Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni.

(*del prof.* Enrico Betti, *a Pisa.*)

1.

Siano $z_1, z_2, \ldots z_n$ n variabili che possono prendere tutti i valori reali da $-\infty$ a $+\infty$. Il campo n volte infinito dei sistemi di valori di queste variabili lo diremo uno spazio di n dimensioni e lo dinoteremo con S_n. Un sistema $(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0)$ determinerà un punto L_0 di questo spazio, e $z_1^0, z_2^0, \ldots z_n^0$ si diranno le coordinate di questo punto.

Un sistema di m equazioni determinerà un campo dei sistemi di valori di $n-m$ variabili indipendenti che sarà uno spazio S_{n-m} di altrettante dimensioni, contenuto in S_n. Uno spazio di una sola dimensione che forma una semplice continuità lo chiameremo una linea.

Sia:

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0 \tag{1}$$

la equazione di uno spazio S_{n-1} di $n-1$ dimensioni. Se la funzione F è continua e ad un sol valore per tutti i valori reali delle coordinate, lo spazio S_{n-1} in generale separerà S_n in due regioni, in una delle quali sarà $F<0$, e nell'altra $F>0$; e non si potrà con variazioni continue dal sistema di valori delle coordinate di un punto della prima regione passare al sistema di valori delle coordinate di un punto dell'altra regione senza passare per un sistema di valori che sodisfaccia alla equazione (1). Le due regioni saranno due spazi di n dimensioni limitati dallo spazio S_{n-1}. Se dal sistema di valori delle coordinate di un punto qualunque di una delle due regioni si potrà sempre con variazione continua passare al sistema di valori delle coordinate di un altro punto qualunque della medesima regione senza passare per i valori delle coordinate di un punto di S_{n-1}, si dirà che questa regione è uno spazio connesso.

Siano:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = z_1(u_1,\ u_2, \dots\ u_{n-1}), \\ z_2 = z_2(u_1,\ u_2, \dots\ u_{n-1}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ z_n = z_n(u_1,\ u_2, \dots\ u_{n-1}), \end{array}\right\} \tag{2}$$

tali funzioni continue e ad un sol valore, che sostituite nella equazione (1) la sodisfacciano identicamente. Lo spazio S_{n-1} si potrà riguardare come il campo dei sistemi di valori delle $n-1$ variabili reali: $u_1,\ u_2, \dots\ u_{n-1}$.

È evidente che in S_{n-1} saranno sodisfatte le $n-1$ equazioni:

$$\frac{dF}{dz_1}\frac{dz_1}{du_m} + \frac{dF}{dz_2}\frac{dz_2}{du_m} + \dots + \frac{dF}{dz_n}\frac{dz_n}{du_m} = 0, \tag{3}$$

che si ottengono prendendo successivamente per m i numeri 1, 2,... $n-1$.

Denotando con A_1, A_2,..., A_n quantità indeterminate qualunque, e ponendo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & \frac{dz_1}{du_1} & \frac{dz_1}{du_2} & \dots & \frac{dz_1}{dn_{n-1}} \\ A_2 & \frac{dz_2}{du_1} & \frac{dz_2}{du_2} & \dots & \frac{dz_2}{du_{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n & \frac{dz_n}{du_1} & \frac{dz_n}{du_2} & \dots & \frac{dz_n}{du_{n-1}} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

$$\mu^2 = \sum_1^n {}_m \left(\frac{dF}{dz_m}\right)^2, \tag{5}$$

$$M^2 = \sum_1^n {}_m \left(\frac{d\Delta}{dA_m}\right)^2, \tag{6}$$

dalle equazioni (3) otterremo:

$$\frac{dF}{dz_m} = \frac{\mu}{M}\frac{d\Delta}{dA_m}. \tag{7}$$

Ora sia L una linea determinata dalle equazioni:

$$z_1 = l_1(t), \quad z_2 = l_2(t), \dots, \quad z_n = l_n(t) \tag{8}$$

Se la equazione (1), sostituendovi questi valori, è soddisfatta soltanto da un numero finito di valori reali di t, la linea L intersecherà lo spazio T_{n-1} soltanto in un numero finito di punti. Sia T_0 uno di questi punti di intersezione corrispondente a $t=t_0$. Sarà:

$$F[l_1(t_0),\ l_2(t_0),\ldots,\ l_n(t_0)]=0.$$

Consideriamo ora i due punti di L corrispondenti a:

$$t=t_0+\delta t_0$$
$$t=t_0-\delta t_0$$

essendo δt_0 un infinitesimo.

Per il primo di questi valori di t la funzione F diviene:

$$\delta F=\delta t_0 \sum_{1}^{n}{}_m \frac{dF}{dz_m}\frac{dl_m}{dt_0},$$

per il secondo:

$$\delta' F=-\delta t_0 \sum_{1}^{n}{}_m \frac{dF}{dz_m}\frac{dl_m}{dt_0}.$$

Rammentando le equazioni (7) si ottiene:

$$\left.\begin{aligned} \delta F &= \frac{\mu D}{M}\delta t_0 \\ \delta' F &= -\frac{\mu D}{M}\delta t_0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

essendo D il determinante Δ nel quale alle A_m sono sostituite le quantità $\frac{dl_m}{dt_0}$.

Se ora prendiamo pei radicali che danno μ ed M il segno positivo, e fissiamo convenientemente l'ordine delle $z_1, z_2,\ldots z_m$, e percorriamo la linea L facendo crescere t con continuità, dall'equazioni (9) si deduce che se $D>0$, quando L interseca S_{n-1} nel punto T_0, si esce da quella regione in cui $F<0$ e si entra in quella in cui $F>0$, e viceversa se $D<0$, si esce da quella in cui $F>0$ e si entra in quella in cui $F<0$.

Se poniamo:

$$ds_n^2=dz_1^2+dz_2^2+\cdots+dz_n^2,$$

e ds_n è l'elemento lineare di S_n (nel qual caso Riemann chiama piano lo spazio S_n), nello spazio S_{n-1} l'elemento lineare ds_{n-1} sarà dato dalla formula:

$$ds_{n-1}^2 = \sum\sum E_{rs} du_r du_s,$$

essendo:

$$E_{rs} = \sum \frac{dz_m}{du_r} \frac{dz_m}{du_s},$$

e per una nota proprietà dei determinanti sarà:

$$M^2 = \sum\left(\frac{d\Delta}{dA_m}\right)^2 = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12}\dots & E_{1,n-1} \\ E_{12} & E_{22}\dots & E_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ E_{1,n-1} & E_{2,n-1}\dots & E_{n-1,n-1} \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Se:

$$dS_n = dz_1 dz_2 \dots dz_n$$

è l'elemento dello spazio S_n, l'elemento di S_{n-1} sarà:

$$dS_{n-1} = M du_1 du_2 \dots du_{n-1}. \tag{11}$$

Sia ora:

$$F_1(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) = 0$$

la equazione di uno spazio S_{n-2} contenuto in S_{n-1}. Se F_1 è una funzione continua e ad un sol valore, S_{n-2} in generale separerà S_{n-1} in due regioni, in una delle quali sarà $F_1 < 0$ e nell'altra $F_1 > 0$. Potrà riguardarsi S_{n-2} come il campo di $n-2$ variabili reali, e potrà ripetersi ciò che abbiamo detto per S_{n-1}. L'elemento lineare sarà sempre una forma omogenea di 2° grado, ma i coefficienti avranno una forma differente, come pure differente sarà il ceefficiente M per mezzo del quale si ottiene l'elemento dello spazio S_{n-2}. Analoghe osservazioni valgono per gli spazi di un minor numero di dimensioni.

2.

Diremo che uno spazio S_{n-m} di $n-m$ dimensioni è linearmente connesso, se prendendo in esso due punti qualunque si potrà condurre una linea continua che senza uscire da S_{n-m} vada da uno di questi punti all'altro.

Diremo che uno spazio S_{n-1} è chiuso, se divide S_n in due spazi linearmente connessi, in modo che da un punto di uno di questi non si possa condurre una linea continua a un punto qualunque dell'altro che non intersechi S_{n-1}. Diremo che uno spazio linearmente connesso S_{n-2} è chiuso se divide uno spazio chiuso S_{n-1} in due regioni ciascuna linearmente connessa e tali che non si possa da un punto qualunque di una di esse condurre una linea continua tutta contenuta in S_{n-1}, a un punto qualunque dell'altra che non intersechi S_{n-2}: e così di seguito.

Considerando, invece di una sola, un numero qualunque di disuguaglianze:

$$F_1 < 0, \quad F_2 < 0, \dots \quad F_m < 0$$

determineremo una parte R di uno spazio S_t che potrà essere connessa linearmente. La totalità degli spazi di $t-1$ dimensioni:

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \dots \quad F_m = 0$$

che limita R in modo che da un punto qualunque di R non si può condurre una linea continua a un punto fuori di R, che non intersechi alcuno di questi spazi, si chiamerà il contorno di R.

Si dirà che uno spazio è finito se le coordinate di tutti i suoi punti hanno valori finiti.

Uno spazio finito e linearmente connesso o sarà chiuso o avrà un contorno.

3.

Uno spazio finito ha proprietà indipendenti dalla grandezza delle sue dimensioni, e dalla forma dei suoi elementi. Queste proprietà che si riferiscono soltanto al modo di connessione delle sue parti furono considerate da Listing per gli spazi ordinari in una Memoria intitolata *Der Census räumlicher Complexe*, e furon determinate da Riemann per le superficie.

Oltre la connessione lineare che si presenta sola nelle superficie, io ho osservato che negli spazi di un numero di dimensioni maggiore di due si possono considerare altre specie di connessioni.

Se in uno spazio R di n dimensioni limitato da uno o più spazi di $n-1$ dimensioni, ogni spazio chiuso di m dimensioni, essendo $m<n$, è il contorno di una parte di uno spazio linearmente connesso di $m+1$ dimensioni, tutta quanta contenuta in R, avremo una connessione secondo $m+1$ dimensioni, e diremo che R ha semplice la connessione di m^{esima} specie. Se uno

spazio R ha semplici tutte le connessioni, diremo che è semplicemente connesso. Se invece in R si può imaginare un numero p_m di spazi chiusi di m dimensioni che non possano formare il contorno di una parte linearmente connessa di uno spazio di $m+1$ dimensioni, tutta quanta contenuta in R, e tali che ogni altro spazio chiuso di m dimensioni formi solo o con una parte di essi o con tutti il contorno di una parte linearmente connessa di uno spazio di $m+1$ dimensioni tutta quanta contenuta in R, diremo che R ha di $(p_m+1)^{\text{esimo}}$ ordine la connessione di m^{esima} specie.

Esempi. Nello spazio ordinario, quello compreso tra due sfere concentriche ha di 2° ordine la connessione di 2ª specie, e semplice quella di 1ª specie.

Lo spazio compreso da un anello ha semplice la connessione di 2ª specie, e di 2° ordine quella di 1ª specie.

Lo spazio compreso tra due anelli uno interno all'altro ha di 2° ordine la connessione di 2ª specie, e di 3° ordine quella di 1ª specie.

Lo spazio compreso tra una sfera e un anello ha di 2° ordine ambedue le connessioni.

Per giustificare la definizione che abbiamo data delle differenti specie di connessione, è necessario dimostrare che per ogni spazio limitato R il numero p_m è determinato, cioè che comunque si conducano gli spazi chiusi di m dimensioni che godono la esposta proprietà, il loro numero è sempre lo stesso. Perciò ci fonderemo, come ha fatto Riemann per provare il teorema corrispondente relativo alle superficie, sopra il lemma seguente:

Se un sistema A insieme con un altro sistema C di spazi chiusi di m dimensioni forma il contorno di uno spazio S_{m+1} di $m+1$ dimensioni linearmente connesso contenuto tutto quanto in R, e se un altro sistema B di spazi chiusi di m dimensioni forma insieme col sistema C il contorno di uno spazio linearmente connesso S'_{m+1} contenuto tutto in R; il sistema A col sistema B formerà il contorno di uno spazio di $m+1$ dimensioni linearmente connesso contenuto tutto in R.

Infatti i due spazi S_{m+1} ed S'_{m+1} saranno o da parti opposte, o dalla stessa parte del contorno C. Nel primo caso lo spazio composto di S_{m+1} e di S'_{m+1} avrà per contorno il sistema A col sistema B; nel secondo caso togliendo S'_{m+1} da S_{m+1} rimarrà uno spazio che avrà per contorno il sistema A col sistema B.

Se t spazi chiusi di m dimensioni $A_1, A_2, \dots A_t$ non possono formare soli, e con ogni altro spazio chiuso di m dimensioni formano il contorno di uno spazio linearmente connesso di $m+1$ dimensioni tutto quanto contenuto in R; e se un altro sistema di t' spazi chiusi di m, dimensioni $B_1, B_2, \dots B_{t'}$, gode la stessa proprietà, sarà $t=t'$.

Infatti, supponiamo $t'>t$. Se C è uno spazio chiuso qualunque di m dimensioni, tanto il sistema $(A_1, A_2, \dots A_t, C)$ quanto il sistema $(A_1, A_2, \dots A_t, B_1)$ formerà il contorno di uno spazio linearmente connesso di $m+1$ dimensioni tutto contenuto in R; quindi tanto il sistema $(A_2, A_3, \dots A_t, C)$ quanto il sistema $(A_2, A_3, \dots A_t, B_1)$ formerà insieme con A_1 il contorno di uno spazio linearmente connesso di $m+1$ dimensioni tutto contenuto in R; e in conseguenza, per il lemma precedente, il sistema $(A_2, A_3, \dots A_t, C)$ insieme col sistema $(A_2, A_3, \dots A_t, B_1)$ cioè il sistema $(B_1, A_2, A_3, \dots A_t, C)$ formerà il contorno di uno spazio di $m+1$ dimensioni tutto contenuto in R. Così il sistema $(B_1, A_2, A_3, \dots A_t)$ unito con uno spazio chiuso qualunque C forma il contorno di uno spazio linearmente connesso di $m+1$ dimensioni; e ora seguitando sostituiremo successivamente a uno degli spazi A uno degli spazi B, e avremo finalmente che il sistema $(B_1, B_2, \dots B_t)$ formerà con uno spazio qualunque chiuso, e quindi anche con B_{t+1} il contorno di uno spazio di $m+1$ dimensioni linearmente connesso contenuto tutto in R, e questo è in contradizione con ciò che abbiamo supposto se $t'>t$. Ugualmente si dimostra che non può essere $t>t'$. Dunque $t=t'$ come volevamo dimostrare.

4.

Quando supponiamo rotta la connessione di uno spazio limitato R lungo uno spazio di un minor numero di dimensioni, che ha il contorno sopra il contorno di R, si dice che si fa in R una sezione trasversa.

Se da uno spazio di m dimensioni se ne separa una parte infinitesima che abbia per contorno uno spazio infinitesimo di $m-1$ dimensioni, diremo che vi si fa un punto sezione.

Se uno spazio limitato R si può ridurre ad un altro R' senza farvi nessuna sezione trasversa e soltanto mediante continui ingrandimenti e impiccolimenti delle sue parti, diremo che R può con trasformazione continua ridursi ad R'

Due spazi limitati R ed R' che si possono ridurre uno all'altro mediante trasformazione continua avranno uguali gli ordini di tutte le specie di connessione. Ora un punto è semplicemente connesso, dunque ogni spazio che con trasformazione continua può ridursi ad un punto sarà semplicemente connesso.

Ad uno spazio che ha un contorno si può sempre con trasformazione continua far perdere una dimensione.

Infatti sia R questo spazio, m il numero delle sue dimensioni, C il suo contorno, S_m lo spazio di cui è parte, e u_1, u_2, u_3,... u_m denotino un sistema di coordinate in S_m. Imaginiamo un sistema $m-1$ volte infinito di linee che occupino con continuità tutto quanto S_m, per esempio le linee che hanno per equazioni:

$$u_2 = a_2, \quad u_3 = a_3, \ldots, \quad u_{m-1} = a_{m-1}$$

dove a_2, a_3,..., a_{m-1} prendono tutti i valori da $-\infty$ a $+\infty$, e di questo sistema consideriamo soltanto quella parte che contiene le linee che incontrano il contorno C di R. Ciascuna di queste linee continue col crescere di u_1 incontrando C, tante volte entrerà in R e altrettante ne uscirà, e si potrà con trasformazione continua avvicinare indefinitamente ciascun punto d'ingresso al punto di egresso successivo, e così far perdere ad R una dimensione come volevamo dimostrare.

Ad uno spazio chiuso si può sempre con trasformazione continua far perdere una dimensione, dopo averci fatto un punto sezione.

Infatti, dopo avervi fatto un punto sezione lo spazio acquista un contorno, e quindi per il teorema precedente può sempre con trasformazione continua perdere una dimensione.

Se in uno spazio chiuso R di m dimensioni si fa un solo punto sezione, non si mutano gli ordini delle sue connessioni; ma se vi si fanno $s+1$ punti sezione, l'ordine di $(m-1)^{\text{esima}}$ specie aumenta di s unità, mentre gli ordini di connessione di specie inferiore non mutano.

Infatti sia $\alpha+1$ l'ordine di connessione di $(m-1)^{\text{esima}}$ specie dello spazio chiuso R di m dimensioni. Potremo imaginare in R un sistema A di α spazi chiusi di $m-1$ dimensioni che non formi solo, ma con ogni altro spazio chiuso C di $m-1$ dimensioni formi il contorno di una parte di R. Poichè R è chiuso il sistema A con C lo dividerà in due regioni separate, R' e R'', ambedue aventi il medesimo contorno, cioè il sistema A con C. Ora se facciamo in R un punto sezione, questo sarà in una delle due regioni; supponiamolo in R'. È chiaro che allora il sistema A con C non formerà più tutto il contorno di R', ma però farà sempre tutto il contorno di R''. Dunque l'ordine di connessione di $(m-1)^{\text{esima}}$ specie di R non sarà mutato da un sol punto sezione. Ma se facciamo in R due punti sezione, potremo sempre prendere C in modo che uno di questi punti sia in R' e l'altro in R'', e quindi il sistema A con C non formerà più il contorno di una parte di R, e sarà necessario aggiungere un altro spazio chiuso di $m-1$ dimensioni per avere tutto il contorno di una parte di R. Dunque con due punti sezione si aumenta di una unità l'ordine di connessione di $(m-1)^{\text{esima}}$ specie di R. Analogamente si dimostra che con 3, 4,... $s+1$ punti sezione si aumenta quest'ordine di 2, 3,... s unità.

Ora sia $\beta+1$ l'ordine di connessione di $(m-t-1)^{\text{esima}}$ specie di R, essendo $0<t<m$; si potrà imaginare in R un sistema A di spazi chiusi di $m-t-1$ dimensioni che non formi solo il contorno di uno spazio T di $m-t$ dimensioni tutto contenuto in R. Siano quanti si vogliano i punti sezione fatti in R, purchè in numero finito; potremo sempre col dato contorno condurre T in modo che non passi per ciascuno di questi punti sezione. Dunque un numero finito qualunque di punti sezione non muta gli ordini di connessione di specie inferiore alla $(m-1)^{\text{esima}}$.

Poichè non si mutano gli ordini delle connessioni di uno spazio chiuso R facendovi un sol punto sezione, per determinare questi ordini sarà indifferente riguardare R come chiuso o come avente un contorno infinitesimo. Dunque si potrà ritenere uno spazio finito come limitato sempre da un contorno, e quindi gli si potrà sempre far perdere una dimensione con trasformazione continua, senza mutare gli ordini delle sue connessioni.

5.

Per rendere semplicemente connesso, mediante sezioni trasverse semplicemente connesse, uno spazio finito R di n dimensioni, è necessario e sufficiente di fare p_{n-1} sezioni lineari, p_{n-2} di due, p_{n-3} di tre,... p_1 di $n-1$ dimensioni, se p_1+1, p_2+1,... $p_{n-1}+1$ sono rispettivamente gli ordini delle sue connessioni di 1^a, 2^a,... $(n-1)^{\text{esima}}$ specie.

Infatti, essendo $p_{n-1}+1$ l'ordine di connessione di $(n-1)^{\text{esima}}$ specie di

R, potremo imaginare in esso un sistema A di p_{n-1} spazi chiusi di $n-1$ dimensioni che non formi solo il contorno di una parte di R, ma lo formi con ogni altro spazio chiuso di $n-1$ dimensioni. Si avranno così più regioni limitate, ciascuna delle quali avrà per contorno tutto o parte del sistema A e una parte del contorno di R; quindi facendo perdere a queste regioni con trasformazione continua una dimensione, esse si ridurranno al sistema A, connesso lungo spazi di $n-2$ dimensioni. Dunque R si potrà ridurre con trasformazione continua ad uno spazio R_1 di $n-1$ dimensioni formato di p_{n-1} spazi chiusi A di $n-1$ dimensioni connessi tra loro lungo spazi di $n-2$ dimensioni, ed R_1 avrà uguali a quelli di R gli ordini delle connessioni di $(n-2)^{\text{esima}}$, $(n-3)^{\text{esima}}, \ldots$, 1^{a} specie. Ora senza mutare gli ordini delle connessioni di R_1, potremo farvi al più tanti punti sezione quanti sono gli spazi chiusi dei quali è formato, cioè p_{n-1}. Sia R'_1 lo spazio R_1 in cui sono fatti questi punti sezione.

Riducendo R'_1 ad R con trasformazione continua, i punti sezione acquistano una dimensione e divengono linee continue, che vanno da un punto del contorno di R ad un altro punto del medesimo contorno, cioè divengono sezioni lineari trasverse e così gli ordini delle connessioni di specie inferiore alla $(n-1)^{\text{esima}}$ restano ancora gli stessi. Dunque in R si può fare soltanto un numero p_{n-1} di sezioni trasverse che non mutano i suoi ordini di connessione di specie inferiore alla $(n-1)^{\text{esima}}$.

Ora ciascuna di queste p_{n-1} sezioni trasverse lineari attraversa uno dei p_{n-1} spazi chiusi A, che al più si potevano condurre in R in modo che non formassero soli il contorno di una porzione di R, ma che lo formassero quando ad essi se ne aggiungeva un altro di $n-1$ dimensioni. Dunque dopo aver condotte queste sezioni trasverse, ciascuno degli spazi A non è più chiuso, e quindi ogni spazio chiuso di $n-1$ dimensioni diviene il contorno di una porzione di R ed è resa semplice la connessione di R di $(n-1)^{\text{esima}}$ specie.

Dunque per rendere semplice la connessione di $(n-1)^{\text{esima}}$ specie di R mediante sezioni trasverse semplicemente connesse senza mutare gli ordini delle connessioni di specie inferiore, è necessario e sufficiente di farvi p_{n-1} sezioni trasverse lineari.

Lo spazio R'_1 di $n-1$ dimensioni, al quale si è ridotto con trasformazione continua lo spazio R in cui sono fatte le p_{n-1} sezioni lineari trasverse, avendo un punto sezione in ognun degli spazi chiusi dei quali è formato, e avendo l'ordine di connessione di $(n-2)^{\text{esima}}$ specie uguale a p_{n-2}, potrà con trasformazione continua perdere una dimensione, e ridursi a uno spazio R_2 formato di p_{n-2} spazi chiusi di $n-2$ dimensioni connessi lungo spazi di $n-3$ dimensioni. Ora senza mutare gli ordini delle connessioni di R_2 possiamo farvi al più p_{n-2} punti sezione. Denotiamo con R'_2 lo spazio R_2 in cui sono fatti questi punti sezioni. Riducendo R'_2 ad R, i punti sezione di R'_2 acquistano due dimensioni e divengono spazi di due dimensioni che hanno il contorno sopra il contorno di R, e sono semplicemente connessi perchè riducibili a un punto con transformazione continua, e quindi sono sezioni trasverse di due dimensioni. Denoteremo con R'' lo spazio R in cui sono fatte le sezioni trasverse di una e di due dimensioni. Le sezioni trasverse di due dimensioni rendono semplice la connessione di $(n-2)^{\text{esima}}$ specie. Dunque per ridurre R mediante sezioni trasverse semplicemente connesse ad uno spazio R'' che abbia semplici le connessioni di $(n-1)^{\text{esima}}$ ed $(n-2)^{\text{esima}}$ specie senza mutare gli ordini delle connessioni di specie inferiori, è necessario e sufficiente farci p_{n-1} sezioni trasverse lineari e p_{n-2} di due dimensioni. Così seguitando per le connessioni di specie inferiori.

Quando uno spazio finito R è ridotto semplicemente connesso mediante sezioni trasverse semplicemente connesse, ogni spazio chiuso di m dimensioni condotto in R forma con altrettanti spazi chiusi di m dimensioni quante sono le sezioni trasverse di $n-m$ dimensioni che esso incontra, il contorno di uno spazio di $m+1$ dimensioni tutto contenuto in R.

Infatti se p_m+1 è l'ordine di connessione di m^{esima} specie di R, ogni spazio chiuso C di m dimensioni formerà con un sistema A di p_m spazi chiusi di m dimensioni il contorno di uno spazio S di $m+1$ dimensioni tutto contenuto in R. Ora ciascuno degli spazi A sarà intersecato da una e da una soltanto delle sezioni trasverse di $n-m$ dimensioni che fanno parte di quelle che rendono R semplicemente connesso, e quindi poichè ciascuna di queste sezioni ha il contorno sopra il contorno di R, se C formerà con s degli spazi A il contorno di S, dovrà intersecare precisamente le s sezioni trasverse che intersecano quelli s spazi chiusi del sistema A.

Per maggior chiarezza facciamo alcune applicazioni allo spazio ordinario.

Lo spazio compreso tra due sfere concentriche si riduce semplicemente connesso mediante una sola sezione trasversa lineare che va da un punto della superficie sferica maggiore a un punto qualunque della minore.

Lo spazio compreso da una superficie anulare si riduce semplicemente connesso mediante una sola sezione trasversa superficiale fatta lungo il meridiano della superficie.

Lo spazio compreso tra due superficie anulari si riduce semplicemente connesse mediante una sola sezione trasversa lineare che va da un punto della superficie anulare maggiore a uno della minore, e mediante due sezioni trasverse superficiali ambedue condotte per la sezione lineare; una fatta lungo il meridiano e una lungo l'equatore della superficie.

Lo spazio compreso tra una sfera e un anello si riduce semplicemente connesso mediante una sezione lineare trasversa che va dalla superficie della sfera a quella dell'anello, e l'altra superficiale che terminando alla sezione lineare va pure dalla superficie dell'anello a quella della sfera.

6.

Sia dato uno spazio R di n dimensioni limitato da un numero qualunque di spazi chiusi di $n-1$ dimensioni: S'_{n-1}, $S''_{n-1}, \ldots$ $S^{(t)}_{n-1}$ i quali abbiano per equazioni

$$F_1=0, \quad F_2=0, \ldots \quad F_t=0,$$

e R sia determinato dalle disuguaglianze:

$$F_1<0, \quad F_2<0, \ldots \quad F_t<0. \tag{1}$$

Siano: X_1, $X_2, \ldots$ X_n n funzioni dei punti di R finite e continue; prendiamo a considerare l'integrale n^{uplo}:

$$\Omega_n=\int_n\left(\frac{dX_1}{dz_1}+\frac{dX_2}{dz_2}+\cdots+\frac{dX_n}{dz_n}\right)dz_1\,dz_2\ldots dz_n$$

esteso a tutto lo spazio R.

Distinguendo con indici pari i valori di X_r nei punti nei quali la linea Z_r che ha per equazioni:

$$z_1=a_1, \quad z_2=a_2, \ldots \quad z_{r-1}=a_{r-1}, \quad z_{r+1}=a_{r+1}, \ldots \quad z_n=a_n \tag{2}$$

col crescere di z_r, attraversando uno degli spazi S_{n-1}, entra nello spazio R nel quale sono sodisfatte tutte le disuguaglianze (1), e distinguendo con indici dispari i valori di X_r nei punti nei quali la linea Z_r attraversando uno degli spazi S_{n-1} esce dello spazio R, avremo:

$$\int_{n-1}\frac{dX_r}{dz_r}dz_r=X_r^0-X_r'+X_r''-X_r'''+\cdots$$

Onde:

$$\Omega_n = \Sigma \int_{n-1} (X_r^0 - X_r' + X_r'' - X_r''' + \cdots) dz_1 dz_2 \ldots dz_{r-1} dz_{r+1} \ldots dz_n.$$

Ora il numero dei punti nei quali la linea Z_r incontra ciascuno degli spazi chiusi S_{n-1} è pari, e in quanti di essi Z_r entra in R da altrettanti esce. Per esempio lo spazio S'_{n-1} sarà incontrato da Z_r nei punti 0, $2l_1+1$, $2l_2$, $2l_3+1, \ldots$, e la parte dell'integrale Ω_n che si riferisce ai punti di S'_{n-1} sarà:

$$\Omega'_n = \int_{n-1} (X_r^0 - X_r^{(2l_1+1)} + X_r^{(2l_2)} - X_r^{(2l_3+1)} + \cdots) dz_1 dz_2 \ldots dz_{r-1} dz_{r+1} \ldots dz_n.$$

Considerando S'_{n-1} come il campo delle $n-1$ variabili reali: $u'_1, u'_2, \ldots u'_{n-1}$, avremo:

$$dz_1 dz_2 \ldots dz_{r-1} dz_{r+1} \ldots dz_n = \pm \frac{d\Delta}{dA_r} du'_1 du'_2 \ldots du'_{n-1}$$

dove è da prendersi il segno + o il segno — secondo che $\frac{d\Delta}{dA_r}$ è $>$ oppure è <0.

Ora da ciò che abbiamo dimostrato nel primo paragrafo risulta che si può sempre prendere l'ordine delle $z_1, z_2, \ldots z_m$ in modo che il segno di $\frac{d\Delta}{dA_r}$ sia uguale a quello di $\frac{dF_1}{dz_r}$, essendo $F_1=0$ l'equazione di S'_{n-1}.

Ora $\frac{dF_1}{dz_r} < 0$ nei punti di S'_{n-1} nei quali Z_r entra in R, e $\frac{dF_1}{dz_r} > 0$ nei punti nei quali esce. Avremo dunque:

$$\int_{n-1} X_r^0 dz_1 dz_2 \ldots dz_{r-1} dz_{r+1} \ldots dz_n = -\int_{n-1} X_r^0 \frac{d\Delta}{dA_r} du'_1 du'_2 \ldots du'_{n-1}$$

$$\int_{n-1} X_r^{(2l_1+1)} dz_1 dz_2 \ldots dz_{r-1} dz_{r+1} dz_n = \int_{n-1} X_r^{(2l_1+1)} \frac{d\Delta}{dA_r} du'_1 du'_2 \ldots du'_{n-1}.$$

. . . .

Onde:

$$\Omega'_n = -\int_{n-1} \left(X_r^0 \frac{d\Delta}{dA_r} + X_r^{(2l_1+1)} \frac{d\Delta}{dA_r} + \cdots \right) du'_1 du'_2 \ldots du'_{n-1}$$

ossia:

$$\Omega'_n = -\int_{n-1} X_r \frac{d\Delta}{dA_r} du'_1 du'_2 \ldots du'_{n-1}$$

esteso a tutto lo spazio S'_{n-1}.

Analoga riduzione si può fare per gli altri spazi, e si ottiene

$$\Omega_n = -\Sigma\int_{n-1} X_r \frac{d\Delta}{dA_r} du'_1\, du'_2 \dots du_{n-1} - \Sigma\int_{n-1} X_r \frac{d\Delta}{dA_r} du''_1\, du''_2 \dots du''_{n-1} - \cdots$$

Ma:

$$\Sigma X_r \frac{d\Delta}{dA_r} = \begin{vmatrix} X_1 & \frac{dz_1}{du_1} & \cdots & \frac{dz_1}{du_{n-1}} \\ X_2 & \frac{dz_2}{du_1} & \cdots & \frac{du_{n-1}}{dz_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_n & \frac{dz_n}{du_1} & \cdots & \frac{dz_n}{du_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Dunque:

$$\Omega_n = -\Sigma_t \int \begin{vmatrix} X_1 & \frac{dz_1}{du_1^{(t)}} & \cdots & \frac{dz_1}{du^{(t)}_{n-1}} \\ X_2 & \frac{dz_2}{du_1^{(t)}} & \cdots & \frac{dz_2}{du^{(t)}_{n-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_n & \frac{dz_n}{du_1^{(t)}} & \cdots & \frac{dz_n}{du^{(t)}_{n-1}} \end{vmatrix} du^{(t)}_1\, du^{(t)}_2 \dots du^{(t)}_{n-1}. \qquad (3)$$

Se $(z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0)$ è un punto di $S^{(t)}_{n-1}$, una linea che passa per questo punto ed ha per equazioni:

$$\begin{gathered} z_1 - z_1^0 = \frac{dF_t}{dz_1^0}\frac{\rho}{\mu} \\ z_2 - z_2^0 = \frac{dF_t}{dz_2^0}\frac{\rho}{\mu} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ z_n - z_n^0 = \frac{dF_t}{dz_n^0}\frac{\rho}{\mu} \end{gathered}$$

si dice la normale allo spazio $S^{(t)}_{n-1}$; e siccome di quì abbiamo:

$$\rho^2 = (z_1 - z_1^0)^2 + (z_2 - z_2^0)^2 + \cdots + (z_n - z_n^0)^2,$$

ρ si chiama la distanza del punto $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ da $(z_1^0, z_2^0, \ldots z_n^0)$. Se ρ è infinitesimo e uguale a dp_t, abbiamo:

$$\frac{dz_r}{dp_t} = \frac{dF_t}{dz_r}\frac{1}{\mu}.$$

Ma:

$$\frac{dF_t}{dz_r} = \frac{d\Delta}{dA_r}\frac{\mu}{M},$$

onde:

$$\frac{dz_r}{dp_t} = \frac{d\Delta}{dA_r}\frac{1}{M}.$$

Onde sostituendo:

$$\Omega_n = -\Sigma_t \int_{n-1} \left(X_1 \frac{dz_1}{dp_t} + X_2 \frac{dz_2}{dp_t} + \cdots + X_n \frac{dz_n}{dp_t} \right) M du^{(t)}{}_1\, du^{(t)}{}_2 \ldots du^{(t)}{}_{n-1}.$$

Ma essendo $dS^{(t)}{}_{n-1}$ l'elemento dello spazio $S^{(t)}{}_{n-1}$, abbiamo:

$$dS^{(t)}{}_{n-1} = M du^{(t)}{}_1\, du^{(t)}{}_2 \ldots du^{(t)}{}_{n-1},$$

onde:

$$\Omega_n = -\Sigma_t \int_{S^{(t)}_{n-1}} \Sigma_r X_r \frac{dz_r}{dp_t} dS^{(t)}{}_{n-1}.$$

Quindi se:

$$X_r = \frac{dV}{dz_r},$$

avremo:

$$\Omega_n = \int_R \left(\frac{d^2V}{dz_1^2} + \frac{d^2V}{dz_2^2} + \cdots + \frac{d^2V}{dz_n^2} \right) dR$$

$$= -\Sigma_t \int_{S^{(t)}_{n-1}} \frac{dV}{dp_t} dS^{(t)}{}_{n-1},$$

e perciò se:

$$\frac{d^2V}{dz_1^2} + \frac{d^2V}{dz_2^2} + \cdots + \frac{d^2V}{dz_n^2} = 0 \tag{4}$$

in tutto lo spazio R, sarà:

$$\Sigma_t \int_{S^{(t)}_{n-1}} \frac{dV}{dp_t} dS^{(t)}{}_{n-1} = 0. \tag{5}$$

Se lo spazio R ha semplice la connessione di $(n-1)^{\text{esima}}$ specie, ogni spazio chiuso C di $n-1$ dimensioni condotto in esso, forma il contorno di una porzione di R; quindi se la equazione (4) è sodisfatta per tutto R, e vi sono finite continue V e le sue derivate prime, sarà sempre:

$$\int_C \frac{dV}{dp_c} dC = 0.$$

Se poi lo spazio R ha la connessione di specie $(n-1)^{\text{esima}}$ di ordine $p_{n-1}+1$, condotti in esso p_{n-1} spazi chiusi $A_1, A_2, \ldots A_{p_{n-1}}$ di $n-1$ dimensioni, ogni spazio chiuso C contenuto in R formerà col sistema A il contorno di una parte di R: e se $a_1, a_2, \ldots a_{p_{n-1}}$ sono le sezioni trasverse lineari che attraversano rispettivamente gli spazi chiusi $A_1, A_2, \ldots A_{p_{n-1}}$, e rendono semplice la connessione di $(n-1)^{\text{esima}}$ specie dello spazio R, C formerà il contorno di una parte di R con quelli spazi del sistema che sono attraversati dalle sezioni a che incontra C.

Ponendo dunque:

$$\int_{A_r} \frac{dV}{dp_t} dA_r = M_r$$

avremo:

$$\int_C \frac{dV}{dp_c} dC + \Sigma M_r = 0$$

estendendo la somma a tutti i valori di r che sono indici delle sezioni trasverse incontrate da C, ed abbiamo il seguente teorema:

Se lo spazio R ha la connessione di $(n-1)^{\text{esima}}$ specie di ordine p_n+1, se con sezioni trasverse lineari si rende semplice questa connessione, e C è uno spazio chiuso di $n-1$ dimensioni, contenute in R, l'integrale:

$$\int_C \frac{dV}{dp_c} dC$$

differirà da zero di tanti moduli di periodicità quante sono le sezioni trasverse lineari che attraversa lo spazio C.

Poichè due spazi di $n-1$ dimensioni che hanno uno stesso contorno formano insieme uno spazio chiuso, avremo ancora il seguente teorema:

Dato, nello spazio R di n dimensioni, che ha la connessione di $(n-1)^{\text{esima}}$ specie di ordine $p_{n-1}+1$, uno spazio chiuso Γ di $n-2$ dimensioni, resa mediante p_{n-1} sezioni lineari semplice questa connessione, l'integrale precedente esteso a uno spazio C' che ha per contorno Γ e incontra s sezioni trasverse lineari, differirà dal medesimo integrale esteso a uno spazio C' che ha lo stesso contorno e non incontra alcuna sezione, dei moduli di periodicità relativi a quelle sezioni, e quindi se lo spazio R ha semplice la connessione di $(n-1)^{\text{esima}}$ specie l'integrale esteso a uno spazio qualunque C contenuto in R che ha per contorno Γ avrà sempre lo stesso valore.

7.

In uno spazio chiuso R di n dimensioni che ha la connessione di 1^a specie di ordine p_1+1, siano s_1, $s_2, \ldots s_{p_1}$ le p_1 sezioni trasverse semplicemente connesse di $n-1$ dimensioni che rendono semplice la connessione di 1^a specie di R. Siano L_1, $L_2, \ldots L_{p_1}$ p_1 linee chiuse che rispettivamente attraversano le sezioni s_1, $s_2, \ldots s_{p_1}$, e che sono tali che ogni altra linea l chiusa, con quelle delle linee L che attraversano le medesime sezioni che essa attraversa, forma il contorno di uno spazio C di due dimensioni contenuto tutto in R.

Siano:

$$z_1 = z_1(u), \quad z_2 = z_2(u), \ldots \quad z_n = z_n(u) \tag{1}$$

le equazioni della linea l, e prendiamo a considerare l'integrale:

$$\Omega_1 = \Sigma \int X_r \, dz_r = \Sigma \int X_r \frac{dz_r}{du} du$$

esteso a tutta la linea l, essendo le X_r finite e continue in tutta R.

Ora la linea l formando parte del contorno di C, se lo spazio C sarà determinato dall'equazione:

$$z_1 = z_1(v_1, v_2), \quad z_2 = z_2(v_1, v_2), \ldots \quad z_n = z_n(v_1, v_2)$$

avremo:

$$\frac{dz_r}{du} du = \frac{dz_r}{dv_1} dv_1 + \frac{dz_r}{dv_2} dv_2$$

e quindi:

$$\Omega_1 = \int \Sigma X_r \frac{dz_r}{dv_1} dv_1 + \int \Sigma X_r \frac{dz_r}{dv_2} dv_2.$$

Ora per quello che abbiamo dimostrato nel paragrafo precedente:

$$\iint \left[\frac{d}{dv_2}\left(\Sigma X_r \frac{dz_r}{dv_1}\right) - \frac{d}{dv_1}\left(\Sigma X_r \frac{dz_r}{dv_2}\right)\right] dv_1 dv_2$$
$$= \int \Sigma X_r \frac{dz_r}{dv_1} dv_1 + \int \Sigma X_r \frac{dz_r}{dv_2} dv_2$$

dove l'integrale doppio è esteso a tutto lo spazio C e il semplice a tutto il sistema di linee l, L_1, $L_2, \ldots$ che formano il contorno di C.

Ma abbiamo:

$$\iint \left[\frac{d}{dv_2}\left(\Sigma X_r \frac{dz_r}{dv_1}\right) - \frac{d}{dv_1}\left(\Sigma X_r \frac{dz_r}{dv_2}\right)\right] dv_1 dv_2$$
$$= \iint \Sigma \frac{dX_r}{dz_t} \begin{vmatrix} \frac{dz_r}{dv_1} & \frac{dz_r}{dv_2} \\ \frac{dz_t}{dv_1} & \frac{dz_t}{dv_2} \end{vmatrix} dv_1 dv_2 = \Sigma \iint \left(\frac{dX_r}{dz_t} - \frac{dX_t}{dz_r}\right) dz_n dz_t.$$

Quindi l'integral doppio è nullo se in tutto R sono verificate anche le equazioni:

$$\frac{dX_r}{dz_t} - \frac{dX_t}{dz_r} = 0. \tag{2}$$

Dunque l'integrale

$$\Sigma \int X_r dz_r$$

esteso a tutte le linee l, L_1, $L_2, \ldots$ che formano il contorno di uno spazio C, è sempre nullo, qualunque sia la linea chiusa l, se le X_r sodisfano le (2) e sono finite e continue in R. Da ciò si ricava il teorema seguente:

Se in uno spazio R di n dimensioni, che ha la connessione di 1ª specie di ordine p_1, sono s_1, $s_2, \ldots$ s_{p_1} le sezioni trasverse di $n-1$ dimensioni, semplicemente connesse che rendono semplice la connessione di 1ª specie di R, ed L_1, $L_2, \ldots$ L_{p_1} p_1 linee chiuse che incontrano rispettivamente le sezioni s_1, $s_2, \ldots$ s_{p_1} e poniamo:

$$M_t = \Sigma \int_{L_t} X_r dz_r,$$

l'integrale:

$$\Sigma \int_{Z^0}^{Z'} X_r \, d z_r$$

esteso tra due punti Z^0 e Z' lungo una linea che incontra più sezioni s, differirà da quello preso lungo una linea che va dal punto Z^0 al punto Z' senza incontrare nessuna sezione s, delle quantità M relative alle sezioni s incontrate, prese queste positivamente o negativamente secondo che sono incontrate progredendo in una o in altra direzione; se poi la connessione di 1ª specie dello spazio R è semplice, l'integrale preso lungo una linea qualunque che in R va da Z_0 a Z_1 ha sempre lo stesso valore.