

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

P. DUHEM

## **Sur la pression électrique et les phénomènes électrocapillaires**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 5 (1888), p. 97-146.

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1888\\_3\\_5\\_\\_97\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1888_3_5__97_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUR LA PRESSION ÉLECTRIQUE

ET

## LES PHÉNOMÈNES ÉLECTROCAPILLAIRES,

PAR P. DUHEM.

---

### PREMIÈRE PARTIE.

#### DE LA PRESSION ÉLECTRIQUE.

---

#### CHAPITRE I.

DES DIFFÉRENCES DE NIVEAU POTENTIEL AU CONTACT DE DEUX SUBSTANCES DIFFÉRENTES.

---

##### § I. — De la quantité $\Theta$ .

1. La théorie de la distribution de l'électricité en équilibre sur un système de corps conducteurs est due à Poisson. Poisson a déduit cette théorie des hypothèses suivantes :

1° On peut appliquer aux charges électriques en équilibre les propositions démontrées en Statique pour les systèmes de points matériels en équilibre.

2° Deux charges électriques  $q$  et  $q'$ , concentrées en des points que sépare une distance  $r$ , exercent l'une sur l'autre une action répulsive donnée par la formule

$$F = \varepsilon \frac{qq'}{r^2},$$

$\varepsilon$  étant une constante positive.

Ces deux hypothèses conduisent à un théorème fondamental dont voici l'énoncé : *Pour que l'électricité distribuée sur un système de corps conducteurs soit en équilibre, il faut et il suffit qu'en tous les points d'un même conducteur la fonction potentielle ait la même valeur.*

Ce théorème est en désaccord avec un fait d'expérience dont la découverte est due à Volta et dont l'existence a été confirmée depuis par un grand nombre d'observateurs : *lorsque l'équilibre électrique est établi sur un conducteur formé de plusieurs substances différentes, le niveau potentiel, constant à l'intérieur d'une même substance, varie lorsqu'on passe d'une substance à une autre.*

M. Helmholtz (1) a fait disparaître ce désaccord en joignant une nouvelle hypothèse à celles que Poisson avait admises; cette hypothèse est la suivante : chaque particule électrique est soumise non seulement à l'action des autres particules électriques répandues sur le système, mais aussi à l'action de la matière qui l'environne; une masse matérielle  $m$ , située à une distance  $r$  du point où est concentrée une charge électrique  $q$ , exerce sur cette charge électrique une action que nous comptons positivement lorsqu'elle sera répulsive; cette action a pour valeur

$$F_1 = mqf(r),$$

$f(r)$  étant une fonction de  $r$  dont la forme dépend de la nature et de l'état de la masse  $m$ ; cette fonction est égale à 0 pour toute valeur de  $r$  supérieure à une certaine quantité  $\mu$  qui, par son extrême petitesse, échappe à l'expérience.

Considérons un système formé d'un nombre quelconque de conducteurs et un point M situé à l'intérieur de l'un d'eux; soit  $V$  la valeur de la fonction potentielle au point M; considérons l'une quelconque des fonctions  $F(r)$  définies par la relation

$$\frac{dF(r)}{dr} = -f(r).$$

Posons

$$U = \varepsilon V + \Theta,$$

---

(1) H. HELMHOLTZ, *Ueber die Erhaltung der Kraft*, p. 47; Berlin, Reimer, 1847 (*Wissenschaftliche Abhandlungen*, t. I, p. 48).

avec

$$(1) \quad \Theta = \int F(r) dm,$$

la sommation s'étendant, dans cette dernière égalité, à toutes les masses matérielles élémentaires comprises dans la sphère dont le centre est en M et dont  $\mu$  est le rayon. Il est aisé de voir que la force qui agit sur une particule électrique  $q$  située au point M a pour composantes

$$X = -q \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -q \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -q \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Par conséquent, lorsque l'équilibre électrique est établi sur un système de conducteurs, c'est la fonction U et non, comme le voulait la théorie de Poisson, la fonction V, qui doit avoir la même valeur en tous les points pris à l'intérieur d'un même conducteur. Si l'on prend plusieurs points en lesquels le même conducteur soit formé de la même matière, la quantité  $\Theta$  aura la même valeur en tous ces points; il en sera alors de même de la fonction potentielle, résultat qui sera conforme à la théorie de Poisson. Au contraire, si le conducteur est formé par l'assemblage de plusieurs corps de nature différente et si l'on prend deux points situés à l'intérieur de substances différentes, la quantité  $\Theta$  aura en ces deux points des valeurs différentes, et il en sera de même de la fonction V.

La théorie de M. Helmholtz, dont nous venons d'exposer le principe, coordonne toutes les lois auxquelles sont soumises les différences de niveau potentiel au contact de deux substances différentes. L'hypothèse sur laquelle elle repose soulève, il est vrai, certaines difficultés, mais ces difficultés sont déjà impliquées, pour la plupart, dans les principes mêmes de la théorie de Poisson.

Nous avons cherché, dans un autre travail <sup>(1)</sup>, à faire disparaître ces difficultés accumulées au début de l'Électrostatique; pour ne pas allonger outre mesure le présent travail, qui doit être consacré à l'exposé de résultats nouveaux, nous ne reprendrons pas ici la chaîne des

---

(1) *Le potentiel thermodynamique et ses applications à la mécanique chimique et à la théorie des phénomènes électriques*, 3<sup>e</sup> Partie, Chap. I; Paris, 1886.

raisonnements par lesquels nous avons cherché à atteindre ce but; nous nous contenterons de rappeler la proposition à laquelle ils nous ont amenés. Cette proposition est la suivante :

Considérons un système formé de corps immobiles portant des charges électriques en repos, et soumis sur toute sa surface à une pression normale, uniforme et constante  $P$ . Ce système admet un potentiel thermodynamique défini par l'égalité

$$(2) \quad \Phi = W + \sum \Theta Q + E(U - TS) + P\Sigma,$$

$W$  étant le potentiel électrostatique du système,

$\Sigma$  son volume,

$T$  la température absolue à laquelle il est porté en tous ses points,

$U$  l'énergie interne que posséderait le système si tous les corps qui le composent étaient ramenés à l'état neutre tout en conservant leur forme, leur volume et leur état,

$S$  l'entropie du système dans les mêmes conditions,

$Q$  une des charges électriques du système,

$\Theta$  une quantité qui dépend uniquement de la nature du système au point où se trouve la charge  $Q$ ,

$\Sigma$  enfin, le symbole d'une sommation qui s'étend à toutes les charges du système.

Tout en laissant de côté la série des raisonnements par lesquels on déduit cette égalité de la loi donnée par Coulomb pour les actions mutuelles des conducteurs électrisés, il est nécessaire que nous appelions l'attention sur le point suivant :

Toutes les considérations qui conduisent à l'égalité précédente reposent sur un théorème susceptible de s'énoncer ainsi : lorsqu'une charge électrique passe d'un point à un autre en traversant un conducteur homogène, dont tous les points sont à la même température et qui laisse passer l'électricité sans éprouver de changement d'état, le travail non compensé produit dans le système se réduit à la variation changée de signe de la quantité  $W$ .

Pour démontrer ce théorème fondamental, on use d'un artifice par lequel, au lieu de transporter seulement la charge électrique d'un

point à un autre du conducteur, on détache un petit fragment du conducteur autour du point où se trouve tout d'abord la charge électrique, puis on le déplace avec la charge qu'il porte, de manière à le substituer à un petit fragment identique, mais à l'état neutre, détaché autour du point où la charge électrique doit se trouver après la modification; ce second fragment, de son côté, est substitué au premier. L'application des théorèmes généraux de la Thermodynamique à la nouvelle modification ainsi imaginée conduit à la proposition dont nous venons de rappeler l'énoncé.

Or, les principes de la Thermodynamique, qui ont une origine essentiellement expérimentale, ne doivent être appliqués qu'à des transformations dont la réalisation puisse être au moins conçue comme possible. D'autre part, il est bien probable que les dimensions d'un fragment que l'on peut mécaniquement détacher d'un corps, de manière que le fragment séparé conserve la même structure que le corps, ont une limite inférieure, inaccessible à l'expérience, il est vrai, à cause de son extrême petitesse, mais cependant différente de zéro. Par conséquent, dans l'opération imaginée précédemment, nous devons supposer que les deux fragments détachés du conducteur ont des dimensions supérieures à une certaine limite; nous devons, *a fortiori*, supposer que le conducteur dont ces deux fragments sont détachés a des dimensions supérieures à cette limite; si donc nous raisonnons comme si les deux fragments détachés se réduisaient à deux points, si nous étendons le résultat obtenu, même au cas où le conducteur ne peut être regardé comme homogène que dans un domaine infiniment petit, il faudra nous souvenir que nous obtenons non pas une théorie exacte, mais seulement une théorie approchée dans laquelle nous regardons comme infiniment petites des quantités qui, en réalité, ne sont que très petites.

Pour être rigoureux, nous devons regarder la quantité  $\Theta$ , qui figure dans l'égalité (2), comme pouvant dépendre non pas seulement de la constitution du système *au point* où se trouve la charge  $Q$ , mais aussi de la constitution des parties du système qui *environnent* ce point; dès lors, l'idée qui s'offre naturellement à l'esprit est d'attribuer à  $\Theta$  une expression analogue à l'expression (1), qui dérive de la théorie de M. Helmholtz.

Cette remarque a une grande importance, comme nous l'allons voir immédiatement.

La théorie du potentiel thermodynamique, comme la théorie de M. Helmholtz, conduit à la proposition suivante : Lorsque l'équilibre électrique est établi sur un système de conducteurs, la quantité  $(\epsilon V + \Theta)$  a la même valeur en tous les points de ce conducteur, pourvu qu'une température uniforme règne à l'intérieur de ce conducteur et que l'électricité puisse y circuler sans y produire de changement d'état.

Supposons pour un instant que la quantité  $\Theta$  dépende uniquement de la constitution du conducteur au point où se trouve la charge électrique et envisageons un conducteur formé de deux métaux différents accolés l'un à l'autre; prenons un point situé à l'intérieur de l'un des métaux, infiniment près de la surface de contact et supposons qu'une charge électrique concentrée en ce point passe en un autre point infiniment voisin de la surface de contact, infiniment rapproché du précédent, mais situé à l'intérieur du second métal; la constitution du conducteur au point où se trouve la charge électrique subirait une variation finie; la quantité  $\Theta$  subirait, par conséquent, une variation finie et, comme la quantité  $(\epsilon V + \Theta)$  ne doit éprouver aucune variation, la quantité  $V$  subirait aussi une variation finie; en d'autres termes, *la fonction potentielle serait discontinue en tous les points de la surface de contact des deux métaux.*

Mais, d'autre part, on ne peut imaginer aucune distribution de l'électricité sur un système de conducteurs qui n'appartienne à l'un des quatre modes suivants, ou qui ne puisse être envisagée comme le résultat de la superposition de plusieurs distributions simples dont chacune appartient à l'un de ces quatre modes :

1° L'électricité remplit certains *volumes*, de manière à avoir une densité finie en chacun des points de ces volumes.

2° L'électricité recouvre certaines *surfaces*, de manière à avoir une densité superficielle finie en chacun des points de ces surfaces.

3° L'électricité est distribuée en de certaines *lignes*, de manière à avoir une densité linéaire finie en chacun des points de ces lignes.

4° Des quantités finies d'électricité sont concentrées en de certains *points*.

Dans les deux premiers cas, la fonction potentielle est continue dans tout l'espace; dans le troisième cas, la fonction potentielle est continue dans tout l'espace, sauf le long des lignes en lesquelles l'électricité est distribuée; dans le quatrième cas, la fonction potentielle est continue dans tout l'espace, sauf aux points où l'électricité est concentrée; mais, *pour aucune distribution imaginable de l'électricité, la fonction potentielle ne peut être discontinue en tous les points d'une surface.*

*Si donc la quantité  $\Theta$  dépendait uniquement de la constitution du système au point où se trouve la charge électrique à laquelle elle se rapporte, aucune distribution de l'électricité ne serait compatible avec les lois qui régissent la différence de niveau potentiel entre deux substances conductrices mises en contact.*

La contradiction à laquelle on viendrait ainsi se heurter disparaît complètement si l'on adopte pour  $\Theta$  une expression telle que l'expression (1). En effet, il est facile de voir que, pour un point situé au voisinage de la surface de séparation de deux substances en contact, la sphère à laquelle doit être étendue la sommation qui figure dans l'égalité (1) se compose de deux parties : l'une, située à l'intérieur de la première substance, l'autre à l'intérieur de la seconde;  $\Theta$  est la somme de deux termes correspondant respectivement aux deux parties de la sphère; de quelque manière que la constitution de chacune des deux substances varie au voisinage de la surface qui les sépare, chacun de ces deux termes varie d'une manière continue lorsque le point auquel se rapporte  $\Theta$  subit un déplacement et même lorsqu'il traverse la surface; la fonction  $\Theta$  ne présente plus de discontinuité le long de la surface de contact des deux conducteurs, et la fonction  $V$  peut être continue dans tout l'espace.

## § II. — Existence des dérivées de la quantité $\Theta$ .

2. Dès lors, il est possible de trouver une distribution électrique produisant la variation rapide, mais non brusque, que la fonction potentielle subit au voisinage de la surface de séparation de deux substances conductrices contiguës; quelle est cette distribution?

Nous ne pouvons répondre à cette question qu'après avoir fait quelques hypothèses sur la manière dont la fonction  $F(r)$  se comporte



pour  $r = 0$ ; par analogie avec la fonction potentielle, nous admettrons que, pour  $r = 0$ , la fonction  $F(r)$  devient infinie comme  $\frac{1}{r}$ ; que  $\frac{dF(r)}{dr}$  devient infini comme  $\frac{1}{r^2}$  et que  $\frac{d^2F(r)}{dr^2}$  devient infini comme  $\frac{1}{r^3}$ . Ces hypothèses faites, nous pourrions, en calquant les démonstrations dont on fait usage pour l'étude de la fonction potentielle, établir les propositions suivantes :

1° La quantité  $\Theta$  existe, est finie et continue en tous les points de l'espace, pourvu que la densité  $k$  de la matière soit finie en tous les points de l'espace;

2° Si  $x, y, z$  sont les coordonnées rectangulaires d'un point de l'espace et si la condition précédente est encore remplie, les dérivées partielles du premier ordre  $\frac{\partial \Theta}{\partial x}, \frac{\partial \Theta}{\partial y}, \frac{\partial \Theta}{\partial z}$  existent et sont finies en tous les points de l'espace; elles sont exprimées par les égalités

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Theta}{\partial x} = - \iiint \frac{dF(r)}{dr} \frac{x' - x}{r} k dx' dy' dz', \\ \frac{\partial \Theta}{\partial y} = - \iiint \frac{dF(r)}{dr} \frac{y' - y}{r} k dx' dy' dz', \\ \frac{\partial \Theta}{\partial z} = - \iiint \frac{dF(r)}{dr} \frac{z' - z}{r} k dx' dy' dz, \end{cases}$$

$k$  étant la densité de la matière au point  $(x', y', z')$  et les sommations s'étendant à tous les éléments de volume  $dx' dy' dz'$  compris à l'intérieur de la sphère de rayon  $\mu$  ayant pour centre le point  $(x, y, z)$ .

Pour démontrer, sous certaines conditions, l'existence des dérivées secondes de la fonction  $\Theta$ , il est nécessaire de modifier légèrement la démonstration adoptée dans l'étude de la fonction potentielle; la nécessité de cette modification provient de ce que la fonction  $F(r)$  ne dépend pas seulement de  $r$ , mais encore de l'état de la matière au point  $(x', y', z')$ . Cet état est défini par la densité  $k$  et par un certain nombre d'autres paramètres  $\alpha, \beta, \dots$ . Nous mettrons en évidence ce fait que  $F$  dépend non seulement de  $r$ , mais encore de  $k, \alpha, \beta, \dots$  en remplaçant le symbole  $F(r)$  par le symbole  $F(r, k, \alpha, \beta, \dots)$ . A l'égard de cette dernière quantité, nous admettrons l'existence des dérivées partielles du premier ordre  $\frac{\partial F}{\partial k}, \frac{\partial F}{\partial \alpha}, \frac{\partial F}{\partial \beta}, \dots$ . Nous admettrons, en outre, que les pa-

ramètres  $k, \alpha, \beta, \dots$  qui définissent l'état de la matière au point  $(x', y', z')$  varient d'une manière continue avec  $x', y', z'$  et admettent des dérivées partielles du premier ordre par rapport à  $x', y', z'$ , au moins dans un certain domaine fini entourant le point  $(x', y', z')$ . Moyennant ces conditions, auxquelles nous aurons à joindre une dernière restriction indiquée par la suite même du raisonnement, nous allons démontrer l'existence des quantités

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Cherchons, par exemple, à démontrer l'existence des trois premières. Envisageons, pour cela, la première des égalités (3) :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = - \iiint \frac{dF(r)}{dr} \frac{x' - x}{r} k \, dx' \, dy' \, dz'.$$

La sommation s'étend à tous les éléments de volume de la sphère de rayon  $\mu$  ayant pour centre le point  $(x, y, z)$ . Une partie de cette sphère peut être extérieure au domaine fini, situé autour du point  $(x, y, z)$ , à l'intérieur duquel les quantités  $k, \alpha, \beta, \gamma, \dots$  sont des fonctions continues de  $x', y', z'$  et admettent des dérivées partielles du premier ordre par rapport à ces variables. Désignons par  $\Sigma$  cette partie de la sphère, égale à 0 peut-être, qui se trouve en dehors du domaine du point  $(x, y, z)$  et par  $\Omega$  la partie de la sphère intérieure au même domaine. Nous aurons

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = - \iiint_{\Sigma} \frac{dF(r)}{dr} \frac{x' - x}{r} k \, dx' \, dy' \, dz' - \iiint_{\Omega} \frac{dF(r)}{dr} \frac{x' - x}{r} k \, dx' \, dy' \, dz',$$

chacune des deux sommations s'étendant à tous les éléments du volume mis en indice.

Le premier des deux termes qui figurent au second membre admet certainement des dérivées partielles par rapport à  $x, y, z$ . Ces dérivées

partielles s'obtiennent par les règles connues de la différentiation des intégrales. Une région de la surface qui limite le champ d'intégration, à savoir la portion de surface sphérique située hors du domaine du point  $(x, y, z)$ , varie, il est vrai, en même temps que les coordonnées  $x, y, z$  de ce point. Mais, comme la quantité  $\frac{dF(r)}{dr}$  est égale à 0 en tous les points de cette surface limite, la variation de cette limite est sans influence sur la valeur de la dérivée. Si donc nous désignons par  $\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)_1$  le premier terme de  $\frac{\partial\Theta}{\partial x}$ , nous aurons

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)_1 = \iiint_{\Sigma} \left\{ \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} \right] \frac{(x' - x)^2}{r} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} \right\} k \, dx' dy' dz', \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)_1 = \iiint_{\Sigma} \left\{ \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} \right] \frac{(y' - y)(x' - x)}{r} \right\} k \, dx' dy' dz', \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)_1 = \iiint_{\Sigma} \left\{ \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} \right] \frac{(z' - z)(x' - x)}{r} \right\} k \, dx' dy' dz'. \end{cases}$$

Pour démontrer l'existence des dérivées partielles du second terme

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)_2 = - \iiint_{\Omega} \frac{dF(r)}{dr} \frac{x' - x}{r} k \, dx' dy' dz',$$

nous lui ferons subir une transformation fondée sur l'identité

$$\frac{\partial F(r, k, \alpha, \beta, \dots)}{\partial x'} = \frac{\partial F}{\partial r} \frac{x' - x}{r} + \frac{\partial F}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial x'} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x'} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x'} + \dots$$

Cette identité, en effet, permet d'écrire

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)_2 &= - \iiint_{\Omega} \frac{\partial F(r, k, \alpha, \beta, \dots)}{\partial x'} k \, dx' dy' dz' \\ &\quad + \iiint_{\Omega} k \left( \frac{\partial F}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial x'} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x'} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x'} + \dots \right) dx' dy' dz'. \end{aligned}$$

Soit  $d\sigma$  un élément de la surface  $\sigma$  qui limite le volume  $\Omega$ ; soit  $(n_e, x)$  l'angle que la normale à la surface  $\sigma$  en un point de l'élément  $d\sigma$ , dirigée vers l'extérieur du volume  $\Omega$ , fait avec la direction positive de l'axe des  $x$ . Une intégration par parties, effectuée par rapport à  $x$ ,

nous donnera l'identité

$$\begin{aligned} & \int \int \int_{\Omega} \frac{\partial F(r, k, \alpha, \beta, \dots)}{\partial x'} k dx' dy' dz' \\ &= \sum_{\sigma} F k \cos(n_e, x) d\sigma - \int \int \int_{\Omega} F(r, k, \alpha, \beta, \dots) \frac{\partial k}{\partial x} dx' dy' dz'. \end{aligned}$$

Au second membre, la première sommation s'étend à la surface  $\sigma$ . En faisant cette sommation, on doit entendre que  $F$  et  $k$  se rapportent à un point  $(x', y', z')$  de l'élément  $d\sigma$ . L'identité précédente permet d'écrire

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)_2 &= - \sum_{\sigma} F k \cos(n_e, x) d\sigma \\ &+ \int \int \int_{\Omega} \left[ \left( k \frac{\partial F}{\partial k} + F \right) \frac{\partial k}{\partial x'} + k \frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x'} + k \frac{\partial F}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x'} + \dots \right] dx' dy' dz'. \end{aligned}$$

L'intégrale de surface  $\sum_{\sigma}$ , qui figure dans cette égalité, représente la valeur qu'aurait la fonction  $\Theta$  au point  $(x, y, z)$  si l'on supposait la matière exclusivement distribuée sur la surface  $\sigma$  et ayant en chaque point de cette surface une densité superficielle  $k \cos(n_e, x)$ . Cette intégrale admet donc, par rapport à  $x, y, z$ , des dérivées partielles du premier ordre qui ont pour valeur

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{\sigma} F k \cos(n_e, x) d\sigma = - \sum_{\sigma} \frac{dF(r)}{dr} \frac{x' - x}{r} k \cos(n_e, x) d\sigma, \\ \frac{\partial}{\partial y} \sum_{\sigma} F k \cos(n_e, x) d\sigma = - \sum_{\sigma} \frac{dF(r)}{dr} \frac{y' - y}{r} k \cos(n_e, x) d\sigma, \\ \frac{\partial}{\partial z} \sum_{\sigma} F k \cos(n_e, x) d\sigma = - \sum_{\sigma} \frac{dF(r)}{dr} \frac{z' - z}{r} k \cos(n_e, x) d\sigma. \end{cases}$$

Il nous suffit donc de prouver que l'intégrale

$$J = \int \int \int_{\Omega} \left[ \left( k \frac{\partial F}{\partial k} + F \right) \frac{\partial k}{\partial x'} + k \frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x'} + k \frac{\partial F}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x'} + \dots \right] dx' dy' dz'$$

admet des dérivées partielles du premier ordre. Pour le démontrer, il suffira de reproduire la démonstration par laquelle on établit l'existence des dérivées partielles du premier ordre de la fonction potentielle ou de la fonction  $\Theta$ , après toutefois que l'on aura fait voir que les

fonctions  $\frac{\partial F}{\partial k}, \frac{\partial F}{\partial \alpha}, \frac{\partial F}{\partial \beta}, \dots$  deviennent, comme la fonction  $F$ , infinies du même ordre que  $\frac{1}{r}$  pour  $r = 0$ . Ce dernier point est facile à établir moyennant une nouvelle restriction.

En effet, pour des valeurs assez petites de  $r$ , nous pouvons écrire

$$F(r, k, \alpha, \beta, \dots) = \frac{1}{r} G(r, k, \alpha, \beta, \dots),$$

$G$  demeurant fini pour  $r = 0$ , quels que soient  $k, \alpha, \beta, \dots$

De là, nous déduisons

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(r, k, \alpha, \beta, \dots)}{\partial k} &= \frac{1}{r} \frac{\partial G(r, k, \alpha, \beta, \dots)}{\partial k}, \\ \frac{\partial F(r, k, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \alpha} &= \frac{1}{r} \frac{\partial G(r, k, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial F(r, k, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \beta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial G(r, k, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \beta}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

et la question se réduit à prouver que  $\frac{\partial G(0, k, \alpha, \beta, \dots)}{\partial k}, \frac{\partial G(0, k, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \alpha}, \frac{\partial G(0, k, \alpha, \beta, \dots)}{\partial \beta}, \dots$  sont des quantités finies.

C'est cette nouvelle hypothèse que nous introduirons :

Les quantités  $\frac{\partial G}{\partial k}, \frac{\partial G}{\partial \alpha}, \frac{\partial G}{\partial \beta}, \dots$  sont finies pour  $r = 0$ , quelles que soient les valeurs de  $k, \alpha, \beta, \dots$

Moyennant cette nouvelle hypothèse, nous aurons

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial J}{\partial x} = - \int \int \int_{\Omega} \left[ \left( k \frac{\partial^2 F}{\partial k \partial r} + \frac{\partial F}{\partial r} \right) \frac{\partial k}{\partial x'} + k \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial r} \frac{\partial \alpha}{\partial x'} + k \frac{\partial^2 F}{\partial \beta \partial r} \frac{\partial \beta}{\partial x'} + \dots \right] \frac{x' - x}{r} dx' dy' dz', \\ \frac{\partial J}{\partial y} = - \int \int \int_{\Omega} \left[ \left( k \frac{\partial^2 F}{\partial k \partial r} + \frac{\partial F}{\partial r} \right) \frac{\partial k}{\partial x'} + k \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial r} \frac{\partial \alpha}{\partial x'} + k \frac{\partial^2 F}{\partial \beta \partial r} \frac{\partial \beta}{\partial x'} + \dots \right] \frac{y' - y}{r} dx' dy' dz', \\ \frac{\partial J}{\partial z} = - \int \int \int_{\Omega} \left[ \left( k \frac{\partial^2 F}{\partial k \partial r} + \frac{\partial F}{\partial r} \right) \frac{\partial k}{\partial x'} + k \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial r} \frac{\partial \alpha}{\partial x'} + k \frac{\partial^2 F}{\partial \beta \partial r} \frac{\partial \beta}{\partial x'} + \dots \right] \frac{z' - z}{r} dx' dy' dz'. \end{cases}$$

Les égalités (4), (5) et (6), et les égalités analogues qu'on en déduirait en remplaçant  $x$  par  $y$  et  $z$ , démontrent, moyennant les conditions indiquées, l'existence des dérivées secondes de la fonction  $\Theta$  et donnent la valeur de ces dérivées. Ces dérivées s'expriment de la manière

suivante :

$$\begin{aligned}
 (65) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= \iint \int_{\Sigma} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) \frac{(x' - x)^2}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right] k \, dx' dy' dz' \\
 &\quad + \sum_{\sigma} \frac{\partial F}{\partial r} \frac{x' - x}{r} k \cos(n_e, x) \, d\sigma \\
 &\quad - \iint \int_{\Omega} \left[ \left( k \frac{\partial^2 F}{\partial k \partial r} + \frac{\partial F}{\partial r} \right) \frac{\partial k}{\partial x'} + k \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial r} \frac{\partial \alpha}{\partial x'} + k \frac{\partial^2 F}{\partial \beta \partial r} \frac{\partial \beta}{\partial x'} + \dots \right] \frac{x' - x}{r} dx' dy' dz', \\
 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} &= \iint \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) \frac{(x' - x)(y' - y)}{r} k \, dx' dy' dz' \\
 &\quad + \sum_{\sigma} \frac{\partial F}{\partial r} \frac{y' - y}{r} k \cos(n_e, x) \, d\sigma \\
 &\quad - \iint \int_{\Omega} \left[ \left( k \frac{\partial^2 F}{\partial k \partial r} + \frac{\partial F}{\partial r} \right) \frac{\partial k}{\partial x'} + k \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial r} \frac{\partial \alpha}{\partial x'} + k \frac{\partial^2 F}{\partial \beta \partial r} \frac{\partial \beta}{\partial x'} + \dots \right] \frac{y' - y}{r} dx' dy' dz', \\
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où le domaine qui entoure le point  $(x, y, z)$  et dans lequel les quantités  $k, \alpha, \beta, \dots$  admettent des dérivées partielles, enveloppe entièrement la sphère de rayon  $\mu$  qui a le point  $(x, y, z)$  pour centre, ces dérivées prennent une forme particulièrement simple. En effet, dans ce cas, le domaine  $\Sigma$  s'évanouit et, avec lui, les intégrales triples qui s'y rapportent. Le volume  $\Omega$  coïncide avec le volume de la sphère. La surface  $\sigma$  devient identique avec la surface de la sphère, et, comme aux divers points de la surface de la sphère on a  $\frac{\partial F}{\partial r} = 0$ , les intégrales relatives à cette surface s'évanouissent. Si donc

on reprend l'usage de la fonction  $f = -\frac{\partial F}{\partial r}$ , on aura

$$\begin{aligned}
 (7 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= \iint \int \left[ \left( k \frac{\partial f}{\partial k} + f \right) \frac{\partial k}{\partial x'} + k \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x'} + k \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x'} + \dots \right] \frac{x' - x}{r} dx' dy' dz', \\
 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= \iint \int \left[ \left( k \frac{\partial f}{\partial k} + f \right) \frac{\partial k}{\partial y'} + k \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y'} + k \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial y'} + \dots \right] \frac{y' - y}{r} dx' dy' dz', \\
 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= \iint \int \left[ \left( k \frac{\partial f}{\partial k} + f \right) \frac{\partial k}{\partial z'} + k \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial z'} + k \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial z'} + \dots \right] \frac{z' - z}{r} dx' dy' dz', \\
 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} &= \iint \int \left[ \left( k \frac{\partial f}{\partial k} + f \right) \frac{\partial k}{\partial y'} + k \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y'} + k \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial y'} + \dots \right] \frac{z' - z}{r} dx' dy' dz', \\
 &= \iint \int \left[ \left( k \frac{\partial f}{\partial k} + f \right) \frac{\partial k}{\partial z'} + k \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial z'} + k \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial z'} + \dots \right] \frac{y' - y}{r} dx' dy' dz',
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

toutes les sommations s'étendant aux divers éléments de volume  $dx' dy' dz'$  de la sphère de centre  $(x, y, z)$  et de rayon  $\mu$ .

§ III. — Distribution de l'électricité en équilibre sur un système de conducteurs.

3. De ce qui précède, il résulte que la quantité

$$\Delta\Theta = \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}$$

a une valeur finie en tout point autour duquel on peut tracer un domaine jouissant des propriétés que nous avons définies au n° 2. D'ailleurs, dans l'état d'équilibre, on a, en tous les points d'un même conducteur,

$$(8) \quad \varepsilon V + \Theta = \text{const.}$$

D'autre part, si l'on désigne par  $\rho$  la densité de l'électricité au point  $(x, y, z)$ , on a, que l'équilibre soit établi ou non,

$$\Delta V = -4\pi\rho.$$

On a donc, dans l'état d'équilibre,

$$(9) \quad \Delta\Theta = 4\pi\varepsilon\rho.$$

Cette égalité (9) permet de déterminer la quantité d'électricité qui existe en chaque point à l'intérieur d'un conducteur en équilibre, lorsqu'on connaît la constitution du conducteur à l'intérieur d'une sphère de rayon  $\mu$  ayant pour centre le point considéré.

Considérons un conducteur formé de deux substances différentes, A et B, en contact l'un avec l'autre tout le long d'une surface (A, B). Cherchons quelle est, dans l'état d'équilibre, la distribution de l'électricité au voisinage de la surface (A, B).

Chacune des deux substances A et B est homogène si l'on envisage seulement les points situés à une distance des surfaces qui la limitent supérieure à  $\lambda$ ,  $\lambda$  étant, comme  $\mu$ , une quantité fort petite, dont la considération intervient dans l'étude des phénomènes capillaires. Au voisinage des surfaces qui limitent chacune des deux substances, la

constitution de ces substances varie; la nature de ces variations dépend de la nature de la substance en laquelle elles se produisent et aussi de la nature de la substance limitrophe. Par exemple, la constitution que présente la substance A en un point situé à une distance  $l$ , inférieure à  $\lambda$ , de la surface (A, B), dépend de la valeur de  $l$ , de la nature de la substance A et de l'état qu'elle présente à une distance supérieure à  $\lambda$  des surfaces qui la limitent, et aussi de la nature de la substance B et de l'état qu'elle présente à une distance supérieure à  $\lambda$  des surfaces qui la limitent. Par conséquent, le long d'une surface parallèle à la surface (A, B), les paramètres  $k, \alpha, \beta, \dots$ , qui déterminent la constitution du conducteur en un point, garderont des valeurs constantes; ils varieront lorsqu'on passe d'une surface parallèle à (A, B) à une autre si la distance de ces surfaces à la surface (A, B) est inférieure à  $\lambda$ . Ces diverses propositions ne sont que l'énoncé des hypothèses fondamentales sur lesquelles repose la théorie des phénomènes capillaires (<sup>1</sup>).

On voit aisément, d'après ces propositions, que la quantité  $\Theta$ , constante en tous les points intérieurs à la substance A et situés à une distance supérieure à  $(\lambda + \mu)$  des surfaces qui limitent A, a une valeur variable à l'intérieur d'une couche d'épaisseur  $(\lambda + \mu)$  entourant A. En un point situé à l'intérieur de la substance A à une distance  $l$ , inférieure à  $(\lambda + \mu)$ , de la surface (A, B),  $\Theta$  a une certaine valeur qui dépend uniquement de  $l$  et de l'état que les corps A et B présentent loin des surfaces qui les limitent. La forme de la surface (A, B) n'intervient pas dans la valeur de  $\Theta$  si les rayons de courbure de cette surface au voisinage du point considéré sont supposés très grands par rapport à  $\mu$ . Nous désignerons la valeur de  $\Theta$ , dont nous venons de parler, par le symbole  $\Theta(A, B, l)$ . Les surfaces parallèles à la surface (A, B) seront des surfaces où  $\Theta$  aura une valeur constante.

Les paramètres  $k, \alpha, \beta, \dots$ , qui déterminent l'état du corps A en un point, varient, comme nous l'avons vu, au voisinage de la surface (A, B). Nous admettrons que cette variation a lieu d'une manière continue, et que les paramètres  $k, \alpha, \beta, \dots$  admettent, en tous points autres

---

(<sup>1</sup>) *Applications de la Thermodynamique aux phénomènes capillaires (Annales de l'École Normale supérieure, 3<sup>e</sup> série, t. II, p. 207; 1885).*

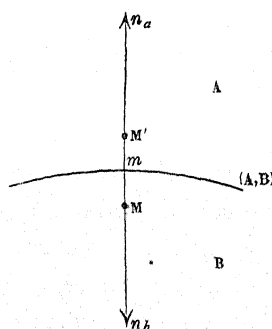


que ceux de la surface (A, B), des dérivées partielles du premier ordre. Nous serons alors assurés de l'existence de la quantité  $\Delta\theta$  en tout point du corps A et nous pourrons faire usage de l'égalité (9). L'égalité (9) nous montrera que, dans l'état d'équilibre, la densité  $\rho$ , nulle en tous les points du conducteur A situés à une distance supérieure à  $(\lambda + \mu)$ , des surfaces qui limitent ce conducteur, cesse d'être égale à 0 aux points plus rapprochés des surfaces terminales. En un point du corps A, dont la distance  $l$  à la surface (A, B) est inférieure à  $(\lambda + \mu)$ ,  $\rho$  a une valeur qui dépend de  $l$  et de l'état que les corps A et B présentent loin des surfaces terminales. Nous désignerons cette valeur par  $\rho(A, B, l)$ . En tous les points d'une même surface parallèle à (A, B),  $\rho$  a la même valeur.

Des considérations semblables s'appliquent aux points du corps B voisins du corps A. Elles cessent de s'appliquer aux points mêmes de la surface (A, B), car en ces points  $k, \alpha, \beta, \dots$  sont discontinus, en sorte que l'on n'est plus assuré de l'existence de  $\Delta\theta$ . Existe-t-il sur cette surface une distribution d'électricité correspondant à une densité superficielle finie en chaque point?

Soit M un point du corps A infiniment voisin de la surface (A, B);

Fig. 1.



soit M' un point du corps B infiniment voisin de la surface (A, B) et du point M, situé avec ce dernier sur une même normale à la surface (A, B); soit  $m$  le point où cette normale rencontre la surface (A, B) (*fig. 1*); soit  $V$  la valeur de la fonction potentielle au point M; soit  $V'$  sa valeur au point M'; soit  $n_a$  la direction de la normale  $mM$ ; soit

$n_b$  la direction de la normale  $mM'$ . La densité superficielle  $\rho$  au point  $m$  est donnée par l'égalité

$$\frac{\partial V}{\partial n_a} + \frac{\partial V'}{\partial n_b} = -4\pi\rho.$$

Soient  $\Theta$  la valeur de  $\Theta$  au point  $M$  et  $\Theta'$  sa valeur au point  $M'$ . On a, en vertu de l'égalité (8),

$$\varepsilon V + \Theta = \text{const.},$$

$$\varepsilon V' + \Theta' = \text{const.}$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial V}{\partial n_a} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Theta}{\partial n_a},$$

$$\frac{\partial V'}{\partial n_b} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Theta'}{\partial n_b},$$

en sorte que l'égalité précédente devient

$$\frac{\partial \Theta}{\partial n_a} + \frac{\partial \Theta'}{\partial n_b} = 4\pi\varepsilon\rho.$$

Mais, si la densité de chacun des deux corps est finie, même aux points infiniment voisins de la surface (A, B), les dérivées partielles du premier ordre de  $\Theta$  sont continues même aux points de la surface (A, B); pour le démontrer, il suffit de reprendre le raisonnement par lequel on établit la continuité des dérivées partielles du premier ordre de la fonction potentielle. On a donc

$$\frac{\partial \Theta}{\partial n_a} = -\frac{\partial \Theta'}{\partial n_b}$$

et, par conséquent,

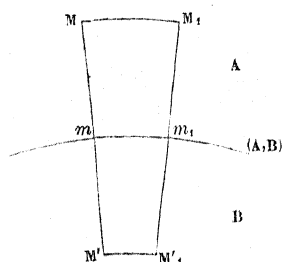
$$\rho = 0.$$

*Il n'y a pas d'électricité distribuée sur la surface de contact de deux corps conducteurs de nature différente.*

Sur la surface (A, B), prenons un élément  $mm_1$ , d'aire  $d\sigma$  (fig. 2). Par les divers points du contour de cet élément menons des normales à la surface (A, B). Ces normales engendrent une surface cylindrique qui limite un canal infiniment délié. Limitons ce canal de part et d'autre de l'élément  $d\sigma$  par deux sections droites, l'une  $MM_1$ , à l'intérieur du corps A, l'autre  $M'M'_1$ , à l'intérieur du corps B, toutes deux

situées à une distance supérieure à  $(\lambda + \mu)$  de la surface  $(A, B)$ . Nous formons ainsi un petit volume qui renferme à son intérieur une certaine quantité d'électricité  $Q$ . Sur la surface qui enferme ce petit volume, prenons un élément superficiel  $ds$ . Soit  $V$  la valeur de la fonction

Fig. 2.



potentielle en un point de cet élément; soit  $n$  la normale à cet élément  $ds$ , dirigée vers l'extérieur de la surface fermée. On a

$$\sum \frac{\partial V}{\partial n} ds = -4\pi Q,$$

la sommation s'étendant à la surface fermée tout entière, ou bien, à cause de l'égalité (8),

$$\sum \frac{\partial \Theta}{\partial n} ds = 4\pi \varepsilon Q.$$

Il est aisé de voir que le premier membre de cette égalité a pour valeur 0. En effet, si l'élément  $ds$  est pris sur les parois latérales du canal, on a  $\frac{\partial \Theta}{\partial n} = 0$ , parce que les génératrices du canal sont normales aux surfaces parallèles à  $(A, B)$ , le long desquelles est vérifiée l'égalité  $\Theta = \text{const.}$  Si l'élément  $ds$  est pris sur l'une des deux sections  $MM_1$ ,  $M'M'_1$ , on a encore  $\frac{\partial \Theta}{\partial n} = 0$ , parce que, à une distance  $(\lambda + \mu)$  de la surface  $(A, B)$ ,  $\Theta$  devient invariable. On a donc

$$Q = 0.$$

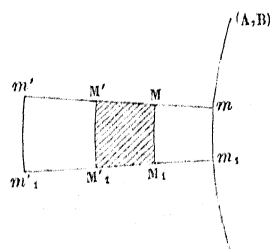
*Ainsi un petit volume, composé comme nous venons de l'indiquer, renferme autant d'électricité positive que d'électricité négative. Cette pro-*

priété, découverte par M. H. von Helmholtz <sup>(1)</sup>, a fait donner le nom de *couche double* <sup>(2)</sup> à l'électricité qui s'accumule, dans l'état d'équilibre, au voisinage de la surface de séparation de deux substances de nature différente. Les considérations que nous venons d'exposer précisent la constitution d'une semblable couche double.

L'expression du potentiel thermodynamique, donnée par l'égalité (2), renferme la quantité  $\sum \Theta Q$ , dans laquelle la sommation s'étend à toutes les charges  $Q$  du système. Évaluons la partie de cette somme qui provient des charges  $Q$  formant une couche double au voisinage de la surface de contact de deux conducteurs.

Sur la surface  $(A, B)$ , prenons un élément  $mm_1$ , d'aire  $ds$  (*fig. 3*).

Fig. 3.



Par tous les points du contour de cet élément, menons des normales vers l'intérieur du corps A. Coupons le canal infiniment délié ainsi formé par deux surfaces  $MM_1$ ,  $M'M'_1$ , parallèles à  $(A, B)$  et situées à des distances  $l$  et  $(l + dl)$  de  $(A, B)$ . Ces deux surfaces découpent dans le canal un élément de volume  $dl ds$ . La densité électrique en un point de cet élément est, d'après l'égalité (9),

$$\rho(A, B, l) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \Delta \Theta(A, B, l).$$

<sup>(1)</sup> H. HELMHOLTZ, *Ueber einige Gesetze der Vertheilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern mit Anwendungen auf die thierisch-electrischen Versuche* (Pogg. Ann., Bd. LXXXIX, p. 226 (1853); *Helmholtz wissenschaftliche Abhandlungen*, t. I. p. 489).

<sup>(2)</sup> M. Helmholtz la nomme *elektrische Doppelschicht* ou *Grenzschicht*; *loc. cit.* et *Studien über elektrische Grenzschichten* (Wied. Ann., Bd. VII, p. 337 (1879); *Wissenschaft. Abhandl.*, t. I, p. 855).

L'élément renferme donc une quantité d'électricité

$$Q = \frac{1}{4\pi\epsilon} \Delta \Theta(A, B, l) dl ds.$$

La quantité  $\Theta$  a en un point de cet élément la valeur  $\Theta(A, B, l)$ . Limitons le canal par une surface  $m'm'_1$ , parallèle à  $(A, B)$ , située à l'intérieur du corps A à une distance  $(\lambda + \mu)$  de  $(A, B)$ . La quantité  $\sum \Theta Q$  relative à toutes les charges renfermées dans le volume  $mm_1m'm'_1$  aura pour valeur

$$\frac{ds}{4\pi\epsilon} \int_0^{\lambda+\mu} \Theta(A, B, l) \Delta \Theta(A, B, l) dl.$$

Si l'on désigne par  $\alpha_{AB}$  une quantité qui dépend uniquement de l'état que les deux corps A et B présentent loin des surfaces terminales, on pourra poser

$$(10) \quad \alpha_{AB} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_0^{\lambda+\mu} \Theta(A, B, l) \Delta \Theta(A, B, l) dl,$$

et la partie de  $\sum \Theta Q$  qui provient de la couche double accumulée au voisinage de la surface de contact des deux corps conducteurs A, B aura pour valeur

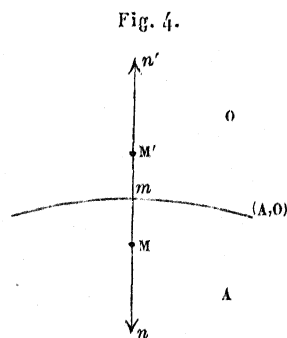
$$(\alpha_{AB} + \alpha_{BA}) \theta_{AB},$$

$\theta_{AB}$  étant l'aire de la surface  $(A, B)$ . Il faut bien observer que ce résultat, dont la démonstration repose sur l'emploi de l'égalité (8), suppose l'équilibre électrique établi sur le conducteur.

On peut d'une manière analogue étudier la constitution de la couche électrique qui se forme dans un corps conducteur au contact d'un corps isolant; mais il convient de préciser ce que nous entendrons ici par *corps isolant*. Nous appellerons *corps isolant* un milieu homogène, invariable, incapable de livrer passage à l'électricité et ne renfermant jamais aucune charge électrique à son intérieur. Un semblable milieu s'écarte certainement beaucoup des corps isolants que nous présente la nature et des milieux diélectriques que les physiciens ont imaginés pour représenter les propriétés des isolants naturels. Il n'est même pas certain que le vide jouisse des propriétés attribuées à ce milieu.

Mais, lors même que la conception d'un semblable milieu ne serait qu'une pure conception mathématique, il y aurait encore intérêt à étudier les phénomènes que présenteraient des conducteurs placés dans un semblable milieu, ne serait-ce que pour reconnaître en quoi ces phénomènes se distinguent des phénomènes que présentent des conducteurs plongés soit dans des diélectriques, soit dans des isolants naturels.

Soit A un corps conducteur placé dans un isolant idéal que nous désignerons par l'indice  $\epsilon$ . On peut démontrer que, comme dans le cas précédent, il existe de l'électricité dans toute la partie du conducteur A située à une distance inférieure à  $(\lambda + \mu)$  de la surface (A,  $\epsilon$ ); mais, de plus, il existe de l'électricité distribuée sur la surface (A,  $\epsilon$ ) elle-même. Si nous prenons un point  $m$  sur la surface (A,  $\epsilon$ ) (*fig. 4*)



et sur la normale menée par le point  $m$  à la surface (A,  $\epsilon$ ) deux points infiniment voisins du point  $m$ , l'un M à l'intérieur du corps A, l'autre  $M'$  à l'intérieur de l'isolant  $\epsilon$ ; si nous désignons par  $n$  et  $n'$  les directions  $mM$  et  $mM'$ , par  $V$  et  $V'$  les valeurs de la fonction potentielle en M et  $M'$ , la densité électrique superficielle  $\sigma$  au point  $m$  sera donnée par l'égalité

$$\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V'}{\partial n'} = -4\pi\sigma.$$

Mais, au point M, on a

$$\epsilon V + \Theta = \text{const.}$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \Theta}{\partial n}.$$

On a donc

$$(11) \quad \sigma = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\partial \Theta(A, o, o)}{\partial n} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial V'}{\partial n'}.$$

Le premier terme de cette expression

$$(12) \quad \delta_{AO} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\partial \Theta(A, o, o)}{\partial n}$$

représente une densité électrique qui dépend uniquement de la nature des deux corps A et o. Nous nommerons cette densité la *densité de la couche électrique naturelle de la surface* (A, o).

Le second terme de l'égalité (11)

$$(13) \quad \Delta = - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial V'}{\partial n'}$$

peut, pour un conducteur donné A et pour un isolant donné o, varier d'un point à un autre de la surface (A, o) et varier aussi au même point suivant les circonstances. Il représente la *densité de la couche électrique communiquée à la surface* (A, o).

Déterminons la valeur de la quantité  $\sum \Theta Q$  relative à toutes les charges électriques distribuées soit à l'intérieur du corps A au voisinage de la surface (A, o), soit sur la surface (A, o) elle-même.

Pour les charges distribuées à l'intérieur du corps A, la quantité  $\sum \Theta Q$  a pour valeur

$$\alpha_{AO} \theta_{AO},$$

$\alpha_{AO}$  étant défini par une égalité analogue à l'égalité (10), qui définit  $\alpha_{AB}$ , et  $\theta_{AO}$  étant l'aire de la surface (A, o).

Pour les charges distribuées sur la surface (A, o) elle-même,  $\sum \Theta Q$  a la valeur  $\int \Theta(A, o, o) \sigma d\theta_{AO}$ , la sommation s'étendant à tous les éléments  $d\theta_{AO}$  de la surface (A, o). Si l'on remplace  $\sigma$  par sa valeur (11) et si l'on pose

$$(14) \quad \alpha'_{AO} = \Theta(A, o, o) \delta_{AO},$$

on aura

$$\int \Theta(A, o, o) \sigma d\theta_{AO} = \alpha'_{AO} \theta_{AO} + \Theta(A, o, o) \int \Delta d\theta_{AO}.$$

En résumé, si l'on considère un système formé de  $n$  conducteurs désignés par les indices  $1, 2, \dots, p, \dots, n$ , en contact entre eux et avec un milieu isolant  $0$ , lorsque l'équilibre électrique sera établi sur ce système de conducteurs, on aura, pour tout le système,

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum \Theta Q &= \sum_{p=1}^{p=n} \left[ (\alpha_{p0} + \alpha'_{p0}) \theta_{p0} + \Theta(p, 0, 0) S \Delta d\theta_{p0} + \sum_q \alpha_{pq} \theta_{pq} \right] \\ (q &= 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n). \end{aligned} \right.$$

## CHAPITRE II.

### DE LA PRESSION ÉLECTRIQUE DANS LE CAS OU L'ÉQUILIBRE ÉLECTRIQUE EST ÉTABLI SUR DES CONDUCTEURS.

#### § I. — Historique.

1. Les principes établis au Chapitre I vont nous permettre d'aborder l'étude des changements de forme ou de volume que subit un conducteur électrisé. Cette application nous conduira à des conséquences fort différentes des idées généralement admises sur la pression électrostatique. Rappelons tout d'abord, dans un exposé rapide, en quoi consistent ces idées.

Depuis l'origine de l'Électrostatique théorique, on a admis qu'en un point de la surface d'un conducteur chargé d'électricité s'exerçait une pression dirigée vers l'extérieur du conducteur et donnée par l'égalité

$$(1) \quad F = 2\pi\epsilon\Delta^2,$$

$\Delta$  étant la densité électrique au point considéré.

Cette pression doit produire des déformations dans les corps électrisés. Déjà, à l'époque de Volta, Fontana <sup>(1)</sup> avait observé que le

<sup>(1)</sup> Cité dans une Lettre de Volta au professeur Landriani (*Lettere inedite di Alessandro Volta*, imprimées à Pesaro en 1831, pp. 30 et seqq.).



volume d'un condensateur augmente à la suite de l'électrisation, augmentation que Volta attribua à la pression électrique.

Plus récemment, M. Volpicelli <sup>(1)</sup> retrouva le phénomène découvert par Fontana, puis M. Govi <sup>(2)</sup> en constata de nouveau l'existence.

M. Duter <sup>(3)</sup> montra que le volume interne d'une bouteille de Leyde sphérique augmente pendant la charge d'une quantité proportionnelle au carré de la différence de niveau potentiel qui existe entre les deux armatures et à l'inverse de la distance des deux armatures. M. Righi <sup>(4)</sup> prouva, par ses expériences, que l'allongement d'une bouteille de verre cylindrique suivait une loi analogue.

Les déformations subies par les corps électrisés ont été ensuite l'objet d'un grand nombre de recherches expérimentales, parmi lesquelles il convient surtout de citer celles de M. Quincke <sup>(5)</sup>.

M. Duter avait été tenté d'attribuer les phénomènes de dilatation électrique à une propriété toute nouvelle de l'électricité, propriété non comprise dans les lois de Coulomb : « Si les changements de volume observés, dit-il, étaient dus à la pression électrique, ils ne seraient pas en raison inverse de  $e$ , mais en raison inverse de  $e^2$ ; il est d'ailleurs facile de calculer l'effet de la pression électrique qui s'exerce sur les deux faces des bouteilles de Leyde sphériques... Ainsi la pression électrique n'est pas la cause du phénomène, et l'on se trouve en présence d'une propriété nouvelle de l'électricité. »

M. Righi émit le premier l'hypothèse que les changements de volume éprouvés par un diélectrique chargé d'électricité étaient dus aux forces qui, en vertu des lois de Coulomb, se développaient à l'intérieur d'un milieu polarisé. Un grand nombre de physiciens, adoptant cette manière de voir, développèrent la théorie des actions internes auxquelles est soumis un milieu polarisé et parvinrent à retrouver théoriquement les lois des déformations des diélectriques électrisés. Parmi

(1) VOLPICELLI, *Archives de Genève*, t. XXXII, p. 323; 1856.

(2) GOVI, *Nuovo Cimento*, t. XXI, p. 18; 1866.

(3) DUTER, *De la dilatation électrique des armatures des bouteilles de Leyde* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVIII, p. 1260; 1879).

(4) RIGHI, *Sur la dilatation électrique des condensateurs pendant la charge* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVIII, p. 1262; 1879).

(5) QUINCKE, *Wiedemann's Annalen*, t. X, p. 161; 1880.

ces travaux, citons ceux de sir W. Thomson <sup>(1)</sup>, de Cl. Maxwell <sup>(2)</sup>, de M. Korteweg <sup>(3)</sup>, de M. Boltzmann <sup>(4)</sup>, de M. H. von Helmholtz <sup>(5)</sup>, de M. Lorberg <sup>(6)</sup>, de G. Kirchhoff <sup>(7)</sup> et de M. E. Mathieu <sup>(8)</sup>.

Nous ne nous occuperons pas ici du cas traité par tous les physiiciens que nous venons de nommer, c'est-à-dire du cas des diélectriques. Nous nous limiterons à l'étude des déformations électriques des corps conducteurs.

Le premier travail qui ait été fait dans cette voie est dû à M. J. Moutier <sup>(9)</sup>. Admettant que les forces qui agissent au sein d'un conducteur électrisé se composent, d'une part, des actions mutuelles des molécules matérielles, d'autre part, des actions qui s'exercent, en vertu des lois de Coulomb, entre les particules électrisées, il appliqua à un système ainsi constitué le théorème du viriel découvert par M. Clausius, et parvint à la proposition suivante :

*L'augmentation de volume qu'un conducteur subit par le fait de l'électrisation est égale au quotient du potentiel électrostatique de ce corps par le triple de son coefficient de compressibilité cubique.*

(1) SIR W. THOMSON, *Cambridge mathematical Journal*, may 1843; *Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism*, art. VIII, p. 147.

(2) CL. MAXWELL, *Treatise of Electricity and Magnetism*, vol. I.

(3) KORTEWEG, *Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 338 (1879); *Wiedemann's Annalen*, Bd. IX, p. 48.

(4) BOLTZMANN, *Zur Theorie der sogenannten elektrischen Ausdehnung oder Elektrostriction* (*Sitzungsberichte der K. Akad. der Wiss. zu Wien*, 4 nov. 1880 et 2 déc. 1880. — *Wien.-Anz.*, t. XXIII, p. 211; 1880).

(5) H. HELMHOLTZ, *Ueber die auf das Innere magnetisch oder dielektrisch polarisirter Körper wirkenden Kräfte* [*Wiedemann's Annalen*, Bd. XIII, p. 385, 406 (1881); *Monatsber. der Berliner Akademie*, 17 février 1881; *Wiss. Abhandl.*, t. I, p. 798].

(6) LORBERG, *Ueber Elektrostriction* [*Wiedemann's Annalen*, Bd. XXI, p. 900 (février 1884)].

(7) G. KIRCHHOFF, *Ueber die Formänderung, die ein fester elastischer Körper erfährt, wenn er magnetisch oder dielektrisch polarisirt wird* (*Sitzungsberichte der Berliner Akademie*, 1884, I, p. 137.) — *Ueber einigen Anwendungen der Theorie der Formänderung welche ein Körper erfährt, wenn er magnetisch oder dielektrisch polarisirt wird* (*ibid.*, t. II, p. 1155; 1884).

(8) E. MATHIEU, *Traité du potentiel et de ses applications*, II<sup>e</sup> Partie.

(9) J. MOUTIER, *Sur le volume des corps électrisés* (*Bulletin de la Société philomathique*, 7<sup>e</sup> série, t. III, p. 88; 1878); *Sur la dilatation électrique* (*ibid.*, t. IV, p. 182; 1882).

Ce théorème conduit à cette conséquence que le volume compris entre les armatures métalliques d'un condensateur sphérique subit, par le fait de l'électrisation, une augmentation proportionnelle au carré de la différence de niveau du potentiel qui existe entre les deux armatures et inversement proportionnelle à la distance des deux armatures. C'est une loi entièrement analogue à celle qui a été trouvée expérimentalement par M. Duter.

Dans la démonstration de son théorème, M. Moutier admet implicitement deux hypothèses; il suppose en premier lieu qu'il n'y a pas lieu de tenir compte, dans l'expression du viriel, d'actions mutuelles de la matière et de l'électricité, analogues à celles auxquelles M. Helmholtz a eu recours pour expliquer les différences de niveau potentiel au contact de deux substances différentes; il admet, en second lieu, que l'on pourrait conserver au conducteur la forme qu'il a lorsqu'il est électrisé en le ramenant à l'état neutre et en appliquant sur toute sa surface une pression normale et uniforme.

Cette dernière hypothèse n'est évidemment pas réalisée en général; on ne peut être certain *a priori* qu'elle est réalisée que dans le cas où le conducteur est limité par des surfaces sphériques; mais, dans ce cas, la proposition de M. Moutier est identique à celle que l'on obtiendrait en supposant que l'électrisation équivaut à l'existence d'une pression donnée par l'égalité (1). On peut donc dire que la théorie de M. Moutier revient à la théorie de Volta, ou, si l'on préfère, qu'elle justifie le nom de *pression électrique* donné à la quantité (1).

La démonstration donnée par M. Moutier du théorème énoncé plus haut repose sur l'emploi du théorème du viriel et n'est par conséquent pas indépendante de toute hypothèse sur la nature de la chaleur. Nous avons donné une démonstration de ce théorème, sauve de toute hypothèse de ce genre, en substituant au viriel le potentiel thermodynamique (1). Sauf en ce point, notre démonstration repose sur des hypothèses analogues à celles qui ont été faites par M. Moutier.

---

(1) *Le potentiel thermodynamique et ses applications*, III<sup>e</sup> Partie, Chap. II.

## § II. — Détermination des conditions d'équilibre.

Dans ce qui va suivre, nous nous proposons de reprendre d'une manière plus complète la théorie des changements de forme que les conducteurs éprouvent à la suite de l'électrisation. Nous serons ainsi conduits à définir d'une manière précise ce que l'on doit entendre par *pression électrique*. Nous verrons ensuite de quelle importance sont les résultats ainsi obtenus pour la discussion de quelques questions d'Électrostatique.

Nous commencerons, pour éviter certaines difficultés, par supposer que le système que nous considérons est formé par un certain nombre de fluides conducteurs, en contact les uns avec les autres, dont nous chercherons les conditions d'équilibre. Nous verrons ensuite comment les résultats obtenus peuvent être généralisés. Dans la recherche des conditions d'équilibre, nous suivrons une marche analogue à celle que nous avons suivie en un autre endroit <sup>(1)</sup> dans l'étude de l'équilibre des fluides à l'état neutre, voie qui nous a conduit à des résultats nouveaux touchant la pression capillaire.

Considérons un système quelconque, porté à une température constante  $T$ , dont nous désignerons l'énergie interne par  $U$  et l'entropie par  $S$ . Si nous posons

$$(2) \quad \mathcal{F} = E(U - TS),$$

$E$  étant l'équivalent mécanique de la chaleur, le travail non compensé qui accompagne une modification isothermique virtuelle de ce système aura pour valeur

$$\delta \mathcal{C} = -\delta \mathcal{F} + \delta \mathcal{S},$$

$\delta \mathcal{S}$  étant le travail effectué durant cette modification par les forces extérieures qui sollicitent le système.

On obtient les conditions d'équilibre de ce système en écrivant que, pour toute modification isothermique virtuelle, ce travail non com-

---

<sup>(1)</sup> *Applications de la Thermodynamique aux phénomènes capillaires (Annales de l'École Normale supérieure, 3<sup>e</sup> série, t. II, p. 207).*

pensé est égal à 0, ce qui s'exprime par l'égalité

$$(3) \quad \delta \mathcal{F} = \delta \mathcal{Z}.$$

On démontre <sup>(1)</sup> que l'on a, pour un système de corps électrisés,

$$(4) \quad \mathcal{F} = E(Y - T\Sigma) + W + \sum \Theta Q,$$

$Y$  étant l'énergie interne que posséderait le système, si l'on ramenait à l'état neutre chacun des corps qui le constituent, en laissant à chacun d'eux sa densité et son état physique ou chimique;

$\Sigma$  étant l'entropie que posséderait le système dans les mêmes conditions;

$W$  étant le potentiel électrostatique du système;

$\Theta$  étant une quantité dont l'étude a fait l'objet du Chapitre précédent;

$Q$  étant la charge électrique concentrée au point du système auquel se rapporte la quantité  $\Theta$ ;

le signe  $\sum$  enfin indiquant une sommation qui s'étend à toutes les charges électriques que renferme le système.

L'expression  $E(Y - T\Sigma)$  peut être mise sous une forme plus explicite moyennant une hypothèse que nous allons indiquer.

En général, lorsqu'un fluide est soumis à des forces extérieures, ce fluide n'est pas homogène, sa densité varie d'un point à l'autre. Toutefois, dans bien des cas, ce défaut d'homogénéité est si faible qu'on peut n'en pas tenir compte. C'est ce que nous ferons ici, pour ne pas compliquer outre mesure les égalités, déjà fort longues, dont nous aurons à faire usage. Du reste, on verra, sans autre difficulté que la peine de développer des calculs fort embrouillés, comment il serait possible de s'affranchir de l'approximation ainsi introduite.

Nous supposons donc le système formé par un certain nombre de fluides que nous désignerons par les indices 1, 2, ...,  $p$ , ...,  $n$ . Ces corps sont en contact les uns avec les autres; ils sont environnés par un *isolant parfait*, ce mot étant pris au sens que nous avons défini au Chapitre I; cet isolant parfait est désigné par l'indice 0.

---

(1) *Le potentiel thermodynamique et ses applications*, III<sup>e</sup> Partie, Chap. I.

Chacun des fluides  $1, 2, \dots, p, \dots, n$  est homogène dans toute sa masse, sauf dans les parties les plus voisines des surfaces terminales. Dans les parties dont la distance à l'une des surfaces qui termine le fluide est inférieure à une certaine quantité  $\lambda$ , d'ailleurs fort petite, la constitution du fluide varie d'un point à l'autre, comme nous l'avons exposé ailleurs (').

Nous désignerons par

$M_p$  le poids du corps  $p$ ;

$Y_p$  l'énergie interne de l'unité de poids de ce corps pris dans l'état qu'il présente loin des surfaces terminales et supposé dépourvu de toute charge électrique;

$\Sigma_p$  l'entropie de l'unité de poids de ce corps dans les conditions qui viennent d'être définies;

$\theta_{p0}$  l'aire de la surface par laquelle le corps  $p$  confine à l'isolant qui entoure le système;

$A_{p0}$  une quantité qui dépend uniquement de l'état que le corps  $p$  présente loin des surfaces terminales;

$\theta_{pq}$  l'aire de la surface par laquelle le corps  $p$  est en contact avec un autre corps  $q$  appartenant au système;

$A_{pq}$  une quantité qui dépend, d'une façon non symétrique d'ailleurs, de l'état que les corps  $p$  et  $q$  présentent loin des surfaces terminales.

Par une démonstration analogue à celle que nous avons exposée dans notre travail sur les *Applications de la Thermodynamique aux phénomènes capillaires*, nous parviendrons au résultat suivant :

$$(5) \quad E(Y - T\Sigma) = \sum_{p=1}^{p=n} EM_p(Y_p - T\Sigma_p) + \sum_{p=1}^{p=n} A_{p0} \theta_{p0} + \sum_{pq} (A_{pq} + A_{qp}) \theta_{pq},$$

le signe  $\sum_{pq}$  indiquant une sommation qui s'étend à toutes les combinaisons distinctes des indices  $1, 2, \dots, p, \dots, n$  deux à deux.

---

(<sup>1</sup>) *Applications de la Thermodynamique aux phénomènes capillaires* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3<sup>e</sup> série, t. II, p. 207).

En vertu des égalités (4) et (5), l'égalité (3) devient

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta \mathfrak{E} &= \delta \sum_{p=1}^{p=n} EM_p (Y_p - T \Sigma_p) \\ &+ \delta \left[ \sum_{p=1}^{p=n} A_{p0} \theta_{p0} + \sum_{pq} (A_{pq} + A_{qp}) \theta_{pq} \right] + \delta W + \delta \sum \Theta Q. \end{aligned} \right.$$

Nous allons envisager une modification virtuelle particulière et développer successivement, pour cette modification, la valeur de chacune des variations qui figurent dans l'égalité (6).

L'état interne de chacun des corps du système est défini lorsque l'on connaît sa température, son volume spécifique et un certain nombre d'autres paramètres dont les variations constituent ce qu'on nomme les *changements d'état physique ou d'état chimique du corps*. Nous supposons que ces derniers paramètres demeurent invariables, ainsi que la température, et que le volume spécifique de chaque corps varie seul. Le corps éprouve donc une simple dilatation.

Par suite de cette dilatation, la surface qui limite chacun des corps subit une déformation. Nous désignerons par  $\delta N_p$  la valeur que prend en un point de la surface qui limitait primitivement le fluide  $p$  la distance normale entre cette surface et la surface déformée;  $\delta N_p$  sera compté positivement lorsqu'en ce point la surface déformée sera extérieure à la surface primitive. Nous supposons que les lignes de raccordement des diverses surfaces deviennent invariables.

Soient  $R_p$  et  $R'_p$  les valeurs au même point des rayons de courbure principaux de la surface, chacun de ces rayons étant compté positivement lorsque la ligne de courbure correspondante tourne sa concavité vers l'intérieur du corps  $p$ .

Le volume  $V_p$  du corps  $p$  aura, dans la modification considérée, augmenté de

$$\delta V_p = \sum_r S \delta N_p d\theta_{pr} \\ (r = 0, 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n).$$

Son volume spécifique aura augmenté de

$$(7) \quad \delta \sigma_p = \frac{1}{M_p} \sum S \delta N_p d\theta_{pr},$$

l'indice  $r$  ayant la même signification que dans la formule précédente et le signe  $\mathbf{S}$  indiquant, comme dans la formule précédente, une sommation qui s'étend à tous les éléments  $d\theta_{pr}$  de la surface  $\theta_{pr}$ . Nous aurons

$$\delta(Y_p - T \Sigma_p) = \left( \frac{\partial Y_p}{\partial \sigma_p} - T \frac{\partial \Sigma_p}{\partial \sigma_p} \right) \delta \sigma_p$$

et, par conséquent, en vertu de l'égalité (7),

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta \sum_{p=1}^{p=n} \mathbf{E} \mathbf{M}_p (Y_p - T \Sigma_p) = \mathbf{E} \sum_{p=1}^{p=n} \left[ \left( \frac{\partial Y_p}{\partial \sigma_p} - T \frac{\partial \Sigma_p}{\partial \sigma_p} \right) \sum_r \mathbf{S} \delta \mathbf{N}_p d\theta_{pr} \right] \\ (r = 0, 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n). \end{array} \right.$$

En vertu d'un théorème dû à M. Bertrand, l'augmentation de la surface  $\theta_{pq}$  peut s'exprimer de la manière suivante

$$(9) \quad \delta \theta_{pq} = \mathbf{S} \delta \mathbf{N}_p \left( \frac{1}{\mathbf{R}_p} + \frac{1}{\mathbf{R}'_p} \right) d\theta_{pq},$$

le signe  $\mathbf{S}$  indiquant une sommation qui s'étend à tous les éléments  $d\theta_{pq}$  de la surface  $\theta_{pq}$ .

L'état interne du corps  $p$  a subi une variation déterminée par la variation  $d\sigma_p$  de son volume spécifique. Il en résulte que  $\Lambda_{p0}$  a subi une variation

$$\delta \Lambda_{p0} = \frac{\partial \Lambda_{p0}}{\partial \sigma_p} \delta \sigma_p$$

ou bien, en vertu de l'égalité (7),

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta \Lambda_{p0} = \frac{1}{\mathbf{M}_p} \frac{\partial \Lambda_{p0}}{\partial \sigma_p} \sum_r \mathbf{S} \delta \mathbf{N}_p d\theta_{pr} \\ (r = 0, 1, 2, p-1, p+1, \dots, n). \end{array} \right.$$

De même  $\Lambda_{pq}$  a varié de

$$\delta \Lambda_{pq} = \frac{\partial \Lambda_{pq}}{\partial \sigma_p} \delta \sigma_p + \frac{\partial \Lambda_{pq}}{\partial \sigma_q} \delta \sigma_q,$$



ou bien, en vertu de l'égalité (7), de

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta A_{pq} &= \frac{1}{M_p} \frac{\partial A_{pq}}{\partial \sigma_p} \sum_r S \delta N_p d\theta_{pr} + \frac{1}{M_q} \frac{\partial A_{pq}}{\partial \sigma_q} \sum_s S \delta N_q d\theta_{qs} \\ &\quad \left( \begin{array}{l} r = 0, 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n; \\ s = 0, 1, 2, \dots, q-1, q+1, \dots, n \end{array} \right). \end{aligned} \right.$$

Les formules (9), (10) et (11) nous donnent

$$\begin{aligned} &\delta \left[ \sum_{p=1}^{p=n} A_{p0} \theta_{p0} + \sum_{pq} (A_{pq} + A_{qp}) \theta_{pq} \right] \\ &= \sum_{p=1}^{p=n} A_{p0} S \delta N_p \left( \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R'_p} \right) d\theta_{p0} + \sum_{pq} (A_{pq} + A_{qp}) S \delta N_p \left( \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R'_p} \right) d\theta_{pq} \\ &\quad + \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\theta_{p0}}{M_p} \frac{\partial A_{p0}}{\partial \sigma_p} \sum_r S \delta N_p d\theta_{pr} \\ &\quad + \sum_{pq} \left[ \frac{\theta_{pq}}{M_p} \frac{\partial (A_{pq} + A_{qp})}{\partial \sigma_p} \sum_r S \delta N_p d\theta_{pr} + \frac{\theta_{pq}}{M_q} \frac{\partial (A_{pq} + A_{qp})}{\partial \sigma_q} \sum_s S \delta N_q d\theta_{qs} \right]. \end{aligned}$$

On voit aisément que cette égalité peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &\delta \left[ \sum_{p=1}^{p=n} A_{p0} \theta_{p0} + \sum_{pq} (A_{pq} + A_{qp}) \theta_{pq} \right] \\ &= \sum_{p=1}^{p=n} S \left\{ A_{p0} \left( \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R'_p} \right) + \frac{1}{M_p} \left[ \theta_{p0} \frac{\partial A_{p0}}{\partial \sigma_p} + \sum_r \theta_{pr} \frac{\partial (A_{pr} + A_{rp})}{\partial \sigma_p} \right] \right\} \delta N_p d\theta_{p0} \\ &\quad + \sum_{p=1}^{p=n} \sum_q S \left\{ A_{pq} \left( \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R'_p} \right) + \frac{1}{M_p} \left[ \theta_{p0} \frac{\partial A_{p0}}{\partial \sigma_p} + \sum_r \theta_{pr} \frac{\partial (A_{pr} + A_{rp})}{\partial \sigma_p} \right] \right\} \delta N_p d\theta_{pq} \\ &\quad \left( \begin{array}{l} q = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n; \\ r = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n \end{array} \right). \end{aligned}$$

Posons, suivant une notation que nous avons déjà employée ail-

leurs (1),

$$(12) \quad \psi_p = \frac{1}{M_p} \left[ \theta_{p0} \frac{\partial A_{p0}}{\partial \sigma_p} + \sum_r \theta_{pr} \frac{\partial (A_{pr} + A_{rp})}{\partial \sigma_p} \right]$$

$$(r = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n),$$

et l'égalité précédente deviendra

$$\left\{ \begin{aligned} & \partial \left[ \sum_{p=1}^{p=n} A_{p0} \theta_{p0} + \sum_{pq} (A_{pq} + A_{qp}) \theta_{pq} \right] \\ & = \sum_{p=1}^{p=n} \left\{ S \left[ A_{p0} \left( \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R_p} \right) + \psi_p \right] \delta N_p d\theta_{p0} + \sum_q S \left[ A_{pq} \left( \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R_p} \right) + \psi_p \right] \delta N_p d\theta_{pq} \right\} \end{aligned} \right.$$

$$(q = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n).$$

Passons maintenant à la détermination de  $\delta W$ .

La variation  $\delta W$  du potentiel électrostatique est égale, au signe près, au travail pondéromoteur effectué durant la modification considérée par les actions que donnent les lois de Coulomb, si, comme nous le supposons ici, chaque particule matérielle se déplace en entraînant la charge électrique qu'elle porte.

Considérons en premier lieu une particule matérielle non située sur la surface  $\theta_{p0}$ . Au point où se trouve cette particule, la fonction potentielle admet des dérivées partielles du premier ordre et les composantes X, Y, Z de l'action exercée en ce point suivant les lois de Coulomb sont, si  $q$  est la charge en ce point,

$$X = -\varepsilon q \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\varepsilon q \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\varepsilon q \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Si  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  sont les composantes du déplacement de la particule, le travail effectué par ces actions aura pour valeur

$$-\varepsilon q \left( \frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \delta z \right),$$

(1) *Applications de la Thermodynamique aux phénomènes capillaires*, égalités (20) et (22) (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3<sup>e</sup> série, t. II, p. 229). — *Sur les corps hygrométriques*, égalités (6) et (8) (*Journal de Physique pure et appliquée*, 2<sup>e</sup> série, t. V, p. 103).

ce qui peut encore s'écrire

$$-\varepsilon q \frac{\partial V}{\partial N} \delta N,$$

$\delta N$  étant la projection du déplacement de la particule suivant une normale à la surface du niveau qui passe par un point de cette particule et  $\frac{\partial V}{\partial N}$  étant la dérivée de la fonction potentielle suivant cette direction.

Considérons, en second lieu, un point M, situé sur l'une des surfaces  $\theta_{p0}$ . Menons une surface parallèle à la surface  $\theta_{p0}$ , infiniment voisine de la surface  $\theta_{p0}$  et située à l'intérieur du corps  $p$ . Par le point M menons une normale à la surface  $\theta_{p0}$ , dirigée vers l'intérieur du corps  $p$ . Désignons par M' le point où cette normale rencontre la surface parallèle à la surface  $\theta_{p0}$ . Soit  $\frac{\partial V}{\partial N_p}$  la valeur au point M' de la dérivée de la fonction potentielle suivant la direction MM'. Traçons de même à l'intérieur de l'isolant o une surface parallèle à  $\theta_{p0}$ , infiniment voisine de la surface  $\theta_{p0}$ . Par le point M, menons vers l'intérieur du milieu o une normale à la surface  $\theta_{p0}$ . Elle rencontre en un point M'' la surface parallèle que nous venons de tracer. Soit  $\frac{\partial V}{\partial N'_p}$  la valeur au point M'' de la dérivée de la fonction potentielle suivant la direction MM''. Au point M, la densité superficielle de l'électricité répandue sur la surface  $\theta_{p0}$  a pour valeur

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial V}{\partial N_p} + \frac{\partial V}{\partial N'_p} \right).$$

L'action exercée au point M, en vertu des lois de Coulomb, a pour valeur  $2\pi\varepsilon\rho$ . Le travail effectué par cette action, lorsqu'on donne un déplacement  $\delta N_p$  aux divers points de l'élément  $d\theta_{p0}$ , a pour valeur

$$\frac{\varepsilon}{8\pi} \left( \frac{\partial V}{\partial N_p} + \frac{\partial V}{\partial N'_p} \right)^2 \delta N_p d\theta_{p0}.$$

On a donc

$$(14) \quad \delta W = \varepsilon \sum q \frac{\partial V}{\partial N} \delta N - \frac{\varepsilon}{8\pi} \sum_{p=1}^{p=n} S \left( \frac{\partial V}{\partial N_p} + \frac{\partial V}{\partial N'_p} \right)^2 \delta N_p d\theta_{p0},$$

le premier signe  $\sum$  s'étendant à toutes les charges  $q$  réparties à l'inté-

rieur du système. Nous allons mettre sous une forme plus explicite les termes qui figurent dans cette égalité (14).

Commençons par le premier terme du second membre.

Il n'y a d'électricité, à l'intérieur du corps  $p$ , qu'aux points dont la distance à l'une des surfaces  $\theta_{p0}$ ,  $\theta_{pq}$  est inférieure à la quantité très petite  $(\lambda + \mu)$ . Pour l'un quelconque  $m$  de ces points, on a sensiblement

$$\delta N = \delta N_p,$$

$\delta N_p$  se rapportant au point  $M$  où la normale menée par le point  $m$  à la surface  $\theta$  la plus voisine rencontre cette surface

A l'intérieur du corps  $p$ , on a, en chaque point, en vertu de l'égalité (8) du Chapitre I (p. 110),

$$\varepsilon V + \Theta = \text{const.}$$

et, par conséquent,

$$\varepsilon \frac{\partial V}{\partial N} = - \frac{\partial \Theta}{\partial N}.$$

D'ailleurs, en vertu de l'égalité (9) du Chapitre I (p. 110), la densité électrique en un point du corps  $p$  a pour valeur

$$\rho = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \Delta \Theta.$$

Si donc sur la surface  $\theta_{pq}$  on prend un élément superficiel  $d\theta_{pq}$  et si à cet élément on circonscrit un petit cylindre dont les génératrices, normales à la surface  $\theta_{pq}$  et dirigées vers l'intérieur du corps  $p$ , aient pour longueur  $(\lambda + \mu)$ , la partie du terme

$$\varepsilon \sum q \frac{\partial V}{\partial N} \delta N$$

qui est relative aux charges  $q$  contenues à l'intérieur de ce cylindre aura pour valeur

$$- \frac{1}{4\pi\varepsilon} \delta N_p d\theta_{pq} \int_0^{\lambda+\mu} \frac{\partial}{\partial N} \Theta(p, q, l) \Delta \Theta(p, q, l) dl.$$

Dans cette expression,  $l$  représente la distance d'un point  $m$  du cylindre à la surface  $\theta_{pq}$ . Les valeurs de  $\Theta$  et de  $\Delta \Theta$  en ce point dé-

pendent uniquement de  $l$  et de l'état que les corps  $p$  et  $q$  présentent loin des surfaces terminales; de là les symboles  $\Theta(p, q, l)$  et  $\Delta\Theta(p, q, l)$  employés pour les désigner.

La quantité

$$(15) \quad \beta_{pq} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_0^{\lambda+\mu} \frac{\partial}{\partial N} \Theta(p, q, l) \Delta\Theta(p, q, l) dl$$

dépend uniquement de l'état que les corps  $p$  et  $q$  présentent loin des surfaces terminales. D'après ce qui vient d'être exposé, on a

$$(16) \quad \varepsilon \sum q \frac{\partial V}{\partial N} \delta N = \sum_{p=1}^{p=n} \left[ \beta_{p0} \sum \delta N_p d\theta_{p0} + \sum_q \beta_{pq} \sum \delta N_p d\theta_{pq} \right],$$

( $q = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n$ ).

Passons maintenant à l'évaluation du terme

$$\frac{\varepsilon}{8\pi} \sum_{p=1}^{p=n} S \left( \frac{\partial V}{\partial N_p} + \frac{\partial V}{\partial N'_p} \right)^2 \delta N_p d\theta_{p0}$$

qui figure au second membre de l'égalité (14).

Si l'on se reporte aux égalités (11), (12) et (13) du Chapitre I (p. 118), on voit que l'on a

$$(17) \quad -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial V}{\partial N_p} + \frac{\partial V}{\partial N'_p} \right) = d_{p0} + \Delta_{p0},$$

$d_{p0}$  étant une densité superficielle qui a, en toutes circonstances, en tous les points de la surface  $\theta_{p0}$ , une même valeur qui dépend uniquement de la nature du corps  $p$  loin des surfaces terminales et de la nature de l'isolant  $o$ , tandis que  $\Delta_{p0}$  est une densité variable d'une expérience à une autre et variable aussi d'un point à un autre de la surface  $\theta_{p0}$ .

Si nous posons

$$(18) \quad \begin{cases} \gamma_{p0} = 2\varepsilon\pi d_{p0}^2 = \frac{1}{8\pi\varepsilon} \left[ \frac{\partial}{\partial N'_p} \Theta(p, o, o) \right]^2, \\ \delta_{p0} = 4\varepsilon\pi d_{p0} = -\frac{\partial \Theta(p, o, o)}{\partial N'_p}, \end{cases}$$

les deux quantités  $\gamma_{p0}$  et  $\delta_{p0}$  dépendant uniquement de la nature interne du corps  $p$ , nous aurons

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{8\pi} \sum_{p=1}^{p=n} S \left( \frac{\partial V}{\partial N_p} + \frac{\partial V}{\partial N'_p} \right)^2 \delta N_p d\theta_{p0} \\ & = \sum_{p=1}^{p=n} S (\gamma_{p0} + \delta_{p0} \Delta + 2\pi\varepsilon \Delta^2) \delta N_p d\theta_{p0}. \end{aligned} \right.$$

En vertu des égalités (14), (16) et (19), on a

$$(20) \quad \delta W = \sum_{p=1}^{p=n} \left[ S (\beta_{p0} - \gamma_{p0} - \delta_{p0} \Delta - 2\pi\varepsilon \Delta^2) \delta N_p d\theta_{p0} + \sum_q S \beta_{pq} \delta N_p d\theta_{pq} \right],$$

( $q = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n$ ).

C'est maintenant sur l'évaluation du terme  $\delta \sum \Theta Q$  de l'égalité (6) que nous devons porter notre attention.

Chacune des particules matérielles que renferme le système conserve, dans la modification virtuelle considérée, une charge invariable. Mais, par suite de la dilatation que nous considérons, son état varie. On a donc

$$\delta \sum \Theta Q = \sum Q \delta \Theta.$$

Les charges électriques sont réparties soit sur les surfaces  $\theta_{p0}$ , soit dans une couche d'épaisseur  $(\lambda + \mu)$  attenante à ces surfaces ou aux surfaces  $\theta_{pq}$ . Occupons-nous d'abord de celles qui sont dans ce dernier cas.

Sur la surface  $\theta_{p0}$ , prenons un élément superficiel  $d\theta_{p0}$ . Circonscrivons-lui un cylindre dont les génératrices, normales à la surface  $\theta_{p0}$  et dirigées vers l'intérieur du corps  $p$ , aient pour longueur  $(\lambda + \mu)$ . En un point  $m$  de ce petit cylindre, point situé à une distance  $l$  de la surface  $\theta_{p0}$ , la densité électrique a une valeur

$$\rho = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \Delta \Theta(p, 0, l).$$

$\Theta$  a en ce point une valeur  $\Theta(p, 0, l)$  qui dépend de  $l$  et de la nature

du corps  $p$  loin des surfaces terminales. Cette dernière est déterminée par la température  $T$  et par le volume spécifique  $\sigma_p$  du corps  $p$ . Dans la modification isothermique que nous envisageons, la valeur de  $\Theta$  au point  $m$  augmente de

$$\delta\Theta = \frac{\partial\Theta(p, o, l)}{\partial\sigma_p} \delta\sigma_p,$$

ou bien, en se reportant à l'expression (7) de  $\delta\sigma_p$ , de

$$\delta\Theta = \frac{\partial\Theta(p, o, l)}{\partial\sigma_p} \frac{1}{M_p} \sum_r S \delta N_p d\vartheta_{pr},$$

$$(r = o, 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n).$$

On a donc, pour toutes les charges  $Q$  comprises à l'intérieur du petit cylindre considéré,

$$\sum Q \delta\Theta = \frac{d\vartheta_{p0}}{4\pi\varepsilon} \int_0^{\lambda+\mu} \left[ \frac{\Delta\Theta(p, o, l)}{M_p} \frac{\partial\Theta(p, o, l)}{\partial\sigma_p} \sum_r S \delta N_p d\vartheta_{pr} \right] dl.$$

Posons

$$(21) \quad \zeta_{p0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_0^{\lambda+\mu} \Delta\Theta(p, o, l) \frac{\partial\Theta(p, o, l)}{\partial\sigma_p} dl;$$

$\zeta_{p0}$  sera une quantité qui dépendra uniquement de la nature du corps  $p$ . Pour toutes les charges réparties à l'intérieur du corps  $p$ , au voisinage de la surface  $\vartheta_{p0}$ , nous aurons

$$(22) \quad \sum Q \delta\Theta = \zeta_{p0} \frac{\vartheta_{p0}}{M_p} \sum_r S \delta N_p d\vartheta_{pr},$$

$$(r = o, 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n).$$

Envisageons maintenant sur la surface  $\vartheta_{pq}$  un élément superficiel  $d\vartheta_{pq}$ . A cet élément circonscrivons un cylindre dont les génératrices, normales à la surface  $\vartheta_{pq}$ , et dirigées vers l'intérieur du corps  $p$ , aient pour longueur  $(\lambda + \mu)$ . En un point  $m$  de ce petit cylindre, la densité électrique a pour valeur

$$\rho = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \Delta\Theta(p, q, l).$$

La quantité  $\Theta$  a en ce point une valeur  $\Theta(p, q, l)$ . Pendant la modifi-

cation considérée, elle éprouve une variation

$$\partial\Theta = \frac{\partial\Theta(p, q, l)}{\partial\sigma_p} \delta\sigma_p + \frac{\partial\Theta(p, q, l)}{\partial\sigma_q} \delta\sigma_q,$$

ou, en se reportant à l'expression (7) des quantités  $\delta\sigma_p$ ,  $\delta\sigma_q$ ,

$$\begin{aligned} \partial\Theta = \frac{\partial\Theta(p, q, l)}{\partial\sigma_p} \frac{1}{M_p} \sum_r S \delta N_p d\theta_{pr} + \frac{\partial\Theta(p, q, l)}{\partial\sigma_q} \frac{1}{M_q} \sum_s S \delta N_q d\theta_{qs}, \\ (r = 0, 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n), \\ (s = 0, 1, 2, \dots, q-1, q+1, \dots, n). \end{aligned}$$

Posons

$$(23) \quad \begin{cases} \zeta_{pq} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_0^{\lambda+\mu} \Delta\Theta(p, q, l) \frac{\partial\Theta(p, q, l)}{\partial\sigma_p} dl, \\ \eta_{pq} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_0^{\lambda+\mu} \Delta\Theta(p, q, l) \frac{\partial\Theta(p, q, l)}{\partial\sigma_q} dl. \end{cases}$$

Les quantités  $\zeta_{pq}$ ,  $\eta_{pq}$  dépendront uniquement et non symétriquement de la nature du corps  $p$  et de la nature du corps  $q$  loin des surfaces terminales. Pour toutes les charges réparties à l'intérieur du corps  $p$ , au voisinage de la surface  $\theta_{pq}$ , nous aurons

$$(24) \quad \sum Q \partial\Theta = \zeta_{pq} \frac{\theta_{pq}}{M_p} \sum_r S \delta N_p d\theta_{pr} + \eta_{pq} \frac{\theta_{pq}}{M_q} \sum_s S \delta N_q d\theta_{qs}, \\ (r = 0, 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n), \\ (s = 0, 1, 2, \dots, q-1, q+1, \dots, n).$$

Si nous réunissons les résultats représentés par les égalités (22) et (24), nous voyons que l'on a, *pour toutes les charges électriques réparties à l'intérieur du système*, l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \sum Q \partial\Theta = \sum_{p=1}^{p=n} \left[ \frac{\zeta_{p0} \theta_{p0}}{M_p} \sum_r S \delta N_p d\theta_{pr} \right. \\ \left. + \sum_q \left( \frac{\zeta_{pq} \theta_{pq}}{M_p} \sum_r S \delta N_p d\theta_{pr} + \frac{\eta_{pq} \theta_{pq}}{M_q} \sum_s S \delta N_q d\theta_{qs} \right) \right], \\ (q = 0, 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n), \\ (r = 0, 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n), \\ (s = 0, 1, 2, \dots, q-1, q+1, \dots, n). \end{aligned}$$



En groupant les termes d'une autre façon, on peut écrire cette égalité

$$(25) \quad \sum Q \delta \Theta = \sum_{p=1}^{p=n} \left\{ \frac{1}{M_p} \left[ \zeta_{p0} \theta_{p0} + \sum_q (\zeta_{pq} + \eta_{pq}) \theta_{pq} \right] \left( S \delta N_p d\theta_{p0} + \sum_q S \delta N_p d\theta_{pq} \right) \right\},$$

( $q = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n$ ).

Évaluons maintenant la quantité  $\sum Q \delta \Theta$  pour les charges distribuées sur les surfaces  $\theta_{p0}$ .

En un point de l'une de ces surfaces, la densité électrique a pour valeur

$$d_{p0} + \Delta_{p0}.$$

La valeur de  $\Theta$  en ce point subit, pendant la modification considérée, une variation

$$\delta \Theta = \frac{\partial \Theta(p, 0, 0)}{\partial \sigma_p} \delta \sigma_p.$$

Si l'on pose

$$(26) \quad \begin{cases} \lambda_{p0} = \frac{\partial \Theta(p, 0, 0)}{\partial \sigma_p}, \\ \mu_{p0} = \frac{\partial \Theta(p, 0, 0)}{\partial \sigma_p} d_{p0} = - \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\partial \Theta(p, 0, 0)}{\partial \sigma_p} \frac{\partial \Theta(p, 0, 0)}{\partial N'_p}, \end{cases}$$

$\lambda_{p0}$  et  $\mu_{p0}$  dépendant uniquement de la nature du corps  $p$ , on aura, pour toutes les charges réparties sur les surfaces  $\theta_{p0}$ ,

$$\sum Q \delta \Theta = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{M_p} \left( \lambda_{p0} S \Delta_{p0} d\theta_{p0} + \mu_{p0} \theta_{p0} \right) \sum_r S \delta N_p d\theta_{pr},$$

( $r = 0, 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n$ ).

Si l'on remarque que

$$(27) \quad Q_{p0} = S \Delta_{p0} d\theta_{p0}$$

représente la quantité totale d'électricité *libre* répandue sur la surface  $\theta_{p0}$ , l'égalité précédente pourra s'écrire

$$(28) \quad \sum Q \delta \Theta = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\lambda_{p0} Q_{p0} + \mu_{p0} \theta_{p0}}{M_p} \left( S \delta N_p d\theta_{p0} + \sum_q S \delta N_p d\theta_{pq} \right),$$

( $q = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n$ ).

Des égalités (26) et (28) il résulte que, si l'on pose

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_p = \frac{1}{M_p} \left[ (\zeta_{p0} + \mu_{p0}) \theta_{p0} + \sum_q (\zeta_{pq} + \eta_{pq}) \theta_{pq} \right], \\ (q = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n), \\ \omega_p = \frac{1}{M_p} \lambda_{p0} Q_{p0}, \end{array} \right.$$

on a, pour tout le système,

$$(30) \quad \delta \sum_{p=1}^{p=n} \Theta Q = \sum_{p=1}^{p=n} (\gamma_p + \omega_p) \left( S \delta N_p d\theta_{p0} + \sum_q S \delta N_p d\theta_{pq} \right), \\ (q = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n).$$

Reste à calculer le premier membre de l'égalité (6), c'est-à-dire le terme  $\delta \mathfrak{S}$ .

Nous supposons que les forces extérieures qui sollicitent le système sont de deux sortes :

1° Des pressions normales appliquées aux divers éléments des surfaces  $\theta_{p0}$ . Nous désignerons par P la valeur de la pression en un point de l'une des surfaces  $\theta_{p0}$  et par  $\delta \mathfrak{S}'$  le travail que ces pressions effectuent durant la modification considérée.

2° Des forces appliquées aux divers éléments de volume des fluides. Si nous désignons par D la densité de l'un des fluides en un point, par  $dv$  un élément de volume renfermant ce point, la force qui agit sur cet élément de volume aura pour composantes

$$DX dv, \quad DY dv, \quad DZ dv.$$

Nous admettrons qu'il existe une fonction  $\Omega(x, y, z)$  finie et continue en tous les points de l'espace occupé par le fluide, et telle que l'on ait

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ Y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ Z = -\frac{\partial \Omega}{\partial z}. \end{array} \right.$$

Nous désignerons par  $\delta \mathfrak{S}''$  le travail produit par ces forces.

Le travail  $\delta\mathfrak{S}'$  s'évalue aisément. Il a pour valeur

$$(32) \quad \delta\mathfrak{S}' = - \sum_{p=1}^{p=n} \mathbf{S} \mathbf{P} \delta\mathbf{N}_p d\theta_{p0}.$$

Le travail  $\delta\mathfrak{S}''$  a pour valeur

$$\delta\mathfrak{S}'' = \delta t \sum_{p=1}^{p=n} \iiint \mathbf{D}_p (\mathbf{X}u + \mathbf{Y}v + \mathbf{Z}w) dx dy dz,$$

$u\delta t$ ,  $v\delta t$ ,  $w\delta t$  représentant les composantes du déplacement de l'élément de volume  $dx dy dz$  appartenant au corps  $p$ , et l'intégrale triple s'étendant à tous les éléments de volume de ce corps.

L'intégrale triple

$$\iiint \mathbf{D}_p (\mathbf{X}u + \mathbf{Y}v + \mathbf{Z}w) dx dy dz$$

peut se partager en deux intégrales semblables : l'une étendue à une couche d'épaisseur  $\lambda$  attenante aux surfaces qui limitent le corps  $p$ , l'autre à la partie interne du même corps.

La première intégrale est extrêmement petite, car l'élément sous le signe  $\iiint$  est fini et le domaine auquel s'étend l'intégration est de l'ordre de  $\lambda$ .

Dans la seconde intégrale,  $\mathbf{D}_p$  est une constante. Il reste donc à évaluer l'intégrale

$$\mathbf{J} = \delta t \iiint (\mathbf{X}u + \mathbf{Y}v + \mathbf{Z}w) dx dy dz,$$

étendue à la partie interne du corps  $p$ .

En vertu des égalités (31), cette intégrale devient

$$\mathbf{J} = - \delta t \iiint \left( \frac{\partial \Omega}{\partial x} u + \frac{\partial \Omega}{\partial y} v + \frac{\partial \Omega}{\partial z} w \right) dx dy dz.$$

Une intégration par parties transforme cette égalité en la suivante :

$$\mathbf{J} = - \sum \Omega \delta\mathbf{N}_p d\theta'_{p0} - \sum_q \mathbf{S} \Omega \delta\mathbf{N}_p d\theta'_{pq} + \delta t \iiint \Omega \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx dy dz$$

( $q = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n$ ).

$d\theta'_{p0}$  désigne, dans cette formule, un élément d'une surface parallèle à la surface  $\theta_{p0}$ , tracée à l'intérieur du fluide  $p$ , à une distance  $\lambda$  de la surface  $\theta_{p0}$ ; la quantité  $\Omega$  qui multiplie  $d\theta'_{p0}$  est la valeur de  $\Omega$  en un point de cet élément;  $\delta N_p$  est la projection du déplacement de ce point sur la normale à la surface  $\theta'_{p0}$  dirigée vers l'extérieur du fluide  $p$ ;  $d\theta'_{pq}$  et les quantités qui le multiplient ont des significations analogues.

Les éléments  $d\theta'_{p0}$ ,  $d\theta'_{pq}$  étant extrêmement voisins des éléments  $d\theta_{p0}$ ,  $d\theta_{pq}$  correspondants, l'égalité précédente peut être remplacée par

$$J = - \sum \Omega \delta N_p d\theta_{p0} - \sum_q \sum \Omega \delta N_p d\theta_{pq} \\ + \delta t \int \int \int \Omega \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

D'autre part, il est facile de voir que l'on a

$$\delta t \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx dy dz = D_p \delta \sigma_p dx dy dz.$$

Si l'on se reporte à l'égalité (7), on voit que l'on a

$$J = - \sum \Omega \delta N_p d\theta_{p0} - \sum_q \sum \Omega \delta N_p d\theta_{pq} \\ + \frac{1}{M_p} \int \int \int \Omega D_p dx dy dz \left( \sum_r \sum \delta N_p d\theta_{pr} \right), \\ (q = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n), \\ (r = 0, 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n).$$

Si donc on pose

$$(33) \quad v_p = \frac{D_p^2}{M_p} \int \int \int \Omega dx dy dz,$$

on aura

$$(34) \quad \delta \mathfrak{E}'' = - \sum_{p=1}^{p=n} \left( \sum \Omega D_p \delta N_p d\theta_{p0} + \sum_q \sum \Omega D_p \delta N_p d\theta_{pq} - v_p \sum_r \sum \delta N_p d\theta_{pr} \right), \\ (q = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n), \\ (r = 0, 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n).$$

En vertu des égalités (8), (13), (20), (30), (32) et (34), l'égalité (6) devient

$$35) \left\{ \begin{aligned} & \sum_{p=1}^{p=n} \left\{ S \left[ P + \Omega D_p - \nu_p + E \left( \frac{\partial Y_p}{\partial \sigma_p} - T \frac{\partial \Sigma_p}{\partial \sigma_p} \right) + A_{p0} \left( \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R'_p} \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \psi_p + \chi_p + \beta_{p0} - \gamma_{p0} + \omega_p - \delta_{p0} \Delta - 2\pi\varepsilon \Delta^2 \right] \delta N_p d\theta_{p0} \right. \\ & \quad \left. + \sum_q S \left[ \Omega D_p - \nu_p + E \left( \frac{\partial Y_p}{\partial \sigma_p} - T \frac{\partial \Sigma_p}{\partial \sigma_p} \right) + A_{pq} \left( \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R'_p} \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \psi_p + \chi_p + \beta_{pq} + \omega_p \right] \delta N_p d\theta_{pq} \right\} = 0. \end{aligned} \right.$$

( $q = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n$ ).

Remarquons maintenant que, dans la déformation du fluide, tous les  $\delta N_p$  sont des quantités arbitraires ou du moins soumises à cette seule restriction que, en un point de la surface de contact  $\theta_{pq}$  de deux fluides, on ait

$$\delta N_p + \delta N_q = 0.$$

Remarquons, en outre, que  $D$  est discontinu le long d'une surface  $\theta_{pq}$ , mais que  $\Omega$  demeure continu, et nous verrons sans peine que l'égalité précédente exige que l'on ait :

1° En tous les points de la surface de contact de deux fluides conducteurs,

$$(38) \left\{ \begin{aligned} & E \left( \frac{\partial Y_p}{\partial \sigma_p} - T \frac{\partial \Sigma_p}{\partial \sigma_p} \right) - \nu_p + A_{pq} \left( \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R'_p} \right) + \psi_p + \chi_p + \beta_{pq} + \omega_p + \Omega D_p \\ & = E \left( \frac{\partial Y_q}{\partial \sigma_q} - T \frac{\partial \Sigma_q}{\partial \sigma_q} \right) - \nu_q + A_{qp} \left( \frac{1}{R_q} + \frac{1}{R'_q} \right) + \psi_q + \chi_q + \beta_{qp} + \omega_q + \Omega D_q \end{aligned} \right.$$

avec les conditions

$$\begin{aligned} R_p + R_q &= 0, \\ R'_p + R'_q &= 0; \end{aligned}$$

2° En tous les points où le système confine avec l'isolant qui l'environne,

$$(39) \left\{ \begin{aligned} & P + \Omega D_p - \nu_p + E \left( \frac{\partial Y_p}{\partial \sigma_p} - T \frac{\partial \Sigma_p}{\partial \sigma_p} \right) + A_{p0} \left( \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R'_p} \right) \\ & + \psi_p + \chi_p + \beta_{p0} - \gamma_{p0} + \omega_p - \delta_{p0} \Delta - 2\pi\varepsilon \Delta^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Ce sont ces deux égalités que nous allons discuter.

## § III. — Conséquences des équations précédentes.

3. Examinons en premier lieu l'égalité (39).

Si nous avons supposé que le système ne renfermât d'électricité en aucun point, si, en outre, nous avons omis de tenir compte de cette circonstance que les particules fluides situées à une distance de la surface terminale inférieure à  $\lambda$  ne sont pas dans le même état que les parties situées à l'intérieur du fluide, nous aurions trouvé que la pression qu'il faut appliquer à un élément de la surface  $\theta_{p_0}$  pour maintenir le fluide en équilibre, au lieu d'être donnée par l'équation (39), est donnée par l'équation

$$(40) \quad P' + \Omega D_p - \nu_p + E \left( \frac{\partial Y_p}{\partial \sigma_p} - T \frac{\partial \Sigma_p}{\partial \sigma_p} \right) = 0,$$

équation dont on déduirait aisément tous les théorèmes connus de l'Hydrostatique, et que l'on peut en même temps considérer comme l'expression de la loi de compressibilité d'un fluide homogène soumis à des forces extérieures.

Si, supposant toujours une absence complète d'électricité, nous avons tenu compte cependant du changement d'état éprouvé par le fluide au voisinage des surfaces terminales, nous aurions trouvé que la pression qu'il faut appliquer à un élément de la surface  $\theta_{p_0}$  pour maintenir le fluide en équilibre est donnée par l'équation

$$(41) \quad P'' + \Omega D_p - \nu_p + E \left( \frac{\partial Y_p}{\partial \sigma_p} - T \frac{\partial \Sigma_p}{\partial \sigma_p} \right) + A_{p_0} \left( \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R'_p} \right) + \psi_p = 0.$$

C'est l'équation qui donne la théorie de la capillarité, telle que nous l'avons exposée autre part <sup>(1)</sup>.

Par l'effet du changement d'état qu'il éprouve au voisinage des surfaces terminales, le fluide renferme toujours de l'électricité dans les parties attenantes à ces surfaces. Si l'on tient compte de cette électricité en supposant que le système ne renferme pas en outre d'élec-

---

(<sup>1</sup>) *Applications de la Thermodynamique aux phénomènes capillaires (Annales de l'École Normale supérieure, 3<sup>e</sup> série, t. II, p. 207).*

tricité libre, on devra supposer la pression donnée par l'égalité

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} P''' + \Omega D_p - \nu_p + E \left( \frac{\partial Y_p}{\partial \sigma_p} - T \frac{\partial \Sigma_p}{\partial \sigma_p} \right) \\ + A_{p0} \left( \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R_p'} \right) + \psi_p + \gamma_p + \beta_{p0} - \gamma_{p0} = 0, \end{array} \right.$$

que l'on doit, par conséquent, substituer désormais à l'égalité (41) dans l'étude d'un système qui ne renferme pas d'électricité libre.

Enfin, si le système renferme de l'électricité libre, la pression sera donnée par l'égalité (39).

De la comparaison des égalités (39), (40), (41) et (42) vient l'idée de regarder la pression  $P$  comme la somme de quatre autres pressions :

1° D'une *pression hydrostatique* ayant pour valeur

$$(40 \text{ bis}) \quad P_1 = -\Omega D_p + \nu_p - E \left( \frac{\partial Y_p}{\partial \sigma_p} - T \frac{\partial \Sigma_p}{\partial \sigma_p} \right) \quad (1);$$

2° D'une *pression capillaire* ayant pour valeur

$$(43) \quad P_2 = -A_{p0} \left( \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R_p'} \right) - \psi_p;$$

3° D'une *pression due à la présence de l'électricité naturelle* ayant pour valeur

$$(44) \quad P_3 = -(\gamma_p + \beta_{p0} - \gamma_{p0});$$

(1) La fonction  $\Omega$  est déterminée à une constante près. Néanmoins la pression  $P_1$  est entièrement déterminée. Supposons, en effet, qu'à  $\Omega$  on substitue une autre fonction  $\Omega' = \Omega + C$ . On devra alors à la quantité  $\nu_p$ , donnée par l'égalité (33), substituer la quantité  $\nu'_p$  donnée par l'égalité

$$\begin{aligned} \nu'_p &= \frac{D_p^2}{M_p} \iiint \Omega' dx dy dz = \frac{D_p^2}{M_p} \iiint (\Omega + C) dx dy dz \\ &= \nu_p + \frac{CD_p^2}{M_p} \iiint dx dy dz = \nu_p + CD_p. \end{aligned}$$

La nouvelle valeur  $P'_1$  de  $P_1$  sera donc

$$P'_1 = -\Omega' D_p + \nu'_p - E \left( \frac{\partial Y_p}{\partial \sigma_p} - T \frac{\partial \Sigma_p}{\partial \sigma_p} \right) = P_1.$$

4° D'une *pression due à la présence de l'électricité libre* ayant pour valeur

$$(45) \quad P_4 = -(\omega_p - \partial_{p0} \Delta - 2\pi\epsilon \Delta^2).$$

Cette dernière égalité nous montre que l'électrisation d'un fluide a pour effet d'exercer aux divers points de sa surface libre une *traction* ayant pour valeur

$$2\pi\epsilon \Delta^2 + \partial_{p0} \Delta - \omega_p.$$

Telle est l'expression de la traction électrique qui doit être désormais substituée à l'expression anciennement admise pour cette traction, expression donnée par l'égalité (1).

Si nous remplaçons  $\omega_p$  par sa valeur

$$\omega_p = \frac{1}{M_p} \lambda_{p0} Q_{p0}$$

donnée par l'une des égalités (29), l'expression de la traction électrique devient

$$- \frac{1}{M_p} \lambda_{p0} Q_{p0} + \partial_{p0} \Delta + 2\pi\epsilon \Delta^2.$$

Cette traction est la somme de trois termes.

Le premier terme,  $-\frac{1}{M_p} \lambda_{p0} Q_{p0}$ , dépend de la nature du corps  $p$ , de la grandeur de ce corps et de la charge totale répartie sur la surface libre de ce corps. Il est proportionnel à cette charge.

Le deuxième terme,  $\partial_{p0} \Delta$ , dépend de la nature du corps  $p$ . Il est proportionnel à la densité superficielle de l'électricité libre au point considéré.

Le troisième terme,  $2\pi\epsilon \Delta^2$ , se distingue des deux précédents en ce qu'il ne dépend pas en grandeur de la nature du corps  $p$ . Il est identique à l'expression de la traction électrique admise dans toutes les anciennes théories.

L'importance prépondérante de ce terme dans l'étude des déformations produites par l'électrisation résulte de la proposition suivante :

Si l'on prend un conducteur dont les dimensions linéaires soient mesurées par des nombres extrêmement grands; si l'on charge ce conducteur à un niveau potentiel mesuré par un nombre dont le rapport



même aux nombres précédents soit extrêmement grand, les deux premiers termes de la traction électrique en un point sont en général très petits par rapport au dernier. Ce dernier terme représente donc la valeur complète de la traction électrique pour un conducteur très grand chargé à un niveau potentiel très élevé.

Considérons en effet un système formé par un seul conducteur  $p$ , chargé à un niveau potentiel  $V$ . La traction électrique en un point  $m$  a une valeur

$$F = -\frac{1}{M_p} \lambda_{p0} Q_{p0} + \delta_{p0} \Delta + 2\pi\varepsilon \Delta^2.$$

Considérons ensuite un conducteur  $p'$  semblable au précédent, le rapport de similitude ayant une valeur  $k$ . Chargeons-le à un niveau potentiel  $k'V$ . Cherchons la nouvelle valeur  $F'$  de la traction électrique au point  $m'$  homologue de  $m$ .

Pour charger le corps  $p$  au niveau potentiel  $k'V$ ,  $Q_{p0}$  aurait dû devenir  $k'$  fois plus grand. Pour charger au niveau potentiel  $V$  le corps  $p'$ , il faut distribuer sur sa surface libre une charge égale à  $kQ_{p0}$ : par conséquent, pour charger au niveau potentiel  $k'V$  le corps  $p'$ , il faut distribuer sur sa surface libre une charge

$$Q'_{p0} = kk'Q_{p0}.$$

On a d'ailleurs

$$M'_p = k^3 M_p.$$

Les quantités  $\lambda_{p0}$ ,  $\delta_{p0}$  ne changent pas si la nature du corps ne change pas.

La charge  $Q'_{p0}$  étant égale à  $kk'Q_{p0}$ , et la surface  $\theta'_{p0}$  étant égale à  $k^2\theta_{p0}$ , on a

$$\Delta' = \frac{k'}{k} \Delta.$$

On a donc

$$F' = -\frac{k'}{k^2} \lambda_{p0} \frac{Q_{p0}}{M_p} + \frac{k'}{k} \delta_{p0} \Delta + 2\pi\varepsilon \frac{k'^2}{k^2} \Delta^2.$$

On voit alors que, si  $k$  et  $\frac{k'}{k}$  sont deux quantités très grandes, les deux premiers termes sont négligeables en comparaison du dernier.

Une dernière remarque se présente ici : les résultats précédents sont

établis en supposant que l'on ait affaire à des conducteurs fluides; peut-on les appliquer à des conducteurs solides?

Si l'on remplace les conducteurs fluides par des conducteurs solides, on pourra bien changer la nature de la déformation que la pression électrique leur fera subir. La nature de cette déformation devra être demandée à la théorie de l'élasticité et non à l'Hydrostatique. Mais il n'y a aucune raison pour que cette substitution change l'expression même de la pression électrique en un point de la surface.

La discussion de l'équation (38) sera faite au début de la seconde Partie de ce Mémoire.

Depuis la rédaction du présent Chapitre et la communication à l'Académie des Sciences du résultat qu'il renferme, j'ai eu connaissance d'un travail important où M. A. Foeppel (1) cherche à préciser la nature de la couche que l'électricité en équilibre forme sur un corps conducteur et la grandeur de la pression qu'elle exerce.

Pour y parvenir, M. Foeppel considère l'électricité comme un fluide doué d'élasticité.

« Dans l'état neutre, dit-il, chaque centimètre cube d'un conducteur renferme une certaine quantité de fluide positif, et cela aussi bien dans la théorie unitaire que dans la théorie dualistique. Soit  $\epsilon_0$  cette densité solide du fluide positif dans l'état neutre. Si le corps s'électrise positivement,  $\epsilon$  devient supérieur à  $\epsilon_0$ ; soit  $\epsilon = \epsilon_0 + \Delta\epsilon$ ,  $\Delta\epsilon$  représentant alors la densité de l'électricité libre. Si le corps est électrisé négativement,  $\Delta\epsilon$  est négatif.

» D'après l'hypothèse faite plus haut, la densité ne peut s'élever de  $\epsilon_0$  à  $\epsilon$  sans développer des pressions élastiques; le fluide pouvant se mouvoir très aisément dans le conducteur, on doit regarder ces pressions comme dépendant seulement des coordonnées et non comme variables avec la direction de l'élément. En les désignant par  $p$ , on a

$$p = c \Delta\epsilon,$$

$c$  étant une constante. »

(1) A. FOEPPEL, *Die Vertheilung der electrischen Ladung in den Leitern* (*Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie*, XXIX; 1886).

*Ann. de l'Éc. Normale.* 3<sup>e</sup> Série. Tome V. — MAI 1888.

Partant de cette idée, M. Foeppl arrive à cette conclusion que si  $\rho$  est la densité de l'électricité libre en un point de la surface du corps et  $\rho'$  la densité à une profondeur  $\delta$ , on a

$$\delta = \sqrt{\frac{c}{4\pi\varepsilon}} \log \frac{\rho}{\rho'}.$$

A une profondeur très faible, la densité  $\rho'$  devient très petite.

Je n'ai pas besoin de faire remarquer que les principes de M. Foeppl sont extrêmement différents de ceux qui sont développés dans le présent Mémoire. Le résultat auquel il parvient présente, avec les nôtres, cette seule analogie qu'il entraîne la présence d'une certaine quantité d'électricité à l'intérieur d'un conducteur aux points très voisins de la surface.

(*A suivre.*)

---