*, Note III (Mémoires présentés par divers savants à l'Institut de France, t. XX). — *Cf.* E. et F. Cosserat, *Sur la Théorie de l'Élasticité* (premier Mémoire, n° 17).

(2) P. Duhem, *Sur la viscosité en un milieu vitreux* (*Comptes rendus*, t. CXXXVI, 2 février 1903, p. 281). — *Sur les équations du mouvement et la relation supplémentaire au sein d'un milieu vitreux* (*Ibid.*, 9 février 1903, p. 343).

naisse à l'instant t, au sein de l'élément considéré, savoir aux axes de dilatation de cet élément; cette déformation sera alors définie par les six quantités infiniment petites

$$\Delta'_1\,dt,\quad \Delta'_2\,dt,\quad \Delta'_3\,dt,\quad \Gamma'_1\,dt,\quad \Gamma'_2\,dt,\quad \Gamma'_3\,dt,$$

Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, Γ'_1, Γ'_2, Γ'_3 étant ce que deviennent les quantités Δ_1, Δ_2, Δ_3, Γ_1, Γ_2, Γ_3 lorsque, dans ces égalités (33), on remplace D_1, D_2, D_3, G_1, G_2, G_3 par D'_1, D'_2, D'_3, G'_1, G'_2, G'_3. Cela revient à dire que l'on a

$$(73)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Delta'_1 = D'_1\mathcal{X}_1^2 + D'_2\mathcal{Y}_1^2 + D'_3\mathcal{Z}_1^2 + 2G'_1\mathcal{Y}_1\mathcal{Z}_1 + 2G'_2\mathcal{Z}_1\mathcal{X}_1 + 2G'_3\mathcal{X}_1\mathcal{Y}_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

La *fonction dissipative* $\mathcal{F}\,d\varpi$, relative au volume élémentaire $d\varpi$, devra être une fonction de la température T; de l'état de la masse élémentaire à l'instant t, c'est-à-dire des valeurs prises à cet instant, en un point de l'élément $d\varpi$, par σ_1, σ_2, σ_3; enfin, de Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, Γ'_1, Γ'_2, Γ'_3; elle doit être une forme quadratique définie positive de ces six dernières variables. Des considérations de symétrie évidentes permettent d'écrire

$$(74)\quad \begin{aligned} \mathcal{F} = {} & a(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\Delta'^2_1 + a(\sigma_2, \sigma_3, \sigma_1)\Delta'^2_2 + a(\sigma_3, \sigma_1, \sigma_2)\Delta'^2_3 \\ & + 2b(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\Delta'_2\Delta'_3 + 2b(\sigma_2, \sigma_3, \sigma_1)\Delta'_3\Delta'_1 + 2b(\sigma_3, \sigma_1, \sigma_2)\Delta'_1\Delta'_2 \\ & + c(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\Gamma'^2_1 + c(\sigma_2, \sigma_3, \sigma_1)\Gamma'^2_2 + c(\sigma_3, \sigma_1, \sigma_2)\Gamma'^2_3 \\ & + 2d(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\Gamma'_2\Gamma'_3 + 2d(\sigma_2, \sigma_3, \sigma_1)\Gamma'_3\Gamma'_1 + 2d(\sigma_3, \sigma_1, \sigma_2)\Gamma'_1\Gamma_2 \\ & + 2f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\Delta'_1\Gamma'_1 + 2f(\sigma_2, \sigma_3, \sigma_1)\Delta'_2\Gamma'_2 + 2f(\sigma_3, \sigma_1, \sigma_2)\Delta'_3\Gamma'_3 \\ & + 2[m(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\Gamma'_2 + m(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_2)\Gamma'_3]\Delta'_1 \\ & + 2[m(\sigma_2, \sigma_3, \sigma_1)\Gamma'_3 + m(\sigma_2, \sigma_1, \sigma_3)\Gamma'_1]\Delta'_2 \\ & + 2[m(\sigma_3, \sigma_1, \sigma_2)\Gamma'_1 + m(\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1)\Gamma'_2]\Delta'_3. \end{aligned}$$

Les mêmes considérations de symétrie montrent que l'on a, quels que soient σ, σ', σ'',

$$(75)\qquad \left\{\begin{array}{l} a(\sigma, \sigma', \sigma'') = a(\sigma, \sigma'', \sigma'), \\ b(\sigma, \sigma', \sigma'') = b(\sigma, \sigma'', \sigma'), \\ c(\sigma, \sigma', \sigma'') = c(\sigma, \sigma'', \sigma'), \\ d(\sigma, \sigma', \sigma'') = d(\sigma, \sigma'', \sigma'), \\ f(\sigma, \sigma', \sigma'') = f(\sigma, \sigma'', \sigma'). \end{array}\right.$$

Enfin, les fonctions a, b, c, d, f, m dépendent de la température T.

Si le milieu, au lieu d'être vitreux, *était cristallisé, la fonction dissipative* $\mathfrak{F}$ *devrait être encore une forme quadratique définie positive de*

$$\Delta'_1, \quad \Delta'_2, \quad \Delta'_3; \qquad \Gamma'_1, \quad \Gamma'_2, \quad \Gamma'_3;$$

seulement cette forme ne serait plus nécessairement donnée par la formule (74); les coefficients de cette forme pourraient dépendre non seulement de T et de σ_1, σ_2, σ_3, mais encore de l'orientation des axes 1, 2, 3 par rapport à la matière de l'élément $d\varpi$.

Imposons au système une modification virtuelle quelconque $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$; à cette modification correspondront, en chaque point, trois dilatations virtuelles D_1, D_2, D_3 et trois glissements virtuels G_1, G_2, G_3 donnés par les égalités (24), partant, six quantités Δ_1, Δ_2, Δ_3, Γ_1, Γ_2, Γ_3 données par les égalités (33). Le travail virtuel de la viscosité sera

$$(76) \qquad d\bar{\mathcal{C}}_v = -\int\Big(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_1}\Delta_1 + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_2}\Delta_2 + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_3}\Delta_3$$
$$2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_1}\Gamma_1 + 2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_2}\Gamma_2 + 2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_3}\Gamma_3\Big)\, d\varpi.$$

Posons

$$\left\{\begin{aligned}
\nu_x &= -\left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_1}\mathfrak{X}_1^2 + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_2}\mathfrak{X}_2^2 + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_3}\mathfrak{X}_3^2 + 2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_1}\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3 + 2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_2}\mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_1 + 2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_3}\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2\right),\\
\nu_y &= -\left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_1}\mathfrak{Y}_1^2 + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_2}\mathfrak{Y}_2^2 + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_3}\mathfrak{Y}_3^2 + 2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_1}\mathfrak{Y}_2\mathfrak{Y}_3 + 2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_2}\mathfrak{Y}_3\mathfrak{Y}_1 + 2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_3}\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}_2\right),\\
\nu_z &= -\left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_1}\mathfrak{Z}_1^2 + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_2}\mathfrak{Z}_2^2 + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_3}\mathfrak{Z}_3^2 + 2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_1}\mathfrak{Z}_2\mathfrak{Z}_3 + 2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_2}\mathfrak{Z}_3\mathfrak{Z}_1 + 2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_3}\mathfrak{Z}_1\mathfrak{Z}_2\right);\\
\tau_x &= -\Big[\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_1}\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Z}_1 + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_2}\mathfrak{Y}_2\mathfrak{Z}_2 + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_3}\mathfrak{Y}_3\mathfrak{Z}_3\\
&\qquad + 2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_1}(\mathfrak{Z}_2\mathfrak{Y}_3 + \mathfrak{Y}_2\mathfrak{Z}_3) + 2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_2}(\mathfrak{Z}_3\mathfrak{Y}_1 + \mathfrak{Y}_3\mathfrak{Z}_1) + 2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_3}(\mathfrak{Z}_1\mathfrak{Y}_2 + \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Z}_2)\Big],\\
\tau_y &= -\Big[\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_1}\mathfrak{Z}_1\mathfrak{X}_1 + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_2}\mathfrak{Z}_2\mathfrak{X}_2 + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_3}\mathfrak{Z}_3\mathfrak{X}_3\\
&\qquad + 2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_1}(\mathfrak{X}_2\mathfrak{Z}_3 + \mathfrak{Z}_2\mathfrak{X}_3) + 2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_2}(\mathfrak{X}_3\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3\mathfrak{X}_1) + 2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_3}(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{Z}_1\mathfrak{X}_2)\Big],\\
\tau_z &= -\Big[\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_1}\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_1 + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_2}\mathfrak{X}_2\mathfrak{Y}_2 + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Delta'_3}\mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_3\\
&\qquad + 2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_1}(\mathfrak{Y}_2\mathfrak{X}_3 + \mathfrak{X}_2\mathfrak{Y}_3) + 2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_2}(\mathfrak{Y}_3\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_1) + 2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\Gamma'_3}(\mathfrak{Y}_1\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_2)\Big].
\end{aligned}\right.$$

Selon les égalités (33), l'égalité (76) pourra s'écrire

$$
(78)\quad \begin{aligned}
d\mathfrak{T}_v &= \int (\nu_x \mathrm{D}_1 + \nu_y \mathrm{D}_2 + \nu_z \mathrm{D}_3 + 2\tau_x \mathrm{G}_1 + 2\tau_y \mathrm{G}_2 + 2\tau_z \mathrm{G}_3)\, d\varpi \\
&= \int \left[\nu_x \frac{\partial \delta\xi}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial \delta\eta}{\partial y} + \nu_z \frac{\partial \delta\zeta}{\partial z} \right. \\
&\qquad \left. + \tau_x \left(\frac{\partial \delta\eta}{\partial z} + \frac{\partial \delta\zeta}{\partial y} \right) + \tau_y \left(\frac{\partial \delta\zeta}{\partial x} + \frac{\partial \delta\xi}{\partial z} \right) + \tau_z \left(\frac{\partial \delta\xi}{\partial y} + \frac{\partial \delta\eta}{\partial x} \right) \right] d\varpi.
\end{aligned}
$$

Si les quantités ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, τ_y, τ_z admettent, par rapport à x, y, z, des dérivées partielles qui soient finies, l'égalité (78) peut se transformer en

$$
(79)\quad \begin{aligned}
d\mathfrak{T}_v = &-\int \left[(\nu_x \alpha + \tau_z \beta + \tau_y \gamma)\, \delta\xi \right. \\
&\qquad + (\tau_z \alpha + \nu_y \beta + \tau_x \gamma)\, \delta\eta \\
&\qquad \left. + (\tau_y \alpha + \tau_x \beta + \nu_z \gamma)\, \delta\zeta \right] dS \\
&-\int \left[\left(\frac{\partial \nu_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} \right) \delta\xi \right. \\
&\qquad + \left(\frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \nu_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} \right) \delta\eta \\
&\qquad \left. + \left(\frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \nu_z}{\partial z} \right) \delta\zeta \right] d\varpi.
\end{aligned}
$$

Les formules (76) à (79) sont vraies également pour les milieux vitreux et pour les milieux cristallisés.

Les équations du mouvement du système s'obtiennent en écrivant que l'on a, pour toute modification virtuelle imposée au système,

$$
(80)\quad d\mathfrak{T}_e - \delta_T \mathcal{F} + d\mathfrak{T}_j + d\mathfrak{T}_v = 0.
$$

Cette égalité devant avoir lieu quels que soient $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, on doit avoir, selon les égalités (67), (72) et (79) :

1° En tout point de la surface qui limite le milieu

$$
(81)\quad \left\{ \begin{aligned}
&(\mathrm{N}_x + \mathcal{L}_x + \nu_x)\alpha + (\mathrm{T}_z + \mathfrak{T}_z + \tau_z)\beta + (\mathrm{T}_y + \mathfrak{T}_y + \tau_y)\gamma + \mathcal{R}_y \gamma - \mathcal{R}_z \beta = \mathrm{P}_x, \\
&(\mathrm{T}_z + \mathfrak{T}_z + \tau_z)\alpha + (\mathrm{N}_y + \mathcal{M}_y + \nu_y)\beta + (\mathrm{T}_x + \mathfrak{T}_x + \tau_x)\gamma + \mathcal{R}_z \alpha - \mathcal{R}_x \gamma = \mathrm{P}_y, \\
&(\mathrm{T}_y + \mathfrak{T}_y + \tau_y)\alpha + (\mathrm{T}_x + \mathfrak{T}_x + \tau_x)\beta + (\mathrm{N}_z + \mathcal{N}_z + \tau_z)\gamma + \mathcal{R}_x \beta - \mathcal{R}_y \alpha = \mathrm{P}_z;
\end{aligned} \right.
$$

2° En tout point du milieu

$$
(82)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial(\mathrm{N}_x+\mathcal{N}_x+\nu_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\mathrm{T}_z+\mathcal{T}_z+\tau_z)}{\partial y}+\frac{\partial(\mathrm{T}_y+\mathcal{T}_y+\tau_y)}{\partial z}+\frac{\partial\mathcal{R}_y}{\partial z}-\frac{\partial\mathcal{R}_z}{\partial y}\\
&\qquad=\rho\left(\mathrm{X}_i+\mathrm{X}_e-\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right),\\
&\frac{\partial(\mathrm{T}_z+\mathcal{T}_z+\tau_z)}{\partial x}+\frac{\partial(\mathrm{N}_y+\mathcal{N}_y+\nu_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\mathrm{T}_x+\mathcal{T}_x+\tau_x)}{\partial z}+\frac{\partial\mathcal{R}_z}{\partial x}-\frac{\partial\mathcal{R}_x}{\partial z}\\
&\qquad=\rho\left(\mathrm{Y}_i+\mathrm{Y}_e-\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right),\\
&\frac{\partial(\mathrm{T}_y+\mathcal{T}_y+\tau_y)}{\partial x}+\frac{\partial(\mathrm{T}_x+\mathcal{T}_x+\tau_x)}{\partial y}+\frac{\partial(\mathrm{N}_z+\mathcal{N}_z+\nu_z)}{\partial z}+\frac{\partial\mathcal{R}_x}{\partial y}-\frac{\partial\mathcal{R}_y}{\partial x}\\
&\qquad=\rho\left(\mathrm{Z}_i+\mathrm{Z}_e-\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

VI. — Quantité de chaleur dégagée par un élément du milieu [1].

Considérons un élément de masse $dm=\rho\,d\varpi$. Son entropie $\mathrm{S}\,dm$ est donnée par l'égalité

$$\mathrm{ES}=-\frac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{T}}.$$

D'autre part, les viscosités intrinsèques de cet élément effectuent, en une modification réelle ou virtuelle, un travail qui a pour valeur

$$d\tau_v=(\nu_x\mathrm{D}_1+\nu_y\mathrm{D}_2+\nu_z\mathrm{D}_3+2\tau_x\mathrm{G}_1+2\tau_y\mathrm{G}_2+2\tau_z\mathrm{G}_3)\,d\varpi.$$

Dès lors, en une modification réelle ou virtuelle quelconque, cet élément dégage une quantité de chaleur $d\mathrm{Q}$ qui a pour valeur [*Recherches sur l'Hydrodynamique*. Première Partie, égalité (80)]

$$(83)\quad \mathrm{E}\,d\mathrm{Q}=\left[\mathrm{T}\delta\frac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{T}}-\frac{1}{\rho}(\nu_x\mathrm{D}_1+\nu_y\mathrm{D}_2+\nu_z\mathrm{D}_3+2\tau_x\mathrm{G}_1+2\tau_y\mathrm{G}_2+2\tau_z\mathrm{G}_3)\right]dm.$$

---

(1) P. DUHEM, *Sur les équations du mouvement et la relation supplémentaire au sein d'un milieu vitreux* (*Comptes rendus*, t. CXXXVI, p. 343; 9 février 1903).

Posons

$$(84)\qquad c = -\frac{T}{E}\frac{\partial^2\Phi}{\partial T^2},$$

puis

$$(85)\qquad \begin{cases} \mathfrak{e}_1 = -\dfrac{T}{E}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_1\,\partial T}, & \mathfrak{e}_2 = -\dfrac{T}{E}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_2\,\partial T}, & \mathfrak{e}_3 = -\dfrac{T}{E}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon_3\,\partial T}, \\ \mathfrak{g}_1 = -\dfrac{T}{E}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_1\,\partial T}, & \mathfrak{g}_2 = -\dfrac{T}{E}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_2\,\partial T}, & \mathfrak{g}_3 = -\dfrac{T}{E}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma_3\,\partial T} \end{cases}$$

ou bien, en vertu des égalités (34) et (42),

$$(85\ bis)\qquad \begin{cases} \mathfrak{e}_1 = -\dfrac{T}{E}\left[\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_1\,\partial T} + 4(\varepsilon_2+\varepsilon_3)\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_2\,\partial T} + (4\varepsilon_2\varepsilon_3-\gamma_1^2)\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_3\,\partial T}\right], \\ \mathfrak{e}_2 = -\dfrac{T}{E}\left[\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_1\,\partial T} + 4(\varepsilon_3+\varepsilon_1)\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_2\,\partial T} + (4\varepsilon_3\varepsilon_1-\gamma_2^2)\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_3\,\partial T}\right], \\ \mathfrak{e}_3 = -\dfrac{T}{E}\left[\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_1\,\partial T} + 4(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_2\,\partial T} + (4\varepsilon_1\varepsilon_2-\gamma_3^2)\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_3\,\partial T}\right]; \\ \mathfrak{g}_1 = \dfrac{T}{E}\left[2\gamma_1\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_2\,\partial T} - (2\varepsilon_1\gamma_1-\gamma_2\gamma_3)\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_3\,\partial T}\right], \\ \mathfrak{g}_2 = \dfrac{T}{E}\left[2\gamma_2\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_2\,\partial T} - (2\varepsilon_2\gamma_2-\gamma_3\gamma_1)\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_3\,\partial T}\right], \\ \mathfrak{g}_3 = \dfrac{T}{E}\left[2\gamma_3\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_2\,\partial T} - (2\varepsilon_3\gamma_3-\gamma_1\gamma_2)\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial J_3\,\partial T}\right]; \end{cases}$$

nous aurons, en vertu des égalités (34), (42) et (83),

$$(86)\qquad \begin{aligned} dQ = &-(c\,\delta T + \mathfrak{e}_1\,\delta\varepsilon_1 + \mathfrak{e}_2\,\delta\varepsilon_2 + \mathfrak{e}_3\,\delta\varepsilon_3 + \mathfrak{g}_1\,\delta\gamma_1 + \mathfrak{g}_2\,\delta\gamma_2 + \mathfrak{g}_3\,\delta\gamma_3)\,dm \\ &-\frac{1}{\rho E}(\nu_x D_1 + \nu_y D_2 + \nu_z D_3 + 2\tau_x G_1 + 2\tau_y G_2 + 2\tau_z G_3)\,dm. \end{aligned}$$

Posons

$$(87)\qquad \begin{cases} \mathfrak{a}_x = \left(\dfrac{\partial x}{\partial a}\right)^2\mathfrak{e}_1 + \left(\dfrac{\partial x}{\partial b}\right)^2\mathfrak{e}_2 + \left(\dfrac{\partial x}{\partial c}\right)^2\mathfrak{e}_3 + 2\dfrac{\partial x}{\partial b}\dfrac{\partial x}{\partial c}\mathfrak{g}_1 + 2\dfrac{\partial x}{\partial c}\dfrac{\partial x}{\partial a}\mathfrak{g}_2 + 2\dfrac{\partial x}{\partial a}\dfrac{\partial x}{\partial b}\mathfrak{g}_3, \\ \mathfrak{a}_y = \left(\dfrac{\partial y}{\partial a}\right)^2\mathfrak{e}_1 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial b}\right)^2\mathfrak{e}_2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial c}\right)^2\mathfrak{e}_3 + 2\dfrac{\partial y}{\partial b}\dfrac{\partial y}{\partial c}\mathfrak{g}_1 + 2\dfrac{\partial y}{\partial c}\dfrac{\partial y}{\partial a}\mathfrak{g}_2 + 2\dfrac{\partial y}{\partial a}\dfrac{\partial y}{\partial b}\mathfrak{g}_3, \\ \mathfrak{a}_z = \left(\dfrac{\partial z}{\partial a}\right)^2\mathfrak{e}_1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial b}\right)^2\mathfrak{e}_2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial c}\right)^2\mathfrak{e}_3 + 2\dfrac{\partial z}{\partial b}\dfrac{\partial z}{\partial c}\mathfrak{g}_1 + 2\dfrac{\partial z}{\partial c}\dfrac{\partial z}{\partial a}\mathfrak{g}_2 + 2\dfrac{\partial z}{\partial a}\dfrac{\partial z}{\partial b}\mathfrak{g}_3; \end{cases}$$

$$(87)\ (\textit{suite})\ \left\{\begin{aligned}
\mathrm{b}_x &= \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial a}\mathrm{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial b}\mathrm{e}_2 + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial c}\mathrm{e}_3 \\
&\quad + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}\right)\mathrm{g}_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c}\right)\mathrm{g}_2 + \left(\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a}\right)\mathrm{g}_3, \\
\mathrm{b}_y &= \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial a}\mathrm{e}_1 + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial b}\mathrm{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial c}\mathrm{e}_3 \\
&\quad + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b}\right)\mathrm{g}_1 + \left(\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial c}\right)\mathrm{g}_2 + \left(\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a}\right)\mathrm{g}_3, \\
\mathrm{b}_z &= \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial a}\mathrm{e}_1 + \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial b}\mathrm{e}_2 + \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial c}\mathrm{e}_3 \\
&\quad + \left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b}\right)\mathrm{g}_1 + \left(\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial c}\right)\mathrm{g}_2 + \left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}\right)\mathrm{g}_3.
\end{aligned}\right.$$

En vertu des égalités (30), l'égalité (86) deviendra

$$(88)\quad dQ = -\left[\mathrm{c}\,\delta\mathrm{T} + \left(\mathrm{a}_x + \frac{\nu_x}{\mathrm{E}\rho}\right)\mathrm{D}_1 + \left(\mathrm{a}_y + \frac{\nu_y}{\mathrm{E}\rho}\right)\mathrm{D}_2 + \left(\mathrm{a}_z + \frac{\nu_z}{\mathrm{E}\rho}\right)\mathrm{D}_3 \right.$$
$$\left. + 2\left(\mathrm{b}_x + \frac{\tau_x}{\mathrm{E}\rho}\right)\mathrm{G}_1 + 2\left(\mathrm{b}_y + \frac{\tau_y}{\mathrm{E}\rho}\right)\mathrm{G}_2 + 2\left(\mathrm{b}_z + \frac{\tau_z}{\mathrm{E}\rho}\right)\mathrm{G}_3\right] dm.$$

Toutes ces formules sont aussi vraies pour les milieux cristallisés que pour les milieux vitreux.

VII. — Formation de la relation supplémentaire.

Il nous suffira de trouver une autre expression de la quantité dQ pour obtenir, par le rapprochement de ces deux expressions, la relation supplémentaire.

Admettons que la propagation de la chaleur ait lieu exclusivement par conductibilité.

La conductibilité du milieu en chaque point peut être définie par les trois coefficients de conductibilité suivant les directions des trois axes de dilatation, directions que nous désignerons par les indices 1, 2, 3; visiblement, ces coefficients peuvent être représentés par

$$\mathrm{K}(\mathrm{T}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \mathrm{K}(\mathrm{T}, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_1), \quad \mathrm{K}(\mathrm{T}, \sigma_3, \sigma_1, \sigma_2),$$

la fonction $K(T, \sigma, \sigma', \sigma'')$ vérifiant, quels que soient $T, \sigma, \sigma', \sigma''$, l'égalité

$$K(T, \sigma, \sigma', \sigma'') = K(T, \sigma, \sigma'', \sigma').$$

Nous les représenterons abréviativement par

$$K_1, \quad K_2, \quad K_3.$$

Nous y gagnerons d'ailleurs en généralité, car nos formules deviendront également applicables aux milieux cristallisés; K_1, K_2, K_3 dépendront, dans ce cas, non seulement de T, de σ_1, σ_2, σ_3, mais encore de l'orientation des axes 1, 2, 3 au sein de la matière cristalline.

Soit $d\Sigma$ un élément dont la demi-normale n fait, avec les axes de dilatation, des angles ayant pour cosinus $\cos(n, 1)$, $\cos(n, 2)$, $\cos(n, 3)$. Dans le temps dt, *et dans le sens opposé à la normale* n, l'élément $d\Sigma$ est traversé par une quantité de chaleur

$$(89) \quad q\, d\Sigma\, dt = \left[K_1 \frac{\partial T}{\partial 1} \cos(n, 1) + K_2 \frac{\partial T}{\partial 2} \cos(n, 2) + K_3 \frac{\partial T}{\partial 3} \cos(n, 3)\right] d\Sigma\, dt,$$

$\frac{\partial T}{\partial 1}, \frac{\partial T}{\partial 2}, \frac{\partial T}{\partial 3}$ étant les dérivées de la température prises respectivement suivant les directions 1, 2, 3.

Or on a

$$\frac{\partial T}{\partial 1} = \frac{\partial T}{\partial x}\mathfrak{X}_1 + \frac{\partial T}{\partial y}\mathfrak{Y}_1 + \frac{\partial T}{\partial z}\mathfrak{Z}_1,$$

$$\frac{\partial T}{\partial 2} = \frac{\partial T}{\partial x}\mathfrak{X}_2 + \frac{\partial T}{\partial y}\mathfrak{Y}_2 + \frac{\partial T}{\partial z}\mathfrak{Z}_2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial 3} = \frac{\partial T}{\partial x}\mathfrak{X}_3 + \frac{\partial T}{\partial y}\mathfrak{Y}_3 + \frac{\partial T}{\partial z}\mathfrak{Z}_3.$$

Si l'on pose

$$\cos(n, x) = \alpha, \qquad \cos(n, y) = \beta; \qquad \cos(n, z) = \gamma,$$

on a

$$\cos(n, 1) = \alpha\mathfrak{X}_1 + \beta\mathfrak{Y}_1 + \gamma\mathfrak{Z}_1,$$

$$\cos(n, 2) = \alpha\mathfrak{X}_2 + \beta\mathfrak{Y}_2 + \gamma\mathfrak{Z}_1,$$

$$\cos(n, 3) = \alpha\mathfrak{X}_3 + \beta\mathfrak{Y}_3 + \gamma\mathfrak{Z}_3.$$

Soient, pour abréger,

$$
(90) \qquad \left\{
\begin{aligned}
K_x &= K_1 \mathfrak{X}_1^2 + K_2 \mathfrak{X}_2^2 + K_3 \mathfrak{X}_3^2,\\
K_y &= K_1 \mathfrak{Y}_1^2 + K_2 \mathfrak{Y}_2^2 + K_3 \mathfrak{Y}_3^2,\\
K_z &= K_1 \mathfrak{Z}_1^2 + K_2 \mathfrak{Z}_2^2 + K_3 \mathfrak{Z}_3^2,\\
C_x &= K_1 \mathfrak{Y}_1 \mathfrak{Z}_1 + K_2 \mathfrak{Y}_2 \mathfrak{Z}_2 + K_3 \mathfrak{Y}_3 \mathfrak{Z}_3,\\
C_y &= K_1 \mathfrak{Z}_1 \mathfrak{X}_1 + K_2 \mathfrak{Z}_2 \mathfrak{X}_2 + K_3 \mathfrak{Z}_3 \mathfrak{X}_3,\\
C_z &= K_1 \mathfrak{X}_1 \mathfrak{Y}_1 + K_2 \mathfrak{X}_2 \mathfrak{Y}_2 + K_3 \mathfrak{X}_3 \mathfrak{Y}_3.
\end{aligned}
\right.
$$

L'égalité (89) deviendra

$$
(91) \qquad
\begin{aligned}
q\, d\Sigma\, dt = \Big[& \left(K_x \frac{\partial T}{\partial x} + C_z \frac{\partial T}{\partial y} + C_y \frac{\partial T}{\partial z} \right) \alpha \\
& + \left(C_z \frac{\partial T}{\partial x} + K_y \frac{\partial T}{\partial y} + C_x \frac{\partial T}{\partial z} \right) \beta \\
& + \left(C_y \frac{\partial T}{\partial x} + C_x \frac{\partial T}{\partial y} + K_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \gamma \Big]\, d\Sigma\, dt.
\end{aligned}
$$

Considérons une surface fermée Σ; dans le temps dt, la partie du milieu que limite cette surface fermée dégage une quantité de chaleur

$$
(92) \qquad Q\, dt = dt \int q\, d\Sigma,
$$

q étant donné par la formule (91), où α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale à l'élément $d\Sigma$ vers l'*intérieur* de la surface Σ.

Il suffit de transformer, en l'égalité (92), l'intégrale de surface en une intégrale étendue au volume que circonscrit cette surface, pour obtenir le résultat suivant :

Chaque élément de masse $dm = \rho\, d\varpi$ dégage, dans le temps dt, une quantité de chaleur

$$
(93) \qquad
\begin{aligned}
dQ = -\frac{1}{\rho} \Big[& \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial T}{\partial x} + C_z \frac{\partial T}{\partial y} + C_y \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_z \frac{\partial T}{\partial x} + K_y \frac{\partial T}{\partial y} + C_x \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left(C_y \frac{\partial T}{\partial x} + C_x \frac{\partial T}{\partial y} + K_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big]\, dm\, dt.
\end{aligned}
$$

D'autre part, cette même quantité de chaleur doit être donnée par l'égalité (88), si l'on y pose

$$\delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t}\right) dt,$$

$$D_1 = D'_1\,dt, \qquad D_2 = D'_2\,dt, \qquad D_3 = D'_3\,dt,$$
$$G_1 = G'_1\,dt, \qquad G_2 = G'_2\,dt, \qquad G_3 = G'_3\,dt.$$

On doit donc avoir

$$\begin{aligned}
&\rho c\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t}\right)\\
&+\left(\rho \mathfrak{a}_x + \frac{\nu_x}{E}\right) D'_1 + \left(\rho \mathfrak{a}_y + \frac{\nu_y}{E}\right) D'_2 + \left(\rho \mathfrak{a}_z + \frac{\nu_z}{E}\right) D'_3\\
&+2\left(\rho \mathfrak{b}_x + \frac{\tau_x}{E}\right) G'_1 + 2\left(\rho \mathfrak{b}_y + \frac{\tau_y}{E}\right) G'_2 + 2\left(\rho \mathfrak{b}_z + \frac{\tau_z}{E}\right) G'_3\\
&\qquad - \frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial T}{\partial x} + C_z \frac{\partial T}{\partial y} + C_y \frac{\partial T}{\partial z}\right)\\
&\qquad - \frac{\partial}{\partial y}\left(C_z \frac{\partial T}{\partial x} + K_y \frac{\partial T}{\partial y} + C_x \frac{\partial T}{\partial z}\right)\\
&\qquad - \frac{\partial}{\partial z}\left(C_y \frac{\partial T}{\partial x} + C_x \frac{\partial T}{\partial y} + K_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) = 0.
\end{aligned}$$

C'est la relation supplémentaire que nous nous proposions d'établir.