ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

P. DUHEM

Sur la déformation électrique des cristaux

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 9 (1892), p. 167-176.

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1892_3_9__167_0>

SUR LA

DÉFORMATION ÉLECTRIQUE DES CRISTAUX,

Par P. DUHEM.

Dans mes *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, j'ai montré brièvement (Livre XII, Chap. IV) comment la théorie que j'ai donnée, au sujet des déformations électriques des corps isotropes, pouvait s'étendre de manière à rendre compte des changements de forme que les cristaux éprouvent dans un champ électrique; j'ai développé particulièrement le cas où le cristal étudié est assez faiblement diélectrique pour que l'on puisse négliger, dans l'expression des six déformations, les termes du second ordre par rapport à l'intensité de la polarisation.

Ce cas avait déjà été traité, peu de temps auparavant, par une méthode analogue, dans un écrit de M. F. Pockels [1], *privat-docent* à l'Université de Gœttingue; au moment où j'ai rédigé mes *Leçons*, je ne connaissais pas cet article, qu'une aimable Communication de l'auteur m'a révélé récemment.

On sait comment ont été découverts les phénomènes auxquels s'applique la théorie donnée par M. F. Pockels. MM. P. et J. Curie avaient montré que certains cristaux s'électrisaient lorsqu'on les soumettait à une compression; M. Lippmann démontra théoriquement que, *si une certaine face d'une lame cristalline s'électrise positivement lorsqu'on soumet cette face à une compression normale, inversement, la lame se dila-*

---

(1) F. Pockels, *Ueber die Aenderungen des optischen Verhaltens und die elastischen Deformationen dielektrischer Krystalle im elektrischen Felde* (*Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Palæontologie*. Beilageband VII, p. 201; 1890).

tera dans la direction normale à la force, si l'on électrise cette face positivement (1). MM. P. et J. Curie (2) soumirent cette conséquence théorique à des vérifications expérimentales.

La loi de réciprocité de M. G. Lippmann apparaît comme un cas particulier du *Principe du déplacement de l'équilibre*, que M. F. Braun (3) fait découler de la notion générale de stabilité, et dont j'ai donné récemment (4) une démonstration fondée sur la théorie du potentiel thermodynamique. Mais, si l'on voit immédiatement que la loi de réciprocité entre les phénomènes piézo-électriques et les déformations électriques des cristaux hémièdres doit découler du principe général sur le déplacement de l'équilibre, la démonstration directe de cette loi présente, cependant, certaines difficultés. M. Pockels a exposé cette démonstration pour le cas simple étudié par M. G. Lippmann. Nous nous proposons de l'aborder ici dans toute sa généralité.

Imaginons que l'on ait donné à un cristal *piézo-électrique* homogène de petites déformations quelconques, qui le laissent homogène. Soient

$$D_1 = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad D_2 = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad D_3 = \frac{\partial W}{\partial z},$$

$$G_1 = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}, \qquad G_2 = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}, \qquad G_3 = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}$$

les six déformations, qui ont la même valeur en tout point (x, y, z) du cristal.

La polarisation $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ aura aussi la même intensité et la même direction en tous les points du cristal. Les composantes de cette polarisation seront, en conservant les notations de nos *Leçons sur l'Électri-*

---

(1) G. Lippmann, *Principe de la conservation de l'Électricité* (*Annales de Chimie et de Physique*, 5e série, t. XXIV, p. 145; 1881).

(2) P. et J. Curie, *Déformations électriques du quartz* (*Comptes rendus*, t. XCV, p. 914; 1882).

(3) F. Braun, *Ueber einen allgemeinen qualitativen Satz für Zustandsänderungen nebst einigen sich anschliessenden Bemerkungen, insbesondere über nicht eindeutige Systeme* (*Wiedemann's Annalen*, t. XXXIII, p. 337; 1888).

(4) P. Duhem, *Sur le déplacement de l'équilibre* (*Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse*, t. IV, N; 1890).

cité et le Magnétisme (t. II, p. 396-397), données par les équations

$$(1)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = -\dfrac{1}{T}(\delta_{11}\lambda + \delta_{12}\mu + \delta_{13}\nu), \\ \mathcal{B} = -\dfrac{1}{T}(\delta_{21}\lambda + \delta_{22}\mu + \delta_{23}\nu), \\ \mathcal{C} = -\dfrac{1}{T}(\delta_{31}\lambda + \delta_{32}\mu + \delta_{33}\nu) \end{cases}$$

avec

$$(2)\quad \begin{cases} \lambda = l_1\ D_1 + l_2\ D_2 + l_3\ D_3 + l_4\ G_1 + l_5\ G_2 + l_6\ G_3, \\ \mu = m_1 D_1 + m_2 D_2 + m_3 D_3 + m_4 G_1 + m_5 G_2 + m_6 G_3, \\ \nu = n_1\ D_1 + n_2\ D_2 + n_3\ D_3 + n_4\ G_1 + n_5\ G_2 + n_6\ G_3. \end{cases}$$

Imaginons maintenant le cristal soustrait à l'action de toute force extérieure; plaçons-le dans un champ magnétique uniforme, tel que les composantes de sa polarisation prennent en chaque point les valeurs $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$. Il éprouvera des déformations qui le laisseront homogène; soient

$$\Delta_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \Delta_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \Delta_3 = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\Gamma_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \qquad \Gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \Gamma_3 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

les six déformations qui auront la même valeur en tout point du cristal. Ces six déformations seront données par les égalités [*loc. cit.*, p. 472, égalités (12)]

$$(3)\quad \begin{cases} a_{11}\Delta_1 + a_{12}\Delta_2 + a_{13}\Delta_3 + a_{14}\Gamma_1 + a_{15}\Gamma_2 + a_{16}\Gamma_3 = l_1\mathcal{A} + m_1\mathcal{B} + n_1\mathcal{C}, \\ a_{21}\Delta_1 + a_{22}\Delta_2 + a_{23}\Delta_3 + a_{24}\Gamma_1 + a_{25}\Gamma_2 + a_{26}\Gamma_3 = l_2\mathcal{A} + m_2\mathcal{B} + n_2\mathcal{C}, \\ a_{31}\Delta_1 + a_{32}\Delta_2 + a_{33}\Delta_3 + a_{34}\Gamma_1 + a_{35}\Gamma_2 + a_{36}\Gamma_3 = l_3\mathcal{A} + m_3\mathcal{B} + n_3\mathcal{C}, \\ a_{41}\Delta_1 + a_{42}\Delta_2 + a_{43}\Delta_3 + a_{44}\Gamma_1 + a_{45}\Gamma_2 + a_{46}\Gamma_3 = l_4\mathcal{A} + m_4\mathcal{B} + n_4\mathcal{C}, \\ a_{51}\Delta_1 + a_{52}\Delta_2 + a_{53}\Delta_3 + a_{54}\Gamma_1 + a_{55}\Gamma_2 + a_{56}\Gamma_3 = l_5\mathcal{A} + m_5\mathcal{B} + n_5\mathcal{C}, \\ a_{61}\Delta_1 + a_{62}\Delta_2 + a_{63}\Delta_3 + a_{64}\Gamma_1 + a_{65}\Gamma_2 + a_{66}\Gamma_3 = l_6\mathcal{A} + m_6\mathcal{B} + n_6\mathcal{C}. \end{cases}$$

Multiplions les deux membres de la première égalité (3) par D_1,
les deux membres de la deuxième égalité (3) par D_2,
les deux membres de la troisième égalité (3) par D_3,
les deux membres de la quatrième égalité (3) par G_1,
les deux membres de la cinquième égalité (3) par G_2,
les deux membres de la sixième égalité (3) par G_3.

Ajoutons membre à membre les résultats obtenus. Le premier membre de l'égalité résultante pourra s'écrire

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &(a_{11}D_1 + a_{12}D_2 + a_{13}D_3 + a_{14}G_1 + a_{15}G_2 + a_{16}G_3)\Delta_1 \\ &+ (a_{21}D_1 + a_{22}D_2 + a_{23}D_3 + a_{24}G_1 + a_{25}G_2 + a_{26}G_3)\Delta_2 \\ &+ (a_{31}D_1 + a_{32}D_2 + a_{33}D_3 + a_{34}G_1 + a_{35}G_2 + a_{36}G_3)\Delta_3 \\ &+ (a_{41}D_1 + a_{42}D_2 + a_{43}D_3 + a_{44}G_1 + a_{45}G_2 + a_{46}G_3)\Gamma_1 \\ &+ (a_{51}D_1 + a_{52}D_2 + a_{53}D_3 + a_{54}G_1 + a_{55}G_2 + a_{56}G_3)\Gamma_2 \\ &+ (a_{61}D_1 + a_{62}D_2 + a_{63}D_3 + a_{64}G_1 + a_{65}G_2 + a_{66}G_3)\Gamma_3. \end{aligned}\right.$$

Le second membre deviendra, en vertu des égalités (1) et (2),

$$(4\ bis)\qquad -\frac{1}{T}(\partial_{11}\lambda^2 + \partial_{22}\mu^2 + \partial_{33}\nu^2 + 2\partial_{23}\mu\nu + 2\partial_{31}\nu\lambda + 2\partial_{12}\lambda\mu).$$

Cette quantité (4 *bis*) n'est autre chose que ce que devient la fonction

$$-2(\varphi_{11}\alpha^2 + \varphi_{22}\beta^2 + \varphi_{33}\gamma^2 + 2\varphi_{23}\beta\gamma + 2\varphi_{31}\gamma\alpha + 2\varphi_{12}\alpha\beta)$$

par la substitution linéaire

$$\begin{aligned} 2(\varphi_{11}\alpha + \varphi_{12}\beta + \varphi_{13}\gamma) &= \lambda, \\ 2(\varphi_{21}\alpha + \varphi_{22}\beta + \varphi_{23}\gamma) &= \mu, \\ 2(\varphi_{31}\alpha + \varphi_{32}\beta + \varphi_{33}\gamma) &= \nu, \end{aligned}$$

qui donne (*loc. cit.*, p. 298)

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{T}(\partial_{11}\lambda + \partial_{12}\mu + \partial_{13}\nu), \\ \beta &= \frac{1}{T}(\partial_{21}\lambda + \partial_{22}\mu + \partial_{23}\nu), \\ \gamma &= \frac{1}{T}(\partial_{31}\lambda + \partial_{32}\mu + \partial_{33}\nu). \end{aligned}$$

Or, la distribution d'équilibre diélectrique sur le cristal n'est stable (*loc. cit.*, p. 312) que si la surface

$$\varphi_{11}\alpha^2 + \varphi_{22}\beta^2 + \varphi_{33}\gamma^2 + 2\varphi_{23}\beta\gamma + 2\varphi_{31}\gamma\alpha + 2\varphi_{12}\alpha\beta = 1$$

est un *ellipsoïde réel.* La forme

$$\varphi_{11}\alpha^2 + \varphi_{22}\beta^2 + \varphi_{33}\gamma^2 + 2\varphi_{23}\beta\gamma + 2\varphi_{31}\gamma\alpha + 2\varphi_{12}\alpha\beta$$

est donc une forme quadratique définie et *positive*, et la quantité (4 *bis*) est une forme quadratique définie et *négative*.

Soient

$$N_1,\quad N_2,\quad N_3,\qquad T_1,\quad T_2,\quad T_3$$

les six composantes des pressions à l'intérieur du cristal, lorsque les six déformations ont les valeurs

$$D_1,\quad D_2,\quad D_3,\qquad G_1,\quad G_2,\quad G_3.$$

Nous aurons

$$\begin{aligned}
a_{11} D_1 + a_{12} D_2 + a_{13} D_3 + a_{14} G_1 + a_{15} G_2 + a_{16} G_3 + N_1 &= 0,\\
a_{21} D_1 + a_{22} D_2 + a_{23} D_3 + a_{24} G_1 + a_{25} G_2 + a_{26} G_3 + N_2 &= 0,\\
a_{31} D_1 + a_{32} D_2 + a_{33} D_3 + a_{34} G_1 + a_{35} G_2 + a_{36} G_3 + N_3 &= 0,\\
a_{41} D_1 + a_{42} D_2 + a_{43} D_3 + a_{44} G_1 + a_{45} G_2 + a_{46} G_3 + T_1 &= 0,\\
a_{51} D_1 + a_{52} D_2 + a_{53} D_3 + a_{54} G_1 + a_{55} G_2 + a_{56} G_3 + T_2 &= 0,\\
a_{61} D_1 + a_{62} D_2 + a_{63} D_3 + a_{64} G_1 + a_{65} G_2 + a_{66} G_3 + T_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Si l'on tient compte de ces égalités et si l'on se souvient que la quantité (4) est toujours négative, on trouve l'inégalité

$$N_1 \Delta_1 + N_2 \Delta_2 + N_3 \Delta_3 + T_1 \Gamma_1 + T_2 \Gamma_2 + T_3 \Gamma_3 > 0.$$

Multiplions par $dx\,dy\,dz$; intégrons pour le volume entier du cristal et nous aurons

$$(5)\qquad \int (N_1 \Delta_1 + N_2 \Delta_2 + N_3 \Delta_3 + T_1 \Gamma_1 + T_2 \Gamma_2 + T_3 \Gamma_3)\, dx\, dy\, dz > 0.$$

Remplaçons Δ_1, Δ_2, Δ_3, T_1, T_2, T_3 par leurs valeurs en fonction de u, v, w, et effectuons des intégrations par parties. Le premier membre de l'inégalité (5) deviendra

$$\begin{aligned}
-\mathrm{S}\Big\{ &[N_1 \cos(n_i, x) + T_3 \cos(n_i, y) + T_2 \cos(n_i, z)]\, u\\
&+ [T_3 \cos(n_i, x) + N_2 \cos(n_i, y) + T_1 \cos(n_i, z)]\, v\\
&+ [T_2 \cos(n_i, x) + T_1 \cos(n_i, y) + N_3 \cos(n_i, z)]\, w \Big\}\, dS\\
-\int \Big[&\left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z}\right) u\\
&+ \left(\frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z}\right) v\\
&+ \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z}\right) w \Big]\, dx\, dy\, dz,
\end{aligned}$$

dS étant un élément de la surface du cristal et n_i la normale à cet élément vers l'intérieur du cristal.

Mais si l'on désigne par

$$\rho X\,dv, \quad \rho Y\,dv, \quad \rho Z\,dv$$

les composantes de la force appliquée à l'élément de masse $\rho\,dv$ du cristal ainsi déformé, on aura

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} &= \rho X,\\
\frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} &= \rho Y,\\
\frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} &= \rho Z.
\end{aligned}$$

D'autre part, si l'on désigne par

$$P\cos(P, x)\,dS, \quad P\cos(P, y)\,dS, \quad P\cos(P, z)\,dS$$

les composantes de la force extérieure appliquée à l'élément dS de la surface du cristal, on aura

$$\begin{aligned}
N_1\cos(n_i, x) + T_3\cos(n_i, y) + T_2\cos(n_i, z) &= P\cos(P, x),\\
T_3\cos(n_i, x) + N_2\cos(n_i, y) + T_1\cos(n_i, z) &= P\cos(P, y),\\
T_2\cos(n_i, x) + T_1\cos(n_i, y) + N_3\cos(n_i, z) &= P\cos(P, z).
\end{aligned}$$

L'inégalité (5) peut donc s'écrire

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathbf{S}\, P[u\cos(P, x) + v\cos(P, y) + w\cos(P, z)]\,dS\\
&\qquad + \int \rho(Xu + Yv + Zw)\,dx\,dy\,dz < 0.
\end{aligned}\right.$$

Que signifie cette inégalité?

Pour imposer au cristal les déformations

$$D_1, \quad D_2, \quad D_3, \quad G_1, \quad G_2, \quad G_3,$$

il faut appliquer à chaque élément dS de sa surface une force dont les composantes sont

$$P\cos(P, x)\,dS, \quad P\cos(P, y)\,dS, \quad P\cos(P, z)\,dS$$

et à chaque élément dv de son volume une force dont les composantes sont

$$\rho X\,dv, \quad \rho Y\,dv, \quad \rho Z\,dv.$$

Appelons ce système le *système des forces* F.

Soumis au système des forces F, et soustrait à toute influence électrique extérieure, le cristal prend une polarisation diélectrique uniforme dont les composantes sont $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$.

Inversement, le cristal, soustrait à l'action de toute force extérieure et placé dans un champ électrique qui lui fait prendre la polarisation $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, éprouve des déformations

$$\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3, \quad \Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \Gamma_3,$$

résultant du déplacement (u, v, w) appliqué à chaque point du cristal. Appelons ce système de déformation le *système des déformations* Δ.

Si l'on imposait ces mêmes déformations Δ *au cristal soumis aux forces* F, *les forces* F *effectueraient, dans cette modification, un travail négatif.*

En d'autres termes :

Lorsqu'on fait agir certaines forces F *sur un cristal piézo-électrique, soustrait à toute influence électrique, il se développe à l'intérieur de ce cristal une certaine polarisation diélectrique. Si, par l'action d'un champ électrique, on développait la même polarisation à l'intérieur du cristal, le cristal éprouverait certaines déformations* Δ. *Les forces* F *sont telles que leur action s'oppose aux déformations* Δ.

On reconnaît immédiatement dans cet énoncé une conséquence de la loi générale du déplacement de l'équilibre.

On serait tenté d'y voir la généralisation de l'énoncé donné par M. G. Lippmann; nous allons voir qu'il n'en est rien et que, au contraire, la proposition démontrée par M. G. Lippmann est *en contradiction* avec la précédente.

Lorsque le cristal est soumis à l'action des forces F, il prend une polarisation uniforme qui exerce sur les points extérieurs au cristal la même action qu'une couche électrique fictive. La densité superficielle de cette couche fictive a pour valeur (*loc. cit.*, p. 397)

$$(7)\qquad \begin{cases} \Sigma = \dfrac{1}{T}[& (\delta_{11}\lambda + \delta_{12}\mu + \delta_{13}\nu)\cos(n_i, x) \\ & + (\delta_{21}\lambda + \delta_{22}\mu + \delta_{23}\nu)\cos(n_i, y) \\ & + (\delta_{31}\lambda + \delta_{32}\mu + \delta_{33}\nu)\cos(n_i, z)], \end{cases}$$

λ, μ, ν étant définis au moyen des égalités (2).

Imaginons que le cristal ait la forme d'une lame à faces parallèles indéfinies, comprise entre deux plans S_1, S_2 perpendiculaires à l'axe des x. Deux plans S'_1, S'_2 sont infiniment voisins des faces de la lame. Sur le plan S'_1, que rencontre d'abord l'axe des x, nous distribuons une couche électrique uniforme de densité

$$\Sigma_1 = \frac{1}{T}(\delta_{11}\lambda + \delta_{12}\mu + \delta_{13}\nu).$$

Sur le plan S'_2 nous distribuons une couche électrique uniforme de densité

$$\Sigma_2 = -\frac{1}{T}(\delta_{11}\lambda + \delta_{12}\mu + \delta_{13}\nu).$$

D'après l'égalité (7), ces *couches réelles* sont identiques aux *couches fictives* qui recouvriraient les faces S_1, S_2 de la lame soumise aux forces F.

Ces couches produisent entre les deux plans S'_1, S'_2 un champ uniforme, parallèle à l'axe des x, et ayant pour intensité

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{4\pi}{T}(\delta_{11}\lambda + \delta_{12}\mu + \delta_{13}\nu).$$

Sous l'influence de ce champ, la lame cristalline prend une polarisation uniforme dont les composantes sont (*loc. cit.*, p. 299)

$$(8)\qquad \begin{cases} \mathcal{A}' = -\dfrac{\varepsilon}{T}\delta_{11}\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{4\pi\varepsilon}{T^2}\delta_{11}(\delta_{11}\lambda + \delta_{12}\mu + \delta_{13}\nu), \\ \mathcal{B}' = -\dfrac{\varepsilon}{T}\delta_{12}\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{4\pi\varepsilon}{T^2}\delta_{12}(\delta_{11}\lambda + \delta_{12}\mu + \delta_{13}\nu), \\ \mathcal{C}' = -\dfrac{\varepsilon}{T}\delta_{13}\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{4\pi\varepsilon}{T^2}\delta_{13}(\delta_{11}\lambda + \delta_{12}\mu + \delta_{13}\nu). \end{cases}$$

Les six déformations à l'intérieur de la lame auront des valeurs

$$\Delta'_1,\quad \Delta'_2,\quad \Delta'_3,\quad \Gamma'_1,\quad \Gamma'_2,\quad \Gamma'_3,$$

données par les égalités, analogues aux égalités (3),

$$\begin{aligned}
a_{11}\Delta'_1 + a_{12}\Delta'_2 + a_{13}\Delta'_3 + a_{14}\Gamma'_1 + a_{15}\Gamma'_2 + a_{16}\Gamma'_3 &= l_1\mathcal{A}' + m_1\mathcal{B}' + n_1\mathcal{C}',\\
a_{21}\Delta'_1 + a_{22}\Delta'_2 + a_{23}\Delta'_3 + a_{24}\Gamma'_1 + a_{25}\Gamma'_2 + a_{26}\Gamma'_3 &= l_2\mathcal{A}' + m_2\mathcal{B}' + n_2\mathcal{C}',\\
a_{31}\Delta'_1 + a_{32}\Delta'_2 + a_{33}\Delta'_3 + a_{34}\Gamma'_1 + a_{35}\Gamma'_2 + a_{36}\Gamma'_3 &= l_3\mathcal{A}' + m_3\mathcal{B}' + n_3\mathcal{C}',\\
a_{41}\Delta'_1 + a_{42}\Delta'_2 + a_{43}\Delta'_3 + a_{44}\Gamma'_1 + a_{45}\Gamma'_2 + a_{46}\Gamma'_3 &= l_4\mathcal{A}' + m_4\mathcal{B}' + n_4\mathcal{C}',\\
a_{51}\Delta'_1 + a_{52}\Delta'_2 + a_{53}\Delta'_3 + a_{54}\Gamma'_1 + a_{55}\Gamma'_2 + a_{56}\Gamma'_3 &= l_5\mathcal{A}' + m_5\mathcal{B}' + n_5\mathcal{C}',\\
a_{61}\Delta'_1 + a_{62}\Delta'_2 + a_{63}\Delta'_3 + a_{64}\Gamma'_1 + a_{65}\Gamma'_2 + a_{66}\Gamma'_3 &= l_6\mathcal{A}' + m_6\mathcal{B}' + n_6\mathcal{C}'.
\end{aligned}$$

Ajoutons ces égalités membre à membre après les avoir multipliées respectivement par D_1, D_2, D_3, G_1, G_2, G_3. Nous trouverons, en tenant compte des égalités (2) et (8),

$$\begin{aligned}
&(a_{11}D_1 + a_{12}D_2 + a_{13}D_3 + a_{14}G_1 + a_{15}G_2 + a_{16}G_3)\Delta'_1\\
&+ (a_{21}D_1 + a_{22}D_2 + a_{23}D_3 + a_{24}G_1 + a_{25}G_2 + a_{26}G_3)\Delta'_2\\
&+ (a_{31}D_1 + a_{32}D_2 + a_{33}D_3 + a_{34}G_1 + a_{35}G_2 + a_{36}G_3)\Delta'_3\\
&+ (a_{41}D_1 + a_{42}D_2 + a_{43}D_3 + a_{44}G_1 + a_{45}G_2 + a_{46}G_3)\Gamma'_1\\
&+ (a_{51}D_1 + a_{52}D_2 + a_{53}D_3 + a_{54}G_1 + a_{55}G_2 + a_{56}G_3)\Gamma'_2\\
&+ (a_{61}D_1 + a_{62}D_2 + a_{63}D_3 + a_{64}G_1 + a_{65}G_2 + a_{66}G_3)\Gamma'_3\\
&= \frac{4\pi\varepsilon}{T^2}(\delta_{11}\lambda + \delta_{12}\mu + \delta_{13}\nu)^2.
\end{aligned}$$

Le second membre de cette égalité est essentiellement positif; il en est donc de même du premier. En raisonnant comme nous l'avons fait pour démontrer la proposition précédente, nous verrons sans peine que le résultat que nous venons d'obtenir peut s'énoncer de la manière suivante :

Les forces qui imposent à la lame cristalline les déformations

$$D_1,\quad D_2,\quad D_3,\quad G_1,\quad G_2,\quad G_3$$

effectueraient un travail *positif* si l'on imposait à la lame les déformations

$$\Delta'_1,\quad \Delta'_2,\quad \Delta'_3,\quad \Gamma'_1,\quad \Gamma'_2,\quad \Gamma'_3.$$

Ainsi, *si l'on soumet une lame cristalline piézo-électrique à un certain système de forces extérieures* F, *la lame prend, sur ses deux faces, une certaine électrisation apparente. Si l'on communique une électrisation réelle, analogue à cette électrisation apparente, à deux plaques métalliques infiniment voisines des faces de la lame, la lame subit certaines déformations, les déformations* Δ'. *Si l'on imposait les déformations* Δ' *à une lame soumise aux forces* F, *les forces* F *effectueraient un travail positif; elles tendent donc à favoriser les modifications* Δ'.

Ce résultat est analogue à celui qu'a obtenu M. Lippmann, mais *de sens contraire*. D'après la proposition de M. Lippmann, les forces F tendent *à s'opposer* aux modifications Δ' et non pas à les favoriser.

Il est aisé de voir en quoi la démonstration de M. Lippmann est inexacte.

M. Lippmann définit l'état du cristal soumis à l'action des forces F par les déformations Δ et par l'*état d'électrisation* de la surface du cristal. Mais, dans ce cas, la surface du cristal n'est pas électrisée. La masse du cristal est dans un état de polarisation qui équivaut, pour les points extérieurs, *mais non pour les points intérieurs*, à l'action de deux couches électriques réparties sur les faces de la lame. De cette confusion découle la conclusion erronée que nous venons de rappeler.

La proposition que nous venons de substituer à celle de M. Lippmann semble, au premier abord, en contradiction avec la loi du déplacement de l'équilibre; il est aisé de voir qu'il n'en est rien et de lui donner une forme qui mette en évidence la concordance de ces deux vérités.

Imaginons les deux surfaces S'_1 et S'_2 mises en communication métallique l'une avec l'autre. Lorsque, sur la lame, on fera agir les forces F, les surfaces S_1, S_2 s'électriseront comme nous l'avons vu; les surfaces S'_1, S'_2 se recouvriront par influence de densités électriques égales et de signe contraire à celles qui recouvrent les surfaces S_1, S_2. Dès lors, on peut déduire de la proposition précédente celle-ci, qui est tout à fait conforme au principe du déplacement de l'équilibre :

Si l'on soumet la lame cristalline à l'action du système de forces F, *les deux surfaces* S'_1, S'_2, *réunies métalliquement, se recouvrent de certaines couches électriques; si l'on suppose, au contraire, la lame soustraite à toute force extérieure et si l'on communique la même électrisation aux deux surfaces* S'_1, S'_2, *la lame éprouve un système de déformations* $(-\Delta')$. *Les forces* F *tendent à s'opposer à ces déformations* $(-\Delta')$.

M. F. Pockels a montré, dans l'article que nous avons cité, l'opposition qui existe entre la proposition énoncée par M. Lippmann et celle que nous avons établie ici; mais il a regardé la première comme exacte et la seconde comme erronée.