

P. DUHEM

## Recherches sur l'hydrodynamique

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2<sup>e</sup> série*, tome 3, n° 3 (1901), p. 315-377.

[<http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1901\\_2\\_3\\_3\\_315\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1901_2_3_3_315_0)

© Université Paul Sabatier, 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

# RECHERCHES SUR L'HYDRODYNAMIQUE,

PAR M. P. DUHEM.

---

## PREMIÈRE PARTIE.

SUR LES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE L'HYDRODYNAMIQUE.

---

### INTRODUCTION.

En donnant à la Mécanique rationnelle une forme nouvelle et beaucoup plus générale que celle qu'elle avait reçue jusqu'ici, la Thermodynamique nous oblige à une revision de toutes les sciences que l'on regardait autrefois comme des branches de la Mécanique. En diverses publications <sup>(1)</sup>, nous avons déjà entrepris une telle revision pour les principes de l'Hydrostatique. Nous nous proposons aujourd'hui de soumettre à une analyse semblable les fondements de la Dynamique des Fluides.

---

## CHAPITRE I.

LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DES FLUIDES.

---

§ 1. — COMMENT ON PASSE DES ÉQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME AUX ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DU SYSTÈME. — DE LA VISCOSITÉ EN GÉNÉRAL.

Considérons un système indépendant des corps extérieurs. Supposons que ce système soit défini par la température absolue  $T$  de chacune de ses parties et par des *variables normales*. Soit  $\mathcal{F}$  le potentiel interne de ce système. Dans une

---

<sup>(1)</sup> Voir, notamment, *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3<sup>e</sup> série, t. X, p. 183; 1893).

modification virtuelle qui laisse invariable la température de chacune des parties du système, ce potentiel éprouve une variation  $\delta_T \mathcal{F}$ . Dans la même modification, les actions extérieures auxquelles le système est soumis effectuent un travail  $d\mathcal{E}_e$ . Les conditions d'équilibre du système s'obtiennent en écrivant que l'on a, pour toute modification qui laisse invariable la température de chaque partie,

$$(1) \quad d\mathcal{E}_e - \delta_T \mathcal{F} = 0.$$

Lorsque le système est en mouvement, cette condition n'est plus exacte en général; on a alors, à chaque instant  $t$ , et pour toutes les modifications virtuelles et isothermiques que l'on peut imposer au système à partir de l'état qu'il traverse en cet instant,

$$(2) \quad d\mathcal{E}_e + d\mathcal{E}_j + d\mathcal{E}_v - \delta_T \mathcal{F} = 0,$$

$d\mathcal{E}_j$  étant le travail virtuel des *actions d'inertie* en la modification virtuelle considérée et  $d\mathcal{E}_v$  étant, en la même modification, le travail virtuel des *actions de viscosité*.

La signification du premier terme est bien connue. Soient

$dm$ , une masse élémentaire appartenant au système;

$\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ , les composantes de son accélération à l'instant  $t$ ;

$\delta x, \delta y, \delta z$ , les composantes du déplacement subi par un point de cette masse en la modification virtuelle considérée.

L'expression

$$(3) \quad d\mathcal{E}_j = - \int (\gamma_x \delta x + \gamma_y \delta y + \gamma_z \delta z) dm,$$

où l'intégrale s'étend au système entier, définit le travail virtuel des actions d'inertie.

La définition du travail virtuel des actions de viscosité nécessite quelques développements.

Les propositions suivantes touchant les actions de viscosité ont été données soit à titre d'hypothèses, soit à titre de théorèmes, dans un cours sur les *Fondements de l'Énergétique*, professé à la Faculté des Sciences de Bordeaux, en 1898-1899.

1. Supposons un système de température absolue uniforme  $T$ , et défini par cette température absolue et des variables normales  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ . Le travail virtuel des actions de viscosité en une modification *isothermique ou non* a pour expression

$$(4) \quad d\mathcal{E}_v = f_\alpha \delta \alpha + f_\beta \delta \beta + \dots + f_\lambda \delta \lambda.$$

Les actions de viscosité  $f_\alpha, f_\beta, \dots, f_\lambda$  dépendent des variables suivantes :

$$\alpha, \quad \beta, \quad \dots, \quad \lambda, \quad T,$$

$$\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\beta}{dt}, \quad \dots, \quad \frac{d\lambda}{dt}.$$

II. Si l'une des variables  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$  sert seulement à fixer la position absolue du système dans l'espace, les actions  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$  ne dépendent pas de cette variable.

Si l'une des vitesses  $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \dots, \frac{d\lambda}{dt}$  définit seulement la vitesse d'un certain déplacement d'ensemble du système dans l'espace, les actions  $f_\alpha, f_\beta, \dots, f_\lambda$  ne dépendent pas de cette vitesse.

Si la modification virtuelle

$$\delta\alpha, \quad \delta\beta, \quad \dots, \quad \delta\lambda$$

correspond simplement à un déplacement d'ensemble du système dans l'espace, le travail virtuel  $d\mathcal{C}_v$  correspondant est nul.

III. Si l'on a

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0, \quad \frac{d\beta}{dt} = 0, \quad \dots, \quad \frac{d\lambda}{dt} = 0,$$

on a aussi

$$f_\alpha = 0, \quad f_\beta = 0, \quad \dots, \quad f_\lambda = 0.$$

IV. On a, en toutes circonstances, la condition

$$f_\alpha \frac{d\alpha}{dt} + f_\beta \frac{d\beta}{dt} + \dots + f_\lambda \frac{d\lambda}{dt} \leq 0$$

qui peut s'énoncer ainsi :

*En toute modification réelle du système, les actions de viscosité effectuent un travail nul ou négatif.*

Nous avons vu par le n° II que ce travail est nul si la modification réelle du système se réduit à un déplacement d'ensemble ; en général, il n'est nul que dans ce cas.

V. (*Hypothèse approximative.*) Comme première approximation, on peut



Les variables  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$  étant supposées des variables normales, le travail



$\delta l$  pendant le temps infiniment petit  $dt$ . Les égalités (11) et (12) nous donneront

[illegible]

[illegible]

Les égalités (12 bis) nous montrent que, lorsqu'on connaît  $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \dots, \frac{dl}{dt}$ , on connaît aussi  $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \dots, \frac{d\lambda}{dt}$  et que, pour que ces  $n$  dernières quantités s'annulent, il faut et il suffit que les  $n$  premières s'annulent. Nous pouvons donc dire que, *lorsque l'on connaît l'état du système à l'instant  $t$  et, en outre, les quantités  $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \dots, \frac{dl}{dt}$ , on connaît les quantités  $g_a, g_b, \dots, g_l$ ; et que les  $n$  égalités*

$$(20) \quad \frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{db}{dt} = 0, \quad \dots, \quad \frac{dl}{dt} = 0$$

entraînent les  $n$  autres égalités

$$(21) \quad g_a = 0, \quad g_b = 0, \quad \dots, \quad g_l = 0.$$

Moyennant l'introduction de ces quantités, l'égalité (4) peut s'écrire

$$(22) \quad d\mathfrak{C}_\nu = g_a \delta a + g_b \delta b + \dots + g_l \delta l.$$

La condition (8) devient alors

$$(23) \quad g_a \frac{da}{dt} + g_b \frac{db}{dt} + \dots + g_l \frac{dl}{dt} \leq 0.$$

Le signe d'égalité convient certainement si la modification

$$\delta a = da, \quad \delta b = db, \quad \dots, \quad \delta l = dl$$

se réduit à un déplacement d'ensemble du système.

Supposons que les quantités

$$f_\alpha, f_\beta, \dots, f_\lambda$$



y

( 20 )

$$\begin{aligned}
B_{aa} &= M_{\alpha\alpha}^2 A_{\alpha\alpha} + M_{\alpha\alpha} M_{\beta\alpha} A_{\alpha\beta} + \dots + M_{\alpha\alpha} M_{\lambda\alpha} A_{\alpha\lambda} \\
&+ M_{\beta\alpha} M_{\alpha\alpha} A_{\beta\alpha} + M_{\beta\alpha}^2 A_{\beta\beta} + \dots + M_{\beta\alpha} M_{\lambda\alpha} A_{\beta\lambda} \\
&+ \dots \\
&+ M_{\lambda\alpha} M_{\alpha\alpha} A_{\lambda\alpha} + M_{\lambda\alpha} M_{\beta\alpha} A_{\lambda\beta} + \dots + M_{\lambda\alpha}^2 A_{\lambda\lambda}, \\
B_{ab} &= M_{\alpha\alpha} M_{\alpha b} A_{\alpha\alpha} + M_{\alpha\alpha} M_{\beta b} A_{\alpha\beta} + \dots + M_{\alpha\alpha} M_{\lambda b} A_{\alpha\lambda} \\
&+ M_{\beta\alpha} M_{\alpha b} A_{\beta\alpha} + M_{\beta\alpha} M_{\beta b} A_{\beta\beta} + \dots + M_{\beta\alpha} M_{\lambda b} A_{\beta\lambda} \\
&+ \dots, \\
&+ M_{\lambda\alpha} M_{\alpha b} A_{\lambda\alpha} + M_{\lambda\alpha} M_{\beta b} A_{\lambda\beta} + \dots + M_{\lambda\alpha} M_{\lambda b} A_{\lambda\lambda}, \\
&\dots, \\
B_{ba} &= M_{\alpha b} M_{\alpha\alpha} A_{\alpha\alpha} + M_{\alpha b} M_{\beta\alpha} A_{\alpha\beta} + \dots + M_{\alpha b} M_{\lambda\alpha} A_{\alpha\lambda} \\
&+ M_{\beta b} M_{\alpha\alpha} A_{\beta\alpha} + M_{\beta b} M_{\beta\alpha} A_{\beta\beta} + \dots + M_{\beta b} M_{\lambda\alpha} A_{\beta\lambda} \\
&+ \dots \\
&+ M_{\lambda b} M_{\alpha\alpha} A_{\lambda\alpha} + M_{\lambda b} M_{\beta\alpha} A_{\lambda\beta} + \dots + M_{\lambda b} M_{\lambda\alpha} A_{\lambda\lambda}, \\
&\dots
\end{aligned}$$
$$(9) \quad \mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_{ji},$$
$$(22) \quad \mathbf{B}_{ii} = \mathbf{B}_{ii},$$

La fonction  $\mathbb{G}$ , que définit l'égalité

$$(23) \quad -2\mathfrak{E} = B_{aa} \left( \frac{da}{dt} \right)^2 + B_{bb} \left( \frac{db}{dt} \right)^2 + \dots + B_{ll} \left( \frac{dl}{dt} \right)^2 + \sum_{ij} (B_{ij} + B_{ji}) \frac{di}{dt} \frac{dj}{dt},$$

est telle que l'on ait

$$(24) \quad g_a = -\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \frac{da}{dt}}, \quad g_b = -\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \frac{db}{dt}}, \quad \dots, \quad g_l = -\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \frac{dl}{dt}}.$$

Alors, le travail des actions de viscosité dans une modification réelle du système a pour valeur  $-2\mathfrak{E} dt$ .

Voici maintenant ce qui fait l'intérêt des considérations qui viennent d'être développées.

Dans un grand nombre de cas, l'état du système que l'on étudie n'est pas défini explicitement par un certain nombre de variables indépendantes  $\alpha, \beta, \dots, \lambda, T$ ; on sait seulement que tout changement infiniment petit, réel ou virtuel, de l'état du système est défini par une variation infiniment petite  $\delta T$  de la température absolue et par  $n$  quantités infiniment petites  $\delta a, \delta b, \dots, \delta l$ , indépendantes entre elles et indépendantes de  $\delta T$ ; dans le cas particulier où il s'agit de la modification réelle éprouvée par le système pendant le temps  $dt$ ,  $\delta a, \delta b, \dots, \delta l$  sont représentés par  $da, db, \dots, dl$ .

Dans ces cas, on continue à admettre l'exactitude de l'égalité (2), où  $\mathfrak{F}$  désigne une quantité qui a, en chaque état du système, une valeur déterminée et où  $\delta_T \mathfrak{F}$  est la variation éprouvée par cette quantité au cours de la modification que l'on obtient en joignant  $\delta T = 0$  à des valeurs arbitraires de  $\delta a, \delta b, \dots, \delta l$ .

Supposons que le travail externe  $d\mathfrak{E}_e$  et le travail d'inertie  $d\mathfrak{E}_i$  puissent prendre les formes (17) et (18), où  $P_a, P_b, \dots, P_l$  sont des quantités indépendantes de  $T$ , tandis que les quantités  $j_a, j_b, \dots, j_l$  sont indépendantes de  $T$ , de  $\frac{dT}{dt}$  et de  $\frac{d^2T}{dt^2}$ . Nous dirons que  $\delta a, \delta b, \dots, \delta l, \delta T$  forment un système de *variations normales*.

Lorsque les changements infiniment petits qu'un système peut éprouver seront définis au moyen d'un système de variations normales, nous admettrons, touchant le travail de viscosité  $d\mathfrak{E}_v$ , les hypothèses suivantes :

I. Ce travail est de la forme (22), les grandeurs  $g_a, g_b, \dots, g_l$  ayant des valeurs connues à l'instant  $t$  lorsque l'on connaît, à cet instant, l'état du système et, de plus, les valeurs de  $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \dots, \frac{dl}{dt}$ .

II. Elles ne dépendent pas de la position absolue du système dans l'espace. Si l'une des variations  $\delta a, \delta b, \dots, \delta l$ , soit  $\delta a$ , produit seulement un déplacement d'ensemble du système dans l'espace, les actions  $g_a, g_b, \dots, g_l$  ne dépendent pas de  $\frac{da}{dt}$ .

Si la modification réelle ou virtuelle  $\delta a, \delta b, \dots, \delta l$  correspond à un déplacement d'ensemble du système dans l'espace, le travail  $d\mathfrak{E}_v$  correspondant est nul.

III. Les égalités (20) entraînent les égalités (21).

IV. En toute modification réelle, la condition (23) est vérifiée.

V. (*Hypothèse approximative.*) Les quantités  $g_a, g_b, \dots, g_l$  sont données par les égalités (21), où les coefficients B sont indépendants de  $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \dots, \frac{dl}{dt}$ .

VI. (*Hypothèse de lord Rayleigh.*) On a les égalités (22), ce qui, moyennant l'égalité de définition (23), entraîne les égalités (24).

VII. Cette dernière hypothèse s'énonce comme l'hypothèse de même rang, relative au cas où le système est rapporté à des variables normales explicitement connues.

Ces principes vont trouver leur application au paragraphe suivant.

## § 2. — DE LA VISCOSITÉ EN UN CORPS QUI SUBIT UNE DÉFORMATION HOMOGÈNE.

Considérons un corps qui se déforme et se déplace; soient  $\delta x, \delta y, \delta z$  les composantes du déplacement du point de ce corps dont les coordonnées initiales étaient  $x, y, z$ ;  $\delta x, \delta y, \delta z$  sont, en général, des fonctions de  $x, y, z$ . Posons

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \delta x}{\partial x} = \delta D_1, \quad \frac{\partial \delta y}{\partial y} = \delta D_2, \quad \frac{\partial \delta z}{\partial z} = \delta D_3, \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y} \right) = \delta G_1, \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z} \right) = \delta G_2, \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right) = \delta G_3. \end{array} \right.$$

Si les six quantités

$$\delta D_1, \quad \delta D_2, \quad \delta D_3, \quad \delta G_1, \quad \delta G_2, \quad \delta G_3$$

ont des valeurs indépendantes de  $x, y, z$ , nous dirons, avec W. Thomson et Tait, que le corps éprouve une *déformation homogène*.

Tout changement infiniment petit de position et de figure d'un corps dont toute déformation est homogène est défini par la connaissance de douze quantités infiniment petites, savoir :

- 1° Les trois composantes  $\delta \xi, \delta \eta, \delta \zeta$  d'une translation;
  - 2° Les trois composantes  $\delta \omega_1, \delta \omega_2, \delta \omega_3$  d'une rotation;
  - 3° Les six quantités  $\delta D_1, \delta D_2, \delta D_3, \delta G_1, \delta G_2, \delta G_3$  définies par les égalités (25).
- Imaginons un corps dont toute modification infinitésimale est entièrement

déterminée lorsque l'on joint à ces douze quantités la variation infiniment petite  $\delta T$  de la température, et supposons que, pour ce corps, ces treize quantités forment un système de variations normales. Proposons-nous de déterminer, pour un tel corps, la forme des actions de viscosité.

Chacune des six variations  $\delta \xi$ ,  $\delta \eta$ ,  $\delta \zeta$ ,  $\delta \omega_1$ ,  $\delta \omega_2$ ,  $\delta \omega_3$  entraîne simplement un déplacement d'ensemble du système dans l'espace. Dès lors, d'après les hypothèses I et II, on doit avoir

$$(26) \quad d\mathfrak{C}_v = f_1 \delta D_1 + f_2 \delta D_2 + f_3 \delta D_3 + g_1 \delta G_1 + g_2 \delta G_2 + g_3 \delta G_3,$$

les six quantités

$$f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3$$

dépendant de l'état du système à l'instant considéré et des six quantités

$$(27) \quad \begin{cases} D'_1 = \frac{dD_1}{dt}, & D'_2 = \frac{dD_2}{dt}, & D'_3 = \frac{dD_3}{dt}, \\ G'_1 = \frac{dG_1}{dt}, & G'_2 = \frac{dG_2}{dt}, & G'_3 = \frac{dG_3}{dt}. \end{cases}$$

Si l'on admet l'hypothèse approximative V, les six quantités  $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3$  sont des fonctions linéaires et homogènes des six variables (27), les coefficients de ces fonctions dépendant de l'état du système à l'instant  $t$ .

Si l'on admet l'hypothèse de lord Rayleigh, elles dérivent d'une fonction de dissipation  $\mathfrak{G}$ ; celle-ci est une forme quadratique des six variables (27); les coefficients de cette forme dépendent de l'état du système à l'instant  $t$ .

Le travail réel des actions de viscosité pendant le temps  $dt$  a pour valeur  $-2\mathfrak{G}dt$ ; cette valeur ne saurait dépendre du choix des axes de coordonnées; un changement d'axes de coordonnées ne change donc pas la valeur de la fonction de dissipation  $\mathfrak{G}$ .

Considérons la déformation homogène qui, à chaque point  $(x, y, z)$  du système dans son état initial, ferait correspondre un nouveau point  $(x', y', z')$  par les formules

$$(28) \quad \begin{cases} x' - x = D'_1(x - x_0) + G'_3(y - y_0) + G'_2(z - z_0), \\ y' - y = G'_3(x - x_0) + D'_2(y - y_0) + G'_1(z - z_0), \\ z' - z = G'_2(x - x_0) + G'_1(y - y_0) + D'_3(z - z_0), \end{cases}$$

$(x_0, y_0, z_0)$  étant un point fixe quelconque.

A cette déformation homogène correspondent trois axes principaux de dilatation que nous nommerons OX, OY, OZ et trois dilatations principales que nous nommerons  $\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3$ .

Prenons pour nouveaux axes de coordonnées OX, OY, OZ; après ce change-

ment, nous avons, au lieu des six quantités (27), les six quantités

$$\begin{array}{ccc} \Delta'_1, & \Delta'_2, & \Delta'_3, \\ 0, & 0, & 0. \end{array}$$

$\mathfrak{G}$ , qui n'a pas changé de valeur par ce changement d'axes, est maintenant une forme quadratique de  $\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3$ .

*Supposons maintenant que le corps étudié soit d'une nature telle que les déformations subies le laissent isotrope.*

Dans ce cas, la fonction de dissipation  $\mathfrak{G}$  doit garder la même valeur, soit que la dilatation principale ait, suivant OX, la valeur  $\Delta'_1$ , suivant OY, la valeur  $\Delta'_2$ , suivant OZ, la valeur  $\Delta'_3$ , soit que l'on permute entre elles ces trois valeurs d'une manière quelconque.

*La fonction de dissipation  $\mathfrak{G}$  est alors une fonction symétrique des trois quantités  $\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3$ .*

Or les trois quantités  $\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3$  sont, comme on sait, les trois racines de l'équation en  $\Delta'$

$$\begin{vmatrix} D'_1 - \Delta' & G'_3 & G'_2 \\ G'_3 & D'_2 - \Delta' & G'_1 \\ G'_2 & G'_1 & D'_3 - \Delta' \end{vmatrix} = 0$$

qui, développée, s'écrit

$$\begin{aligned} (29) \quad & \Delta'^3 - (D'_1 + D'_2 + D'_3) \Delta'^2 \\ & + (D'_2 D'_3 + D'_3 D'_1 + D'_1 D'_2 - G'^2_1 - G'^2_2 - G'^2_3) \Delta' \\ & - (D'_1 D'_2 D'_3 + 2 G'_1 G'_2 G'_3 - D'_1 G'^2_1 - D'_2 G'^2_2 - D'_3 G'^2_3) = 0. \end{aligned}$$

La fonction de dissipation  $\mathfrak{G}$ , fonction symétrique des racines de cette équation, doit s'exprimer en fonction rationnelle de ses coefficients, qui sont :

$$\begin{aligned} & D'_1 + D'_2 + D'_3, \\ & D'_2 D'_3 + D'_3 D'_1 + D'_1 D'_2 - G'^2_1 - G'^2_2 - G'^2_3, \\ & D'_1 D'_2 D'_3 + 2 G'_1 G'_2 G'_3 - D'_1 G'^2_1 - D'_2 G'^2_2 - D'_3 G'^2_3. \end{aligned}$$

Mais comme elle doit être une forme quadratique des six grandeurs

$$D'_1, D'_2, D'_3, G'_1, G'_2, G'_3,$$

elle s'exprime forcément par l'égalité

$$(30) \quad \mathfrak{G} = A(D'_1 + D'_2 + D'_3)^2 + B(D'_2 D'_3 + D'_3 D'_1 + D'_1 D'_2 - G'^2_1 - G'^2_2 - G'^2_3),$$

A et B étant deux quantités qui dépendent seulement de l'état du système à l'instant  $t$ .

En vertu des relations entre les coefficients et les racines de l'équation (29),  $\mathfrak{E}$  peut encore s'écrire

$$(31) \quad \mathfrak{E} = A(\Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3)^2 + B(\Delta'_2 \Delta'_3 + \Delta'_3 \Delta'_1 + \Delta'_1 \Delta'_2),$$

ou bien

$$(32) \quad \mathfrak{E} = \frac{2A+B}{2} (\Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3)^2 - \frac{B}{2} (\Delta_1'^2 + \Delta_2'^2 + \Delta_3'^2).$$

Introduisons, au lieu des coefficients A et B, deux nouveaux coefficients L et M, liés aux précédents par les relations

$$(33) \quad \begin{cases} 2A+B=L, \\ B=-2M. \end{cases}$$

Les égalités (30) et (32) deviendront respectivement

$$(30 \text{ bis}) \quad \mathfrak{E} = \frac{L+2M}{2} (D'_1 + D'_2 + D'_3)^2 - 2M(D'_2 D'_3 + D'_3 D'_1 + D'_1 D'_2 - G_1'^2 - G_2'^2 - G_3'^2),$$

$$(32 \text{ bis}) \quad \mathfrak{E} = \frac{L}{2} (\Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3)^2 + M(\Delta_1'^2 + \Delta_2'^2 + \Delta_3'^2).$$

On voit encore sans peine que l'égalité (30 bis) peut s'écrire

$$(34) \quad \mathfrak{E} = \frac{3L+2M}{6} (D'_1 + D'_2 + D'_3)^2 + \frac{M}{3} [(D'_2 - D'_3)^2 + (D'_3 - D'_1)^2 + (D'_1 - D'_2)^2 + 6(G_1'^2 + G_2'^2 + G_3'^2)].$$

Le travail réel des actions de viscosité, pendant le temps  $dt$ , est  $-2\mathfrak{E} dt$ . Ce travail ne peut être positif, en sorte que l'on doit avoir

$$(35) \quad \mathfrak{E} \geq 0.$$

Admettons tout d'abord que le système ne puisse éprouver aucune déformation qui n'entraîne un travail de viscosité; nous devons avoir

$$(36) \quad \mathfrak{E} > 0$$

toutes les fois que nous n'avons pas les six égalités

$$\begin{aligned} D'_1 = 0, & \quad D'_2 = 0, & \quad D'_3 = 0, \\ G'_1 = 0, & \quad G'_2 = 0, & \quad G'_3 = 0. \end{aligned}$$

La forme quadratique  $\mathfrak{G}$  sera une forme définie positive en  $G'_1, G'_2, G'_3, D'_1, D'_2, D'_3$ . Selon l'égalité (30 *bis*), son discriminant est

$$\begin{vmatrix} 2M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L+2M}{2} & \frac{L}{2} & \frac{L}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2} & \frac{L+2M}{2} & \frac{L}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2} & \frac{L}{2} & \frac{L+2M}{2} \end{vmatrix}.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la forme  $\mathfrak{G}$  soit définie positive s'obtiennent à la manière ordinaire et sont les suivantes :

$$\begin{aligned} M > 0, & \quad M^2 > 0, & \quad M^3 > 0, \\ M^3(L+2M) > 0, & \quad M^4(L+M) > 0, \\ M^5(3L+2M) > 0. \end{aligned}$$

Elles se réduisent d'ailleurs à ces deux-ci :

$$(37) \quad M > 0,$$

$$(38) \quad 3L+2M > 0,$$

d'où découle, en particulier, l'inégalité

$$(39) \quad L+2M > 0.$$

L'égalité (34) montre en effet que, si les conditions (37) et (38) sont vérifiées, la forme  $\mathfrak{G}$  est une forme définie positive.

On peut, sans contradiction, admettre que certaines déformations d'un système déterminé n'entraînent aucun travail des actions de viscosité; alors, l'une des inégalités (37) et (38) peut se transformer en égalité.

Supposons, tout d'abord, que l'inégalité (37) se transforme en égalité et que l'on ait

$$(37 \text{ bis}) \quad M = 0.$$

La condition (38) devient

$$(38 \text{ bis}) \quad L > 0$$

et l'égalité (34) devient

$$(34 \text{ bis}) \quad \mathfrak{E} = \frac{L}{2} (D'_1 + D'_2 + D'_3)^2.$$

Une déformation du système entraîne un travail négatif des actions de viscosité, à moins que la vitesse de dilatation en volume  $(D'_1 + D'_2 + D'_3)$  ne soit égale à 0.

Supposons, en second lieu, que l'inégalité (38) se transforme en l'égalité

$$(38 \text{ ter}) \quad 3L + 2M = 0.$$

La condition (37) subsiste. L'égalité (34) devient

$$(34 \text{ ter}) \quad \mathfrak{E} = \frac{M}{3} [(D'_2 - D'_3)^2 + (D'_3 - D'_1)^2 + (D'_1 - D'_2)^2 + 6(G'^2_1 + G'^2_2 + G'^2_3)].$$

Cette égalité nous enseigne que le travail réel des actions de viscosité est toujours négatif, à moins que l'on n'ait

$$\begin{aligned} G'_1 &= 0, & G'_2 &= 0, & G'_3 &= 0, \\ D'_1 &= D'_2 = D'_3, \end{aligned}$$

cas auquel, entre les instants  $t$  et  $(t + dt)$ , le système se dilate en restant semblable à lui-même.

En vertu des égalités (24), on a

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial D'_1}, & f_2 &= -\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial D'_2}, & f_3 &= -\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial D'_3}, \\ g_1 &= -\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial G'_1}, & g_2 &= -\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial G'_2}, & g_3 &= -\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial G'_3} \end{aligned}$$

ou bien, selon l'égalité (30 bis),

$$(40) \quad \begin{cases} f_1 = -L(D'_1 + D'_2 + D'_3) - 2MD'_1, \\ f_2 = -L(D'_1 + D'_2 + D'_3) - 2MD'_2, \\ f_3 = -L(D'_1 + D'_2 + D'_3) - 2MD'_3, \\ g_1 = -4MG'_1, \\ g_2 = -4MG'_2, \\ g_3 = -4MG'_3. \end{cases}$$



## § 3. — DE LA VISCOSITÉ AU SEIN D'UNE MASSE FLUIDE.

Considérons une masse fluide et supposons que les modifications réelles ou virtuelles auxquelles elle peut être soumise soient constamment assujetties aux conditions suivantes :

1° Soient, en un déplacement virtuel,  $\delta x, \delta y, \delta z$  les composantes du déplacement du point matériel dont les coordonnées initiales sont  $x, y, z$ ;  $\delta x, \delta y, \delta z$  sont des fonctions continues de  $x, y, z$ .

2° Soient  $u, v, w$  les composantes, à l'instant  $t$ , de la vitesse du point matériel dont les coordonnées sont  $x, y, z$ ;  $u, v, w$  sont des fonctions continues de  $x, y, z$ .

Moyennant ces deux conditions, les liaisons qui existent entre les divers éléments du fluide sont des soudures.

Donc, selon l'hypothèse marquée VII au § 1, le travail réel ou virtuel des actions de viscosité au sein de la masse fluide est égal à la somme des travaux des viscosités intrinsèques des divers éléments en lesquels cette masse peut être décomposée.

Soit  $d\omega$  le volume d'un tel élément et soit  $d\tau_v d\omega$  le travail virtuel de ses viscosités intrinsèques. On aura

$$(41) \quad d\mathcal{E}_v = \int d\tau_v d\omega,$$

l'intégrale s'étendant au volume entier du fluide. Toute notre attention doit donc porter sur la détermination de  $d\tau_v$ .

$d\tau_v$  dépend de l'état de l'élément  $d\omega$  à l'instant  $t$ , des vitesses relatives des diverses parties de cet élément, enfin du déplacement virtuel relatif de ces diverses parties.

On doit regarder comme évident que la quantité  $d\tau_v$  sera altérée seulement d'une quantité infiniment petite par rapport à elle-même si l'on effectue la double substitution que voici :

1° Au déplacement virtuel subi par l'élément  $d\omega$ , on substitue un autre déplacement virtuel, tel que le déplacement virtuel relatif de deux parties quelconques de l'élément  $d\omega$  ne soit altéré que d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même.

2° Au déplacement réel que l'élément  $d\omega$  subit pendant le temps  $dt$ , on substitue un autre déplacement infiniment petit, accompli pendant le même temps, et tel que la vitesse relative de deux parties quelconques de l'élément  $d\omega$  ne subisse qu'une altération infiniment petite par rapport à elle-même.

Or, il est visible qu'on peut satisfaire à la première condition en substituant au déplacement virtuel subi par l'élément  $d\omega$  une certaine déformation homogène

dans laquelle

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_1 = \frac{\partial \delta x}{\partial x}, \quad D_2 = \frac{\partial \delta y}{\partial y}, \quad D_3 = \frac{\partial \delta z}{\partial z}, \\ G_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y} \right), \\ G_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z} \right), \\ G_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right), \end{array} \right.$$

les six seconds membres étant calculés pour un point arbitrairement choisi de l'élément  $d\omega$ .

Il est visible que l'on peut satisfaire à la seconde condition en substituant au mouvement réel de l'élément  $d\omega$ , pendant le temps  $dt$ , une certaine déformation homogène de même durée, dans laquelle

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} D'_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad D'_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad D'_3 = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ G'_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ G'_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ G'_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{array} \right.$$

les seconds membres étant calculés en un point arbitrairement choisi de l'élément  $d\omega$ .

Il est clair désormais que la détermination de  $d\tau_v d\omega$  est ramenée au problème qui a été traité au paragraphe précédent.

Posons

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1 = v_x d\omega, \quad f_2 = v_y d\omega, \quad f_3 = v_z d\omega, \\ g_1 = 2\tau_x d\omega, \quad g_2 = 2\tau_y d\omega, \quad g_3 = 2\tau_z d\omega. \end{array} \right.$$

Les égalités (26) et (42) nous donneront

$$(45) \quad d\tau_v = v_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + v_y \frac{\partial \delta y}{\partial y} + v_z \frac{\partial \delta z}{\partial z} \\ + \tau_x \left( \frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y} \right) + \tau_y \left( \frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z} \right) + \tau_z \left( \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right).$$

Moyennant les égalités (41) et (45), le travail des actions de viscosité dans une modification réelle ou virtuelle quelconque a pour valeur

$$(46) \quad d\mathfrak{E}_v = \int \left[ \nu_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \nu_z \frac{\partial \delta z}{\partial z} + \tau_x \left( \frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y} \right) \right. \\ \left. + \tau_y \left( \frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z} \right) + \tau_z \left( \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right) \right] d\mathfrak{w}.$$

Cette égalité est susceptible d'une transformation dont la légitimité est subordonnée à la condition suivante :

*Les six quantités  $\nu_x, \nu_y, \nu_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$  admettent, en tous les points du milieu, des dérivées partielles qui sont finies.*

Dans ce cas, si l'on désigne par  $dS$  un élément de la surface qui limite le fluide, par  $n_i$  la normale à l'élément  $dS$  vers l'intérieur du fluide, une intégration par parties transforme l'égalité (46) en la suivante :

$$(47) \quad d\mathfrak{E}_v = - \int \left\{ [\nu_x \cos(n_i, x) + \tau_z \cos(n_i, y) + \tau_y \cos(n_i, z)] \delta x \right. \\ \left. + [\tau_z \cos(n_i, x) + \nu_y \cos(n_i, y) + \tau_x \cos(n_i, z)] \delta y \right. \\ \left. + [\tau_y \cos(n_i, x) + \tau_x \cos(n_i, y) + \nu_z \cos(n_i, z)] \delta z \right\} dS \\ \int \left[ \left( \frac{\partial \nu_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} \right) \delta x \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \nu_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} \right) \delta y \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \nu_z}{\partial z} \right) \delta z \right] d\mathfrak{w}.$$

La première intégration s'étend à toute la surface qui limite le fluide.

Donc, DANS LE CAS OÙ LA CONDITION PRÉCÉDENTE EST VÉRIFIÉE, les actions de viscosité équivalent à l'ensemble des actions suivantes :

1° Une pression en chaque point de la surface terminale du fluide, pression qui a pour composantes :

$$(48) \quad \begin{cases} p_x = - [\nu_x \cos(n_i, x) + \tau_z \cos(n_i, y) + \tau_y \cos(n_i, z)], \\ p_y = - [\tau_z \cos(n_i, x) + \nu_y \cos(n_i, y) + \tau_x \cos(n_i, z)], \\ p_z = - [\tau_y \cos(n_i, x) + \tau_x \cos(n_i, y) + \nu_z \cos(n_i, z)]. \end{cases}$$

2° Un champ en tous les points du volume fluide, champ dont les compo-

santes sont

$$(49) \quad \begin{cases} q_x = - \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} \right), \\ q_y = - \left( \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} \right), \\ q_z = - \left( \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \end{cases}$$

Ce que nous venons de dire en ce § 3 ne suppose pas que le système étudié soit un fluide, mais seulement un milieu continu; il n'en sera plus de même de ce qui va suivre; nous admettrons, en effet, l'HYPOTHÈSE que voici :

*Quelque déformation que subisse le milieu étudié, il demeure isotrope.*

Cette hypothèse est assurément fautive en ce qui concerne les milieux solides; il est même certain qu'elle n'est point toujours vraie pour les fluides, puisqu'un fluide en mouvement devient biréfringent. Si donc nous l'adoptons, ce n'est qu'à titre de première approximation.

Si nous admettons cette hypothèse, nous pourrons, pour déterminer  $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3$ , faire usage des égalités (40).

L'état de l'élément  $d\omega$ , à l'instant  $t$ , sera supposé entièrement défini par sa densité  $\rho$  et sa température absolue  $T$ ; on pourra alors poser

$$(50) \quad \begin{cases} L = \lambda(\rho, T) d\omega, \\ M = \mu(\rho, T) d\omega. \end{cases}$$

Les égalités (40), (43), (44) et (50) donneront

$$(51) \quad \begin{cases} v_x = -\lambda(\rho, T)\theta - 2\mu(\rho, T) \frac{\partial u}{\partial x}, \\ v_y = -\lambda(\rho, T)\theta - 2\mu(\rho, T) \frac{\partial v}{\partial y}, \\ v_z = -\lambda(\rho, T)\theta - 2\mu(\rho, T) \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \tau_x = -\mu(\rho, T) \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \tau_y = -\mu(\rho, T) \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \tau_z = -\mu(\rho, T) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{cases}$$

en posant, selon l'usage,

$$(52) \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

En vertu des égalités (30 bis), (43), (50) et (52), on a

$$(53) \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{D} d\mathfrak{w},$$

avec

$$(54) \quad \mathfrak{D} = \frac{\lambda(\rho, T)}{2} \theta^2 + \mu(\rho, T) \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right].$$

Si l'on considère la modification réelle que le système éprouve pendant le temps  $dt$ , on a, en cette modification,

$$\delta x = u dt, \quad \delta z = v dt, \quad \delta z = w dt.$$

Si l'on reporte ces valeurs dans l'égalité (46), et si l'on tient compte des égalités (51), (52), (54), on trouve que, pendant le temps  $dt$ , les actions de viscosité effectuent un travail

$$(55) \quad d\mathfrak{E}_v = -2 dt \int \mathfrak{D} d\mathfrak{w} = -2 \mathfrak{F} dt,$$

en posant

$$(56) \quad \mathfrak{F} = \int \mathfrak{D} d\mathfrak{w}.$$

Cette fonction  $\mathfrak{F}$  est donc la *fonction de dissipation* du fluide.

Si, dans les égalités (48) et (49), nous reportons les valeurs des quantités  $\nu$  et  $\tau$  que donnent les égalités (51), nous trouvons

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_x = \lambda \theta \cos(n_i, x) + \mu \frac{\partial u}{\partial n_i} \\ \quad + \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n_i, x) + \frac{\partial v}{\partial x} \cos(n_i, y) + \frac{\partial w}{\partial x} \cos(n_i, z) \right], \\ p_y = \lambda \theta \cos(n_i, y) + \mu \frac{\partial v}{\partial n_i} \\ \quad + \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n_i, x) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(n_i, y) + \frac{\partial w}{\partial y} \cos(n_i, z) \right], \\ p_z = \lambda \theta \cos(n_i, z) + \mu \frac{\partial w}{\partial n_i} \\ \quad + \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \cos(n_i, x) + \frac{\partial v}{\partial z} \cos(n_i, y) + \frac{\partial w}{\partial z} \cos(n_i, z) \right] \end{array} \right.$$

et

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} q_x &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u + \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x} \\ &\quad + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \mu}{\partial y} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial \mu}{\partial z}, \\ q_y &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v + \theta \frac{\partial \lambda}{\partial y} \\ &\quad + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \mu}{\partial y} + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial \mu}{\partial z}, \\ q_z &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta w + \theta \frac{\partial \lambda}{\partial z} \\ &\quad + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x} + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{\partial \mu}{\partial y} + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \mu}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

Dans les égalités (58), on a posé, pour abréger,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial \lambda}{\partial x}, & \dots, \\ \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial \mu}{\partial x}, & \dots \end{aligned}$$

Le point matériel dont les coordonnées, à l'instant  $t$ , sont  $x, y, z$ , a pour coordonnées, à l'instant  $(t + dt)$ , les sommes  $(x + u dt)$ ,  $(y + v dt)$ ,  $(z + w dt)$ . Si  $\rho$  est sa densité à l'instant  $t$ , cette densité, à l'instant  $(t + dt)$ , est

$$\left( \rho + \frac{d\rho}{dt} dt \right)$$

et l'on sait que l'on a l'équation de continuité

$$(59) \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \theta = 0.$$

Si la densité  $\rho$  est exprimée en fonction des variables indépendantes  $x, y, z, t$ , on a

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} u + \frac{\partial \rho}{\partial y} v + \frac{\partial \rho}{\partial z} w,$$

en sorte que l'égalité (59) peut s'écrire plus explicitement

$$(60) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0.$$

L'égalité (59) nous enseigne que, si le fluide étudié est tel que chaque élément

garde, au cours du mouvement, une densité invariable, cas auquel le fluide est dit *incompressible*, on a, en tout point et à tout instant,

$$(61) \quad \theta = 0.$$

Dès lors, l'examen des égalités (51) nous montre qu'*au sein d'un fluide incompressible, les actions de viscosité ne dépendent pas de la fonction  $\lambda(\rho, T)$ , mais seulement de la fonction  $\mu(\rho, T)$ .*

Lorsque l'on étudie des fluides compressibles, on peut se demander s'il existe une relation entre les deux fonctions  $\lambda(\rho, T)$ ,  $\mu(\rho, T)$  et, s'il en existe une, quelle est cette relation.

Les considérations précédentes fournissent seulement les conditions

$$(62) \quad \mu(\rho, T) \geq 0,$$

$$(63) \quad 3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) \geq 0,$$

qui se tirent de la comparaison des conditions (37), (37 *bis*), (38), (38 *ter*) avec les égalités (50).

Des théories fondées sur des hypothèses physiques autres que celles que nous admettons ont conduit certains auteurs à particulariser davantage le choix des fonctions  $\lambda(\rho, T)$ ,  $\mu(\rho, T)$ ; les suppositions les plus diverses ont été émises.

Cauchy, dans un Mémoire inédit composé en 1822, puis en 1828 (*Anciens Exercices*, p. 183; 3<sup>e</sup> année) a émis l'hypothèse que l'on avait  $\lambda = 0$ , mais sans regarder cette hypothèse comme forcée.

En 1843 (*Comptes rendus*, t. XVII, p. 1240), Saint-Venant a proposé d'admettre l'égalité

$$(64) \quad 3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) = 0,$$

selon laquelle une dilatation uniforme ne serait accompagnée d'aucun travail de viscosité. Cette opinion a été adoptée, en 1845, par Stokes (*Mathematical Papers*, Vol. I, p. 75), puis par G. Kirchhoff (*Theorie der Wärme*, p. 175), et dubitativement par M. L. Natanson (*Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie*, année 1901, p. 95).

M. O.-E. Meyer (*Journal de Crelle*, t. 78, p. 130; 1874. *Die kinetische Theorie der Gase*, p. 325; 1877) a proposé l'égalité

$$\lambda(\rho, T) = \mu(\rho, T).$$

Enfin, en 1829, Poisson (*Journal de l'École Polytechnique*, 20<sup>e</sup> Cahier, t. XIII, p. 174) a proposé de n'établir aucune relation entre les fonctions  $\lambda$  et  $\mu$ .

Nous suivrons cette dernière opinion, qui renferme toutes les autres comme

cas particuliers; nous nous bornerons à remarquer que toutes les suppositions émises s'accordent avec la proposition suivante :

*Pour tout fluide visqueux, on a les deux inégalités*

$$\begin{aligned} (62 \text{ bis}) \quad & \mu(\rho, T) > 0, \\ (65) \quad & \lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) > 0. \end{aligned}$$

§ 4. — NATURE DES ACTIONS AUXQUELLES SONT SOUMIS LES FLUIDES ÉTUDIÉS.  
ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DE CES FLUIDES.

Il nous faut maintenant, pour parvenir aux équations du mouvement des fluides, développer les quantités  $d\mathcal{C}_e$  et  $\delta_T \mathcal{F}$ , ce qui ne se peut faire si l'on n'admet certaines hypothèses touchant les actions extérieures auxquelles le fluide est soumis et touchant la forme du potentiel interne. Les hypothèses que nous admettrons ici sont celles que nous avons admises autrefois en des recherches sur l'Hydrostatique <sup>(1)</sup>.

Le potentiel interne sera de la forme

$$(66) \quad \mathcal{F} = \int \zeta(\rho, T) dm + \frac{1}{2} \iint \psi(\rho, \rho', r) dm dm',$$

égalité dans laquelle

$\rho$  est la densité en un point de la masse  $dm$ ,

$T$  la température absolue au même point,

$r$  la distance d'un point de la masse élémentaire  $dm$  à un point de la masse élémentaire  $dm'$ ,

et les intégrations s'étendent toutes à la masse entière du fluide.

Nous supposons, bien entendu, que ces intégrales existent et qu'il en soit de même des intégrales suivantes :

$$(67) \quad \left\{ \begin{aligned} V_i(t, x, y, z) &= \int \psi(\rho, \rho', r) dm', \\ X_i(t, x, y, z) &= - \int \frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} dm', \\ Y_i(t, x, y, z) &= - \int \frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} dm', \\ Z_i(t, x, y, z) &= - \int \frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} dm', \\ A_i(t, x, y, z) &= - \int \frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial \rho} dm'. \end{aligned} \right.$$

<sup>(1)</sup> *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique*, égalité (56) (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3<sup>e</sup> série, t. X, p. 214; 1893).



Pour former ces fonctions  $V_i, X_i, Y_i, Z_i, A_i$ , il faut évidemment, au second membre, remplacer respectivement  $\rho, \rho'$  par  $\rho(x, y, z, t), \rho'(x, y, z, t)$ ; il faut donc connaître la figure du fluide et la distribution des densités en cette figure; mais il est inutile de connaître la valeur de la température aux divers points de la masse fluide.

On peut obtenir les fonctions  $V_i, X_i, Y_i, Z_i, A_i$  qui figurent dans les équations (67) en opérant de la manière suivante :

Soit  $R$  une indéterminée comprise entre les limites entre lesquelles  $\rho$  peut varier, de telle sorte que

$$\psi(R, \rho', r)$$

ait un sens. Considérons les fonctions

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_i(R, x, y, z, t) = \int \psi(R, \rho', r) dm', \\ \mathfrak{X}_i(R, x, y, z, t) = - \int \frac{\partial \psi(R, \rho', r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} dm', \\ \mathfrak{Y}_i(R, x, y, z, t) = - \int \frac{\partial \psi(R, \rho', r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} dm', \\ \mathfrak{Z}_i(R, x, y, z, t) = - \int \frac{\partial \psi(R, \rho', r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} dm', \\ \mathfrak{A}_i(R, x, y, z, t) = - \int \frac{\partial \psi(R, \rho', r)}{\partial R} dm'. \end{array} \right.$$

Dans ces dernières fonctions, il suffit visiblement de faire

$$R = \rho(x, y, z, t)$$

pour obtenir les fonctions  $V_i, X_i, Y_i, Z_i, A_i$  que définissent les égalités (67).

Nous admettons que la fonction  $\varphi_i(R, x, y, z, t)$  et ses dérivées partielles de tous les ordres par rapport à  $R$  existent et ont des valeurs finies. Nous admettons en outre que les dérivées partielles par rapport à  $x, y, z, t$  de  $\varphi_i$  ou de ses dérivées partielles  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial R}, \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial R^2}, \dots$  existent jusqu'à l'ordre  $n$  et ont des valeurs finies, si les dérivées partielles de  $\rho$  par rapport à  $x, y, z, t$  existent jusqu'à l'ordre  $(n-1)$  et ont des valeurs finies; nous supposons que la continuité de ces dernières dérivées assure la continuité des premières.

Les égalités

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_i}{\partial x} &= \frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

montrent alors que les dérivées partielles par rapport à  $x, y, z, t$  de  $V_i$ , de  $A_i, \dots$  existent jusqu'à l'ordre  $n$  et ont des valeurs finies si les dérivées partielles de  $\rho$  par rapport à  $x, y, z, t$  existent jusqu'à l'ordre  $n$  et ont des valeurs finies.

La première des égalités (67) nous permet d'écrire

$$\iint \psi(\rho, \rho', r) dm dm' = \int V_i dm$$

et, partant, de mettre l'égalité (66) sous la forme

$$(69) \quad \mathcal{F} = \int \zeta(\rho, T) dm + \frac{1}{2} \int V_i dm.$$

Pour former l'expression du travail  $d\mathcal{E}_e$  des actions extérieures, nous admettons qu'il existe quatre fonctions

$$\mathcal{X}_e(R, x, y, z, t), \quad \mathcal{Y}_e(R, x, y, z, t), \quad \mathcal{Z}_e(R, x, y, z, t), \quad \mathcal{A}_e(R, x, y, z, t)$$

dont on connaît la forme en chaque point  $(x, y, z)$  et à chaque instant  $t$ , si l'on connaît la nature du fluide soumis à ces actions et la nature, l'état, la forme, la disposition des corps étrangers.

Si, dans ces quatre fonctions, que nous supposons continues ainsi que leurs dérivées partielles de tous les ordres, on remplace  $R$  par  $\rho(x, y, z, t)$ , on obtient quatre nouvelles fonctions

$$X_e(x, y, z, t), \quad Y_e(x, y, z, t), \quad Z_e(x, y, z, t), \quad A_e(x, y, z, t).$$

Cela posé, nous admettons que le travail externe est de la forme

$$(70) \quad d\mathcal{E}_e = \int (P_x \delta x + P_y \delta y + P_z \delta z) dS \\ + \int (X_e \delta x + Y_e \delta y + Z_e \delta z) dm,$$

$P_x, P_y, P_z$  étant trois quantités qui varient d'une manière continue d'un point à l'autre de la surface  $S$ .

La première intégrale s'étend à la surface qui limite le fluide et la seconde à la masse fluide tout entière.

Nous devons maintenant écrire que l'égalité

$$(2) \quad d\mathcal{E}_e + d\mathcal{E}_j + d\mathcal{E}_v - \delta_1 \mathcal{F} = 0$$

doit avoir lieu pour tout déplacement virtuel isothermique imposé au fluide.

Mais sans nouveau calcul, et en faisant usage de résultats connus, nous pouvons écrire les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi.

Considérons les égalités (3), (47), (48), (49); nous voyons sans peine qu'au lieu de l'égalité (2) on peut écrire l'égalité

$$(1) \quad d\mathfrak{E}_e - \delta_{\mathbf{r}} \mathfrak{F} = 0,$$

pourvu que, dans le calcul de  $d\mathfrak{E}_e$ , on remplace respectivement

$$\mathbf{P}_x, \quad \mathbf{P}_y, \quad \mathbf{P}_z$$

par

$$(71) \quad \mathbf{P}_x + p_x, \quad \mathbf{P}_y + p_y, \quad \mathbf{P}_z + p_z$$

et

$$\rho \mathbf{X}_e, \quad \rho \mathbf{Y}_e, \quad \rho \mathbf{Z}_e, \quad \Lambda_e$$

par

$$(72) \quad \rho(\mathbf{X}_e - \gamma_x) + q_x, \quad \rho(\mathbf{Y}_e - \gamma_y) + q_y, \quad \rho(\mathbf{Z}_e - \gamma_z) + q_z, \quad \Lambda_e.$$

Or l'équation (1) est l'équation fondamentale de l'équilibre des fluides. On peut donc dire que *les équations de l'Hydrostatique doivent être vérifiées si, aux actions extérieures, on substitue les actions (71) et (72).*

Dès lors, en nous appuyant sur des résultats connus (<sup>1</sup>), nous pouvons énoncer les propositions suivantes :

*Il existe une fonction  $\Pi(x, y, z, t)$  qui est finie, continue et uniforme dans toute la masse fluide, et qui n'est jamais négative*

$$(73) \quad \Pi(x, y, z, t) \geq 0,$$

*telle que l'on ait :*

1° *En tous les points de la masse fluide :*

$$(74) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho(\mathbf{X}_i + \mathbf{X}_e - \gamma_x) - q_x = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial y} - \rho(\mathbf{Y}_i + \mathbf{Y}_e - \gamma_y) - q_y = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial z} - \rho(\mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}_e - \gamma_z) - q_z = 0, \end{array} \right.$$

$$(75) \quad \Pi + \rho^2(\Lambda_i + \Lambda_e) - \rho^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial \rho^2} = 0;$$

---

(<sup>1</sup>) *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique*, égalités (81), (82), (83) (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3<sup>e</sup> série, t. X, p. 223; 1893).

2° En tout point de la surface qui limite le fluide

$$(76) \quad \begin{cases} \Pi \cos(n_i, x) = P_x + p_x, \\ \Pi \cos(n_i, y) = P_y + p_y, \\ \Pi \cos(n_i, z) = P_z + p_z. \end{cases}$$

Arrêtons-nous un instant à ces égalités (76).

Supposons que, par une surface  $\Sigma$ , nous coupions le fluide en deux parties A et B; gardant la partie A, enlevons la partie B, qui faisait obstacle au mouvement de la précédente; en chaque point de la partie A, les quantités  $X_i, Y_i, Z_i, A_i$  se trouveront, en général, diminuées; au moyen de corps extérieurs convenables *et non contigus à la partie A*, faisons croître  $X_e, Y_e, Z_e, A_e$  de quantités respectivement égales à celles dont ont déchu  $X_i, Y_i, Z_i, A_i$ ; les sommes  $(X_i + X_e), (Y_i + Y_e), (Z_i + Z_e), (A_i + A_e)$  auront ainsi même valeur avant et après l'ablation de la partie B; pour que le mouvement de la partie A reste le même avant et après cette ablation, il sera nécessaire et suffisant d'appliquer à chaque élément  $d\Sigma$  de la surface  $\Sigma$  une force dont les composantes

$$P_x d\Sigma, \quad P_y d\Sigma, \quad P_z d\Sigma$$

seront, en vertu des égalités (76) et (48), données par les égalités

$$(77) \quad \begin{cases} P_x = (\Pi + \nu_x) \cos(n_i, x) + \tau_z \cos(n_i, y) + \tau_y \cos(n_i, z), \\ P_y = \tau_z \cos(n_i, x) + (\Pi + \nu_y) \cos(n_i, y) + \tau_x \cos(n_i, z), \\ P_z = \tau_y \cos(n_i, x) + \tau_x \cos(n_i, y) + (\Pi + \nu_z) \cos(n_i, z), \end{cases}$$

où  $n_i$  est la normale à l'élément  $d\Sigma$  vers l'intérieur de la partie A.

Pour les diverses surfaces  $\Sigma$  que l'on peut faire passer par un point du fluide, la pression  $P_x, P_y, P_z$  varie en grandeur et direction avec la normale  $n_i$ ; la loi de cette variation, établie par Cauchy et par Lamé, est étudiée dans tous les traités d'Élasticité.

Cette pression joue ici le rôle de *pression de liaison* qui, dans les fluides en équilibre, est dévolue à la grandeur  $\Pi$ . Mais, chose remarquable, *ce n'est pas la pression de liaison  $P_x, P_y, P_z$ , mais la grandeur  $\Pi$  qui figure dans l'équation de compressibilité et de dilatation du fluide* (75). Cette proposition semblerait paradoxale si elle n'était établie par les méthodes générales et rigoureuses de l'Énergétique.

§ 5. — LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT MISES SOUS LA FORME D'EULER  
ET DE NAVIER. — NÉCESSITÉ D'UNE RELATION SUPPLÉMENTAIRE.

Reprenons les équations indéfinies (74).

Les expressions de  $q_x, q_y, q_z$  sont données par les égalités (58). D'autre part, on sait que l'on a

$$(78) \quad \begin{cases} \gamma_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \gamma_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \gamma_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}. \end{cases}$$

Les équations (74) se transforment alors en trois équations dont la première est

$$(79) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho(X_i + X_e) + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ & - [\lambda(\rho, T) + \mu(\rho, T)] \frac{\partial \theta}{\partial x} - \mu(\rho, T) \Delta u - \theta \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \\ & - \left[ 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial \rho}{\partial z} \right] \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \\ & - \left[ 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial T}{\partial z} \right] \frac{\partial \mu}{\partial T} = 0. \end{aligned} \right.$$

Les deux autres ont des formes analogues.

A ces équations il faut joindre l'équation en termes finis

$$(75) \quad \Pi + \rho^2(A_i + A_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} = 0$$

et l'équation de continuité

$$(60) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0.$$

Ces relations diverses ne suffisent pas à mettre en équations même les problèmes les plus simples sur les mouvements des fluides.

Supposons, en effet, que les diverses parties du fluide n'exercent les unes sur les autres aucune action, de telle sorte que l'on ait

$$X_i = 0, \quad Y_i = 0, \quad Z_i = 0, \quad A_i = 0,$$

et supposons, en outre, que les fonctions  $X_e, Y_e, Z_e, A_e$  soient exprimées expli-

citement en fonctions de  $x, y, z, t$ . Les équations (60), (75), (79) forment un groupe de cinq équations entre les six fonctions inconnues

$$u, v, w, \rho, \Pi, T.$$

Une de ces équations, l'équation (75), est une relation en termes finis; une autre, l'équation (60), est une équation aux dérivées partielles du premier ordre; enfin les trois équations (79) sont des équations aux dérivées partielles du second ordre. La mise en équations ne sera complète que si, aux relations fournies par l'Énergétique, on joint une *relation supplémentaire* empruntée à d'autres considérations.

L'établissement de cette relation exige l'étude de la quantité de chaleur dégagée, en une modification réelle ou virtuelle, par chaque élément du fluide.

#### § 6. — QUANTITÉ DE CHALEUR DÉGAGÉE PAR CHACUN DES ÉLÉMENTS DU FLUIDE.

Considérons un système indépendant des corps extérieurs et ayant, en tous ses points, la même température  $T$ ; soit  $S$  son entropie; en une modification réelle ou virtuelle quelconque, il dégage une quantité de chaleur  $dQ$  et l'on a (1)

$$(80) \quad E dQ = -ET \delta S - d\tilde{\epsilon}_v,$$

$E$  étant l'équivalent mécanique de la chaleur.

Si le système, au lieu d'être indépendant des corps extérieurs, présente avec eux des *liaisons bilatérales* qui sont des *soudures*, la quantité de chaleur qu'il dégage dans une modification réelle ou virtuelle n'est plus une grandeur définie; on peut alors regarder l'égalité (80) comme donnant la *définition* de cette grandeur.

C'est cette égalité que nous allons appliquer à chacun des éléments de volume  $d\omega$ , de masse  $dm = \rho d\omega$ , en lesquels un fluide peut être décomposé.

Nous avons, dans ce cas (2),

$$(81) \quad ES = - \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T} dm$$

et, aussi selon l'égalité (41),

$$d\tilde{\epsilon}_v = d\tau_v d\omega.$$

(1) *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques*, I<sup>re</sup> Partie, Chap. I, § 5, égalité (24) (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 5<sup>e</sup> série, t. II, 1896).

(2) *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique*, égalité (50) (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3<sup>e</sup> série, t. X, p. 213; 1893).

L'égalité (80) devient donc

$$(82) \quad E dQ = T \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \partial T} \delta \rho + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2} \delta T \right) dm - d\tau_\nu d$$

Si l'on observe d'ailleurs que, selon une formule connue,

$$\delta \rho = -\rho \left( \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} \right),$$

et si l'on fait usage de l'expression de  $d\tau_\nu$  donnée par l'égalité (45), on voit que l'égalité (82) peut s'écrire :

$$(83) \quad dQ = - \left[ c dT + \alpha_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial \delta z}{\partial z} + \beta_x \left( \frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y} \right) + \beta_y \left( \frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z} \right) + \beta_z \left( \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right) \right] dm$$

avec

$$(84) \quad \left\{ \begin{array}{l} c = -\frac{T}{E} \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial T^2}, \\ \alpha_x = \frac{1}{E} \left[ T \rho \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho \partial T} + \frac{\nu_x}{\rho} \right], \\ \alpha_y = \frac{1}{E} \left[ T \rho \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho \partial T} + \frac{\nu_y}{\rho} \right], \\ \alpha_z = \frac{1}{E} \left[ T \rho \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho \partial T} + \frac{\nu_z}{\rho} \right], \\ \beta_x = \frac{1}{E} \frac{\tau_x}{\rho}, \quad \beta_y = \frac{1}{E} \frac{\tau_y}{\rho}, \quad \beta_z = \frac{1}{E} \frac{\tau_z}{\rho}. \end{array} \right.$$

Considérons, en particulier, le cas où la modification virtuelle considérée coïncide avec la modification réelle subie par le système dans le temps  $dt$ . Si nous posons

$$(85) \quad \sigma(\rho, T) = -\frac{1}{E} \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T},$$

$\sigma dm$  sera l'entropie de l'élément  $dm$  à l'instant  $t$ ; désignons par  $\left( \sigma + \frac{d\sigma}{dt} dt \right)$  la valeur de cette même fonction, à l'instant  $(t + dt)$ , pour le même élément matériel. Selon les égalités (53) et (85), l'égalité (80) deviendra, pour la modification réelle accomplie dans le temps  $dt$ ,

$$(86) \quad E dQ = - \left( ET \frac{d\sigma}{dt} dm - 2 \mathfrak{D} d\omega \right) dt.$$

G. Kirchhoff a donné <sup>(1)</sup> une expression semblable de  $dQ$ ; mais, faute d'être fondés sur des principes énergétiques rigoureux, les raisonnements par lesquels il a tenté de la justifier ne valent point; ils ont été révoqués en doute par M. C. Neumann dans un travail dont il sera fait mention au paragraphe suivant.

La quantité  $\mathfrak{D}$  ne peut jamais être négative. L'égalité (86) nous donne donc

$$(87) \quad dQ + T \frac{d\sigma}{dt} dm dt \geq 0,$$

le signe d'égalité étant réservé au cas où la modification éprouvée pendant le temps  $dt$  par l'élément  $dm$  n'entraîne aucun travail de viscosité.

Écrivons des égalités analogues pour toutes les masses élémentaires qui composent le fluide et faisons-en la somme.

La somme des quantités  $dQ$  sera, selon une démonstration donnée dans notre Cours sur l'Énergétique professé à la Faculté des Sciences de Bordeaux en 1898-1899, la quantité de chaleur  $d\mathfrak{Q}$  que le système tout entier dégage pendant le temps  $dt$ . Nous aurons donc

$$(88) \quad d\mathfrak{Q} + dt \int T \frac{d\sigma}{dt} dm \geq 0,$$

le signe d'égalité étant réservé au cas où, dans le fluide, les actions de viscosité n'effectuent aucun travail pendant le temps  $dt$ .

Si nous divisons par  $T$  les deux membres de l'inégalité (87), nous trouvons

$$\frac{dQ}{T} + \frac{d\sigma}{dt} dm dt \geq 0.$$

Pour tous les éléments du fluide, écrivons des inégalités analogues et faisons-en la somme. Remarquons que

$$\int \frac{d\sigma}{dt} dm = \frac{d}{dt} \int \sigma dm$$

et que  $S = \int \sigma dm$  est l'entropie totale du fluide. Nous aurons

$$(89) \quad \sum \frac{dQ}{T} + \frac{dS}{dt} dt \geq 0,$$

le signe d'égalité étant réservé au même cas que dans (88).

Les inégalités (88) et (89) fournissent une double extension au mouvement d'un fluide de la célèbre inégalité de Clausius.

(1) G. KIRCHHOFF, *Theorie der Wärme*, p. 118.



L'égalité (86) peut s'écrire plus explicitement. On a

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{1}{E} \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial T^2} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho \partial T} \frac{d\rho}{dt},$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} u + \frac{\partial T}{\partial y} v + \frac{\partial T}{\partial z} w$$

et, selon l'égalité (59),

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right).$$

D'ailleurs,  $\mathfrak{D}$  est donné par la formule (54). On a donc

$$\begin{aligned} (90) \quad E dQ = & \left\{ T\rho \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial T^2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} u + \frac{\partial T}{\partial y} v + \frac{\partial T}{\partial z} w + \frac{\partial T}{\partial t} \right) \right. \\ & - T\rho^2 \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho \partial T} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ & + \lambda(\rho, T) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \\ & \left. + 2\mu(\rho, T) \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} d\omega dt. \end{aligned}$$

## § 7. — ÉTABLISSEMENT DE LA RELATION SUPPLÉMENTAIRE.

Toutes les fois qu'une doctrine indépendante de l'Énergétique nous fournira une expression de la quantité de chaleur  $dQ$  dégagée, pendant le temps  $dt$ , par chacun des éléments  $d\omega$  du fluide, en égalant cette expression à la précédente, nous obtiendrons la relation supplémentaire cherchée.

Supposons, par exemple, que, d'une partie à l'autre du fluide, la chaleur se transmette exclusivement par conductibilité et point par rayonnement; que cette transmission par conductibilité se fasse selon la théorie de Fourier; enfin que le coefficient de conductibilité, fonction de  $\rho$  et de  $T$ , soit désigné par  $k(\rho, T)$ .

Au moyen d'une surface fermée  $\Sigma$ , isolons une partie A du fluide; soit  $n_i$  la normale à la surface  $\Sigma$ , dirigée vers l'intérieur de la partie A. L'hypothèse précédente revient à dire que, dans le temps  $dt$ , la partie A du fluide dégage une quantité de chaleur

$$(91) \quad d\mathfrak{Q} = -dt \int k(\rho, T) \frac{\partial T}{\partial n_i} d\Sigma.$$

Faisons maintenant cette RESTRICTION ESSENTIELLE : *En tous les points de la partie A du fluide, les quantités*

$$\frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial z^2}$$

*existent et sont finies.*

L'égalité (91) pourra alors se transformer et s'écrire

$$(92) \quad d\mathfrak{Q} = -dt \int_A \left[ k(\rho, \mathbf{T}) \Delta \mathbf{T} + \left( \frac{\partial k}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial \mathbf{T}} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} \right) \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial k}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial k}{\partial \mathbf{T}} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} \right) \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial k}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial k}{\partial \mathbf{T}} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z} \right) \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z} \right] d\mathfrak{w}.$$

Cette égalité (92) demeure vraie, quelque petite que soit la partie A. On voit donc que la quantité de chaleur réellement dégagée, dans le temps  $dt$ , par l'élément  $d\mathfrak{w}$  a pour valeur

$$(93) \quad dQ = - \left[ k(\rho, \mathbf{T}) \Delta \mathbf{T} + \left( \frac{\partial k}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial \mathbf{T}} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} \right) \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial k}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial k}{\partial \mathbf{T}} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} \right) \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial k}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial k}{\partial \mathbf{T}} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z} \right) \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z} \right] d\mathfrak{w} dt.$$

En égalant les deux expressions (90) et (93) de  $dQ$ , nous trouvons la relation

$$(94) \quad k(\rho, \mathbf{T}) \Delta \mathbf{T} + \frac{\partial k}{\partial \mathbf{T}} \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z} \right)^2 \right] \\ + \frac{\partial k}{\partial \rho} \left( \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \\ + \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{E}} \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \mathbf{T}^2} \left( \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} u + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} v + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z} w + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} \right) \\ - \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{E}} \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \partial \mathbf{T}} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ + \frac{\lambda(\rho, \mathbf{T})}{\mathbf{E}} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \\ + \frac{2\mu(\rho, \mathbf{T})}{\mathbf{E}} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] = 0.$$

C'est la relation supplémentaire cherchée.

Cette relation a été donnée par G. Kirchhoff <sup>(1)</sup>; mais, comme nous l'avons indiqué au paragraphe précédent, elle n'est point rattachée par lui à une définition précise de la quantité de chaleur dégagée par chacune des parties d'un système doué de viscosité; aussi les raisonnements de G. Kirchhoff ont-ils paru peu convaincants pour M. C. Neumann <sup>(2)</sup>, qui leur en a substitué d'autres. Il est parvenu ainsi à une relation supplémentaire qui diffère de la précédente par l'absence des termes en  $\lambda(\rho, T)$ ,  $\mu(\rho, T)$ ; selon M. C. Neumann, la relation supplémentaire serait la même, que le fluide soit ou non visqueux.

La relation (94) offre divers cas particuliers qu'il est intéressant de considérer.

Supposons d'abord le *fluide très conducteur*;  $k(\rho, T)$  a une très grande valeur; la relation (94) se réduit alors à ce que l'on obtient en supprimant les termes qui ne renferment pas un facteur  $k$  ou ses dérivées partielles; elle peut se mettre sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k(\rho, T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k(\rho, T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ k(\rho, T) \frac{\partial T}{\partial z} \right] = 0,$$

qui exprime la proposition suivante :

*A chaque instant, la température affecte, en la masse fluide, la distribution qui conviendrait au régime thermique permanent si l'on figeait le fluide dans l'état qu'il présente à cet instant.*

En particulier, si la température est la même en tous les points de la surface  $S$  qui limite le fluide, elle est aussi la même en tous les points du fluide.

Supposons, au contraire, que le *fluide soit très mauvais conducteur* :

$$(95) \quad k(\rho, T) = 0.$$

L'égalité (94) se réduit à ce que l'on obtient en égalant à zéro l'expression de  $dQ$  donnée par l'égalité (90); elle nous enseigne que *la modification réelle éprouvée par chacun des éléments de la masse fluide est une modification adiabatique.*

Supposons, enfin, que le *fluide soit, à la fois, non conducteur et non visqueux*; à l'égalité (95) nous devons joindre les égalités

$$(96) \quad \lambda(\rho, T) = 0, \quad \mu(\rho, T) = 0.$$

(1) G. KIRCHHOFF, *Theorie der Wärme*, p. 118.

(2) C. NEUMANN, *Berichte der Sächsischen Gesellschaft zu Leipzig*, 8 janvier 1894.

La condition (94) pourra se mettre sous la forme

$$(97) \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \partial T} \frac{d\rho}{dt} = 0$$

ou bien, selon (85),

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0.$$

*La modification réelle éprouvée par chacun des éléments de la masse fluide est isentropique.*

### § 8. — DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES.

Les équations du mouvement (74), (75), (76) s'obtiennent, comme on sait, en imposant au fluide une modification virtuelle dans laquelle la température de chaque élément demeure invariable.

Pour obtenir les équations (74) et (76), on suppose que la densité de chacun de ces éléments est, en même temps, invariable, ce qui ne souffre pas de difficulté; mais, pour obtenir l'égalité (75), on est obligé de faire varier la densité des divers éléments, tout en maintenant leur température invariable.

Par conséquent, *pour qu'il soit permis d'écrire l'équation (75), il faut que l'opération qui consiste à faire varier la densité des divers éléments fluides en laissant constante la température de chacun d'eux ne soit pas contradictoire avec la définition même du système.*

Or, il est aisé de définir des fluides, de telle sorte que cette définition exclue la possibilité de la modification virtuelle considérée.

Cela aura lieu si l'on pose que *la densité du fluide est une fonction déterminée de la température*

$$(98) \quad \rho = f(T),$$

cas auquel on dit que l'on a affaire à un *fluide incompressible, mais dilatable*.

Cela aura lieu plus particulièrement si l'on pose que *la densité du fluide est absolument invariable*

$$(99) \quad \rho = \text{const.},$$

cas auquel le *fluide est dit incompressible et indilatable*.

Ce dernier cas est facile à traiter.

L'équation de continuité (60) se réduit à

$$(61) \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Les équations (79) se réduisent à l'équation

$$(100) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho(\mathbf{X}_i + \mathbf{X}_e) + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ - \mu(\mathbf{T}) \Delta u - \left[ 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z} \right] \frac{d\mu}{d\mathbf{T}} = 0$$

et à deux équations analogues.

Enfin, la relation supplémentaire (94) devient, en tenant compte de (84),

$$(101) \quad k(\mathbf{T}) \Delta \mathbf{T} + \frac{dk}{d\mathbf{T}} \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z} \right)^2 \right] \\ - \rho c(\mathbf{T}) \left( \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} u + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} v + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z} w + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} \right) \\ + \frac{2\mu(\mathbf{T})}{\mathbf{E}} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] = 0.$$

Cinq équations lient les cinq fonctions inconnues

$$u, \quad v, \quad w, \quad \Pi, \quad \mathbf{T}.$$

L'étude des fluides incompressibles, mais dilatables, donne lieu à une remarque essentielle.

Plusieurs des propositions, empruntées à l'Énergétique, dont nous avons fait usage jusqu'ici, supposent que le système est rapporté à des variables normales ou que ses modifications sont définies par des variations normales. Or *un fluide incompressible, mais dilatable, ne peut être défini au moyen de variables normales; ses modifications ne peuvent être représentées par des variations normales.*

Quelles que soient, en effet, les variations  $\delta a, \delta b, \dots, \delta l$ , que l'on associe à  $\delta \mathbf{T}$  pour représenter une modification élémentaire de l'un des éléments du fluide, si l'on fait

$$\delta a = 0, \quad \delta b = 0, \quad \dots, \quad \delta l = 0,$$

tout en donnant à  $\delta \mathbf{T}$  une valeur différente de zéro, la densité  $\rho$  de l'élément éprouvera une variation; les divers éléments matériels qui composent le fluide se déplaceront donc dans une telle modification, ce qui est incompatible avec la définition des variations normales.

Il faudrait donc, pour traiter rigoureusement des fluides incompressibles, mais dilatables, reprendre sur nouveaux frais bon nombre de questions de Mécanique

des fluides, en particulier l'étude de la viscosité; nous ne pensons pas que l'objet poursuivi vaille un tel effort.

On pourrait se proposer de traiter, ce qui peut se faire au moyen des principes contenus dans les paragraphes précédents, des *fluides dilatables et très peu compressibles*; en d'autres termes, on supposerait que l'égalité

$$(98) \quad \rho = f(\mathbf{T})$$

est vérifiée non pas rigoureusement, mais *approximativement*.

Dans ce cas, rien ne s'opposerait plus à ce que nous écrivions les égalités (74) [ou (79)], (75), (76) et (94). Mais, comme la relation (75), différenciée, donne

$$d[\Pi + \rho^2(\Lambda_i + \Lambda_e)] = \left( 2\rho \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2} \right) d\rho + \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \partial \mathbf{T}} d\mathbf{T},$$

tandis que l'égalité (98) donne sensiblement

$$d\rho - f'(\mathbf{T}) d\mathbf{T} = 0,$$

on voit que les deux quantités

$$2 \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2}, \quad \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \partial \mathbf{T}}$$

devraient être deux quantités très grandes et que la relation

$$(102) \quad \frac{\rho \frac{\partial^2 \zeta(\rho, \mathbf{T})}{\partial \rho \partial \mathbf{T}}}{2 \frac{\partial \zeta(\rho, \mathbf{T})}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 \zeta(\rho, \mathbf{T})}{\partial \rho^2}} = -f'(\mathbf{T})$$

devrait être sensiblement vérifiée lorsqu'on y remplace  $\rho$  par  $f(\mathbf{T})$ .

Plusieurs des dérivées partielles du premier ou du second ordre de  $\zeta(\rho, \mathbf{T})$  étant extrêmement grandes, il en serait de même, en général, de  $\zeta(\rho, \mathbf{T})$  et de  $\frac{\partial \zeta(\rho, \mathbf{T})}{\partial \rho}$ ; il en résulte, en particulier, que l'équation (75) ne pourrait être généralement vérifiée pour des valeurs finies de  $\Pi$ . Cette conséquence nous montre l'impossibilité de traiter, en Thermodynamique, de fluides très peu compressibles et notablement dilatables.

Nous allons retrouver par ailleurs la même conclusion.

La relation

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho \theta = - \frac{d\rho}{dt}$$

peut s'écrire sensiblement, en vertu de l'égalité (98),

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -f'(\mathbf{T}) \frac{d\mathbf{T}}{dt} = -f'(\mathbf{T}) \left( \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} u + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} v + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z} w \right),$$

en sorte qu'au second membre de l'égalité (90) les deux premiers termes peuvent s'écrire

$$\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{E}} \rho \left[ \frac{\partial^2 \zeta(\rho, \mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}^2} + \frac{\partial^2 \zeta(\rho, \mathbf{T})}{\partial \rho \partial \mathbf{T}} f'(\mathbf{T}) \right] \left( \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} u + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} v + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z} w \right) d\omega dt.$$

Désignons par  $\gamma(\mathbf{T})$  ce que devient la somme

$$(103) \quad - \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{E}} \left[ \frac{\partial^2 \zeta(\rho, \mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}^2} + \frac{\partial^2 \zeta(\rho, \mathbf{T})}{\partial \rho \partial \mathbf{T}} f'(\mathbf{T}) \right],$$

lorsqu'on y remplace  $\rho$  par  $f(\mathbf{T})$ , et l'égalité (90) deviendra

$$(104) \quad dQ = - \left\{ \begin{aligned} & \gamma(\mathbf{T}) \left( \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} u + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} v + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z} w \right) \\ & - \frac{\overline{f'(\mathbf{T})}^2}{\mathbf{E} \overline{f(\mathbf{T})}^3} \left( \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} u + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} v + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z} w \right)^2 \\ & - \frac{2 \mathfrak{N}(\mathbf{T})}{\mathbf{E} f(\mathbf{T})} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} dm dt,$$

$\mathfrak{L}(\mathbf{T})$ ,  $\mathfrak{N}(\mathbf{T})$  étant ce que deviennent  $\lambda(\rho, \mathbf{T})$ ,  $\mu(\rho, \mathbf{T})$  lorsqu'on y remplace  $\rho$  par  $f(\mathbf{T})$ .

Cette formule nous donne l'interprétation de la quantité  $\gamma(\mathbf{T})$ .

Si l'on supposait le fluide non visqueux, en sorte que l'on eût

$$\mathfrak{L}(\mathbf{T}) = 0, \quad \mathfrak{N}(\mathbf{T}) = 0,$$

elle deviendrait

$$(105) \quad dQ = - \gamma(\mathbf{T}) \left( \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} u + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} v + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z} w \right) dm dt = - \gamma(\mathbf{T}) \frac{d\mathbf{T}}{dt} dm dt.$$

$\gamma(\mathbf{T})$  représente donc ce que serait la chaleur spécifique du fluide s'il cessait d'être visqueux.

On peut dire encore que  $\gamma(\mathbf{T})$  représente la chaleur spécifique du fluide échauffé avec une lenteur infinie de telle façon qu'à chaque instant, il soit sensiblement immobile.

Pour un semblable échauffement, en effet,

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}, \quad u, \quad v, \quad w$$

sont des quantités infiniment petites du premier ordre; il en est de même des

dérivées partielles de  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Dès lors, si l'on néglige les infiniment petits du second ordre, l'égalité (104) prend la forme (105).

Or, comme  $\frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho \partial T}$  doit avoir, pour les fluides que nous étudions, une valeur extrêmement grande, il en serait de même, en général, en vertu de la formule (103), de la chaleur spécifique  $\gamma(T)$ .

On peut démontrer très rigoureusement qu'il en est bien ainsi dans un cas particulier extrêmement étendu et défini de la manière suivante :

1° Les actions étudiées sont *newtoniennes*, en sorte que

$$(106) \quad A_i + A_e = 0.$$

2° La densité du fluide très peu compressible varie dans le même sens que la pression  $\Pi$ , la température étant maintenue constante. Cette loi est d'ailleurs une des conditions pour que le fluide puisse se trouver en équilibre stable sous l'action d'une pression uniformément répartie à la surface qui le limite (1).

En vertu des égalités (75) et (106), cette condition s'exprime par l'inégalité

$$2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho^2} > 0$$

que l'égalité (102) transforme en

$$\frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho \partial T} f'(T) < 0.$$

3° La chaleur spécifique normale  $c$  est essentiellement positive.

Cette proposition est un cas particulier d'une des hypothèses fondamentales de la Thermodynamique, que nous avons nommée *Postulat de Helmholtz*.

En vertu de la première égalité (84), cette condition s'exprime par l'inégalité

$$\frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial T^2} < 0.$$

Les deux termes qui composent  $\gamma(T)$  sont donc positifs; l'un d'eux étant extrêmement grand,  $\gamma(T)$  est, à coup sûr, extrêmement grand.

*On ne peut donc traiter le cas d'un fluide dilatable, mais infiniment peu compressible, comme un cas limite de l'étude thermodynamique des fluides compressibles suivant une loi quelconque; certaines des grandeurs physiques que l'on aurait à considérer deviennent infinies dans ce cas.*

(1) *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants*, Chap. I, § V (*Journal de Mathématiques*, 5<sup>e</sup> série, t. I, p. 131; 1895).



L'entropie de la masse élémentaire  $dm$  est  $\sigma(\rho, T) dm$ . Si nous voulons qu'elle devienne identiquement une fonction de la température seule, il faut que nous ayons ou bien  $\rho = \text{const.}$ , ou bien  $\rho = f(T)$ ; mais, dans ce dernier cas, l'état du fluide ne saurait être défini par des variables normales; nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

*Pour qu'en un fluide, défini par des variables normales, l'entropie soit IDENTIQUEMENT fonction de la température seule, il faut et il suffit que le fluide soit incompressible et indilatable.*

Considérons un tel fluide, et supposons, en outre, qu'il ne soit pas visqueux

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0.$$

La température  $T$  disparaît des équations (100), qui prennent la forme

$$(107) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho(X_i + X_e) + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Les quatre relations (107) et (61) lient les quatre fonctions inconnues

$$u, \quad v, \quad w, \quad \Pi.$$

Elles suffisent donc à mettre en équations le problème du mouvement du fluide sans qu'on ait à se soucier des variations de la température.

Une fois le mouvement du fluide déterminé, la condition supplémentaire (101) servira à étudier les variations de la température.

Nous obtenons ainsi une *extension au cas d'un fluide continu* d'un théorème que nous avons établi autrefois <sup>(1)</sup> pour les systèmes qui dépendent d'un nombre limité de variables :

*Lorsqu'un système, défini par des variables normales et exempt de viscosité, a une entropie qui, IDENTIQUEMENT, dépend de la température seule, les principes de l'Énergétique suffisent à mettre en équations le problème du mouvement de ce système; mais ils laissent indéterminée la variation de la température sur ce système; pour étudier cette variation, il faut faire appel à des principes autres que ceux de l'Énergétique.*

---

<sup>(1)</sup> Sur l'équation des forces vives en Thermodynamique et les relations de la Thermodynamique avec la Mécanique classique (Procès-verbaux de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 23 décembre 1897). — L'intégrale des forces vives en Thermodynamique (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5<sup>e</sup> série, t. IV, p. 5; 1898).

## CHAPITRE II.

L'ÉQUATION DES FORCES VIVES <sup>(1)</sup>.

## § 1. — DIVERS CAS OU IL EXISTE UNE INTÉGRALE DES FORCES VIVES.

## FORME DE CETTE INTÉGRALE.

L'égalité (2) est certainement vérifiée en toute modification réelle ou virtuelle du fluide; dans le présent Chapitre, nous nous proposons d'étudier particulièrement la forme que prend cette égalité lorsqu'on l'applique à une modification réelle. Toutefois nous subordonnerons cette étude à une condition restrictive : *nous admettrons que les actions extérieures dérivent d'un potentiel*. En d'autres termes, nous supposerons qu'il existe une fonction  $\Omega_e$ , dépendant uniquement de l'état du système, et telle que l'on ait, en toute modification réelle ou virtuelle,

$$(108) \quad d\mathfrak{E}_e = - \partial\Omega_e.$$

On suppose le système rapporté à des variables normales, en sorte qu'aucun travail externe n'est effectué lorsque l'on fait seulement varier la température de chaque élément; il en résulte que  $\Omega_e$  doit être indépendant de la température des divers éléments qui composent le fluide.

D'ailleurs, d'après ce que nous avons vu au Chapitre I, § 8, l'hypothèse, formulée en ce moment, et à laquelle nous nous tiendrons, que le système est rapporté à des variables normales, nous oblige à rejeter hors de notre étude le cas des fluides incompressibles, mais dilatables.

Dans une transformation réelle, nous avons

$$(55) \quad d\mathfrak{E}_v = - 2 \mathfrak{F} dt.$$

Nous avons aussi

$$d\mathfrak{E}_j = - dt \int (\gamma_x u + \gamma_y v + \gamma_z w) dm = - dt \int \left( u \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt} + w \frac{dw}{dt} \right) dm$$

ou, enfin,

$$(109) \quad d\mathfrak{E}_j = - d \int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} dm,$$

$\int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} dm$  étant la *force vive* du fluide.

---

<sup>(1)</sup> Sur la condition supplémentaire en Hydrodynamique (*Comptes rendus*, t. CXXXII, p. 117, 21 janvier 1901).

Considérons l'expression de  $\mathcal{F}$  donnée par l'égalité (66). Nous voyons immédiatement que nous pouvons écrire

$$\delta \mathcal{F} = \delta_T \mathcal{F} + \int \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T} \delta T dm$$

ou, selon l'égalité (85),

$$(110) \quad \delta_T \mathcal{F} = \delta \mathcal{F} + E \int \sigma(\rho, T) \delta T dm.$$

On voit, dès lors, que, *dans toute modification réelle élémentaire de la masse fluide, on peut écrire*

$$(111) \quad d\left(\Omega_e + \mathcal{F} + \int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} dm\right) - E dt \int \sigma(\rho, T) \frac{dT}{dt} dm = -2\mathfrak{F} dt.$$

Nous allons nous proposer de chercher dans quelles conditions le premier membre de l'égalité (111) devient l'accroissement subi, pendant le temps  $dt$ , par une grandeur qui dépend uniquement de l'état et du mouvement du système; ce qui revient au même, nous allons chercher dans quelles conditions

$$(112) \quad \Sigma = dt \int \sigma(\rho, T) \frac{dT}{dt} dm$$

présente le même caractère.

1° *Fluides incompressibles et indilatables.* — La grandeur  $\Sigma$  peut tout d'abord présenter ce caractère identiquement et quel que soit le mouvement du système; c'est ce qui a lieu toutes les fois que

$$\sigma(\rho, T) dT$$

est une différentielle totale.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que  $\rho$  soit identiquement une fonction de  $T$ ; mais, comme nous devons rejeter de notre étude le cas des fluides incompressibles et dilatables, le caractère dont nous venons de parler ne peut se présenter que *si le fluide est incompressible et indilatable*, cas auquel  $\rho$  est une constante.

Dans ce cas, si l'on se reporte à l'expression (85) de  $\sigma(\rho, T)$ , on peut écrire

$$(113) \quad \frac{dt}{E} \int \sigma(\rho, T) \frac{dT}{dt} dm = d\zeta(\rho, T).$$

En vertu des égalités (66) et (113), l'égalité (111) peut s'écrire

$$(114) \quad d\left(\Phi + \int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} dm\right) = -2\mathfrak{F} dt,$$

$\Phi$  ayant la signification suivante :

$$(115) \quad \Phi = \Omega_e + \frac{1}{2} \iint \psi(\rho, \rho', r) dm dm'.$$

$\Phi$  est, dans le cas des fluides incompressibles et indilatables, la somme du potentiel externe et du potentiel des actions que les divers éléments fluides exercent les uns sur les autres.

Si le fluide n'est pas visqueux,  $\mathfrak{F}$  est nul, et la relation (114) nous donne l'intégrale des forces vives :

$$(116) \quad \Phi + \int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} dm = \text{const.}$$

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Toutes les fois qu'un fluide non visqueux est défini par des variables normales et que l'entropie  $\sigma dm$  de chaque élément  $dm$  est, identiquement, fonction de la température seule, il existe, en tout mouvement du fluide, une intégrale des forces vives, et la fonction  $\Phi$  qui y figure est la somme du potentiel externe et du potentiel des actions mutuelles des divers éléments fluides.

Ce théorème est l'extension à une masse fluide d'une proposition démontrée ailleurs <sup>(1)</sup> pour un système qui dépend d'un nombre limité de paramètres variables.

2° *Fluide compressible animé d'un mouvement isothermique.* — La quantité

$$(112) \quad \Sigma = dt \int \sigma(\rho, T) \frac{dT}{dt} dm$$

peut n'être pas identiquement l'accroissement subi pendant le temps  $dt$  par une fonction de l'état du système et se transformer en un tel accroissement lorsqu'on fait usage de la condition supplémentaire; c'est ce qui a lieu en particulier lorsque la condition supplémentaire exige que, *dans son mouvement, chaque masse élémentaire du fluide garde une température invariable qui, d'ail-*

---

(1) *Sur l'équation des forces vives en Thermodynamique et les relations de la Thermodynamique avec la Mécanique classique* (Procès-verbaux de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 23 décembre 1897). — *L'intégrale des forces vives en Thermodynamique* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5<sup>e</sup> série, t. IV, p. 5; 1898). — Voir aussi E. JOUGUET, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5<sup>e</sup> série, t. XVII, p. 235; 1901.

leurs, peut n'être pas la même pour les divers éléments du fluide ; dans ce cas, le mouvement du fluide est dit *isothermique*.

Dans un mouvement isothermique on a

$$\frac{dT}{dt} = 0.$$

L'égalité (111) fournit donc la relation (114), et, si le fluide est dénué de viscosité, l'intégrale des forces vives (116), pourvu que l'on donne à  $\Phi$  la signification suivante :

$$(117) \quad \Phi = \Omega_e + \frac{1}{2} \iint \psi(\rho, \rho', r) dm dm' + \int \zeta(\rho, T) dm.$$

3° *L'entropie est, en vertu de la condition supplémentaire, fonction de la température seule.* — Hors ce cas, pour que la quantité

$$\Sigma = dt \int \sigma(\rho, T) \frac{dT}{dt} dm$$

devienne, en vertu de la condition supplémentaire, l'accroissement qu'éprouve, dans le temps  $dt$ , une fonction de l'état du système, il faut et il suffit que  $\sigma dt$  devienne, en vertu de la condition supplémentaire, une différentielle totale ; ou, en d'autres termes, que la condition supplémentaire entraîne cette conséquence :  *$\sigma$  est, pour chaque élément matériel, une fonction de la seule température de cet élément,*

$$(118) \quad \sigma = s(T),$$

CETTE FONCTION POUVANT D'AILLEURS DIFFÉRER D'UN ÉLÉMENT À L'AUTRE.

Si nous posons alors

$$(119) \quad \int s(T) dT = S(T),$$

nous pourrions écrire l'égalité (114) et, si le fluide n'est pas visqueux, l'intégrale des forces vives (116), en donnant à  $\Phi$  la signification suivante :

$$(120) \quad \Phi = \Omega_e + \frac{1}{2} \iint \psi(\rho, \rho', r) dm dm' + \int [\zeta(\rho, T) + E S(T)] dm.$$

4° *Fluide compressible animé d'un mouvement isotropique.* — Dans le cas que nous venons de traiter est impliqué un cas particulier intéressant : c'est celui où, *durant le mouvement du fluide, la grandeur  $\sigma$  garde, pour chaque élément, une valeur constante*

$$(121) \quad \sigma(\rho, T) = \sigma_0,$$

CETTE VALEUR POUVANT D'AILLEURS N'ÊTRE PAS LA MÊME POUR LES DIVERS ÉLÉMENTS DU FLUIDE; le mouvement du fluide est dit alors *isentropique*.

Nous avons vu au Chapitre I, § 7, que tout mouvement d'un fluide dénué de viscosité et de conductibilité était un mouvement isentropique.

Pour un tel mouvement, la fonction  $s(T)$ , définie par l'égalité (119), se réduit à  $Ts_0$ ; en vertu de l'égalité (121), elle est constamment égale à  $T\sigma(\rho, T)$  ou encore, en vertu de l'égalité (85), à  $-\frac{T}{E} \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T}$ .

On a donc les trois égalités

$$(122) \quad s(T) = Ts_0,$$

$$(123) \quad s(T) = T\sigma(\rho, T),$$

$$(124) \quad s(T) = -\frac{T}{E} \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T}.$$

On peut donc, dans le cas d'un mouvement isentropique, écrire l'égalité (114); si le fluide n'est pas visqueux, on peut écrire l'intégrale des forces vives (116); dans les deux cas, la fonction  $\Phi$  doit être, selon les égalités (120) et (124), définie comme suit :

$$(125) \quad \Phi = \Omega_e + \frac{1}{2} \int \int \psi(\rho, \rho', r) dm dm' + \int \left[ \zeta(\rho, T) - T \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T} \right] dm.$$

On remarquera que

$$\int \left[ \zeta(\rho, T) - T \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T} \right] dm + \frac{1}{2} \int \int \psi(\rho, \rho', r) dm dm'$$

est <sup>(1)</sup> le produit par l'équivalent mécanique de la chaleur  $E$  de l'énergie interne du fluide.

## § 2. — DU RÔLE DE LA FONCTION $\Phi$ EN HYDROSTATIQUE.

Considérons une des fonctions  $\Phi$  et le fluide auquel elle se rapporte. Nous allons établir la proposition suivante :

Pour obtenir les conditions d'équilibre d'un fluide auquel correspond une certaine fonction  $\Phi$ , il suffit d'écrire que l'on a

$$(126) \quad \delta\Phi = 0$$

---

<sup>(1)</sup> *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique (Annales de l'École Normale supérieure, 3<sup>e</sup> série, t. X, p. 214; 1893).*

pour toutes les modifications virtuelles qui sont soumises aux mêmes conditions que les modifications réelles pour lesquelles l'égalité (114) est valable.

Nous savons que, pour obtenir les conditions d'équilibre d'un fluide quelconque, il est nécessaire et suffisant d'écrire que l'on a

$$(1) \quad d\mathcal{E}_e - \delta_T \mathcal{F} = 0$$

pour toutes les modifications isothermiques virtuelles qui ne contredisent pas à la définition du fluide. Il s'agit donc d'établir, pour chacun des cas que nous avons distingués au paragraphe précédent, l'équivalence des égalités (1) et (126).

1° *Fluides incompressibles et indilatables.* — Pour un tel fluide, la densité de chaque élément demeure invariable en toute modification virtuelle; donc, en toute modification isothermique virtuelle,  $\zeta(\rho, T) dm$  demeure invariable. Dès lors, en vertu des égalités (66) et (108), la condition (1) peut s'énoncer ainsi :

On a

$$\delta \left[ \Omega_e + \frac{1}{2} \int \int \psi(\rho, \rho', r) dm dm' \right] = 0$$

pour toute modification isothermique virtuelle qui laisse invariable la densité de chaque élément fluide. Mais rien, dans la quantité entre [ ], ne dépend de la température; on peut donc effacer de cet énoncé le mot *isothermique*. Si l'on se reporte alors à l'égalité (115), on voit que l'énoncé précédent équivaut à celui-ci :

La condition (126) est vérifiée par toutes les modifications virtuelles qui laissent inaltérée la densité de chaque élément.

2° *Fluides dont les mouvements sont isothermiques.* — Dans ce cas, si l'on tient compte des égalités (66), (108) et (117), la condition (1) devient

$$(127) \quad \delta_T \Phi = 0.$$

Elle équivaut donc à celle-ci : La condition (126) est vérifiée en toute modification virtuelle isothermique.

3° *Fluides dont chaque élément a une entropie fonction de la température seule, en vertu de la condition supplémentaire.* — La condition supplémentaire est telle que l'on ait, en tout mouvement réel,

$$(118) \quad \sigma(\rho, T) = s(T),$$

la fonction  $s(T)$  pouvant différer d'un élément à l'autre. Pour obtenir une modification virtuelle en laquelle cette condition demeure constamment vérifiée, on peut prendre pour  $\delta\rho$ , en chaque élément, une valeur arbitraire et lui associer une

valeur de  $\delta T$  telle que

$$(128) \quad \frac{\partial \sigma(\rho, T)}{\partial \rho} \delta \rho + \left[ \frac{\partial \sigma(\rho, T)}{\partial T} - \frac{ds(T)}{dT} \right] \delta T = 0.$$

Considérons une modification virtuelle quelconque en laquelle la condition (121) est et demeure vérifiée; en cette modification,  $\delta \rho$  est quelconque et  $\delta T$  est lié à  $\delta \rho$  par la relation (128); supposons que, pour toute modification de ce genre, on ait la condition

$$(126) \quad \delta \Phi = 0,$$

$\Phi$  étant donné, dans ce cas, par l'égalité (120).

Si l'on tient compte de l'égalité (119), cette condition peut s'écrire

$$\begin{aligned} \delta \left[ \Omega_e + \frac{1}{2} \int \int \psi(\rho, \rho', r) dm dm' \right] \\ + \int \left\{ \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T} \delta \rho + \left[ \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T} - E s(T) \right] \delta T \right\} dm = 0. \end{aligned}$$

Mais, si l'on tient compte des égalités (121) et (85), on a

$$\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} - E s(T) = \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T} - E \sigma(\rho, T) = 0$$

et la condition précédente se réduit à celle-ci :

$$\delta \left[ \Omega_e + \frac{1}{2} \int \int \psi(\rho, \rho', r) dm dm' \right] + \int \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} \delta \rho dm = 0,$$

où  $\delta T$  ne figure plus, en sorte qu'il n'est plus nécessaire de mentionner que  $\delta T$  est lié à  $\delta \rho$  par la condition (128).

Cette condition est précisément la condition (1).

5° *Fluides dont les mouvements sont isentropiques en vertu de la relation supplémentaire.* — Ce cas est un cas particulier du précédent; il est donc inutile de donner à son sujet une démonstration nouvelle. La démonstration précédente suffit à prouver que, pour trouver les conditions d'équilibre d'un fluide, on peut, au lieu d'écrire la condition (1), exprimer que toute modification virtuelle où l'entropie de chaque élément garde une valeur invariable satisfait à la condition (126),  $\Phi$  ayant la forme (125).

Le théorème énoncé est ainsi démontré pour tous les cas.



## § 3. — DE LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE.

Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant :

*Considérons un fluide pour lequel on puisse écrire l'équation (114) et, s'il y a lieu, restreignons ses mouvements possibles à ceux pour lesquels l'emploi de cette équation est légitime. Si, dans un état déterminé de ce fluide, la fonction  $\Phi$  est minimum, cet état est un état d'équilibre stable.*

La démonstration que nous allons donner est imitée d'une démonstration bien connue de Lejeune-Dirichlet; quelques modifications, cependant, ont dû être introduites, parce qu'il ne s'agit pas ici d'un système défini par un nombre limité de variables indépendantes.

Soient deux états 0 et 1 du fluide étudié; soit  $d\omega$  un élément de volume qui renferme du fluide, soit dans l'état 0, soit dans l'état 1, soit à la fois dans les deux états; le fluide y a, dans l'état 0, la densité  $\rho_0$  et la température  $T_0$ ; dans l'état 1, il a la densité  $\rho_1$  et la température  $T_1$ ; l'une des densités  $\rho_0, \rho_1$  peut être égale à 0, si, dans l'un des états 0 ou 1, l'élément  $d\omega$  est vide; dans ce cas, nous conviendrons également d'attribuer à la température la valeur 0.

Formons les deux quantités

$$(129) \quad \begin{cases} R = \int |\rho_1 - \rho_0| d\omega, \\ \Theta = \int |T_1 - T_0| d\omega, \end{cases}$$

où les intégrations s'étendent aux régions de l'espace qui renferment du fluide au moins dans l'un des deux états 0 et 1.

Examinons les propriétés de ces deux quantités.

Pour que la quantité  $R$  soit nulle, il faut et il suffit que le fluide occupe la même partie de l'espace dans l'état 0 et dans l'état 1, et que chaque élément de cet espace soit, dans les deux états, rempli par un fluide de même densité. Hors ce cas,  $R$  a une valeur positive qui est finie si, dans une région finie de l'espace,  $\rho_1$  diffère de  $\rho_0$  d'une quantité finie.  $R$  est ce que nous nommerons l'*écart en densité* entre les états 0 et 1.

Lorsque le système se composera de plusieurs fluides de nature distincte, pour former l'écart en densité relatif au système entier, nous calculerons l'écart en densité de chacun des fluides, et nous en ferons la somme.

Au sujet de la quantité  $\Theta$ , nous pouvons répéter tout ce que nous avons dit au sujet de la quantité  $R$ , en remplaçant simplement le mot *densité* par le mot *température*.  $\Theta$  est l'*écart en température* entre les états 0 et 1.

Les deux égalités

$$(130) \quad R = 0, \quad \Theta = 0$$

suffisent à assurer l'identité des états 0 et 1.

Si les divers mouvements du fluide sont nécessairement isothermiques, la première égalité suffit à cet objet; dans ce cas, il est inutile d'écrire la seconde, et, dans les raisonnements qui vont suivre, on pourra biffer tout ce qui concerne la quantité  $\Theta$ .

Si le fluide est incompressible, mais dilatable, la seconde égalité (130) suffit à assurer l'identité des états 0 et 1; dans ce cas, il est inutile d'écrire la première ni, dans ce qui va suivre, de mentionner la grandeur  $R$ .

Cela posé, nous nous proposons d'une manière précise de démontrer la proposition suivante :

*Supposons que, dans un certain état  $\alpha$ ,  $\Phi$  ait une valeur minimum. Supposons qu'à chaque instant  $R$  et  $\Theta$  désignent les écarts du système par rapport à cet état  $\alpha$ . On pourra toujours trouver trois grandeurs positives  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $c_0$ , telles que si, à l'instant  $t_0$ , on a*

$$(131) \quad R_0 \leq a_0, \quad \Theta_0 \leq b_0, \quad \int \frac{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}{2} dm \leq c_0,$$

*on soit assuré d'avoir, à tout instant  $t$ , postérieur à  $t_0$ ,*

$$(132) \quad R < a, \quad \Theta < b, \quad \int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} dm \leq c,$$

*$a$ ,  $b$ ,  $c$  étant trois quantités positives données d'avance.*

La fonction  $\Phi$  n'est jamais déterminée qu'à une constante additive près. On peut toujours choisir cette constante de telle sorte que, dans l'état  $\alpha$ , on ait  $\Phi = 0$ .  $\Phi$  étant en même temps minimum, on pourra toujours fixer deux grandeurs positives  $A$  et  $B$ , telles que  $\Phi$  soit positif toutes les fois que l'on a

$$R \leq A, \quad \Theta \leq B,$$

sauf dans le cas où les égalités (130) sont simultanément vérifiées, cas auquel  $\Phi$  est nul.

On peut toujours assujettir  $a_0$ ,  $b_0$  à être pris respectivement inférieurs à  $A$  et à  $B$ ; on est alors assuré que la valeur  $\Phi_0$ , prise par  $\Phi$  à l'instant  $t_0$ , est positive.

D'autre part, on peut supposer que les deux limites assignées  $a$ ,  $b$  sont, respectivement, au plus égales à  $A$ ,  $B$ . Si, en effet, l'une d'elles,  $a$ , par exemple, surpassait la limite correspondante  $A$ ,  $R$ , variant d'une manière continue, ne pourrait passer de la valeur  $a_0$ , inférieure à  $A$ , à la valeur  $a$  sans franchir la valeur  $A$ ;

il suffirait donc, dans ce cas, pour que R ne puisse atteindre  $\alpha$ , qu'elle ne puisse atteindre A; c'est-à-dire qu'on pourrait substituer A à  $\alpha$  dans l'énoncé précédent.

Considérons tous les états du système pour lesquels on a, ou bien

$$R = \alpha, \quad \Theta \leq b$$

ou bien

$$R \leq \alpha, \quad \Theta = b.$$

Nommons ces états les *états e*.

L'énoncé même suppose que les grandeurs  $\alpha_0$ ,  $b_0$  sont respectivement inférieures à  $\alpha$ ,  $b$ ; dès lors, à aucun instant  $t$ , postérieur à  $t_0$ , l'une des inégalités

$$(132 \text{ bis}) \quad R < \alpha, \quad \Theta < b,$$

ne peut cesser d'être vérifiée, à moins que le système ne passe à cet instant par un état  $e$ , ou n'y ait passé à un instant compris entre  $t$  et  $t_0$ .

Pour chaque état  $e$ ,  $\Phi$  a une valeur positive; on ne peut d'ailleurs, parmi ces états  $e$ , former une suite qui ait pour limite l'état  $\alpha$ ; on ne peut donc, parmi les valeurs correspondantes de  $\Phi$ , former une suite qui ait pour limite 0; l'ensemble des valeurs de  $\Phi$  qui correspondent aux états  $e$  admet donc une limite inférieure positive P.

Prenons le système à un instant quelconque  $t$ , postérieur à  $t_0$ . A cet instant nous pouvons écrire, en vertu de l'égalité (114),

$$\Phi - \Phi_0 + \int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} dm - \int \frac{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}{2} dm = -2 \int_{t_0}^t \mathfrak{F} dt.$$

$\mathfrak{F}$  ne pouvant être positif ou nul, cette relation peut s'écrire

$$(133) \quad \Phi + \int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} dm \leq \Phi_0 + \int \frac{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}{2} dm.$$

Soit Q la plus petite des deux quantités P et  $c$ ; nous pouvons prendre

$$c_0 < \frac{Q}{2}.$$

D'ailleurs, comme  $\Phi$  tend vers 0 lorsque R et  $\Theta$  tendent vers 0, nous pouvons choisir  $\alpha_0$ ,  $b_0$ , de telle sorte que les deux premières égalités (131) entraînent

$$\Phi_0 < \frac{Q}{2}.$$

Moyennant ce choix de  $\alpha_0$ ,  $b_0$ ,  $c_0$ , le second membre de la relation (133) est infé-

rieur à Q

$$(134) \quad \Phi + \int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} dm < Q.$$

Q est au plus égal à P; d'autre part,  $\int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} dm$  ne peut être négatif. L'inégalité (134) nous donne alors

$$\Phi < P.$$

Donc à aucun instant  $t$ , postérieur à  $t_0$ , le système ne peut passer par un état  $e$ , en sorte qu'à tout instant  $t$ , postérieur à  $t_0$ , les deux premières inégalités (132) demeurent vérifiées.

De cette première conclusion découle qu'à aucun instant  $t$ , postérieur à  $t_0$ ,  $\Phi$  ne peut devenir négatif; dès lors, comme Q est au plus égal à  $c$ , l'inégalité (134) donne

$$\int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} dm < c,$$

ce qui est la dernière inégalité (132).

Le théorème énoncé est donc démontré.

#### § 4. — STABILITÉ ISOTHERMIQUE ET STABILITÉ ISENTROPIQUE (<sup>1</sup>).

Selon le théorème démontré au paragraphe précédent, un fluide incompressible et indilatable est en équilibre stable, pour tous les déplacements possibles, dans un état où la fonction  $\Phi$ , donnée par l'égalité (115), a une valeur minimum.

Un fluide compressible, assujéti à n'éprouver que des déplacements qui n'altèrent pas la température de ses divers éléments, est en équilibre stable dans un état où la fonction  $\Phi$ , définie par l'égalité (117), a une valeur minimum parmi celles qu'elle peut prendre sans changement de température des diverses masses élémentaires.

Si, dorénavant, nous désignons par  $\Phi_T$  la fonction  $\Phi$  que représente l'égalité (117), et par  $\delta_T$  une variation prise sans changement de température des diverses masses élémentaires, les conditions qui suffisent à assurer la *stabilité isothermique de l'équilibre* sont

$$(135) \quad \delta_T \Phi_T = 0,$$

$$(136) \quad \delta_T^2 \Phi_T > 0.$$

---

(<sup>1</sup>) *Sur la stabilité isentropique d'un fluide* (Comptes rendus, t. CXXXII, p. 244; 5 février 1901).

Un fluide compressible, assujéti à n'éprouver que des déplacements en lesquels l'entropie de chaque masse élémentaire varie selon la loi

$$(118) \quad \sigma(\rho, T) = s(T),$$

est en équilibre stable dans un état donné si, en cet état, la fonction  $\Phi$ , définie par l'égalité (120), a une valeur minimum parmi toutes celles qu'elle peut prendre en des variations soumises à la loi (118).

Désignons par  $\delta_s$  une telle variation, en laquelle on a, pour chaque élément,

$$(128) \quad \frac{\partial \sigma(\rho, T)}{\partial \rho} \delta \rho + \left[ \frac{\partial \sigma(\rho, T)}{\partial T} - \frac{ds(T)}{dT} \right] \delta T = 0,$$

et par  $\Phi_s$  la fonction  $\Phi$  que définit l'égalité (120). Les conditions qui suffisent à assurer la *stabilité de l'équilibre relativement à la loi*  $\sigma = s(T)$  sont

$$(137) \quad \delta_s \Phi_s = 0,$$

$$(138) \quad \delta_s^2 \Phi_s > 0.$$

Proposons-nous de comparer, pour un même fluide, ces deux sortes de stabilité d'équilibre.

Les démonstrations données au 3° et au 4° du § 2 nous prouvent que si, dans une variation  $\delta_s$ , on regarde  $\delta \rho$  comme une variation arbitraire et  $\delta T$  comme lié à  $\delta \rho$  par la relation (128), on a

$$(139) \quad \delta_s \Phi_s = \delta_T \Phi_T,$$

en sorte que les conditions (135) et (137) sont identiques.

En outre, cette égalité (139) nous permet d'écrire

$$(140) \quad \delta_s^2 \Phi_s = \delta_s \delta_T \Phi_T = \delta^2 \left[ \Omega_e + \frac{1}{2} \iint \psi(\rho, \rho', r) dm dm' \right] + \delta_s \int \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} \delta \rho dm.$$

Mais, visiblement,

$$\begin{aligned} \delta_s \int \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} \delta \rho dm &= \int \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho^2} (\delta \rho)^2 dm + \int \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho \partial T} \delta \rho \delta T dm \\ &= \delta_T \int \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} \delta \rho dm + \int \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho \partial T} \delta \rho \delta T dm, \end{aligned}$$

$\delta T$  étant, pour chaque élément, lié à  $\delta \rho$  par la relation (128).

L'égalité (140) devient alors

$$\delta_s^2 \Phi_s = \delta_T^2 \Phi_T + \int \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho \partial T} \delta \rho \delta T dm$$

ou bien, en remplaçant  $\partial T$  par sa valeur tirée de l'égalité (128) et en tenant compte de l'identité

$$(85) \quad \sigma(\rho, T) = -\frac{1}{E} \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T},$$

$$\partial_s^2 \Phi_s = \partial_T^2 \Phi_T - \int \frac{\left[ \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho \partial T} \right]^2}{\frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial T^2} + E \frac{ds(T)}{dT}} dm.$$

Si nous faisons usage de la première égalité (84)

$$c = -\frac{T}{E} \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial T^2},$$

l'égalité précédente devient

$$(141) \quad \partial_s^2 \Phi_s = \partial_T^2 \Phi_T + \frac{1}{E} \int \frac{T \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \partial T} \right)^2}{c - T \frac{ds}{dT}} dm.$$

En vertu d'une hypothèse générale de la Thermodynamique, que nous avons nommée <sup>(1)</sup> *Postulat de Helmholtz*,  $c$  est essentiellement positif. Donc toutes les fois que l'entropie de chaque élément demeure invariable, ou bien est une fonction décroissante de la température, ou bien encore croît avec la température, mais assez lentement pour que l'on ait

$$\frac{ds(T)}{dT} < \frac{c}{T},$$

on a

$$\partial_s^2 \Phi_s \geq \partial_T^2 \Phi_T,$$

en sorte que la condition (136) entraîne la condition (138); les conditions qui assurent la stabilité isothermique de l'équilibre assurent aussi la stabilité lorsque l'entropie de chaque élément dépend de la température seule.

En particulier, les conditions qui suffisent à assurer la stabilité isothermique d'un état d'équilibre assurent la stabilité isentropique du même état d'équilibre.

Nous obtenons ainsi l'extension à une masse fluide continue <sup>(2)</sup> d'un théorème

<sup>(1)</sup> *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, 3<sup>e</sup> Partie, Chap. IV (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4<sup>e</sup> série, t. X, p. 273; 1894). — *Traité élémentaire de Mécanique chimique*, t. I, p. 164; 1897.

<sup>(2)</sup> *Comptes rendus*, t. CXXXII, p. 244; 5 février 1901.

déjà démontré <sup>(1)</sup> pour les systèmes qui dépendent d'un nombre limité de paramètres variables.

§ 5. — RÉCIPROQUE DU CRITÉRIUM DE STABILITÉ. — CONSÉQUENCES  
DE CE CRITÉRIUM.

Pour qu'un système, sous les conditions indiquées, soit en équilibre stable dans un certain état, il suffit que cet état corresponde, sous les mêmes conditions, à un minimum de  $\Phi$ ; cette condition suffisante est-elle en même temps nécessaire? On n'a pu le démontrer jusqu'ici; toutefois, cette proposition peut être regardée comme très vraisemblable. A l'avenir, *nous en admettrons l'exactitude*.

Ce serait ici le lieu, si nous nous propositions de donner une exposition complète de la Dynamique des fluides, de traiter des conséquences diverses du critérium que nous venons d'obtenir. Pour l'exposé de ces conséquences, nous renverrons le lecteur aux divers écrits que nous avons publiés à ce sujet <sup>(2)</sup>.

## CHAPITRE III.

### FORME HABITUELLE DES ÉQUATIONS DE L'HYDRODYNAMIQUE <sup>(3)</sup>.

§ 1. — NATURE DES ACTIONS EXTÉRIEURES QUI SERONT CONSIDÉRÉES  
EN CE CHAPITRE.

Nous allons reprendre, pour les transformer, les équations de l'Hydrodynamique données en (79). Mais pour effectuer cette transformation, nous ferons

<sup>(1)</sup> *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, 3<sup>e</sup> Partie, Chap. IV (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4<sup>e</sup> série, t. X, p. 274; 1894). — *Traité élémentaire de Mécanique chimique*, t. I, p. 165; 1897.

<sup>(2)</sup> *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique*; Cours autographié de la Faculté des Sciences de Lille, Livre II, Chap. II, t. I, p. 80; 1891. — *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5<sup>e</sup> série, t. I, p. 91; 1895). — *Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles* (*Ibid.*, 5<sup>e</sup> série, t. III, p. 151; 1897).

<sup>(3)</sup> *Sur la condition supplémentaire en Hydrodynamique* (*Comptes rendus*, t. CXXXII, p. 117; 21 janvier 1901). — Cf. E. JOUGUET, *Le théorème des tourbillons en Thermodynamique* (*Comptes rendus*, t. CXXXI, p. 1190; 24 décembre 1900. — *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5<sup>e</sup> série, t. XIII, p. 235; 1901).

une supposition qui particularisera quelque peu la nature des actions extérieures auxquelles le fluide est soumis.

Nous admettrons qu'il existe une fonction  $U(x, y, z, \rho, t)$ , déterminée en chaque point  $(x, y, z)$  du fluide et à chaque instant  $t$ , telle que l'on ait

$$(142) \quad X_e = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y_e = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z_e = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad A_e = -\frac{\partial U}{\partial \rho}.$$

Cette fonction  $U$  existe, en particulier, si l'on suppose que les actions exercées par les corps extérieurs sur les divers éléments de la masse fluide sont analogues aux actions que les divers éléments de la masse fluide exercent les uns sur les autres.

Soient, en effet,

$dM$  un élément de masse appartenant aux corps extérieurs;

$\Delta$  la densité de l'élément  $dM$ ;

$R$  la distance des deux éléments  $dM, dm$ ;

$\chi(\rho, \Delta, R)$  une fonction analogue à  $\psi(\rho, \rho', r)$ .

Dans l'hypothèse énoncée, nous aurons les formules, analogues aux quatre dernières formules (67),

$$(143) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_e = - \int \frac{\partial \chi(\rho, \Delta, R)}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial x} dM, \\ Y_e = - \int \frac{\partial \chi(\rho, \Delta, R)}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial y} dM, \\ Z_e = - \int \frac{\partial \chi(\rho, \Delta, R)}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial z} dM, \\ A_e = - \int \frac{\partial \chi(\rho, \Delta, R)}{\partial \rho} dM, \end{array} \right.$$

les intégrations s'étendant à tous les corps étrangers.

Posons

$$(144) \quad U = \int \chi(\rho, \Delta, R) dM.$$

Si l'on suppose la position et l'état des corps étrangers connus à chaque instant  $t$ ,  $\Delta$  devient une fonction de  $t$ ,  $R$  une fonction de  $x, y, z, t$ ,  $\chi$  une fonction de  $x, y, z, \rho, t$ , et il en est de même de  $U$ . Il est clair, par les égalités (143) et (144), que cette fonction vérifie les égalités (142).

Considérons le travail élémentaire  $d\mathcal{C}'_e$  des actions  $X_e, Y_e, Z_e, A_e$  s'exerçant



sur toute la masse fluide. Ce travail a pour expression

$$d\mathfrak{C}'_e = \int (\mathbf{X}_e \delta x + \mathbf{Y}_e \delta y + \mathbf{Z}_e \delta z + \mathbf{A}_e \delta \rho) dm$$

ou bien, en vertu des égalités (142),

$$(145) \quad d\mathfrak{C}'_e = - \int \left( \frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z + \frac{\partial U}{\partial \rho} \delta \rho \right) dm.$$

*Si la fonction U ne dépend pas explicitement du temps t et si l'on pose*

$$(146) \quad \Omega'_e = \int U dm,$$

l'égalité (145) devient

$$(147) \quad d\mathfrak{C}'_e = - \delta \Omega'_e.$$

*Le travail des actions  $\mathbf{X}_e, \mathbf{Y}_e, \mathbf{Z}_e, \mathbf{A}_e$  dépend d'un potentiel, qui est la fonction  $\Omega'_e$ , donnée par l'égalité (146).*

Dans ce cas, pour que le travail des actions extérieures dérive d'un potentiel  $\Omega_e$ , il est nécessaire et suffisant que le travail des pressions appliquées à la surface du fluide

$$d\mathfrak{C}''_e = \int (\mathbf{P}_x \delta x + \mathbf{P}_y \delta y + \mathbf{P}_z \delta z) dS$$

dérive aussi d'un potentiel  $\Omega''_e$ ; on aura alors

$$\Omega_e = \Omega'_e + \Omega''_e.$$

Le cas dont nous venons de parler se présente lorsque les actions  $\mathbf{X}_e, \mathbf{Y}_e, \mathbf{Z}_e, \mathbf{A}_e$  sont de la forme (143) et que les corps étrangers dont elles émanent sont invariables de forme, de position et d'état. Dans ce cas, en effet,  $\Delta$  est une constante et  $R$  une fonction de  $x, y, z$ . La fonction  $U$ , donnée par l'égalité (144), est une simple fonction des variables  $\rho, x, y, z$ .

## § 2. — TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS DE L'HYDRODYNAMIQUE.

Revenons au cas général où  $U(x, y, z, \rho, t)$  peut dépendre explicitement de  $t$ . Dans cette fonction, remplaçons  $\rho$  par son expression en fonction de  $x, y, z, t$ ; nous obtenons une fonction  $V_e(x, y, z, t)$  :

$$(148) \quad V_e(x, y, z, t) = U[x, y, z, \rho(x, y, z, t), t].$$

L'égalité (148) nous donne, en particulier,

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_e}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \\ \frac{\partial V_e}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y}, \\ \frac{\partial V_e}{\partial z} &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}\end{aligned}$$

ou bien, en vertu des égalités (142),

$$(149) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial V_e}{\partial x} + X_e + A_e \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial V_e}{\partial y} + Y_e + A_e \frac{\partial \rho}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial V_e}{\partial z} + Z_e + A_e \frac{\partial \rho}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs, la fonction  $V_i(x, y, z, t)$ , donnée par la première égalité (67), vérifie aussi les relations (<sup>1</sup>)

$$(150) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial V_i}{\partial x} + X_i + A_i \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial V_i}{\partial y} + Y_i + A_i \frac{\partial \rho}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial V_i}{\partial z} + Z_i + A_i \frac{\partial \rho}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Considérons la première des équations (74) :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi}{\partial x} - (X_i + X_e) + \gamma_x - \frac{q_x}{\rho} = 0.$$

Les égalités (149) et (150) permettent de l'écrire

$$(151) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi}{\partial x} + (A_i + A_e) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (V_i + V_e) + \gamma_x - \frac{q_x}{\rho} = 0.$$

L'égalité

$$(75) \quad \Pi + \rho^2 (A_i + A_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} = 0,$$

---

(<sup>1</sup>) *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique*, équations (70) (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3<sup>e</sup> série, t. X, p. 220; 1893).

vérifiée en tout point du fluide, donne

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} + 2\rho(\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_e) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho^2 \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_e) - \rho \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \right) - \rho \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Mais

$$\frac{\partial \zeta(\rho, \mathbf{T})}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \zeta(\rho, \mathbf{T}) - \frac{\partial \zeta(\rho, \mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x}.$$

L'égalité précédente peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} (152) \quad & \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi}{\partial x} + (\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_e) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \zeta(\rho, \mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} \\ &= - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho(\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_e) - \zeta(\rho, \mathbf{T}) - \rho \frac{\partial \zeta(\rho, \mathbf{T})}{\partial \rho} \right]. \end{aligned}$$

Si donc nous posons

$$(153) \quad \mathbf{G}(x, y, z, t) = \mathbf{V}_i + \mathbf{V}_e - \rho(\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_e) + \zeta(\rho, \mathbf{T}) + \rho \frac{\partial \zeta(\rho, \mathbf{T})}{\partial \rho},$$

les égalités (151) et (153) donneront la première des égalités

$$(154) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} - \frac{\partial \zeta(\rho, \mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} + \gamma_x - \frac{q_x}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} - \frac{\partial \zeta(\rho, \mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} + \gamma_y - \frac{q_y}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} - \frac{\partial \zeta(\rho, \mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z} + \gamma_z - \frac{q_z}{\rho} = 0. \end{cases}$$

Les autres se démontrent d'une manière analogue.

Nous allons maintenant rechercher les divers cas où l'on peut trouver une fonction  $\mathbf{H}(x, y, z, t)$  telle que l'on ait

$$(155) \quad \frac{\partial \zeta(\rho, \mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \zeta(\rho, \mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \zeta(\rho, \mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z}.$$

Alors, en posant

$$(156) \quad \Lambda(x, y, z, t) = \mathbf{G}(x, y, z, t) - \mathbf{H}(x, y, z, t),$$

on mettra les égalités (154) sous la forme

$$(157) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Lambda}{\partial x} + \gamma_x - \frac{q_x}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial y} + \gamma_y - \frac{q_y}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial z} + \gamma_z - \frac{q_z}{\rho} = 0. \end{cases}$$

1° *Fluides incompressibles et indilatables.* — Cherchons d'abord si les égalités (155) peuvent avoir lieu identiquement, quelle que soit la nature de la condition supplémentaire imposée au fluide.

Il faut et il suffit pour cela que

$$(85) \quad \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T} = -E\sigma(\rho, T)$$

soit identiquement une fonction de la température seule. Cela ne peut avoir lieu que dans deux cas :

1° Le cas où

$$(98) \quad \rho = f(T).$$

C'est le cas des fluides incompressibles, mais dilatables, que nous ne pouvons étudier.

2° Le cas où

$$(99) \quad \rho = \text{const.}$$

C'est le cas des fluides incompressibles et indilatables.

Mais, dans ce cas, le calcul que nous venons d'exposer n'est plus légitime, car nous n'avons plus le droit d'écrire l'égalité (75), ni, partant, l'égalité (152).

Toutefois, dans ce cas, l'égalité (151) reste légitime. D'autre part, comme le fluide incompressible et indilatable est supposé partout de même nature,  $\rho$  a, en tout point, la même valeur et l'on a, dans toute la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0.$$

Si donc nous posons

$$(158) \quad \Lambda(x, y, z, t) = V_i + V_e + \frac{\Pi}{\rho},$$

l'égalité (151) devient la première des égalités (157); les deux autres égalités (157) se démontrent d'une manière analogue.

2° *Fluide compressible de température uniforme.* — Considérons maintenant le mouvement d'un fluide compressible et voyons si les conditions du mouvement peuvent être telles que les égalités (155) soient vérifiées.

Un premier cas où elles se trouveront vérifiées est celui où, à *chaque instant*, la température aura même valeur en tous les points du fluide. Dans ce cas, en effet, on aura

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$

$$H(x, y, z, t) = 0$$

et, partant, selon (153) et (156),

$$(159) \quad \Lambda(x, y, z, t) = V_i + V_e - \rho(A_i + A_e) + \zeta(\rho, T) + \rho \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho}.$$

Ce cas se présentera, d'après ce que nous avons vu au Chapitre I, § 7, si le fluide est très bon conducteur et si tous les points de la surface qui le limitent sont, à chaque instant, à une même température.

3° *En vertu de la condition supplémentaire, l'entropie est une fonction de la température seule, la même en tous les points du fluide.* — Hors le cas précédent, les égalités (155) ne peuvent avoir lieu que si, par suite de la condition supplémentaire,  $\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T}$  est, à chaque instant, une fonction de la seule variable T, la même en tous les points du fluide. En vertu de l'égalité (85), il revient au même de dire que l'on a, à chaque instant t,

$$(118) \quad \sigma(\rho, T) = s(T),$$

la fonction  $s(T)$  pouvant changer de forme d'un instant à l'autre [ $s = s(T, t)$ ], MAIS GARDANT LA MÊME FORME D'UN POINT À L'AUTRE DU FLUIDE.

Si l'on pose

$$(119) \quad s(T) = \int s(T) dT,$$

les égalités (155) donneront

$$(160) \quad H(x, y, z, t) = -E s(T)$$

et les égalités (153), (156) et (160) donneront

$$(161) \quad \Lambda(x, y, z, t) = V_i + V_e - \rho(A_i + A_e) + \zeta(\rho, T) + \rho \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} + E s(T).$$

4° *Mouvement à entropie uniforme.* — Un cas particulier intéressant est celui où la condition (118) se réduit à

$$(121) \quad \sigma(\rho, T) = s_0,$$

$s_0$  étant une grandeur qui peut changer d'un instant à l'autre [ $s_0 = s_0(t)$ ],  
MAIS QUI, AU MÊME INSTANT, A LA MÊME VALEUR EN TOUS LES POINTS DU FLUIDE.

Dans ce cas,  $s(T)$  vérifie les égalités (122), (123), (124) et l'égalité (161) peut prendre les deux formes

$$(162) \quad \Lambda(x, y, z, t) = V_i + V_e - \rho(\Lambda_i + \Lambda_e) + \zeta(\rho, T) + \rho \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} + ET s_0,$$

$$(163) \quad \Lambda(x, y, z, t) = V_i + V_e - \rho(\Lambda_i + \Lambda_e) + \zeta(\rho, T) + \rho \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} - T \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T}.$$

Dans le cas que nous examinons ici rentre celui-ci : *A partir d'un état initial où il a en tous points même densité  $\rho_0$  et même température  $T_0$ , un fluide éprouve un mouvement isentropique.* Dans ce cas, en effet,  $s_0$  est une constante absolue, indépendante à la fois de  $x, y, z$  et de  $t$ , et dont la valeur est  $\sigma(\rho_0, T_0)$ .

Mais il n'en est plus de même, en général, si, à l'instant initial  $t_0$ , le fluide a une densité et une température variables d'un point à l'autre, et si, à partir de ce moment, il éprouve un mouvement isentropique. Dans ce cas, il existera toujours une fonction  $\Phi(x, y, z, t)$  permettant d'écrire l'équation (114), mais il n'existe plus, en général, de fonction  $\Lambda(x, y, z, t)$  permettant d'écrire les équations (157).

Considérons, en effet, l'élément matériel  $dm$ , dont les coordonnées sont  $x, y, z$ , à l'instant  $t$ ; à l'instant  $t_0$ , ses coordonnées avaient des valeurs  $a, b, c$ , déterminées lorsque l'on connaît  $x, y, z, t$  :

$$(164) \quad \begin{cases} a = f(x, y, z, t), \\ b = g(x, y, z, t), \\ c = h(x, y, z, t). \end{cases}$$

A l'instant  $t_0$ , au point de coordonnées  $a, b, c$ , la température avait la valeur  $T_0(a, b, c)$ , la densité la valeur  $\rho_0(a, b, c)$ , la fonction  $\sigma(\rho, T)$  la valeur

$$(165) \quad \sigma[\rho_0(a, b, c), T_0(a, b, c)] = s_0(a, b, c).$$

Le mouvement étant isentropique, la fonction  $\sigma(\rho, T)$  a la même valeur au

point  $(x, y, z)$ , à l'instant  $t$ ; on a donc

$$\sigma(\rho, T) = s_0(a, b, c)$$

ou, plus explicitement,

$$\sigma(\rho, T) = s_0[f(x, y, z, t), g(x, y, z, t), h(x, y, z, t)].$$

$\sigma(\rho, T)$  n'est donc pas, en général, indépendant de  $x, y, z$ .

Cette remarque, qui semble avoir communément passé inaperçue<sup>(1)</sup>, particularise extrêmement l'application des équations (157) aux mouvements isentropiques. Si l'on observe, d'ailleurs, que la démonstration<sup>(2)</sup> de la plupart des théorèmes *dits généraux* de l'Hydrodynamique suppose l'emploi des égalités (157), on voit combien est bornée l'étude des mouvements isentropiques des fluides.

D'ailleurs, si l'on cherche à définir et à classer les problèmes hydrodynamiques pour lesquels existent à la fois les deux fonctions  $\Phi(x, y, z, t)$ ,  $\Lambda(x, y, z, t)$  (c'est-à-dire les seuls problèmes auxquels on puisse appliquer la plupart des *théorèmes dits généraux* de l'Hydrodynamique), et dont les conditions aient un sens physique, on est frappé de l'étroitesse du champ qui demeure ouvert aux investigations.

Ces problèmes, en effet, se ramènent tous aux trois catégories que voici :

PREMIÈRE CATÉGORIE. — *Mouvements quelconques des fluides incompressibles et indilatables, visqueux ou non visqueux.*

C'est la plus anciennement et la plus complètement étudiée parmi les catégories de problèmes hydrodynamiques.

DEUXIÈME CATÉGORIE. — *Un fluide compressible, visqueux ou non visqueux, est parfaitement conducteur. La surface qui le limite est portée à une température invariable et uniforme.*

Dans ce cas, en effet, on a, dans toute la masse du fluide et à chaque instant,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$

ce qui assure l'existence des deux fonctions  $\Phi$  et  $\Lambda$ .

<sup>(1)</sup> Sur la condition supplémentaire en Hydrodynamique (*Comptes rendus*, t. CXXXII, p. 117; 21 janvier 1901).

<sup>(2)</sup> E. JOUGUET, *Le théorème des tourbillons en Thermodynamique* (*Comptes rendus*, t. CXXXI, p. 1190; 24 décembre 1900. — *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5<sup>e</sup> série, t. XIII, p. 235; 1901).

TROISIÈME CATÉGORIE. — *Les divers éléments d'un fluide compressible sont sans action les uns sur les autres; ce fluide est dénué de conductibilité et de viscosité; l'état initial de ce fluide est un état de température uniforme où il est maintenu en équilibre par des actions extérieures qui se réduisent aux pressions appliquées à sa surface.*

Dans ce cas, en effet, le fluide subit un mouvement isentropique à partir d'un état initial homogène.

Ce dernier problème est le problème du mouvement sonore au sein d'une masse gazeuse, tel que l'a posé Laplace.

