

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

P. DUHEM

## **Sur la pression électrique et les phénomènes électrocapillaires**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 6 (1889), p. 183-256.

<[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1889\\_3\\_6\\_\\_183\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1889_3_6__183_0)>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUR LA PRESSION ÉLECTRIQUE

## ET

# LES PHÉNOMÈNES ÉLECTROCAPILLAIRES,

PAR P. DUHEM.

### DEUXIÈME PARTIE.

DES PHÉNOMÈNES ÉLECTROCAPILLAIRES <sup>(1)</sup>.

#### CHAPITRE I.

DES PHÉNOMÈNES DITS ÉLECTROCAPILLAIRES. CAS DES CONDUCTEURS.

##### § I. — Historique.

1. Nous allons maintenant nous occuper de l'égalité (38) du Chapitre II, 1<sup>re</sup> Partie <sup>(1)</sup>. Cette égalité, qui doit être vérifiée en tous les points de la surface de contact  $\theta_{pq}$  de deux fluides conducteurs électrisés  $p$  et  $q$ , est la suivante :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial Y_p}{\partial \sigma_p} - T \frac{\partial \Sigma_p}{\partial \sigma_p} \right) - \nu_p + \psi_p + \chi_p + \beta_{pq} + \omega_p + \Omega D_p + A_{pq} \left( \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R'_p} \right) \\ = \left( \frac{\partial Y_q}{\partial \sigma_q} - T \frac{\partial \Sigma_p}{\partial \sigma_p} \right) - \nu_q + \psi_q + \chi_q + \beta_{qp} + \omega_q + \Omega D_q + A_{qp} \left( \frac{1}{R_q} + \frac{1}{R'_q} \right). \end{array} \right.$$

Il faut avoir soin d'y joindre les relations

$$\begin{aligned} R_p + R_q &= 0, \\ R'_p + R'_q &= 0, \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> Un résumé de ce Mémoire a paru aux *Comptes rendus*, le 3 janvier 1887.

<sup>(2)</sup> *Annales de l'École Normale supérieure*, 2<sup>e</sup> série, t. V, p. 119; 1888.

qui résultent de la manière dont les signes des rayons de courbure ont été définis.

Remarquons que la quantité

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} C_{pq} = & \left[ E \left( \frac{\partial Y_p}{\partial \sigma_p} - T \frac{\partial \Sigma_p}{\partial \sigma_p} \right) - E \left( \frac{\partial Y_q}{\partial \sigma_q} - T \frac{\partial \Sigma_q}{\partial \sigma_q} \right) \right] \\ & - (\nu_p - \nu_q) + (\psi_p - \psi_q) + (\chi_p - \chi_q) + (\beta_{pq} - \beta_{qp}) + (\omega_p - \omega_q) \end{aligned} \right.$$

a la même valeur en tous les points de la surface  $\theta_{pq}$ , et écrivons l'égalité (1) sous la forme suivante

$$(3) \quad (A_{pq} + A_{qp}) \left( \frac{1}{R_q} + \frac{1}{R_p} \right) + \Omega(D_q - D_p) = C_{pq}.$$

Nous reconnaissons sans peine l'équation aux dérivées partielles du second ordre qui détermine, ainsi que l'a montré Laplace, la forme de la surface de séparation de deux fluides. La seule modification qui se présente ici, c'est la substitution de la fonction  $\Omega$  à la fonction  $gz$ , employée par Laplace, qui n'est autre que la valeur de  $\Omega$  dans le cas particulier où les fluides sont soumis seulement à l'action de la pesanteur. C'est ce cas particulier que Laplace étudiait.

Le binôme  $(A_{pq} + A_{qp})$  représente donc la *constante capillaire* relative à la surface de séparation des deux fluides, ce que l'on nomme souvent la *tension superficielle* de ces deux fluides.

Dans l'égalité (3), la quantité  $C_{pq}$  définie par l'égalité (2) dépend non seulement de l'état que les deux corps  $p$  et  $q$  présentent loin des surfaces terminales, mais encore par les termes  $\psi_p, \psi_q, \chi_p, \chi_q, \nu_p, \nu_q$  du poids de ces corps, de l'étendue de leurs surfaces terminales, et par les termes  $\omega_p, \omega_q$  du poids de ces corps et des charges réparties sur les surfaces par lesquelles ils confinent avec l'isolant qui environne le système. On voit donc combien cette quantité  $C_{pq}$ , constante le long d'une même surface capillaire, varie d'une manière compliquée avec les diverses conditions de l'expérience.

Tout autrement en est-il de la quantité  $(A_{pq} + A_{qp})$ . Cette dernière dépend uniquement de l'état dans lequel les corps  $p$  et  $q$  se trouvent loin des surfaces qui les terminent. Si l'on remarque que ces corps ne renferment d'électricité qu'au voisinage même de leurs surfaces terminales, que par conséquent leur état interne est déterminé lorsqu'on

connaît leur température, la densité qu'ils présentent loin des surfaces terminales, et les paramètres dont la variation constitue ce qu'on nomme les *changements d'état physique ou d'état chimique*, sans que l'on ait besoin de connaître les charges réparties à leur surface ou au voisinage de leur surface, on verra sans peine que la connaissance de ces charges n'est pas non plus nécessaire pour connaître la valeur de  $(A_{pq} + A_{qp})$ .

Pour abréger le langage, disons que la *nature* d'un corps est déterminée lorsqu'on connaît sa température, la densité qu'il présente loin des surfaces terminales et la valeur de paramètres dont la variation constitue pour ce corps un changement d'état physique ou chimique. Nous pourrions alors énoncer le théorème suivant :

*La constante capillaire de la surface de contact de deux corps fluides conducteurs de nature déterminée est indépendante de leur état d'électrification.*

A ce théorème, joignons-en un autre que nous avons démontré ailleurs (1) en partant des principes qui ont servi de point de départ au présent Mémoire et dont il nous suffira de rappeler ici l'énoncé :

*Lorsque deux conducteurs de nature différente sont mis en communication directement ou par l'intermédiaire d'autres conducteurs à l'intérieur desquels l'électricité peut circuler sans déterminer de changements d'état, il s'établit entre ces deux conducteurs une différence de niveau potentiel qui est indépendante :*

- 1° *De la masse des deux conducteurs, de leur forme, de leur position relative;*
- 2° *De la grandeur et de la forme de la surface de contact;*
- 3° *Des charges distribuées sur chacun d'eux;*
- 4° *Enfin de la nature des conducteurs interposés.*

*Cette différence de niveau potentiel dépend uniquement de la nature des deux conducteurs entre lesquels elle s'établit.*

Il importait de rapprocher les deux théorèmes que nous venons d'énoncer, parce que tous deux ont été niés en même temps.

---

(1) *Le potentiel thermodynamique et ses applications*, III<sup>e</sup> Partie, Chap. I, p. 201 et suiv.



Rappelons dans quelles circonstances :

En 1845, M. Draper, professeur de Chimie à l'Université de New-York, publiait un Mémoire intitulé : *L'attraction capillaire est-elle un phénomène électrique* (1)? Dans ce Mémoire, il se proposait, entre autres problèmes, de prouver que « la batterie voltaïque a le pouvoir de contrarier les relations capillaires de certains corps ». Voici les expériences qu'il cite à l'appui de cette thèse :

« 1° Dans un verre de montre, on place une certaine quantité de mercure pur AB, et sur ce mercure on place une goutte d'eau C. On met l'eau en contact avec l'électrode positive en platine d'une batterie de vingt ou trente couples, et le mercure avec l'électrode positive. Au moment du contact, la goutte d'eau perd sa forme sphérique et se répand en un disque circulaire à la surface du mercure. Le diamètre de ce disque paraît être d'autant plus grand que la batterie est plus puissante.

» Dans les circonstances ordinaires, l'eau ne mouille pas le mercure; une goutte d'eau demeure à la surface du mercure comme une goutte d'huile à la surface de l'eau. On voit cependant que leurs relations électrochimiques étant troublées par la pile voltaïque, l'eau peut mouiller le mercure.

» 2° On fait un tube en forme de siphon renversé dont une branche, A, est large environ d'un demi-pouce, tandis que l'autre, B, ne mesure pas plus d'un dixième de pouce. Des tubes de cette forme sont employés pour montrer les effets ordinaires de l'attraction capillaire.

» On remplit le siphon jusqu'à une certaine hauteur AB avec du mercure. Le métal naturellement s'élève moins dans la branche étroite, car le niveau hydrostatique du mercure est déprimé dans un tube capillaire, le mercure ne mouillant pas le verre. On introduit une petite colonne d'eau dans la branche B. Le mercure peut être alors regardé comme en contact avec un tube d'eau, car ce liquide mouille la surface du verre, en se glissant entre elle et le mercure.

» Dans le tube étroit on introduit un mince fil de platine  $x$  jusqu'à

---

(1) John-William DRAPER, *Is capillary attraction an electric phenomenon?* (*Philosophical Magazine*, 3<sup>e</sup> série, t. XXVI, p. 185-189; 1845.)

ce qu'il touche l'eau; ce fil est en communication avec l'électrode positive d'une pile voltaïque; l'électrode négative touche le mercure dans la large branche du siphon A. A l'instant du contact, le métal monte dans la branche étroite B, et il retombe à sa position primitive aussitôt que l'on coupe le courant. »

Parmi les conséquences de sa proposition, Draper indique celle-ci :

« Si l'on place un large globule de mercure dans un verre de montre sous une couche d'eau renfermant un peu d'ammoniaque, si l'on met le métal en communication avec une électrode négative et l'eau avec une électrode positive, la figure du globule de mercure change et devient elliptique. Ce phénomène est dû à une augmentation de la pression qui s'exerce entre le métal et l'eau, la pression étant inégale aux différents points de la surface de contact et présentant un maximum dans les régions voisines de l'électrode positive.

» En même temps on voit se former dans l'eau des tourbillons spiralés; ils sont produits par un mouvement dont le siège est dans le globule de mercure, mouvement que l'on sait être en relation avec la présence de petites quantités de certains métaux. La marche de ces courants est déterminée par la figure du globule de mercure; leur existence est due aux pressions inégales que celui-ci subit de divers côtés. »

La déformation du mercure dont il est ici question avait été observée en 1800 par Henry, de Manchester; les tourbillons avaient été signalés en 1801 par Gerboin.

En 1873, M. G. Lippmann publiait un Mémoire, composé au laboratoire de G. Kirchhoff, intitulé : *Beziehungen zwischen den capillaren und elektrischen Erscheinungen* <sup>(1)</sup>; ce Mémoire, repris et développé deux ans plus tard comme thèse de doctorat sous le titre : *Relations entre les phénomènes électriques et capillaires* <sup>(2)</sup>, était destiné à la démonstration expérimentale des deux lois suivantes :

PREMIÈRE LOI. — *La constante capillaire à la surface de séparation du mercure et de l'acide sulfurique étendu est fonction de la différence électrique qui a lieu à cette surface.*

(1) *Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, t. CXLIX, p. 546; 1873.

(2) *Annales de Chimie et de Physique*, 5<sup>e</sup> série, t. V, p. 494; 1875.

DEUXIÈME LOI. — *Lorsque, par des moyens mécaniques, on déforme une surface liquide, la différence électrique de cette surface varie dans un sens tel que la tension superficielle développée en vertu de la première loi s'oppose à la continuation du mouvement.*

L'expérience fondamentale n'est autre que la deuxième expérience de Draper, mise sous une forme plus saisissante. Comme Draper, M. Lippmann déduit de cette expérience l'explication des déformations et des mouvements du mercure observés par Henry et Gerboin.

A l'exposé des expériences destinées à appuyer ces deux lois, M. Lippmann ajoute : « Aucune hypothèse n'a été invoquée, ni dans cette analyse, ni dans le reste du précédent travail ; c'est pour n'en pas introduire que je me suis abstenu de donner une théorie physique, une explication des propriétés qui ont été observées... L'hypothèse qui attribue la différence électrique à l'action chimique du courant (d'où les noms de *polarisation par l'hydrogène, par l'oxygène*) n'a été ni invoquée, ni discutée dans le présent travail ; j'essayerai ailleurs de montrer que l'action chimique et le phénomène électrique peuvent être produits séparément. »

Si M. Lippmann a cru devoir s'en tenir, sans autre essai de théorie, à l'interprétation proposée par lui des phénomènes qui se produisent au contact du mercure et de l'eau acidulée, le désaccord apparent ou réel qui existe entre les deux lois énoncées par M. Lippmann et les deux théorèmes auxquels nous sommes parvenu en nous appuyant exclusivement sur les lois de Coulomb, au moyen de déductions que nous avons cherché à rendre aussi rigoureuses que possible, nous impose le devoir de soumettre les phénomènes électrocapillaires à la plus soignée analyse, dans l'espoir de jeter quelque jour sur ce point obscur de l'Électrostatique.

Convaincu que, dans l'explication d'un phénomène physique, on doit appeler à son aide le moins grand nombre d'hypothèses, nous commencerons par supposer qu'aucune action chimique ne se produit dans les systèmes où se produisent les phénomènes électrocapillaires ; conformément à l'idée que M. Lippmann a indiquée à la fin du passage cité plus haut et que, jusqu'ici, il n'a pas confirmée par l'expérience,

nous chercherons si l'action chimique et le phénomène électrique peuvent être produits séparément, quitte à recourir à l'hypothèse de l'altération chimique des surfaces si nos recherches nous montrent que les faits observés demeurent inexplicables sans le secours de cette supposition.

La voie que nous abandonnons ainsi, au moins provisoirement, a été suivie par M. Quincke <sup>(1)</sup>, qui a attribué les phénomènes dits *électrocapillaires* à des altérations chimiques de la surface de contact entre le mercure et l'eau acidulée. M. H. von Helmholtz semble se ranger à l'opinion de M. G. Quincke <sup>(2)</sup>. Deux tentatives ont été faites, à notre connaissance, pour expliquer les phénomènes dits *électropillaires* sans faire intervenir l'hypothèse d'une altération chimique des surfaces. Ces deux tentatives sont dues l'une à M. G. van der Mensbrugghe, l'autre à M. Moutier.

M. G. van der Mensbrugghe <sup>(3)</sup> attribue une partie des phénomènes électrocapillaires aux variations de température qui accompagnent le changement de forme de la surface par laquelle deux fluides sont en contact. Cette explication ne s'applique, bien entendu, qu'à ceux des phénomènes électrocapillaires qui disparaissent avec le temps. Elle ne s'applique pas aux actions électrocapillaires qui se manifestent par la production d'états d'équilibre stable, semblables à ceux que l'on observe dans l'électromètre capillaire.

M. J. Moutier <sup>(4)</sup> attribue les phénomènes sur lesquels repose l'usage de l'électromètre capillaire à des variations subies par la densité des deux liquides en contact :

« L'origine de ces variations, dit-il, se trouve, ce me semble, dans

---

(1) G. QUINCKE, *Ueber elektrische Ströme bei ungleichzeitigen Eintauchen zweier Quecksilber-Elektroden in verschiedene Flüssigkeiten* (Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie, t. CLIII, p. 161; 1874).

(2) H. HELMHOLTZ, *Ueber galvanische Polarisation des Quecksilbers und darauf bezügliche neue Versuche des Hrn. Arthur König* (Monatsber. der Berl. Akad., 3 novembre 1881).

(3) G. VAN DER MENSBRUGGHE, *Application de la Thermodynamique à l'étude des variations d'énergie potentielle des surfaces liquides. Conséquences diverses* (Bulletins de l'Académie de Bruxelles, t. LI, p. 769; 1876).

(4) J. MOUTIER, *Sur l'électromètre capillaire de M. Lippmann* (Bulletin de la Société philomathique de Paris, 1880).

le phénomène de la dilatation électrique, sur lequel les expériences de M. Duter ont appelé récemment l'attention des physiciens.

» Considérons d'abord un corps conducteur à l'état neutre, à une certaine température, sous une certaine pression; le corps a un volume déterminé. Si l'on électrise ce corps, il éprouve, à la même température et à la même pression, un accroissement de volume par le fait même de l'électrisation : cet accroissement de volume est proportionnel au coefficient de compressibilité du corps conducteur et au potentiel de l'électricité. Ce potentiel de l'électricité est la moitié du produit de deux facteurs : la charge électrique du conducteur et le potentiel en un point du conducteur. Si la forme du conducteur varie peu, le potentiel en un point est proportionnel à la charge électrique, de sorte que l'électrisation d'un conducteur a pour effet de faire varier le volume de ce corps conducteur en raison du carré du potentiel de ce conducteur.

» En faisant varier le potentiel de l'un des liquides conducteurs qui entrent dans la construction de l'électromètre capillaire, on fera donc varier, d'après ce qui précède, le volume de chacun des deux liquides. Cette variation de volume est nécessairement très faible, elle ne peut affecter que dans une très faible mesure le poids spécifique des liquides; les poids spécifiques  $\delta$  et  $\delta'$  des deux liquides peuvent être regardés comme sensiblement invariables : il peut n'en pas être de même pour les actions capillaires.

» .....Un changement de volume très faible de l'un des liquides conducteurs pourra donc, sans modifier la densité des liquides d'une manière appréciable, entraîner un changement notable dans la valeur des constantes  $\alpha$  et  $i$ . Une variation de ces constantes entraîne une variation de la surface de séparation des deux liquides dans le tube capillaire. »

Sans discuter jusque dans ses derniers détails cette théorie, présentée d'ailleurs par M. J. Moutier comme un simple aperçu, on peut la résumer en disant qu'elle attribue les phénomènes électrocapillaires à la compression du mercure. Nous aurons tout à l'heure à examiner cette manière de voir, sous une forme un peu différente il est vrai, mais ayant cependant assez d'analogie avec la précédente pour qu'il nous soit permis de ne pas insister plus longuement sur celle-ci.

Dans le présent Chapitre, nous étudierons exclusivement des systèmes formés par des fluides conducteurs conduisant l'électricité sans électrolyse. C'est seulement au Chapitre suivant que nous examinerons les systèmes renfermant des électrolytes.

Si l'on nomme *phénomènes électrocapillaires* tous les phénomènes qui seraient compris dans les deux lois suivantes :

1° *La constante capillaire à la surface de séparation de deux fluides conducteurs non électrolysables, de nature déterminée, est fonction de la différence de niveau potentiel qui existe entre ces deux fluides ;*

2° *La différence de niveau potentiel qui existe entre deux fluides conducteurs non électrolysables lorsque l'équilibre électrique est établi en un système renfermant ces deux fluides dépend de la forme et de la grandeur de la surface de contact de ces deux fluides,*

on peut conclure avec assurance que les phénomènes électrocapillaires ne sauraient se produire dans un système qui ne renferme que des fluides non électrolysables.

Il ne résulte pas de là que de semblables systèmes ne puissent présenter des phénomènes analogues à ceux que Draper a découverts dans des systèmes renfermant du mercure et un électrolyte. Il résulte seulement de la conclusion à laquelle nous venons de parvenir que ces phénomènes, s'ils existent, sont susceptibles d'être représentés par des propositions autres que les deux lois précédentes.

Avant de chercher si les systèmes qui ne renferment pas d'électrolytes présentent des phénomènes analogues à ceux que M. G. Lippmann nomme *électrocapillaires*, rappelons brièvement quels sont les principaux caractères de ces derniers.

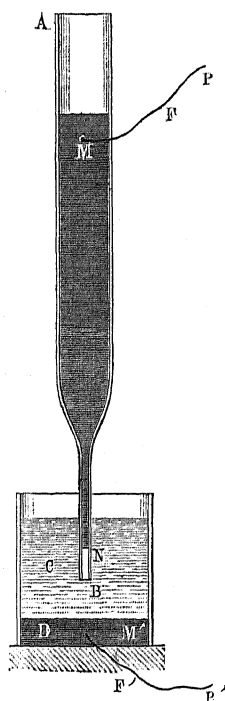
Un tube vertical AB (*fig. 1*) est rempli de mercure. L'extrémité inférieure de ce tube, effilée de manière à présenter un canal capillaire, plonge dans de l'eau acidulée C. Au-dessous de cette eau acidulée, se trouve une nouvelle couche de mercure D. Un fil de platine F aboutit en un point M du mercure supérieur; un autre fil F' aboutit en un certain point M' du mercure inférieur.

Les choses étant dans cet état, si l'on fait communiquer les deux fils F et F', soit entre eux, soit avec des sources au même niveau

potentiel, la séparation entre le mercure et l'eau acidulée se fait en un certain point N parfaitement déterminé du tube capillaire.

Si l'on met le fil F en communication avec une source à un certain niveau potentiel et le fil F' avec une source à un niveau potentiel moindre, on voit la séparation du mercure et de l'eau acidulée dans le tube capillaire s'abaisser au-dessous du point N. Si la différence entre les niveaux potentiels des fils F et F' est assez considérable, le mercure finit par s'écouler par le bec effilé B.

Fig. 1.



Si, au contraire, on porte le fil F' à un niveau potentiel supérieur à celui de F, on voit le mercure remonter dans le tube capillaire au-dessous du point N, d'autant plus haut que la différence du niveau potentiel est plus grande. On ne peut ramener la surface de séparation en N qu'en augmentant la pression au sommet de la colonne de mercure.

A l'inverse des phénomènes précédents, si, en faisant varier la pression au sommet de la colonne de mercure, on vient à élever ou à

abaisser la surface de contact du mercure et de l'eau acidulée dans le tube capillaire, la différence de niveau potentiel qui existe entre les deux fils F et F' subit des variations. Ces variations sont celles qui, appliquées de l'extérieur aux fils F et F', produiraient dans l'appareil des déplacements du mercure inverses de ceux qui leur ont donné naissance.

Un système formé exclusivement de liquides conducteurs, conduisant l'électricité sans électrolyse, peut-il présenter dans des circonstances analogues à celles que nous venons de préciser des phénomènes semblables à ceux que nous venons de décrire?

Quelque inégal que soit le degré de compression des différents points du système, si ce système est formé exclusivement de corps conduisant l'électricité sans électrolyse, si de plus l'équilibre électrique est établi sur tous ces corps, la quantité  $(\epsilon V + \Theta)$  doit avoir la même valeur en tous les points du système.

Prenons un point P à l'intérieur du fil de platine F en dehors de l'appareil décrit précédemment; prenons de même un point P' à l'intérieur du fil de platine F' en dehors de l'appareil. Les deux points P et P' sont à l'intérieur de la même substance, portée à la même température, soumise à la même pression qui est la pression extérieure.  $\Theta$  aura la même valeur en ces deux points. Il en sera de même de V, quelle que soit la position de la surface de séparation entre les deux liquides dans le tube capillaire et quelle que soit la pression exercée sur le liquide supérieur. Par conséquent, aucune théorie ne peut rendre compte des phénomènes capillaires si, dans cette théorie, on regarde les conducteurs comme non électrolysables et si l'on suppose l'équilibre électrique établi sur ces conducteurs. Nous devons nécessairement renoncer à toute théorie qui, comme la théorie proposée par M. Moutier, se trouverait dans ces conditions.

## § II. — Distribution de l'électricité sur des conducteurs traversés par des courants permanents.

2. Si les conducteurs non électrolysables ne peuvent, dans l'état d'équilibre électrique, présenter des phénomènes analogues à ceux



dont un électromètre capillaire est le siège, peut-être peuvent-ils manifester de semblables phénomènes lorsqu'ils sont traversés par des courants permanents. Mais les calculs effectués précédemment pour découvrir les conditions d'équilibre de fluides conducteurs lorsque l'électricité est en équilibre sur ces fluides ne s'appliquent plus au cas où les conducteurs étudiés sont traversés par des courants permanents. Nous sommes donc amenés à reprendre une étude analogue à celle que nous avons faite dans les Chapitres précédents pour le cas où l'équilibre électrique est établi.

Nous avons commencé l'étude des systèmes sur lesquels l'électricité est en équilibre en déterminant les lois suivant lesquelles l'électricité se distribue sur ces systèmes. Cette étude a fait l'objet du Chapitre I de la première Partie. Nous allons déterminer de même la distribution de l'électricité sur un système de conducteurs traversés par des courants uniformes.

Soient, à l'instant  $t$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  les composantes du flux électrique en un point  $(x, y, z)$  du système. Traçons à l'intérieur du système une surface fermée. Soit  $d\sigma$  un élément de cette surface fermée. Soit  $N_i$  la normale à la surface, en un point de l'élément  $d\sigma$ , cette normale étant dirigée vers l'intérieur de la surface. Soient  $(N_i, x)$ ,  $(N_i, y)$ ,  $(N_i, z)$  les angles que cette normale forme avec les directions positives des axes de coordonnées. La quantité d'électricité qui entre dans la surface pendant le temps  $dt$  au travers de l'élément  $d\sigma$  a pour valeur

$$[\vartheta \cos(N_i, x) + \varphi \cos(N_i, y) + \psi \cos(N_i, z)] d\sigma dt.$$

Si les courants qui traversent le système sont uniformes, la quantité d'électricité qui entre pendant le temps  $dt$  dans une surface fermée doit être égale à celle qui en sort pendant le même temps. On doit donc avoir, pour toute surface fermée,

$$\oint [\vartheta \cos(N_i, x) + \varphi \cos(N_i, y) + \psi \cos(N_i, z)] d\sigma = 0.$$

Supposons que la surface fermée à laquelle s'étend l'intégration qui figure dans cette égalité soit tout entière située à l'intérieur d'un domaine dans lequel  $\vartheta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  sont des fonctions continues et admettent

des dérivées partielles du premier ordre. Nous aurons alors

$$\begin{aligned} & \oint [\wp \cos(N_i, x) + \varphi \cos(N_i, y) + \Psi \cos(N_i, z)] d\sigma \\ &= - \iiint \left( \frac{\partial \wp}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) dx dy dz, \end{aligned}$$

l'intégrale triple s'étendant au volume entier compris à l'intérieur de la surface fermée. On a donc, pour ce volume entier,

$$\iiint \left( \frac{\partial \wp}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) dx dy dz = 0,$$

et, comme la forme de la surface qui limite ce volume est arbitraire, on voit que l'on a, en tout point où  $\wp$ ,  $\varphi$ ,  $\Psi$  et leurs dérivées partielles du premier ordre sont continues,

$$(1) \quad \frac{\partial \wp}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0.$$

Cette équation de continuité, bien connue d'ailleurs, sera d'un continuel usage dans ce qui va suivre.

Des courants uniformes et permanents traversant un système de conducteurs immobiles, cherchons quel est le travail non compensé  $d\mathfrak{E}$  produit dans le système pendant le temps  $dt$ .

Les conducteurs étant immobiles, les forces extérieures qui peuvent solliciter le système n'effectuent aucun travail. Le travail non compensé  $d\mathfrak{E}$  a donc pour valeur

$$d\mathfrak{E} = - \frac{d}{dt} \left[ E(Y - T\Sigma) + W + \sum \Theta q \right] dt,$$

les diverses lettres qui figurent dans cette égalité ayant la même signification que dans l'égalité (4) (I<sup>re</sup> Partie, Chap. II).

Pendant le temps  $dt$ , le terme  $E(Y - T\Sigma)$  n'éprouve aucune variation, puisque les conducteurs, qui ne sont pas électrolysables, n'éprouvent aucun changement d'état.

Si l'on désigne par  $V$  la valeur de la fonction potentielle au point  $(x, y, z)$ , il est facile de voir que l'on aura

$$(2) \quad d\mathfrak{E} = - dt \iiint \left[ \wp \frac{\partial(\epsilon V + \Theta)}{\partial x} + \varphi \frac{\partial(\epsilon V + \Theta)}{\partial y} + \Psi \frac{\partial(\epsilon V + \Theta)}{\partial z} \right] dx dy dz.$$

Le principe fondamental sur lequel repose l'étude de l'électricité galvanique s'énonce de la manière suivante <sup>(1)</sup> :

*Le travail non compensé produit pendant l'unité de temps dans un segment de conducteur traversé par un courant d'intensité I, au sein d'un système formé de corps immobiles, traversés par des courants fermés, uniformes, constants, invariables de forme et de position, est égal au produit de la résistance R du conducteur par le carré de l'intensité du courant.*

Si l'on désigne par K la résistance spécifique du conducteur au point  $(x, y, z)$ , l'extension de ce principe au cas qui nous occupe nous donne l'égalité

$$(3) \quad d\mathcal{E} = dt \iiint K (\mathfrak{v}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2) dx dy dz.$$

L'égalité que l'on obtient en comparant les deux égalités (2) et (3) est certainement vérifiée si l'on pose

$$(4) \quad \begin{cases} \mathfrak{v} = -\frac{1}{K} \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon V + \Theta), \\ \mathfrak{y} = -\frac{1}{K} \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon V + \Theta), \\ \mathfrak{z} = -\frac{1}{K} \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon V + \Theta). \end{cases}$$

Ces égalités (4) sont les équations du mouvement de l'électricité. Elles redonnent comme condition d'équilibre

$$\varepsilon V + \Theta = \text{const.},$$

c'est-à-dire l'égalité dont nous avons fait jusqu'ici un constant usage.

Les égalités (4) supposent que la fonction  $(\varepsilon V + \Theta)$  soit finie et uniforme en tous les points de l'espace occupé par les conducteurs, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre. Au contraire, la résistance K peut être discontinue le long des surfaces qui séparent

---

<sup>(1)</sup>. *Le potentiel thermodynamique et ses applications*, III<sup>e</sup> Partie, Chap. III, § II. — *Applications de la Thermodynamique aux phénomènes thermo-électriques et pyro-électriques*. I<sup>re</sup> Partie : *Phénomènes thermo-électriques*, § II (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3<sup>e</sup> série, t. II).

deux conducteurs de nature différente. Les quantités  $\vartheta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  peuvent être aussi discontinues le long de ces mêmes surfaces. Admettons qu'à l'intérieur de chacun des conducteurs les quantités  $K$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  soient continues et admettent en chaque point les dérivées premières finies. Nous aurons, en tout point pris à l'intérieur d'un conducteur,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vartheta}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{K} \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon V + \Theta) \right], \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{K} \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon V + \Theta) \right], \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{K} \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon V + \Theta) \right].\end{aligned}$$

L'égalité (1) devient donc

$$\varepsilon \Delta V + \Delta \Theta - \frac{1}{K} \left[ \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial (\varepsilon V + \Theta)}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} \frac{\partial (\varepsilon V + \Theta)}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial z} \frac{\partial (\varepsilon V + \Theta)}{\partial z} \right] = 0.$$

Or, si l'on désigne par  $\rho$  la densité électrique au point  $(x, y, z)$ , on a

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \Delta V.$$

On a donc, en tout point pris à l'intérieur d'un conducteur traversé par des courants uniformes et constants,

$$(5) \quad \rho = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \Delta \Theta - \frac{1}{4\pi K\varepsilon} \left[ \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial (\varepsilon V + \Theta)}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} \frac{\partial (\varepsilon V + \Theta)}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial z} \frac{\partial (\varepsilon V + \Theta)}{\partial z} \right].$$

Or, dans l'état d'équilibre, on a [1<sup>re</sup> Partie, Chap. I, égalité (9)]

$$\rho = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \Delta \Theta.$$

Ainsi, *dans un conducteur non homogène traversé par un courant uniforme et constant, la densité électrique en chaque point n'a pas la valeur qu'elle a au même point, dans le même conducteur, lorsque l'équilibre est établi.* C'est seulement dans le cas particulier du conducteur homogène que, conformément à un théorème connu dû à G. Kirchhoff, ces

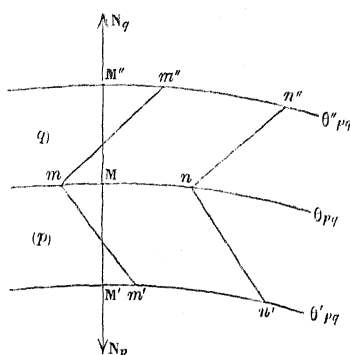
deux densités deviennent égales entre elles et égales à zéro; car on a alors

$$\Delta\Theta = 0, \\ \frac{\partial K}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial z} = 0.$$

Les raisonnements précédents ne s'appliquent plus à un point M situé sur une surface  $\theta_{pq}$  séparant deux conducteurs  $p$  et  $q$  de nature différente; car, au point M, les quantités  $K$ ,  $\varpi$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  peuvent être discontinues.

Comme nous l'avons fait si souvent dans des circonstances analogues, menons deux surfaces parallèles à la surface  $\theta_{pq}$ , infiniment voisines de la surface  $\theta_{pq}$ : l'une,  $\theta'_{pq}$ , à l'intérieur du fluide  $p$ ; l'autre,  $\theta''_{pq}$ , à l'intérieur du fluide  $q$ . Par le point M, menons une normale à la sur-

Fig. 2.



face  $\theta_{pq}$ . Elle rencontre la surface  $\theta'_{pq}$  en M' et la surface  $\theta''_{pq}$  en M'' (fig. 2).

Soient

$K_p$  la résistance spécifique du conducteur  $p$  au point M';

$K_q$  la résistance spécifique du conducteur  $q$  au point M'';

$\frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial N_p}$  la valeur au point M' de la dérivée de la fonction  $(\varepsilon V + \Theta)$  suivant la direction MM';

$\frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial N_q}$  la valeur au point M'' de la dérivée de la même fonction suivant MM''.

Autour du point M, sur la surface  $\theta_{pq}$ , prenons un élément  $mn$  d'aire

$d\theta_{pq}$ . Par tous les points du contour de cet élément, menons les lignes de flux tant à l'intérieur du corps  $p$  qu'à l'intérieur du corps  $q$ . Ces lignes découpent sur la surface  $\theta'_{pq}$  un élément  $m'n'$ , infiniment voisin du point  $M'$ , dont l'aire diffère infiniment peu de  $d\theta_{pq}$ , et sur la surface  $\theta''_{pq}$  un élément  $m''n''$ , infiniment voisin du point  $M''$ , dont l'aire diffère également très peu de  $d\theta_{pq}$ .

Examinons la surface fermée ayant pour profil sur le plan de la figure  $m'mm''n''nn'$ . La quantité d'électricité qui entre dans cette surface pendant le temps  $dt$  par l'élément  $m'n'$  a pour valeur

$$\frac{1}{K_p} \frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial N_p} d\theta_{pq} dt.$$

La quantité d'électricité qui entre dans la même surface pendant le même temps par l'élément  $m''n''$  a pour valeur

$$\frac{1}{K_q} \frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial N_q} d\theta_{pq} dt.$$

Les parties latérales de cette surface ne sont pas traversées par l'électricité.

Si donc on exprime que cette surface fermée reçoit pendant l'unité de temps autant d'électricité qu'elle en laisse échapper, on obtient l'égalité

$$(6) \quad \frac{1}{K_p} \frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial N_p} + \frac{1}{K_q} \frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial N_q} = 0.$$

Si l'on désigne par  $\rho$  la densité superficielle en  $M$  de l'électricité accumulée sur la surface  $\theta_{pq}$ , on aura

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial V}{\partial N_q} + \frac{\partial V}{\partial N_p} \right).$$

D'ailleurs,  $\Theta$  étant continu dans tout l'espace, ainsi que ses dérivées partielles, on a

$$\frac{\partial \Theta}{\partial N_p} + \frac{\partial \Theta}{\partial N_q} = 0.$$

L'égalité (6) devient donc

$$\frac{1}{K_p} \frac{\partial V}{\partial N_p} + \frac{1}{K_q} \frac{\partial V}{\partial N_q} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Theta}{\partial N_p} \left( \frac{1}{K_p} - \frac{1}{K_q} \right) = 0,$$

et l'on a

$$(7) \quad \rho = \frac{K_q}{4\pi\varepsilon} \frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial N_p} \left( \frac{1}{K_p} - \frac{1}{K_q} \right).$$

Cette densité  $\rho$  peut encore s'exprimer d'une autre manière.

D'après l'égalité (6), les deux quantités  $\frac{1}{K_p} \frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial N_p}$  et  $-\frac{1}{K_q} \frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial N_q}$  ont la même valeur; si l'on désigne par  $i_{pq}$  cette valeur, il est facile de voir que  $i_{pq} d\theta_{pq} dt$  représentera la quantité d'électricité qui passe pendant le temps  $dt$  du corps  $p$  au corps  $q$  au travers de l'élément  $d\theta_{pq}$ ;  $i_{pq}$  sera donc le flux électrique normal à la surface  $\theta_{pq}$  au point M. L'égalité (7) pourra alors s'écrire

$$(8) \quad \rho = \frac{1}{4\pi\varepsilon} (K_q - K_p) i_{pq}.$$

*La surface qui sépare deux conducteurs traversés par des courants uniformes porte une couche électrique. La densité de cette couche électrique est, en chaque point, proportionnelle au flux électrique normal en ce point et à la différence des résistances spécifiques des deux conducteurs au voisinage immédiat de ce point.*

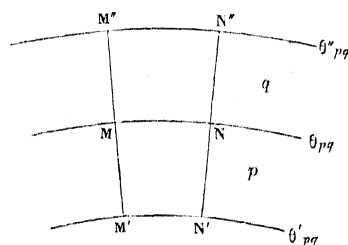
Ainsi, lorsque des conducteurs, homogènes jusqu'au voisinage des surfaces qui les séparent les uns des autres, sont traversés par des courants uniformes et constants, il n'existe pas d'électricité en un point quelconque pris à l'intérieur de l'un de ces conducteurs à une distance supérieure à  $(\lambda + \mu)$  des surfaces qui le limitent. C'est seulement sur les surfaces qui séparent ces conducteurs les uns des autres et aux divers points dont la distance à ces surfaces est inférieure à  $(\lambda + \mu)$  que l'électricité se trouve accumulée.

En un point situé à l'intérieur du corps  $p$ , à une distance  $l$ , inférieure à  $(\lambda + \mu)$ , du corps  $q$ , l'électricité a pour densité, d'après la formule (5),

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho(p, q, l) = & \frac{1}{4\pi\varepsilon} \Delta \Theta(p, q, l) \\ & - \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{K(p, q, l)} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial K(p, q, l)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} [\varepsilon V + \Theta(p, q, l)] \\ & + \frac{\partial K(p, q, l)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} [\varepsilon V + \Theta(p, q, l)] \\ & + \frac{\partial K(p, q, l)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} [\varepsilon V + \Theta(p, q, l)] \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Menons deux surfaces parallèles à la surface  $\theta_{pq}$  et situées à une distance  $(\lambda + \mu)$  de cette surface; l'une,  $\theta'_{pq}$ , est à l'intérieur du corps  $p$ ; l'autre,  $\theta''_{pq}$ , est à l'intérieur du corps  $q$ . Sur la surface  $\theta_{pq}$ , prenons un élément  $MN$  (fig. 3) d'aire  $d\theta_{pq}$ . Par tous les points de contour de cet

Fig. 3.



élément, menons des normales à la surface  $\theta_{pq}$ . Ces normales détachent sur la surface  $\theta'_{pq}$  un élément  $M'N'$  et sur la surface  $\theta''_{pq}$  un élément  $M''N''$ . Cherchons la quantité d'électricité que renferme la surface fermée ayant pour profil sur le plan de la figure  $M'N'N''M''$ , en négligeant dans ce calcul le rapport de  $(\lambda + \mu)$  aux rayons de courbure de la surface  $\theta_{pq}$ .

D'après l'égalité (9), la quantité d'électricité qui se trouve à l'intérieur de la surface  $MNN'M'$  a pour valeur

$$\begin{aligned} d\theta_{pq} \int_0^{(\lambda+\mu)} \rho(p, q, l) dl \\ = \frac{d\theta_{pq}}{4\pi\epsilon} \int_0^{(\lambda+\mu)} \Delta \Theta(p, q, l) dl \\ - \frac{d\theta_{pq}}{4\pi\epsilon} \int_0^{(\lambda+\mu)} \frac{1}{K(p, q, l)} \left\{ \frac{\partial K(p, q, l)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} [\epsilon V + \Theta(p, q, l)] \right. \\ + \frac{\partial K(p, q, l)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} [\epsilon V + \Theta(p, q, l)] \\ \left. + \frac{\partial K(p, q, l)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} [\epsilon V + \Theta(p, q, l)] \right\} dl. \end{aligned}$$

D'après les égalités (4), si l'on désigne par  $i(p, q, l)$  le flux suivant la normale à la surface  $\theta_{pq}$  en un point intérieur à la surface  $MNM'N'$ , ce point étant à une distance  $l$  de  $\theta_{pq}$ , cette égalité peut s'écrire

$$d\theta_{pq} \int_0^{(\lambda+\mu)} \rho(p, q, l) dl = \frac{d\theta_{pq}}{4\pi\epsilon} \int_0^{(\lambda+\mu)} \left[ \Delta \Theta(p, q, l) - i(p, q, l) \frac{\partial K(p, q, l)}{\partial l} \right] dl.$$



Le flux  $i(p, q, l)$  est compté comme positif lorsqu'il est dirigé du corps  $p$  vers le corps  $q$ .

De même, la surface  $MNN''M''$  renferme à son intérieur une quantité d'électricité

$$d\theta_{pq} \int_0^{(\lambda+\mu)} \rho(q, p, l) dl = \frac{d\theta_{pq}}{4\pi\varepsilon} \int_0^{(\lambda+\mu)} \left[ \Delta\Theta(q, p, l) - i(q, p, l) \frac{\partial K(q, p, l)}{\partial l} \right] dl.$$

Enfin, d'après l'égalité (8) et en faisant usage des notations employées dans les dernières égalités, sur l'élément  $MN$  est distribuée une quantité d'électricité

$$\frac{d\theta_{pq}}{4\pi\varepsilon} [K(q, p, 0) - K(p, q, 0)] i(p, q, 0).$$

La quantité d'électricité que nous voulons calculer a donc pour valeur

$$\begin{aligned} Q = \frac{d\theta_{pq}}{4\pi\varepsilon} \left\{ \int_0^{(\lambda+\mu)} [\Delta\Theta(p, q, l) + \Delta\Theta(q, p, l)] dl \right. \\ \left. - \int_0^{(\lambda+\mu)} i(p, q, l) \frac{\partial K(p, q, l)}{\partial l} dl - i(p, q, 0) K(p, q, 0) \right. \\ \left. - \int_0^{(\lambda+\mu)} i(q, p, l) \frac{\partial K(q, p, l)}{\partial l} dl - i(q, p, 0) K(q, p, 0) \right\}. \end{aligned}$$

La quantité

$$\frac{d\theta_{pq}}{4\pi\varepsilon} \int_0^{(\lambda+\mu)} [\Delta\Theta(p, q, l) + \Delta\Theta(q, p, l)] dl$$

représente la quantité d'électricité que renfermerait la surface fermée  $M'N'N''M''$ , si l'équilibre électrique était établi sur les conducteurs considérés. Nous avons vu au Chapitre I de la I<sup>re</sup> Partie que cette quantité est égale à 0.

Une intégration par parties nous donne

$$\begin{aligned} \int_0^{(\lambda+\mu)} i(p, q, l) \frac{\partial K(p, q, l)}{\partial l} dl + i(p, q, 0) K(p, q, 0) \\ = i(p, q, \lambda + \mu) K(p, q, \lambda + \mu) - \int_0^{(\lambda+\mu)} K(p, q, l) \frac{\partial i(p, q, l)}{\partial l} dl. \end{aligned}$$

Mais il est facile de voir que la dernière intégrale est de l'ordre de

$(\lambda + \mu)$  et peut, par suite, être négligée. On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^{(\lambda+\mu)} i(p, q, l) \frac{\partial K(p, q, l)}{\partial l} dl + i(p, q, 0) K(p, q, 0) \\ = i(p, q, \lambda + \mu) K(p, q, \lambda + \mu) \end{aligned}$$

et, de même,

$$\begin{aligned} \int_0^{(\lambda+\mu)} i(q, p, l) \frac{\partial K(q, p, l)}{\partial l} dl + i(q, p, 0) K(q, p, 0) \\ = i(q, p, \lambda + \mu) K(q, p, \lambda + \mu). \end{aligned}$$

On a donc, en remarquant que

$$i(p, q, \lambda + \mu) + i(q, p, \lambda + \mu)$$

est une quantité négligeable de l'ordre de  $\lambda + \mu$ ,

$$(10) \quad Q = \frac{d\theta_{pq}}{4\pi\varepsilon} [K(q, p, \lambda + \mu) - K(p, q, \lambda + \mu)] i_{pq}.$$

Il est intéressant de comparer les résultats que nous venons d'obtenir à ceux que nous avons obtenus au Chapitre I de la I<sup>re</sup> Partie en étudiant les conducteurs sur lesquels l'équilibre est établi.

Lorsque l'équilibre électrique est établi sur le système qui renferme les conducteurs  $p$  et  $q$ , la densité électrique en un point de la surface  $\theta_{pq}$  a pour valeur (*voir t. V, p. 113*)

$$\rho = 0,$$

et la quantité  $Q$  d'électricité que renferme le volume  $M'N'N''M''$  (*fig. 3*) a pour valeur (*voir t. V, p. 114*)

$$Q = 0.$$

Lorsque le même système est traversé par des courants uniformes, on a, en vertu de l'égalité (8),

$$\rho = \frac{I}{4\pi\varepsilon} [K(q, p, 0) - K(p, q, 0)] i_{pq}$$

et, en vertu de l'égalité (10),

$$Q = \frac{d\theta_{pq}}{4\pi\varepsilon} [K(q, p, \lambda + \mu) - K(p, q, \lambda + \mu)] i_{pq}.$$

L'analogie des expressions obtenues pour  $\rho$  et  $Q$  dans le premier cas se retrouve dans le second.

§ III. — Forme d'équilibre de fluides traversés par des courants permanents.

Après avoir étudié la distribution de l'électricité sur un système de conducteurs homogènes parcourus par des courants uniformes, nous allons nous occuper du problème suivant :

Des fluides conducteurs, conduisant l'électricité sans électrolyse, 1, 2, 3, ...,  $n$ , sont en contact les uns avec les autres, avec l'isolant parfait 0 qui limite le système et avec des électrodes solides  $n + 1$ ,  $n + 2$ , ...,  $n'$  qui amènent des courants uniformes et constants et qui les emmènent. Cherchons à quelle condition la forme des divers fluides 1, 2, 3, ...,  $n$  est une forme stable.

Il est facile de voir que cette condition sera obtenue, si l'on imagine toutes les charges électriques que porte le système fixées dans la position qu'elles occupent à un instant déterminé, et si l'on exprime que le travail non compensé produit dans une déformation virtuelle quelconque du système est égal à 0, en supposant tous les courants interrompus pendant la durée de cette modification virtuelle.

Imaginons, en effet, une semblable modification virtuelle, et soit  $\delta\mathcal{E}$  le travail non compensé défini comme nous venons de le faire. Supposons que l'on ait imposé au système cette modification. Pour que l'état du système soit un état stable, il faut que le système puisse revenir à sa position primitive. Cherchons quel travail non compensé il effectuera dans ce retour.

Ce retour dure un temps  $dt$ . Si l'on désigne par  $R$  la résistance d'un élément de courant du système, et par  $J$  l'intensité du courant qui traverse cet élément, il est aisé de voir que le travail non compensé effectué dans ce retour a pour valeur

$$-d\mathcal{E} + \sum R J^2 dt,$$

le signe  $\sum$  s'étendant à tous les éléments de courant du système. Par conséquent, pour que le retour en question soit possible, il faut que

l'on ait

$$+ d\mathfrak{E} + \sum \mathbf{R}\mathbf{J}^2 dt > 0.$$

Mais on peut supposer aussi que l'on ait donné tout d'abord au système une modification virtuelle inverse de la précédente. Le système doit pouvoir encore revenir à son état primitif; on doit donc avoir aussi

$$- d\mathfrak{E} + \sum \mathbf{R}\mathbf{J}^2 dt' > 0.$$

Les deux inégalités que nous venons d'écrire sont certainement vérifiées si l'on a

$$d\mathfrak{E} = 0.$$

Si donc cette dernière égalité est vérifiée, on voit que la forme des divers fluides qui composent le système est certainement stable.

Nous donnons donc aux divers fluides des dilatations et des déformations infiniment petites en maintenant constantes la densité et la forme des solides, les lignes de raccordement des surfaces de séparation des solides avec les liquides, des liquides entre eux et des liquides avec l'isolant qui entoure le système. Nous écrivons que le travail non compensé produit est égal à 0. Nous obtenons alors l'égalité suivante, semblable à l'égalité (6) du Chapitre II de la I<sup>re</sup> Partie (t. V, p. 126) :

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta\mathfrak{Z} &= \delta \sum_{l=1}^{l=n'} \mathbf{E}\mathbf{M}_l (\Upsilon_l - \mathbf{T}\Sigma_l) \\ &+ \delta \left[ \sum_{l=1}^{l=n'} \mathbf{A}_{l0} \Theta_{l0} + \sum_{l,q} (\mathbf{A}_{lq} + \mathbf{A}_{q'l}) \Theta_{lq} \right] \\ &+ \delta \mathbf{W} + \delta \sum \Theta \mathbf{Q}. \end{aligned} \right.$$

Dans cette égalité, le symbole  $\sum_{l,q}$  indique une sommation étendue à toutes les combinaisons des indices 1, 2, ..., n, ..., n', deux à deux.

Le premier membre,  $\delta\mathfrak{Z}$ , de cette égalité a la valeur même qui a été calculée au Chapitre II de la I<sup>re</sup> Partie, valeur donnée par les éga-

lités (32) et (34) (t. V, p. 138 et 139)

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta \mathfrak{Z} = & - \sum_{p=1}^{p=n} \left[ \mathbf{S} (P + \Omega D_p) \delta N_p d\theta_{p0} + \sum_q \mathbf{S} \Omega D_p \delta N_p d\theta_{pq} - \nu_p \sum_r \mathbf{S} \delta N_p d\theta_{pr} \right], \\ & (q = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n), \\ & (r = 0, 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n), \end{aligned} \right.$$

la quantité  $\nu_p$  étant définie par l'égalité (33) du Chapitre II de la I<sup>re</sup> Partie (t. V, p. 139).

Le premier terme du second membre se partage en une somme de deux termes analogues :

$$\delta \sum_{l=1}^{l=n'} \mathbf{E}(\Upsilon_l - T \Sigma_l) = \delta \sum_{p=1}^{p=n} \mathbf{E}(\Upsilon_p - T \Sigma_p) + \delta \sum_{l=n+1}^{l=n'} \mathbf{E}(\Upsilon_l - T \Sigma_l).$$

Le premier terme est déterminé par l'égalité (8) du Chapitre II de la I<sup>re</sup> Partie (t. V, p. 127). Quant au second terme, si l'on suppose les solides absolument invariables, il est égal à 0. On a donc

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta \sum_{l=1}^{l=n'} \mathbf{E}(\Upsilon_l - T \Sigma_l) = & \mathbf{E} \sum_{p=1}^{p=n} \left[ \left( \frac{\partial \Upsilon_p}{\partial \sigma_p} - T \frac{\partial \Sigma_p}{\partial \sigma_p} \right) \sum_r \mathbf{S} \delta N_p d\theta_{pr} \right] \\ & (r = 0, 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n). \end{aligned} \right.$$

La quantité

$$\delta \left[ \sum_{l=1}^{l=n'} \mathbf{A}_{l0} \theta_{l0} + \sum_{lq} (\mathbf{A}_{lq} + \mathbf{A}_{ql}) \theta_{lq} \right],$$

qui forme le deuxième terme du second membre de l'égalité (11), est la somme de trois termes analogues. Ces trois termes sont :

En premier lieu, le terme

$$\delta \left[ \sum_{p=1}^{p=n} \mathbf{A}_{p0} \theta_{p0} + \sum_{pq} (\mathbf{A}_{pq} + \mathbf{A}_{qp}) \theta_{pq} \right],$$

le signe  $\sum_{pq}$  indiquant une sommation qui s'étend à toutes les combinaisons des indices 1, 2, ..., n, deux à deux;

En second lieu, le terme

$$\delta \sum_{pq} (\mathbf{A}_{pq} + \mathbf{A}_{qp}) \theta_{pq},$$

le signe  $\sum_{pq}$  indiquant une sommation qui s'étend à toutes les combinaisons des indices  $n+1, \dots, n'$ , deux à deux;

En troisième lieu, le terme

$$\delta \sum_{p=n+1}^{p=n'} \left[ A_{p0} \theta_{p0} + \sum_{q=1}^{q=n} (A_{pq} + A_{qp}) \theta_{pq} \right].$$

La nature et la forme des divers corps solides que renferme le système étant invariables, le deuxième terme est égal à zéro; les lignes suivant lesquelles les surfaces de séparation des divers fluides se raccordent avec les surfaces limites des solides demeurant invariables, le troisième terme se réduit à

$$\sum_{p=1}^{p=n} \sum_{q=n+1}^{q=n'} \frac{1}{M_p} \left( \frac{\partial A_{pq}}{\partial \sigma_p} + \frac{\partial A_{qp}}{\partial \sigma_p} \right) \theta_{pq} S d\theta_{pq} \delta N_p.$$

Quant à la valeur du premier terme, elle est donnée par une égalité analogue à l'égalité (13) du Chapitre II de la I<sup>re</sup> Partie (t. V, p. 129). On a donc

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & \delta \left[ \sum_{l=1}^{l=n'} A_{l0} \theta_{l0} + \sum_{lq} (A_{lq} + A_{ql}) \theta_{lq} \right] \\ &= \sum_{p=1}^{p=n} \left\{ S \left[ A_{p0} \left( \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R_p'} \right) + \psi_p \right] \delta N_p d\theta_{p0} \right. \\ & \quad \left. + \sum_q S \left[ A_{pq} \left( \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R_p'} \right) + \psi_p \right] \delta N_p d\theta_{pq} + \sum_{q'} S \psi_p \delta N_p d\theta_{pq'} \right\} \\ & \quad (q=1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n), \quad (q'=n+1, n+2, \dots, n'). \end{aligned} \right.$$

Dans cette égalité (14),  $\psi_p$  est défini par une égalité analogue à l'égalité (12) du Chapitre II de la I<sup>re</sup> Partie (t. V, p. 129),

$$(15) \quad \psi_p = \frac{1}{M_p} \left[ \theta_{p0} \frac{\partial A_{p0}}{\partial \sigma_p} + \sum_r \theta_{pr} \frac{\partial (A_{pr} + A_{rp})}{\partial \sigma_p} \right] \\ (r=0, 1, \dots, p-1, p+1, \dots, n; n+1, \dots, n').$$

L'évaluation des quantités  $\delta W$  et  $\delta \sum \Theta Q$  conduit à des résultats assez notablement différents de ceux qui ont été obtenus au Chapitre II de la I<sup>re</sup> Partie.

Considérons en premier lieu la quantité  $\delta W$ .

Cette quantité est égale, au signe près, au travail pondéromoteur effectué, durant la modification considérée, par les forces définies par la loi de Coulomb. Ces forces sont de deux sortes : les unes agissent sur les divers éléments des surfaces électrisées, les autres sur les divers éléments de volume des conducteurs.

Lorsqu'en un point d'une surface l'électricité a une densité superficielle  $\rho$ , l'action exercée en ce point, en vertu des lois de Coulomb, est une action normale, dirigée vers l'extérieur du conducteur électrisé et ayant pour valeur  $2\pi\varepsilon\rho^2$ . La partie de  $\delta W$  qui provient des parties électrisées a donc pour valeurs

$$-\left(\sum_{p=1}^{p=n} S^{2\pi\varepsilon\rho^2} \delta N_p d\theta_{p0} + \sum_{pq} S^{2\pi\varepsilon\rho^2} \delta N_p d\theta_{pq}\right).$$

Mais, aux divers points de la surface  $\theta_{p0}$ , on a

$$\rho = d_{p0} + \Delta_{p0},$$

d'après l'égalité (17) du Chapitre II de la I<sup>re</sup> Partie (t. V, p. 132).

Aux divers points de la surface  $\theta_{pq}$ , on a, d'après l'égalité (8) du présent Chapitre,

$$\rho = \frac{1}{4\pi\varepsilon} [K(q, p, 0) - K(p, q, 0)] i_{pq}.$$

On a donc, pour expression de la partie considérée  $\delta_1 W$  de  $\delta W$ ,

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta_1 W = & -2\pi\varepsilon \sum_{p=1}^{p=n} S^{(d_{p0} + \Delta_{p0})^2} \delta N_p d\theta_{p0} \\ & + \frac{1}{8\pi\varepsilon} \sum_{pq} [K(q, p, 0) - K(p, q, 0)]^2 S^{i_{pq}^2} \delta N_p d\theta_{pq}. \end{aligned} \right.$$

Passons aux termes  $\delta_2 W$  de  $\delta W$  qui proviennent du travail effectué dans le transport des divers éléments de volume électrisés.

La densité en un point pris à l'intérieur de l'un des conducteurs du système a pour valeur [égalité (5)]

$$\rho = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \Delta\Theta - \frac{1}{4\pi K\varepsilon} \left[ \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} \frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial z} \frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial z} \right],$$

ce qui peut encore s'écrire, en vertu des égalités (4),

$$\rho = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \Delta\Theta + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left( \frac{\partial K}{\partial x} \varpi + \frac{\partial K}{\partial y} \wp + \frac{\partial K}{\partial z} \psi \right).$$

La force qui s'exerce en ce point, en vertu des lois de Coulomb, a pour composantes

$$X = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial z}$$

ou bien, en vertu des égalités (4),

$$X = K \varpi + \frac{\partial \Theta}{\partial x},$$

$$Y = K \wp + \frac{\partial \Theta}{\partial y},$$

$$Z = K \psi + \frac{\partial \Theta}{\partial z}.$$

Soient

$$\partial x = u \partial t, \quad \partial y = v \partial t, \quad \partial z = w \partial t$$

les composantes du déplacement du point  $(x, y, z)$ . La quantité à calculer,  $\delta_2 W$ , sera la somme d'autant de termes que le système renferme de fluides. Chacun de ces termes sera de la forme suivante :

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial t}{4\pi\varepsilon} \iiint \Delta\Theta \left( \frac{\partial \Theta}{\partial x} u + \frac{\partial \Theta}{\partial y} v + \frac{\partial \Theta}{\partial z} w \right) dx dy dz, \\ & - \frac{\partial t}{4\pi\varepsilon} \iiint K \Delta\Theta (\varpi u + \wp v + \psi w) dx dy dz, \\ & - \frac{\partial t}{4\pi\varepsilon} \iiint \left( \frac{\partial K}{\partial x} \varpi + \frac{\partial K}{\partial y} \wp + \frac{\partial K}{\partial z} \psi \right) \left( \frac{\partial \Theta}{\partial x} u + \frac{\partial \Theta}{\partial y} v + \frac{\partial \Theta}{\partial z} w \right) dx dy dz, \\ & - \frac{\partial t}{4\pi\varepsilon} \iiint K \left( \frac{\partial K}{\partial x} \varpi + \frac{\partial K}{\partial y} \wp + \frac{\partial K}{\partial z} \psi \right) (\varpi u + \wp v + \psi w) dx dy dz. \end{aligned}$$

Le premier de ces quatre termes a été calculé au Chapitre II de la 1<sup>re</sup> Partie. Sa valeur est, d'après l'équation (16) [t. V, p. 132],

$$\sum \beta_{p0} \delta N_p d\theta_{p0} + \sum_q \sum \beta_{pq} \delta N_p d\theta_{pq} \\ (q = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n, n+1, \dots, n').$$

Il reste à calculer les trois autres termes.



Pour tout point pris à l'intérieur du conducteur  $p$ , à une distance supérieure à  $\lambda + \mu$  des surfaces qui le limitent, on a

$$\Delta\Theta = 0, \\ \frac{\partial K}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial z} = 0.$$

Les points en question ne fournissent donc rien aux termes que nous calculons.

Envisageons maintenant la partie du corps  $p$  formée par tous les points de ce corps dont la distance à l'une des surfaces  $\theta_{pq}$  ( $q = n + 1, \dots, n'$ ), qui séparent ce corps des solides environnants, est inférieure à  $\lambda + \mu$ . Pour tous les points de la surface  $\theta_{pq}$ , on a

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0.$$

Par conséquent, pour tous les points de la région considérée,  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont des quantités négligeables de l'ordre de  $\lambda + \mu$ . La région considérée ne fournit donc rien aux termes que nous avons à calculer.

Envisageons en troisième lieu la partie du corps  $p$  formée par tous les points dont la distance à la surface  $\theta_{p0}$  est inférieure à  $\lambda + \mu$ .

En tous les points de la surface  $\theta_{p0}$ , on a

$$\vartheta = 0, \quad \varphi = 0, \quad \psi = 0.$$

Par conséquent, en tous les points de la région considérée,  $\vartheta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  sont des quantités négligeables de l'ordre de  $\lambda + \mu$ . La région considérée ne fournit donc rien aux termes que nous calculons.

On a donc seulement à considérer les régions dont tous les points sont à une distance inférieure à  $\lambda + \mu$  de l'une des surfaces

$$\theta_{pq} (q = 1, 2, \dots, p - 1, p + 1, \dots, n)$$

qui séparent le fluide  $p$  des fluides environnants.

Soit  $i_{pq}$  la valeur en un point M de la surface  $\theta_{pq}$  du flux normal à cette surface. En un point M' dont la distance au point M est inférieure à  $\lambda + \mu$ , le flux dirigé suivant la normale à la surface  $\theta_{pq}$  ne diffère de  $i_{pq}$  que d'une quantité négligeable de l'ordre de  $\lambda + \mu$ . Le déplacement du point M' diffère aussi infiniment peu du déplacement du point M.

On a donc, au point M',

$$\begin{aligned} (\vartheta u + \vartheta' v + \vartheta'' w) \delta t &= i_{pq} \delta N_p, \\ \left( \frac{\partial K}{\partial x} \vartheta + \frac{\partial K}{\partial y} \vartheta' + \frac{\partial K}{\partial z} \vartheta'' \right) \left( \frac{\partial \Theta}{\partial x} u + \frac{\partial \Theta}{\partial y} v + \frac{\partial \Theta}{\partial z} w \right) \delta t &= i_{pq} \frac{\partial K}{\partial N_p} \frac{\partial \Theta}{\partial N_p} \delta N_p, \\ \left( \frac{\partial K}{\partial x} \vartheta + \frac{\partial K}{\partial y} \vartheta' + \frac{\partial K}{\partial z} \vartheta'' \right) (\vartheta u + \vartheta' v + \vartheta'' w) \delta t &= i_{pq}^2 \frac{\partial K}{\partial N_p} \delta N_p. \end{aligned}$$

Si donc on pose

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{A}_{pq} &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_0^{\lambda+\mu} K(p, q, l) \Delta \Theta(p, q, l) dl, \\ \mathfrak{B}_{pq} &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_0^{\lambda+\mu} \frac{\partial K(p, q, l)}{\partial l} \frac{\partial \Theta(p, q, l)}{\partial l} dl, \\ \mathfrak{C}_{pq} &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_0^{\lambda+\mu} K(p, q, l) \frac{\partial K(p, q, l)}{\partial l} dl \\ &= -\frac{1}{8\pi\varepsilon} \{ [K(p, q, \lambda + \mu)]^2 - [K(p, q, 0)]^2 \}, \end{aligned} \right.$$

on aura

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \partial_2 W &= \sum_{p=1}^{p=n} \left\{ \beta_{p0} \mathfrak{S} \partial N_p d\theta_{p0} \right. \\ &\quad \left. + \sum_q \left[ \beta_{pq} \mathfrak{S} \partial N_p d\theta_{pq} + (\mathfrak{A}_{pq} + \mathfrak{B}_{pq}) \mathfrak{S} i_{pq} \partial N_p d\theta_{pq} + \mathfrak{C}_{pq} \mathfrak{S} i_{pq}^2 \partial N_p d\theta_{pq} \right] \right\} \\ &\quad (q = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n). \end{aligned} \right.$$

En vertu des égalités (16) et (18), on a l'égalité suivante :

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta W &= \sum_{p=1}^{p=n} \left\{ \mathfrak{S} (\beta_{p0} - \gamma_{p0} + \partial_{p0} \Delta + 2\pi\varepsilon \Delta^2) \partial N_p d\theta_{p0} + \sum_q \mathfrak{S} \beta_{pq} \partial N_p d\theta_{pq} \right. \\ &\quad \left. + \sum_q [(\mathfrak{A}_{pq} + \mathfrak{B}_{pq}) \mathfrak{S} i_{pq} \partial N_p d\theta_{pq} + \mathfrak{B}_{pq} \mathfrak{S} i_{pq}^2 \partial N_p d\theta_{pq}] \right\} \\ &\quad (q = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n), \end{aligned} \right.$$

égalité dans laquelle on a

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{B}_{pq} &= \mathfrak{C}_{pq} + \frac{[K(q, p, 0) - K(p, q, 0)]^2}{8\pi\varepsilon} \\ &= \frac{1}{8\pi\varepsilon} \{ [K(q, p, 0)]^2 - 2K(q, p, 0)K(p, q, 0) - [K(p, q, \lambda + \mu)]^2 \}. \end{aligned} \right.$$

Reste à calculer le terme  $\delta \sum \Theta Q$ .

Cette quantité, comme au Chapitre II de la I<sup>re</sup> Partie, se réduit à une somme d'autant de termes de la forme

$$\iiint \delta \Theta \rho \, dx \, dy \, dz$$

qu'il y a de corps dans le système, et d'autant de termes de la forme

$$\sum \delta \Theta \rho \, d\theta_{pq}$$

qu'il y a dans le système de surfaces limites.

En un point pris à l'intérieur de l'un des corps qui composent le système, la densité électrique  $\rho$  surpasse la valeur qu'elle aurait dans l'état d'équilibre de

$$\frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{\partial K}{\partial x} \psi + \frac{\partial K}{\partial y} \psi + \frac{\partial K}{\partial z} \psi \right).$$

En un point de l'une des surfaces  $\theta_{p0}$ ,  $\rho$  a la valeur

$$\rho = d_{p0} + \Delta_{p0}$$

qui s'exprime de la même manière que dans l'état d'équilibre.

En un point de l'une des surfaces

$$\theta_{pq} (q = 1, 2, \dots, p-1, p+1, n, n+1, \dots, n'),$$

$\rho$ , qui serait égal à 0 dans l'état d'équilibre, a pour valeur

$$\rho = \frac{1}{4\pi\epsilon} [K(q, p, 0) - K(p, q, 0)] i_{pq}.$$

La quantité  $\delta \sum \Theta Q$  se compose donc :

1<sup>o</sup> Du terme

$$\sum_{p=1}^{p=n} (\chi_p + \omega_p) \left( \sum \delta N_p \, d\theta_{p0} + \sum_q \sum \delta N_p \, d\theta_{pq} \right) \\ (q = 1, 2, \dots, p-1, \dots, n),$$

qui, selon l'égalité (30) du Chapitre II de la I<sup>re</sup> Partie (t. V, p. 137), représente l'expression complète de  $\delta \sum \Theta Q$  dans le cas de l'équilibre;

2° D'une somme d'autant de termes de la forme

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint \delta \Theta \left( \frac{\partial K}{\partial x} \varpi + \frac{\partial K}{\partial y} \varphi + \frac{\partial K}{\partial z} \psi \right) dx dy dz$$

qu'il y a de corps dans le système;

3° D'une somme d'autant de termes de la forme

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum [K(q, p, o) - K(p, q, o)] i_{pq} \delta \Theta(p, q, o) d\theta_{qp}$$

qu'il y a de surfaces de séparation entre les divers conducteurs du système.

Considérons en premier lieu la région du corps  $p$  dont tous les points sont à une distance supérieure à  $\lambda + \mu$  des surfaces qui limitent le corps  $p$ . Dans cette région, le corps  $p$  est homogène. On a donc

$$\frac{\partial K}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial z} = 0,$$

et l'intégrale

$$\iiint \delta \Theta \left( \frac{\partial K}{\partial x} \varpi + \frac{\partial K}{\partial y} \varphi + \frac{\partial K}{\partial z} \psi \right) dx dy dz$$

étendue à cette région s'évanouit.

L'élément de cette intégrale n'est différent de 0 que lorsque le volume  $dx dy dz$  est à une distance de l'une des surfaces  $\theta_{pq}$  inférieure à  $\lambda + \mu$ .

Aux divers points de l'une des surfaces  $\theta_{p_0}$  on a

$$\varpi = 0, \quad \varphi = 0, \quad \psi = 0.$$

Par conséquent, pour tous les points situés à une distance de la surface  $\theta_{p_0}$  inférieure à  $\lambda + \mu$ ,  $\varpi$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  sont des quantités négligeables de l'ordre de  $\lambda + \mu$ ; l'intégrale précédente, étendue aux régions voisines des surfaces  $\theta_{p_0}$ , est donc évanouissante.

Envisageons un point situé au voisinage de l'une des surfaces  $\theta_{pq}$  ( $q = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n$ ) qui séparent deux fluides du système. En ce point, dont la distance à la surface  $\theta_{pq}$  est égale à  $l$ , on

a, en négligeant des quantités de l'ordre de  $\lambda + \mu$ ,

$$\begin{aligned} & \delta \Theta \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} \varpi + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial y} \wp + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z} \Psi \right) \\ &= -i_{pq} \frac{\partial \mathbf{K}(p, q, l)}{\partial l} \left[ \frac{\partial \Theta(p, q, l)}{\partial \sigma_p} \delta \sigma_p + \frac{\partial \Theta(p, q, l)}{\partial \sigma_q} \delta \sigma_q \right]. \end{aligned}$$

Si donc on pose

$$(21) \quad \begin{cases} \mathcal{E}_{pq} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_0^{\lambda+\mu} \frac{\partial \Theta(p, q, l)}{\partial \sigma_p} \frac{\partial \mathbf{K}(p, q, l)}{\partial l} dl, \\ \mathcal{E}'_{pq} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_0^{\lambda+\mu} \frac{\partial \Theta(p, q, l)}{\partial \sigma_q} \frac{\partial \mathbf{K}(p, q, l)}{\partial l} dl \end{cases}$$

et

$$(22) \quad \mathbf{J}_{pq} = \mathbf{S} i_{pq} d\theta_{pq},$$

l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint \delta \Theta \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} \varpi + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial y} \wp + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z} \Psi \right) dx dy dz,$$

étendue à la région du corps  $p$  dont tous les points sont à une distance inférieure à  $\lambda + \mu$  de la surface  $\theta_{pq}$  ( $q = 0, 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n$ ), aura pour valeur

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\mathcal{E}_{pq}}{\mathbf{M}_p} \sum_r \mathbf{S} \delta \mathbf{N}_p d\theta_{pr} + \frac{\mathcal{E}'_{pq}}{\mathbf{M}_q} \sum_s \mathbf{S} \delta \mathbf{N}_q d\theta_{qs} \right] \mathbf{J}_{pq} \\ & \quad (r = 0, 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n), \\ & \quad (s = 0, 1, 2, \dots, q-1, q+1, \dots, n). \end{aligned}$$

On verrait de même qu'en conservant à  $\mathcal{E}_{pq}$  et à  $\mathbf{J}_{pq}$  la signification qui leur est donnée par les égalités (21) et (22), l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint \delta \Theta \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} \varpi + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial y} \wp + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z} \Psi \right) dx dy dz,$$

étendue à la région du fluide  $p$  dont tous les points sont à une distance inférieure à  $\lambda + \mu$  de la surface  $\theta_{pq}$  ( $q = n+1, n+2, \dots, n'$ ) qui sépare le fluide  $p$  de l'un des solides  $q$  du système, a pour valeur

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{E}_{pq}}{\mathbf{M}_p} \sum_r \mathbf{S} \delta \mathbf{N}_p d\theta_{pr} \\ & \quad (r = 0, 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n). \end{aligned}$$

Si donc on pose

$$(23) \quad \mathfrak{E}_p = \frac{1}{M_p} \sum_q (\mathfrak{C}_{pq} + \mathfrak{C}'_{qp}) J_{pq} \\ (q = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n)$$

et

$$(24) \quad \mathfrak{E}'_p = \frac{1}{M_p} \sum_q \mathfrak{C}_{pq} J_{pq} \\ (q = n+1, n+2, \dots, n'),$$

la somme I des intégrales

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint \partial\Theta \left( \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial x} \mathfrak{V} + \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial y} \mathfrak{V} + \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial z} \mathfrak{W} \right) dx dy dz,$$

étendue à tous les corps du système, aura pour valeur

$$(25) \quad \mathbf{I} = \sum_{p=1}^{p=n} \left[ (\mathfrak{E}_p + \mathfrak{E}'_p) \sum_r \mathbf{S} \partial N_p d\theta_{pr} \right] \\ (r = 0, 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n).$$

Pour le calcul de la quantité

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon} \mathbf{S} [\mathbf{K}(q, p, 0) - \mathbf{K}(p, q, 0)] i_{pq} \partial \Theta(p, q, 0) d\theta_{pq}$$

nous distinguerons deux cas : dans le premier cas, l'indice  $q$  représente une des quantités  $1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n$ ; la surface  $\theta_{pq}$  sépare deux fluides du système; dans le second cas, l'indice  $q$  représente une des quantités  $n+1, n+2, \dots, n'$ ; la surface  $\theta_{pq}$  sépare un fluide d'un solide.

Dans le premier cas, si nous posons

$$(26) \quad \begin{cases} \mathfrak{F}_{pq} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} [\mathbf{K}(q, p, 0) - \mathbf{K}(p, q, 0)] \frac{\partial \Theta(p, q, 0)}{\partial \sigma_p}, \\ \mathfrak{F}'_{pq} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} [\mathbf{K}(q, p, 0) - \mathbf{K}(p, q, 0)] \frac{\partial \Theta(p, q, 0)}{\partial \sigma_q} \end{cases}$$

et si nous conservons à  $J_{pq}$  la signification donnée par l'égalité (22), la quantité

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon} \mathbf{S} [\mathbf{K}(q, p, 0) - \mathbf{K}(p, q, 0)] i_{pq} \partial \Theta(p, q, 0) d\theta_{pq}$$

aura pour valeur

$$\left[ \frac{\tilde{\mathfrak{F}}_{pq}}{\mathbf{M}_p} \sum_r \mathbf{S} \delta \mathbf{N}_p d\theta_{pr} + \frac{\tilde{\mathfrak{F}}'_{pq}}{\mathbf{M}_q} \sum_s \mathbf{S} \delta \mathbf{N}_q d\theta_{qs} \right] \mathbf{J}_{pq}$$

$$(r = 0, 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n),$$

$$(s = 0, 1, 2, \dots, q-1, q+1, \dots, n).$$

Dans le deuxième cas, si nous conservons à  $\mathbf{J}_{pq}$  et  $\tilde{\mathfrak{F}}_{pq}$  leur signification donnée par les égalités (22) et (26), nous aurons, pour valeur de la quantité

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon} \mathbf{S} [\mathbf{K}(q, p, 0) - \mathbf{K}(p, q, 0)] i_{pq} \delta \Theta(p, q, 0) d\theta_{pq},$$

l'expression suivante :

$$\mathbf{J}_{pq} \frac{\tilde{\mathfrak{F}}_{pq}}{\mathbf{M}_p} \sum_r \mathbf{S} \delta \mathbf{N}_p d\theta_{pr}$$

$$(r = 0, 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n).$$

Si donc nous posons

$$(27) \quad \mathfrak{F}_p = \frac{1}{\mathbf{M}_p} \sum_q (\tilde{\mathfrak{F}}_{pq} + \tilde{\mathfrak{F}}'_{qp}) \mathbf{J}_{pq}$$

$$(q = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n)$$

et

$$(28) \quad \mathfrak{F}'_p = \frac{1}{\mathbf{M}_p} \sum_q \tilde{\mathfrak{F}}_{pq} \mathbf{J}_{pq}$$

$$(q = n+1, n+2, \dots, n'),$$

la somme  $\mathbf{I}'$  de toutes les quantités de la forme

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon} \mathbf{S} [\mathbf{K}(q, p, 0) - \mathbf{K}(p, q, 0)] i_{pq} d\Theta(p, q, 0) d\theta_{pq}$$

aura pour valeur

$$(29) \quad \mathbf{I}' = \sum_{p=1}^{p=n} \left[ (\mathfrak{F}_p + \mathfrak{F}'_p) \sum_r \delta \mathbf{N}_p d\theta_{pr} \right]$$

$$(r = 0, 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n).$$

Si l'on réunit les résultats fournis par les égalités (25) et (29), on

aura, pour tout le système,

$$(30) \quad \partial \sum \Theta Q = \sum_{p=1}^{p=n} (\gamma_p + \omega_p + \mathfrak{E}_p + \mathfrak{E}'_p + \mathfrak{F}_p + \mathfrak{F}'_p) \sum_r \partial N_p d\theta_p.$$

( $r = 0, 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n$ ).

Si l'on rassemble maintenant tous les résultats contenus dans les égalités (12), (13), (14), (19) et (30), l'égalité (11), qui exprime les conditions pour que la forme des fluides que renferme le système soit une forme d'équilibre, deviendra

$$1) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 = \sum_{p=1}^{p=n} & \left\{ \mathbf{S} \left[ \mathbf{P} + \Omega \mathbf{D}_p + \mathbf{E} \left( \frac{\partial \mathbf{Y}_p}{\partial \sigma_p} - \mathbf{T} \frac{\partial \Sigma_p}{\partial \sigma_p} \right) \right. \right. \\ & + \mathbf{A}_{p0} \left( \frac{1}{\mathbf{R}_p} + \frac{1}{\mathbf{R}'_p} \right) + (\psi_p + \gamma_p - \nu_p) \\ & + \beta_{p0} - \gamma_{p0} + \omega_p + \partial_{p0} \Delta + 2\pi \varepsilon \Delta^2 \\ & \left. \left. + \mathfrak{E}_p + \mathfrak{E}'_p + \mathfrak{F}_p + \mathfrak{F}'_p \right] \partial N_p d\theta_{p0} \right. \\ & + \sum_q \mathbf{S} \left[ \Omega \mathbf{D}_q + \mathbf{E} \left( \frac{\partial \mathbf{Y}_q}{\partial \sigma_q} - \mathbf{T} \frac{\partial \Sigma_q}{\partial \sigma_q} \right) \right. \\ & + \mathbf{A}_{pq} \left( \frac{1}{\mathbf{R}_p} + \frac{1}{\mathbf{R}'_p} \right) + (\psi_p + \gamma_p - \nu_p) \\ & + \beta_{pq} - \gamma_{pq} + \omega_p \\ & \left. \left. + (\mathfrak{E}_p + \mathfrak{E}'_p + \mathfrak{F}_p + \mathfrak{F}'_p) + (\mathfrak{A}_{pq} + \mathfrak{B}_{pq}) i_{pq} + \mathfrak{D}_{pq} i_{pq}^2 \right] \partial N_p d\theta_{pq} \right\} \\ & (q = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n). \end{aligned} \right.$$

Les quantités  $\partial N_p$ ,  $\partial N_q$  sont assujetties à cette seule condition que, en tout point de la surface  $\theta_{pq}$  qui sépare deux fluides, on ait

$$\partial N_p + \partial N_q = 0.$$

Si l'on remarque, en outre, qu'en tout point de la même surface on a aussi, par définition,

$$\mathbf{R}_p + \mathbf{R}_q = 0,$$

$$\mathbf{R}'_p + \mathbf{R}'_q = 0,$$

$$i_{pq} + i_{qp} = 0,$$

on voit que l'égalité précédente exige que l'on ait :



1° En tout point de l'une des surfaces  $\theta_{p0}$  du système

$$(32) \left\{ \begin{aligned} &P + \Omega D_p + E \left( \frac{\partial Y_p}{\partial \sigma_p} - T \frac{\partial \Sigma_p}{\partial \sigma_p} \right) + A_{p0} \left( \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R'_p} \right) + \psi_p + \chi_p - \nu_p \\ &+ \beta_{p0} - \gamma_{p0} + \omega_p + \delta_{p0} \Delta + 2\pi \varepsilon \Delta^2 + \mathfrak{E}_p + \mathfrak{E}'_p + \mathfrak{F}_p + \mathfrak{F}'_p = 0. \end{aligned} \right.$$

2° En tout point de l'une des surfaces  $\theta_{pq}$  qui séparent deux fluides

$$(33) \left\{ \begin{aligned} &\Omega(D_p - D_q) + E \left[ \left( \frac{\partial Y_q}{\partial \sigma_p} - T \frac{\partial \Sigma_p}{\partial \sigma_p} \right) - \left( \frac{\partial Y_q}{\partial \sigma_q} - T \frac{\partial \Sigma_q}{\partial \sigma_q} \right) \right] + (A_{pq} + A_{qp}) \left( \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R'_p} \right) \\ &+ (\psi_p - \psi_q) + (\chi_p - \chi_q) - (\nu_p - \nu_q) + (\beta_{pq} - \beta_{qp}) - (\gamma_{pq} - \gamma_{qp}) + (\omega_p - \omega_q) \\ &+ (\mathfrak{E}_p - \mathfrak{E}_q) + (\mathfrak{E}'_p - \mathfrak{E}'_q) + (\mathfrak{F}_p - \mathfrak{F}_q) + (\mathfrak{F}'_p - \mathfrak{F}'_q) \\ &+ [\mathfrak{A}_{pq} + \mathfrak{A}_{qp}] i_{pq} + (\mathfrak{D}_{pq} - \mathfrak{D}_{qp}) i_{pq}^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Ce sont deux égalités que nous allons discuter.

#### § IV. — Conséquences des conditions précédentes.

L'égalité (32) peut se discuter, comme nous avons discuté l'égalité (39) du Chapitre II de la I<sup>re</sup> Partie (t. V, p. 141). La discussion de l'égalité (32) conduit aux mêmes résultats que la discussion de cette égalité (39) du Chapitre II de la I<sup>re</sup> Partie, avec cette seule différence qu'aux pressions hydrostatique, capillaire, électrique, etc., données par les égalités (40), (43), (44), (45) du Chapitre cité, il faut joindre une nouvelle pression

$$(34) \quad P_s = -(\mathfrak{E}_p + \mathfrak{E}'_p + \mathfrak{F}_p + \mathfrak{F}'_p).$$

Cette pression est une pression uniforme, qui s'exprime par une fonction linéaire et homogène des intensités des courants qui s'échappent par les diverses surfaces limites du corps  $p$ , ainsi qu'on le reconnaît en se reportant aux expressions de  $\mathfrak{E}_p$ ,  $\mathfrak{E}'_p$ ,  $\mathfrak{F}_p$ ,  $\mathfrak{F}'_p$ , données par les égalités (23), (24), (27) et (28).

La discussion de l'égalité (33) conduit à des résultats beaucoup plus importants. Si l'on comprend sous le symbole  $C'_{pq}$  la quantité

$$(35) \left\{ \begin{aligned} &C'_{pq} = (\psi_p - \psi_q) + (\chi_p - \chi_q) - (\nu_p - \nu_q) \\ &+ (\beta_{pq} - \beta_{qp}) - (\gamma_{pq} - \gamma_{qp}) + (\omega_p - \omega_q) \\ &+ (\mathfrak{E}_p - \mathfrak{E}_q) + (\mathfrak{E}'_p - \mathfrak{E}'_q) + (\mathfrak{F}_p - \mathfrak{F}_q) + (\mathfrak{F}'_p - \mathfrak{F}'_q) \\ &+ E \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma_p} (Y_p - T \Sigma_p) - \frac{\partial}{\partial \sigma_q} (Y_q - T \Sigma_q) \right], \end{aligned} \right.$$

qui a la même valeur en tous les points de la surface  $\theta_{pq}$ , et si l'on pose, pour abréger,

$$(36) \quad \mathfrak{E}_{pq} = \mathfrak{A}_{pq} + \mathfrak{A}_{qp} + \mathfrak{B}_{pq} + \mathfrak{B}_{qp},$$

$$(37) \quad \mathfrak{H}_{pq} = \mathfrak{I}_{pq} + \mathfrak{I}_{qp},$$

cette égalité (33) pourra s'écrire

$$(38) \quad (\mathbf{A}_{pq} + \mathbf{A}_{qp}) \left( \frac{1}{\mathbf{R}_p} + \frac{1}{\mathbf{R}_q} \right) + \Omega(\mathbf{D}_p - \mathbf{D}_q) + \mathbf{C}_{pq} + \mathfrak{E}_{pq} i_{pq} + \mathfrak{H}_{pq} i_{pq}^2 = 0.$$

Au contraire, dans le cas où aucun courant ne traverse le système, l'équation qui doit être vérifiée par tous les points de la surface  $\theta_{pq}$  c'est l'équation

$$(3) \quad (\mathbf{A}_{pq} + \mathbf{A}_{qp}) \left( \frac{1}{\mathbf{R}_p} + \frac{1}{\mathbf{R}_q} \right) + \Omega(\mathbf{D}_p - \mathbf{D}_q) + \mathbf{C}_{pq} = 0,$$

dans laquelle la quantité  $\mathbf{C}_{pq}$  est définie par l'équation (2).

De l'équation (3) on déduit les lois des phénomènes capillaires. La substitution, dans cette équation, d'une fonction parabolique du flux électrique normal en chaque point à la surface capillaire à une quantité qui a la même valeur en tous les points de cette surface changera évidemment les lois des phénomènes capillaires. Nous arrivons donc à la conséquence suivante :

*La constante capillaire  $(\mathbf{A}_{pq} + \mathbf{A}_{qp})$ , relative à la surface de séparation  $\theta_{pq}$  de deux fluides  $p$  et  $q$  conduisant l'électricité sans électrolyse, dépend uniquement de la nature que ces deux fluides présentent loin des surfaces qui les limitent; elle est indépendante de leur grandeur, de leur forme, de leur état d'électrisation, des courants qui les traversent; mais les phénomènes capillaires présentés par la surface de contact, et en particulier la forme de cette surface, dépendent de l'intensité et du mode de distribution des courants qui traversent cette surface.*

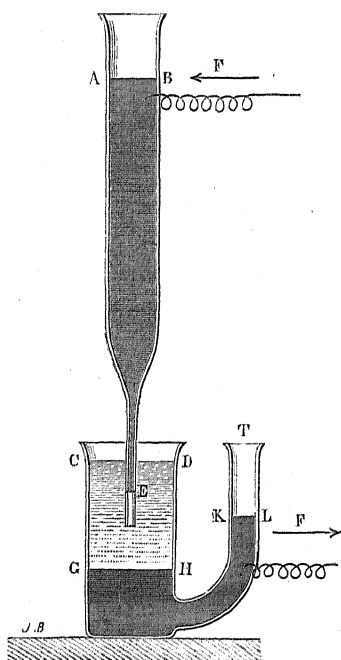
Telle est la conséquence fondamentale des considérations exposées dans ce Chapitre. L'application de ces considérations à un cas particulier nous fera mieux saisir l'importance du résultat obtenu.

Dans le cas particulier que nous allons examiner, nous aurons affaire seulement à deux liquides; nous donnerons à ces deux liquides

les noms de *mercure* et d'*eau acidulée*. L'eau acidulée est un électrolyte et, par conséquent, ne correspond pas aux conditions imposées aux fluides étudiés dans ce Chapitre, fluides qui tous doivent, comme le mercure, conduire l'électricité sans électrolyse. Ce mot d'*eau acidulée* devra donc être pris dans ce qui va suivre comme une notation désignant un fluide hypothétique conduisant l'électricité à la façon du mercure. Si cette notation a l'inconvénient de ne point correspondre exactement à la réalité, elle aura du moins l'avantage de mieux faire ressortir l'analogie entre les phénomènes que nous allons étudier et les faits signalés par M. Lippmann.

Prenons l'expérience de l'électromètre capillaire, que nous avons

Fig. 3.



brèvement décrite à la page 192, en introduisant simplement une légère modification qui, sans rien changer d'essentiel à l'appareil, nous facilitera la théorie. Cette modification, qui est du reste employée par les constructeurs, est représentée par la *fig. 3*; elle consiste à munir le vase dans lequel plonge le tube capillaire d'une tubu-

lure T, communiquant seulement avec le mercure que renferme ce vase et non avec l'eau acidulée.

Le fil F amène le courant dans le mercure que renferme le vase supérieur; le fil F' l'emmène du mercure du vase inférieur.

Nous désignerons le milieu isolant qui entoure le système par l'indice 0; le mercure supérieur par l'indice 1; l'eau acidulée par l'indice 2; le mercure inférieur par l'indice 3. La surface  $\theta_{10}$  sera la surface libre AB du mercure dans le vase supérieur; la surface  $\theta_{20}$  sera la surface libre CD de l'eau acidulée; la surface  $\theta_{12}$  sera la surface de séparation E du mercure et de l'eau acidulée dans le tube capillaire; la surface  $\theta_{23}$  sera la surface de séparation GH du mercure et de l'eau acidulée dans le vase inférieur; enfin la surface  $\theta_{30}$  sera la surface libre KL du mercure dans la tubulure latérale.

Nous supposons que la seule force extérieure qui exerce son action sur le système soit la pesanteur; dans ce cas, on pourra prendre comme valeur de la fonction  $\Omega$  en un point de coordonnées  $(x, y, z)$

$$\Omega = gz,$$

$g$  désignant l'intensité de la pesanteur.

Considérons un point  $M_1$  de la surface  $\theta_{10}$ . Soient  $P_1$  la pression en ce point;  $\Delta_1$  la densité de l'électricité libre au même point.

Si nous observons que cette surface est plane, nous aurons, en vertu de l'égalité (32), au point  $M_1$ ,

$$(39) \quad \begin{cases} P_1 + D_1 g z_{10} + E \left( \frac{\partial Y_1}{\partial \sigma_1} - T \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \sigma_1} \right) + \psi_1 + \chi_1 - \nu_1 \\ \quad + \beta_{10} - \gamma_{10} + \omega_1 + \partial_{10} \Delta_1 + 2\pi \varepsilon \Delta_1^2 + \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}'_1 + \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}'_1 = 0. \end{cases}$$

En un point  $m$  de la surface  $\theta_{12}$ , nous aurons, en vertu de l'égalité (33),

$$(40) \quad \begin{cases} (D_1 - D_2) g z_{12} + E \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma_1} (Y_1 - T \Sigma_1) - \frac{\partial}{\partial \sigma_2} (Y_2 - T \Sigma_2) \right] + (A_{12} + A_{21}) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} \right) \\ \quad + (\psi_1 - \psi_2) + (\chi_1 - \chi_2) - (\nu_1 - \nu_2) + (\beta_{12} - \beta_{21}) - (\gamma_{12} - \gamma_{21}) + (\omega_1 - \omega_2) \\ \quad + (\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2) + (\mathfrak{E}'_1 - \mathfrak{E}'_2) + (\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2) + (\mathfrak{F}'_1 - \mathfrak{F}'_2) \\ \quad + [(\mathfrak{A}_{12} + \mathfrak{A}'_{12}) + (\mathfrak{B}_{12} + \mathfrak{B}'_{12})] i_{12} + (\mathfrak{D}_{12} - \mathfrak{D}_{21}) i_{12}^2 = 0. \end{cases}$$

La surface  $\theta_{23}$  est plane; elle est très large par rapport à la sur-

face  $\theta_{12}$ , et est cependant, pendant le même temps, traversée par la même quantité d'électricité que la surface  $\theta_{23}$ ;  $i_{12}$  est donc, en général, infiniment petit par rapport à  $i_{23}$ . Il en résulte qu'en un point  $M_2$  de la surface  $\theta_{23}$  on a, en vertu de l'égalité (33),

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} & (D_3 - D_2)g z_{32} + E \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma_3} (Y_3 - T \Sigma_3) - \frac{\partial}{\partial \sigma_2} (Y_2 - T \Sigma_2) \right] \\ & + (\psi_3 - \psi_2) + (\gamma_3 - \gamma_2) - (\nu_3 - \nu_2) + (\beta_{32} - \beta_{23}) - (\gamma_{32} - \gamma_{23}) + (\omega_3 - \omega_2) \\ & + (\mathfrak{E}_3 - \mathfrak{E}_2) + (\mathfrak{E}'_3 - \mathfrak{E}'_2) + (\mathfrak{F}_3 - \mathfrak{F}_2) + (\mathfrak{F}'_3 - \mathfrak{F}'_2) = 0. \end{aligned} \right.$$

Enfin, en un point  $M_3$  de la surface  $\theta_{30}$ , on a, en vertu de l'égalité (32), en désignant par  $P_3$  la pression en ce point  $M_3$ , et par  $\Delta_3$  la densité de l'électricité libre au même point,

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} & P_3 + D_3 g z_{30} + E \left( \frac{\partial Y_3}{\partial \sigma_3} - T \frac{\partial \Sigma_3}{\partial \sigma_3} \right) + \psi_3 + \gamma_3 - \nu_3 \\ & + \beta_{30} - \gamma_{30} + \omega_3 + \partial_{30} \Delta_3 + 2 \pi \varepsilon \Delta_3^2 + \mathfrak{E}_3 + \mathfrak{E}'_3 + \mathfrak{F}_3 + \mathfrak{F}'_3 = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on ajoute membre à membre les égalités (39), (40), (41), (42), après avoir changé le signe des deux membres des égalités (40) et (42), et si l'on observe, en outre, que les deux fluides 1 et 3 ont même nature, ce qui donne

$$\begin{aligned} D_1 &= D_3, \\ \beta_{12} &= \beta_{32}, & \beta_{21} &= \beta_{23}, \\ \gamma_{12} &= \gamma_{32}, & \gamma_{21} &= \gamma_{23}, \\ \partial_{10} &= \partial_{30}, \end{aligned}$$

nous aurons

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} & P_1 - P_3 + D_1 g [(z_{10} - z_{13}) - (z_{30} - z_{32})] + D_3 g (z_{12} - z_{32}) \\ & - (A_{12} + A_{21}) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} \right) + \partial_{10} (\Delta_1 - \Delta_3) + 2 \pi \varepsilon (\Delta_1^2 - \Delta_3^2) \\ & - [\mathfrak{A}_{12} + \mathfrak{A}'_{12} + \mathfrak{B}_{12} + \mathfrak{B}'_{12}] i_{12} - (\mathfrak{D}_{12} - \mathfrak{D}_{21}) i_{12}^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Discutons la conséquence de cette égalité.

Posons

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= P_1 + \partial_{10} \Delta_1 + 2 \pi \varepsilon \Delta_1^2, \\ \Pi_3 &= P_3 + \partial_{10} \Delta_3 + 2 \pi \varepsilon \Delta_3^2, \end{aligned}$$

$\Pi_1$  étant la valeur au point  $M_1$  de la somme de la pression hydrostatique et de la tension électrique, et  $\Pi_3$  la valeur de la même somme

au point  $M_3$ . L'égalité (43) deviendra

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} & \Pi_1 - \Pi_3 + D_1 g[(z_{10} - z_{12}) - (z_{30} - z_{32})] + D_2 g(z_{12} - z_{32}) \\ & - (A_{12} + A_{21}) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} \right) \\ & - [\mathfrak{A}_{12} + \mathfrak{A}'_{12} + \mathfrak{B}_{12} + \mathfrak{B}'_{12}] i_{12} - (\mathfrak{D}_{12} - \mathfrak{D}'_{12}) i_{12}^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

Admettons maintenant la loi suivante : *L'angle sous lequel la surface  $\theta_{12}$  se raccorde avec les parois de l'électromètre dépend uniquement de la nature que les deux fluides 1 et 2 et le solide sur lequel ils s'appuient présentent loin des surfaces terminales et nullement de l'état d'électrisation de ces corps ou des courants qui les traversent.*

Cette loi est certainement vérifiée si l'un des deux liquides mouille le solide, comme il arrive pour l'eau acidulée et le verre. L'angle en question est alors égal à  $\pi$ .

D'après la loi que nous venons d'énoncer, si nous supposons le tube capillaire assez étroit pour pouvoir confondre, ainsi qu'on le fait souvent en capillarité, le ménisque  $\theta_{12}$  avec la calotte sphérique qui se raccorde sous le même angle avec les parois du tube, nous verrons que  $\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} \right)$  est indépendant du point du tube capillaire où se trouve ce ménisque ainsi que des autres circonstances de l'expérience. Si nous supposons dans l'expérience  $\Pi_3$  maintenu constant; si nous observons en outre que, grâce à la largeur des surfaces  $\theta_{10}$ ,  $\theta_{20}$ ,  $\theta_{23}$ ,  $\theta_{30}$  à l'égard de la surface  $\theta_{12}$ ,  $z_{12}$  peut varier d'une quantité sensible tandis que les variations de  $z_{10}$ ,  $z_{23}$ ,  $z_{30}$  seraient insensibles, nous voyons qu'en désignant par  $K$  une constante on a

$$(45) \quad \Pi_1 - (D_1 - D_2) g z_{12} = K + \mathfrak{C}_{12} i_{12} + \mathfrak{H}_{12} i_{12}^2,$$

$\mathfrak{C}_{12}$  et  $\mathfrak{H}_{12}$  étant définis par les égalités (36) et (37).

L'examen de cette égalité (45) conduit aux deux propositions suivantes :

*Si l'on maintient constante la somme  $\Pi_1$  de la tension électrique et de la pression hydrostatique au sommet de l'électromètre capillaire composé au moyen de deux fluides conducteurs non électrolysables, la hauteur du ménisque dans le tube capillaire sera une fonction du second degré de l'intensité du flux électrique en un point de cette surface.*

*La valeur  $\Pi$  que doit avoir, au sommet d'un électromètre capillaire formé de deux fluides conducteurs non électrolysables, la somme de la tension électrique et de la pression hydrostatique pour maintenir invariable la position du ménisque dans le tube capillaire est une fonction du second degré du flux électrique en un point du ménisque.*

Ces propositions présentent la plus frappante analogie avec les lois des phénomènes dont l'électromètre capillaire est le siège. Deux différences seulement sont à signaler entre l'électromètre à liquides conducteurs étudié ici et l'électromètre à électrolytes sur lequel ont porté les expériences; ces différences sont les suivantes :

1° L'électromètre capillaire réel n'est traversé par aucun courant : on n'en fait usage que lorsque l'électricité qu'il porte est en équilibre;

2° La différence de niveau potentiel qui existe entre les deux masses de mercure de l'électromètre capillaire réel joue un rôle analogue au rôle que joue, dans les lois précédentes, l'intensité du courant qui traverse l'électromètre.

Ces différences tiennent à la variation considérable que présentent les lois de l'équilibre électrique selon que l'on a affaire à des conducteurs ou à des électrolytes. Nous en trouverons la raison d'être au Chapitre suivant.

Revenons à l'électromètre idéal dont nous venons d'étudier les propriétés. Supposons que, ainsi qu'il arrive pour un électromètre réel formé de mercure et d'eau acidulée, la hauteur  $z_{12}$  du ménisque dans le tube capillaire augmente avec le courant lorsque le courant est faible et dirigé du mercure 1 vers l'eau acidulée 2.

L'équation (45) différentiée nous donne

$$(D_1 - D_2)g dz_{12} + (\mathfrak{E}_{12} + 2\mathfrak{H}_{12}i_{12}) di_{12} = 0.$$

Si, pour  $i_{12} = 0$ ,  $dz_{12}$  et  $di_{12}$  sont de même signe, c'est que  $\mathfrak{E}_{12}$  est négatif. D'ailleurs, lorsque  $i_{12}$  continue à croître par valeurs positives, le signe de  $dz_{12}$  change, ce qui suppose que  $\mathfrak{H}_{12}$  est positif. Acceptons ces deux inégalités

$$\mathfrak{E}_{12} < 0,$$

$$\mathfrak{H}_{12} > 0,$$

et faisons-en usage pour l'explication du phénomène suivant.

Henry, de Manchester, observa, en 1800 <sup>(1)</sup>, que le mercure qu'il employait comme électrode positive dans la décomposition de l'eau changeait de forme, tout en se ternissant. En 1801, Gerboin montra que, lorsque l'eau pure ou acidulée placée au contact du mercure est traversée par un courant, cette eau est violemment agitée par des tourbillons. En 1809, Erman reprit l'étude de ces tourbillons. Il observa que, lorsque les électrodes de platine sont voisines de la surface du mercure et que le courant est énergique, la surface du mercure est sillonnée par des mouvements qui divergent à partir des électrodes pour se heurter tout le long d'une ligne qui les sépare; cette ligne forme parfois sur le mercure le sommet d'une arête saillante. Erman observa aussi qu'une goutte de mercure placée ainsi entre les deux électrodes sur un fond rugueux se déplace en se rapprochant de l'électrode négative.

Envisageons une goutte de mercure 1 en contact avec une masse d'eau acidulée 2. Soit M un point de leur surface de séparation. Au point M, on a, en vertu de l'égalité (38),

$$(A_{12} + A_{21}) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} \right) + (D_1 - D_2)g\zeta + C'_{12} + \mathfrak{E}_{12}i_{12} + \mathfrak{H}_{12}i_{12}^2 = 0.$$

Soit  $\mu$  un autre point de la surface de séparation. En ce point, on a

$$(A_{12} + A_{21}) \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho'_1} \right) + (D_1 - D_2)g\zeta + C'_{12} + \mathfrak{E}_{12}j_{12} + \mathfrak{H}_{12}j_{12}^2 = 0.$$

En retranchant ces deux égalités membre à membre, on a

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} & (A_{11} + A_{21}) \left[ \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} \right) - \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho'_1} \right) \right] + (D_1 - D_2)g(\zeta - \zeta) \\ & = -\mathfrak{E}_{12}(i_{12} - j_{12}) - \mathfrak{H}_{12}(i_{12}^2 - j_{12}^2). \end{aligned} \right.$$

Deux cas sont à considérer :

1° Les flux  $i_{12}$ ,  $j_{12}$  sont très faibles. Le second membre a alors le signe de  $-\mathfrak{E}_{12}(i_{12} - j_{12})$ , ou, ce qui revient au même, de  $(i_{12} - j_{12})$ .

<sup>(1)</sup> Ces renseignements historiques sont empruntés à M. G. Lippmann (*Relations entre les phénomènes électriques et capillaires*, 5<sup>e</sup> série, t. V, p. 494; 1875).



Si l'on remarque que  $(D_1 - D_2)$  est positif, si l'on remarque aussi que l'on a

$$A_{12} + A_{21} > 0,$$

on voit que l'on aura au moins l'une des deux inégalités suivantes :

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} > \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'},$$

$$\varepsilon > \zeta.$$

Ces deux inégalités, interprétées, montrent l'une et l'autre que le mercure tend à se bomber, à faire saillie du côté où le flux  $i_{12}$  dirigé du mercure vers l'eau acidulée est le plus grand. Si l'on dispose l'expérience comme le faisait Erman,  $i_{12}$  a la plus grande valeur au voisinage de l'électrode négative et la plus petite au voisinage de l'électrode positive. Le mercure tendra donc à se gonfler du côté de l'électrode négative et à s'affaisser de l'autre côté. Ces déformations auront pour effet, dans certains cas, de déplacer le mercure de l'électrode positive à l'électrode négative.

Supposons, au contraire, que  $i_{12}$  ait une grande valeur absolue et  $j_{12}$  une faible valeur absolue. Le second membre de l'égalité (46) sera négatif. Le mercure tendra à se gonfler au point  $\mu$  où le flux électrique a la moindre valeur absolue. C'est le phénomène qu'Erman a observé avec des courants énergiques; le mercure forme une crête saillante entre les deux électrodes, aux points où le flux électrique est le plus faible.

Ces explications supposent que l'on ait

$$\mathfrak{E}_{12} < 0,$$

$$\mathfrak{H}_{12} > 0,$$

c'est-à-dire que les deux fluides conducteurs se comportent dans l'électromètre capillaire comme l'eau acidulée et le mercure, aux différences près qui ont été signalées ci-dessus.

L'eau acidulée et le mercure ne sont pas les seuls liquides qui ap-

---

(<sup>1</sup>) Voir, au sujet de cette inégalité : *Applications de la Thermodynamique aux phénomènes capillaires*, inégalité (12) (*Ann. de l'École Normale supérieure*, t. II, p. 207; 1885).

partiennent à cette catégorie. Il en est de même, d'après les recherches de M. A. Kœnig <sup>(1)</sup>, des couples de liquides suivants :

Dissolution d'acide chlorhydrique-mercure.  
 » de sulfate de magnésium-mercure.  
 » de sulfate de sodium-mercure.  
 » de sulfate de zinc-mercure

et, d'après les recherches de M. Debrun <sup>(2)</sup>, des couples de liquides suivants :

Dissolution d'acide sulfurique-amalgame d'or.  
 » d'acide sulfurique-amalgame d'argent.

D'après les recherches de M. Kœnig pour le couple

Dissolution de nitrate de mercure-mercure,

on a sensiblement

$$\mathfrak{E}_{12} = 0,$$

$$\mathfrak{H}_{12} = 0.$$

La première de ces égalités entraîne l'absence de transport de la goutte dans les expériences expliquées ci-dessous. M. Debrun a constaté cette absence de transport pour les couples suivants :

Dissolution d'acide sulfurique-amalgame de cuivre.  
 » d'acide sulfurique-amalgame de bismuth.

Enfin, si l'on a

$$\mathfrak{E}_{12} > 0,$$

le transport de la goutte métallique aura lieu de l'électrode négative à l'électrode positive. C'est ce que M. Debrun a constaté, par exemple, pour le couple

Dissolution d'acide sulfurique-amalgame de cadmium.

<sup>(1)</sup> H. VON HELMHOLTZ, *Ueber galvanische Polarisation des Quecksilbers und darauf bezügliche neue Versuche des Herrn Arthur König* (*Monatsberichte der Berliner Akademie*, 3 novembre 1881. — HELMHOLTZ, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, t. I, p. 925).

<sup>(2)</sup> Ces recherches de M. E. Debrun ont été insérées dans les *Comptes rendus de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, publiés en 1879. Elles ont, en outre, été communiquées à la réunion des Sociétés savantes, à la Sorbonne, en 1880, et insérées dans le journal *la Nature* (mai 1880).

Des considérations analogues aux précédentes permettent aisément d'expliquer l'expérience à laquelle M. Lippmann a donné le nom d'*expérience de l'entonnoir* et à laquelle M. Debrun a apporté un notable perfectionnement <sup>(1)</sup>.

Sans détailler ici cette explication, je me contenterai de faire remarquer que l'écoulement du mercure dans l'eau acidulée doit donner lieu à un courant dirigé dans le sens du mouvement et être facilité par la fermeture du circuit, tandis que l'inverse doit avoir lieu pour l'amalgame de cadmium pour lequel  $\mathcal{E}_{12}$  est positif. C'est, en effet, ce que M. Debrun a constaté dans des expériences encore inédites dont il a bien voulu me communiquer le résultat.

On voit, par les résultats que nous avons obtenus au cours de ce Chapitre, que les fluides qui conduisent l'électricité sans électrolyse présentent, lorsqu'ils sont parcourus par des courants uniformes, des phénomènes fort analogues aux phénomènes dits *électrocapillaires*. Toutefois, certaines différences séparent ces deux classes très voisines de phénomènes. C'est en étudiant les systèmes qui renferment des électrolytes que nous allons trouver la véritable explication des phénomènes dits *électrocapillaires*.

## CHAPITRE II.

### DES PHÉNOMÈNES DITS ÉLECTROCAPILLAIRES (suite). SYSTÈMES QUI RENFERMENT DES ÉLECTROLYTES.

#### § I. — Distribution de l'électricité en équilibre sur un système qui renferme des électrolytes.

Nous sommes amenés maintenant à étudier des systèmes qui renferment des électrolytes et sur lesquels l'équilibre électrique est établi. Nous pourrions traiter cette question sous une forme entièrement gé-

---

<sup>(1)</sup> E. DEBRUN, *Nouveau producteur d'électricité basé sur la capillarité* (*Journal de Physique*, t. IX, 1<sup>re</sup> série, p. 28; 1880).

nérale, comme nous avons traité les problèmes exposés dans les Chapitres précédents; mais la complication des symboles qu'entraîne une semblable généralité finirait par fatiguer l'attention. Nous traiterons donc seulement le cas où le système est formé par un électrolyte compris entre deux fluides qui conduisent l'électricité sans électrolyse. Il n'y aurait d'ailleurs aucune difficulté à traiter la question dans son entière extension : il n'y aurait qu'à suivre les méthodes employées aux deux précédents Chapitres.

Désignons par les indices (1) et (3) les deux conducteurs non électrolytiques et par l'indice (2) l'électrolyte interposé. Soient

$M_1$  un point pris à l'intérieur du conducteur (1);

$V_1$  le niveau potentiel au point  $M_1$ ;

$\Theta_1$  une fonction qui dépend de la constitution du conducteur au point  $M_1$ ;

$M_3$  un point pris à l'intérieur du conducteur (3);

$V_3$  le niveau potentiel au point  $M_3$ ;

$\Theta_3$  une fonction qui dépend de la constitution du conducteur au point  $M_3$ .

Si les deux corps (1) et (3) étaient séparés, non par un électrolyte, mais par un corps conduisant l'électricité sans électrolyse, on sait que la condition de l'équilibre électrique serait

$$\varepsilon V_1 + \Theta_1 = \varepsilon V_3 + \Theta_3.$$

Il n'en est plus de même lorsque le corps (2) est un électrolyte.

Le passage d'une quantité infiniment petite  $dq$  d'électricité positive du point  $M_1$  au point  $M_3$  au travers de l'électrolyte (2) produit au sein de cet électrolyte une transformation chimique infiniment petite. Si la même transformation chimique avait lieu au sein d'un système identique au système proposé, mais à l'état neutre en tout point, elle produirait un certain travail non compensé  $\varepsilon dq$ . Le passage d'une quantité  $dq$  d'électricité positive du point  $M_1$  au point  $M_3$  n'est possible que si l'on a (1)

$$(\varepsilon V_3 + \Theta_3) - (\varepsilon V_1 + \Theta_1) < \varepsilon.$$

Le passage d'une quantité  $dq$  d'électricité négative du point  $M_1$  au point  $M_3$  au travers de l'électrolyte (2) produit de même au sein de cet

---

(1) Voir le *Potentiel thermodynamique et ses applications*, 3<sup>e</sup> Partie, p. 231.

électrolyte une certaine transformation chimique infiniment petite, correspondant à une quantité  $\mathcal{E}'$  définie comme la quantité  $\mathcal{E}$ . Le passage d'une quantité d'électricité négative  $dq$  du point  $M_1$  au point  $M_3$  n'est possible que si l'on a

$$(\varepsilon V_3 + \Theta_3) - (\varepsilon V_1 + \Theta_1) > -\mathcal{E}'.$$

Il en résulte que, si l'on a

$$(1) \quad -\mathcal{E}' > (\varepsilon V_3 + \Theta_3) - (\varepsilon V_1 + \Theta_1) > \mathcal{E},$$

aucun échange d'électricité ne pourra avoir lieu entre les deux conducteurs (1) et (3); en d'autres termes, l'équilibre électrique sera établi sur le système pour une infinité de valeurs de la différence

$$(\varepsilon V_3 + \Theta_3) - (\varepsilon V_1 + \Theta_1).$$

Le système est dit alors polarisé.

Un système n'est susceptible de se polariser que si l'on a

$$-\mathcal{E}' > \mathcal{E}.$$

Il n'en est pas toujours ainsi. Supposons, par exemple, que le corps 1 soit formé par un morceau de cuivre, le corps 3 par un morceau de zinc, le corps 2 par une solution de sulfate de cuivre et de sulfate de zinc. Si une certaine quantité  $dq$  d'électricité positive passe du corps 1 au corps 3, une quantité de cuivre  $\lambda dq$  se dissout et une quantité équivalente de zinc se précipite; si au contraire une même quantité d'électricité négative passe du corps 1 au corps 3, une quantité de cuivre  $\lambda dq$  se précipite et une quantité de zinc équivalente se dissout; les deux réactions sont exactement inverses l'une de l'autre; on a donc

$$\mathcal{E} = -\mathcal{E}';$$

l'équilibre ne peut s'établir que s'il existe entre les corps 1 et 3 une différence de niveau potentiel déterminée par l'égalité

$$(\varepsilon V_3 + \Theta_3) - (\varepsilon V_1 + \Theta_1) = \mathcal{E}.$$

Le système n'est pas susceptible d'être polarisé.

Considérons au contraire un système composé de la manière sui-

vante : le corps 1 et le corps 3 sont deux masses de platine ; le corps 2 est de l'eau acidulée ; si une quantité d'électricité positive  $dq$  passe du corps 1 au corps 3, une certaine quantité d'hydrogène  $\lambda dq$  se dégage sur le corps 1 et une quantité d'oxygène équivalente sur le corps 3. Cette réaction chimique, produite au sein d'un système identique au système proposé, mais à l'état neutre en tout point, produirait un certain travail non compensé  $\mathcal{E} dq$  ; dans ce cas,  $\mathcal{E}$  est négatif. Si, au contraire, une quantité d'électricité négative  $dq$  passe du corps 1 au corps 3, une certaine quantité d'hydrogène  $\lambda dq$  se dégage sur le corps 3 et une quantité équivalente d'oxygène sur le corps 1. La réaction est peu différente de la première. La quantité  $\mathcal{E}'$  est sensiblement égale à  $\mathcal{E}$ .

Le système est alors polarisable. Il est polarisé toutes les fois que l'on a

$$(\varepsilon V_3 + \Theta_3) - (\varepsilon V_1 + \Theta_1) \neq 0 \quad (1).$$

La question qui se pose maintenant est la suivante : *un système formé de deux métaux et d'un liquide électrolytique étant ainsi polarisé, quelle est la distribution de l'électricité sur ce système ?*

Sur chacun des deux métaux, la distribution électrique est encore donnée par cette condition que la quantité  $(\varepsilon V + \Theta)$  ait la même valeur en tous les points du même métal ; mais cette condition n'est certainement plus vérifiée à l'intérieur de l'électrolyte, puisque la fonction  $(\varepsilon V + \Theta)$ , dont les variations sont toujours continues, n'a pas la même valeur en l'un des métaux qu'en l'autre. La distribution électrique est donc la même sur chacun des deux métaux que si le système ne renfermait pas d'électrolyte ; c'est en l'électrolyte seul que nous devons apprendre à la connaître.

La première proposition que nous établirons est la suivante :

*Soient deux points M et M' où l'électrolyte a la même constitution, en ces deux points, ou bien V a la même valeur, ou bien la densité électrique  $\rho$  a la même valeur.*

En effet, soit  $\rho$  la densité électrique au point M et V le niveau po-

---

(1) Le symbole  $|a|$ , conformément à la notation de M. Weierstrass, signifie *valeur absolue de a*.

tentiel au même point; soient  $\rho'$  la densité électrique au point  $M'$  et  $V'$  le niveau potentiel au même point. Autour du même point  $M$ , découpons un élément de volume  $d\nu$ ; découpons un élément de volume  $d\nu'$  identique à  $d\nu$  autour du point  $M'$ ; par un mouvement du fluide, échangeons ces deux éléments de volume; le travail non compensé produit aura pour valeur

$$d\mathfrak{E} = \varepsilon(\rho - \rho')(V - V') dt.$$

Si le fluide est en équilibre, la modification considérée est réversible; le travail précédent est donc égal à 0, ce qui entraîne, comme nous l'avions annoncé, ou bien

$$\rho = \rho'$$

ou bien

$$V = V',$$

Cette démonstration, pour des raisons que nous avons développées au Chapitre I à propos d'une démonstration analogue, n'est applicable que si le corps est homogène autour de chacun des deux points  $M$  et  $M'$ , dans une sphère de rayon égal à  $\mu$ .

La proposition précédente s'applique aux divers points d'un domaine fini au sein duquel l'électrolyte est homogène; on voit que, dans un semblable domaine, on a, ou bien

$$\rho = \text{const.}$$

ou bien

$$V = \text{const.},$$

et, comme cette dernière condition entraîne  $\rho = 0$ , on voit qu'on peut la regarder comme renfermée dans la première, et énoncer la proposition suivante :

*Aux divers points d'un électrolyte homogène, la densité électrique a la même valeur.*

Voici maintenant d'autres résultats que nous déduisons comme les précédents de ce fait que l'électrolyte est un fluide.

Si l'on représente par

$$X dx dy dz, \quad Y dx dy dz, \quad Z dx dy dz$$

les composantes de l'action pondéromotrice exercée sur un élément de

volume d'un fluide, on sait que

$$X dx + Y dy + Z dz$$

doit être, à l'intérieur du fluide, la différentielle totale d'une fonction uniforme et continue des coordonnées.

Soit  $D$  la densité du fluide électrolytique en un point de l'élément  $dx dy dz$ ; soient

$$-D \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad -D \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad -D \frac{\partial \Omega}{\partial z}$$

les composantes des actions extérieures exercées sur cet élément de volume,  $\Omega$  étant une fonction de  $x, y, z$ , indépendante de la forme du fluide; nous aurons

$$X = -\varepsilon \rho \frac{\partial V}{\partial x} - D \frac{\partial \Omega}{\partial x},$$

$$Y = -\varepsilon \rho \frac{\partial V}{\partial y} - D \frac{\partial \Omega}{\partial y},$$

$$Z = -\varepsilon \rho \frac{\partial V}{\partial z} - D \frac{\partial \Omega}{\partial z},$$

et l'expression

$$\varepsilon \rho \left( \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right) + D \left( \frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \Omega}{\partial z} dz \right)$$

doit être une différentielle totale. Il en sera certainement ainsi si les deux expressions

$$D \left( \frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \Omega}{\partial z} dz \right)$$

et

$$\rho \left( \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right)$$

sont séparément des différentielles totales; cette condition imposée à ces deux expressions conduit aux propositions suivantes :

1° *Les surfaces d'égale densité matérielle coïncident, dans un électrolyte électrisé comme dans un fluide à l'état neutre, avec les surfaces de niveau des forces extérieures;*

2° *Les surfaces d'égale densité électrique coïncident, dans un électrolyte, avec les surfaces de niveau potentiel.*



La surface  $\theta_{1,2}$  est tout entière au même niveau potentiel; la densité électrique a donc la même valeur aux divers points de cette surface. Si l'on désigne par  $\rho$  cette densité, par  $\frac{\partial V}{\partial N_1}$  la valeur en un point  $M_1$ , situé à l'intérieur du corps 1 et infiniment voisin de la surface  $\theta_{1,2}$  de la dérivée de la fonction potentielle suivant la normale à la surface  $\theta_{1,2}$  vers l'intérieur du corps 1, par  $\frac{\partial V}{\partial N_2}$  la valeur en un point  $M_2$  situé à l'intérieur du corps 2 et infiniment voisin du point  $M_1$  et de la surface  $\theta_{1,2}$  de la dérivée de la fonction potentielle suivant la normale à la surface  $\theta_{1,2}$  vers l'intérieur du corps 2, on a

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial V}{\partial N_1} + \frac{\partial V}{\partial N_2} \right).$$

Mais, à l'intérieur du corps 1, on a

$$\varepsilon V + \Theta = \text{const.}$$

On a donc

$$\varepsilon \frac{\partial V}{\partial N_1} = -\frac{\partial}{\partial N_1} \Theta(1, 2, 0),$$

ce qui montre que  $\frac{\partial V}{\partial N_1}$  a la même valeur en tous les points de la surface  $\theta_{1,2}$ ; comme il en est de même de  $\rho$ , il doit aussi en être de même de  $\frac{\partial V}{\partial N_2}$ .

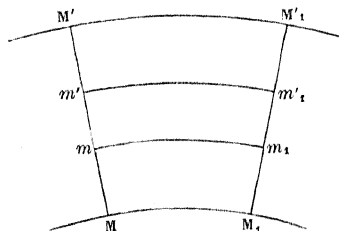
Ce résultat conduit à la proposition suivante :

*Dans une couche d'épaisseur  $(\lambda + \mu)$  voisine de la surface  $\theta_{1,2}$ , les surfaces de niveau sont des surfaces parallèles à la surface  $\theta_{1,2}$ , si  $\lambda + \mu$  est négligeable par rapport aux rayons de courbure de la surface  $\theta_{1,2}$ .*

Envisageons, en effet, un point  $M'$  situé à l'intérieur de la couche dont il s'agit. Supposons que la trajectoire orthogonale aux surfaces de niveau menée par ce point aille rencontrer la surface  $\theta_{1,2}$  en un point  $M$ ; elle la rencontre d'ailleurs normalement, puisque la surface  $\theta_{1,2}$  est une surface de niveau. Calculons la valeur  $\frac{\partial V}{\partial N'_2}$  au point  $M'$  de la dérivée, suivant la trajectoire orthogonale, vers l'intérieur du fluide 2, de la fonction potentielle.

Au voisinage du point  $M$ , prenons sur la surface  $\theta_{12}$  un élément superficiel  $MM_1$  (fig. 4). Par les divers points du contour de cet élément, menons des trajectoires orthogonales  $MM'$ ,  $M_1M'_1$ , ... aux surfaces de niveau. Ces trajectoires engendrent la surface latérale d'un canal infiniment délié. Coupons ce canal par deux surfaces de niveau infiniment

Fig. 4.



voisines  $mm_1$ ,  $m'm'_1$ , dont la distance normale soit  $mm' = \delta N$ . Soient

$\frac{\partial V}{\partial n_2}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial n'_2}$  les valeurs de  $\frac{\partial V}{\partial N_2}$  au point  $m$  et au point  $m'$ ;

$\omega$  la surface de l'élément  $mm_1$ ;

$\omega'$  la surface de l'élément  $m'm'_1$ .

Si la quantité  $\lambda + \mu$  est négligeable par rapport aux rayons de courbure de la surface  $\theta_{12}$ , il en est de même *a fortiori* de la longueur  $mm'$ . Le volume de l'élément  $mm_1m'm'_1$  est alors  $\omega \delta N$ ; la quantité d'électricité qu'il renferme est  $\rho \omega \delta N$ ,  $\rho$  étant la densité électrique en un point du volume  $m_1mm'm'_1$ . L'application de l'un des théorèmes de Gauss à la surface fermée  $m_1mm'm'_1$  donne alors

$$\frac{\partial V}{\partial n_2} \omega - \frac{\partial V}{\partial n'_2} \omega' = 4\pi\rho \omega \delta N.$$

Mais, si l'on désigne par  $r$  et  $r'$  les rayons de courbure principaux au point  $m$  de la surface  $mm_1$ , ces rayons étant comptés positivement vers l'intérieur du corps 1, on a

$$\frac{\omega}{\omega'} = 1 - \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) \delta N,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial V}{\partial n'_2} = \frac{\partial V}{\partial n_2} - \frac{\partial V}{\partial n_2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) \delta N - 4\pi\rho \delta N.$$

De là on déduit

$$\frac{\partial V}{\partial N'_2} = \frac{\partial V}{\partial N_2} - 4\pi \int_M^{M'} \rho \, \partial N - \int_M^{M'} \frac{\partial V}{\partial n_2} \left( \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} \right) \partial N.$$

Il est facile de voir que le dernier terme est en général de l'ordre de

$$(\lambda + \mu) \left( \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} \right) \frac{\partial V}{\partial N_2}$$

et est par conséquent négligeable devant les deux premiers. L'égalité précédente peut donc s'écrire

$$\frac{\partial V}{\partial N'_2} = \frac{\partial V}{\partial N_2} - 4\pi \int_M^{M'} \rho \, \partial N.$$

Cette égalité étant établie, supposons que nous ayons démontré que, jusqu'à la surface  $M'M'_1$ , toutes les surfaces de niveau sont parallèles à la surface  $\theta_{1,2}$ ; l'égalité que nous venons d'écrire nous montrera que  $\frac{\partial V}{\partial N'_2}$  a la même valeur en tous les points de la surface  $M'M'_1$  et, par conséquent, que les surfaces de niveau infiniment voisines de  $M'M'_1$  sont encore parallèles à  $\theta_{1,2}$ . Le théorème énoncé se démontrera ainsi de proche en proche.

Ainsi, en résumé, à l'intérieur du fluide électrolytique (2), l'électricité a une densité  $\rho_0$  qui dépend de la nature des conducteurs 1 et 3 et de leur forme, de la nature du fluide 2 et de sa forme, de la différence de niveau potentiel  $H$  qui existe entre les conducteurs 1 et 3, mais non du point considéré à l'intérieur du fluide 2.

A une distance  $l$  inférieure à  $\lambda + \mu$  de la surface  $\theta_{1,2}$  et à l'intérieur du corps 2, le niveau potentiel  $V$  et la densité électrique  $\rho$  ont des valeurs qui dépendent du niveau potentiel à l'intérieur du corps 1, de la différence  $H$ , de la nature et de la forme des corps  $l$  qui composent le système, enfin de la distance  $l$ . Nous les désignerons par  $V(1, 2, l)$  et par  $\rho(1, 2, \dots, l)$ . On peut naturellement en dire autant du niveau potentiel et de la densité électrique au voisinage du corps 3.

## § II. — Conditions d'équilibre du système.

2. Nous allons maintenant chercher les conditions d'équilibre des fluides qui forment le système. Comme au Chapitre II de la I<sup>re</sup> Partie, nous donnerons à ces fluides des dilatations en supposant que chaque particule matérielle entraîne dans son déplacement la charge électrique qu'elle porte, et nous écrirons que l'on a, dans toute modification de ce genre, l'équation (6) du Chapitre II de la I<sup>re</sup> Partie (t. V, p. 126),

$$(2) \quad \delta \mathfrak{E} = \delta \sum_{p=1}^{p=n} \mathbf{E} \mathbf{M}_p (Y_p - \mathbf{T} \Sigma_p) + \delta \left[ \sum_{p=1}^{p=n} \mathbf{A}_{p0} \theta_{p0} + \sum_{pq} (\mathbf{A}_{pq} + \mathbf{A}_{qp}) \theta_{pq} \right] + \delta \mathbf{W} + \delta \sum \Theta \mathbf{Q}.$$

Le premier membre et les deux premiers termes du second membre ont la même valeur qu'au Chapitre II de la I<sup>re</sup> Partie. En vertu de l'égalité (8) du Chapitre II de la I<sup>re</sup> Partie (t. V, p. 127), on a ici

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \delta \sum_{p=1}^{p=n} \mathbf{E} \mathbf{M}_p (Y_p - \mathbf{T} \Sigma_p) \\ &= \mathbf{E} \left\{ \left( \frac{\partial Y_1}{\partial \sigma_1} - \mathbf{T} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \sigma_1} \right) \left( \sum \delta \mathbf{N}_1 d\theta_{10} + \sum \delta \mathbf{N}_1 d\theta_{12} \right) \right. \\ & \quad + \left( \frac{\partial Y_2}{\partial \sigma_2} - \mathbf{T} \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \sigma_2} \right) \left( \sum \delta \mathbf{N}_2 d\theta_{20} + \sum \delta \mathbf{N}_2 d\theta_{21} + \sum \delta \mathbf{N}_2 d\theta_{23} \right) \\ & \quad \left. + \left( \frac{\partial Y_3}{\partial \sigma_3} - \mathbf{T} \frac{\partial \Sigma_3}{\partial \sigma_3} \right) \left( \sum \delta \mathbf{N}_3 d\theta_{30} + \sum \delta \mathbf{N}_3 d\theta_{32} \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

D'après les égalités (12) et (13) du Chapitre II de la I<sup>re</sup> Partie (t. V, p. 129), on a ici

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \delta \left[ \sum_{p=1}^{p=n} \mathbf{A}_{p0} \theta_{p0} + \sum_{pq} (\mathbf{A}_{pq} + \mathbf{A}_{qp}) \theta_{pq} \right] \\ &= \mathbf{S} \left[ \mathbf{A}_{10} \left( \frac{1}{\mathbf{R}_1} + \frac{1}{\mathbf{R}'_1} \right) + \psi_1 \right] \delta \mathbf{N}_1 d\theta_{10} + \mathbf{S} \left[ \mathbf{A}_{12} \left( \frac{1}{\mathbf{R}_1} + \frac{1}{\mathbf{R}'_1} \right) + \psi_1 \right] \delta \mathbf{N}_1 d\theta_{12} \\ & \quad + \mathbf{S} \left[ \mathbf{A}_{20} \left( \frac{1}{\mathbf{R}_2} + \frac{1}{\mathbf{R}'_2} \right) + \psi_2 \right] \delta \mathbf{N}_2 d\theta_{20} \\ & \quad + \mathbf{S} \left[ \mathbf{A}_{21} \left( \frac{1}{\mathbf{R}_2} + \frac{1}{\mathbf{R}'_2} \right) + \psi_2 \right] \delta \mathbf{N}_2 d\theta_{21} + \mathbf{S} \left[ \mathbf{A}_{23} \left( \frac{1}{\mathbf{R}_2} + \frac{1}{\mathbf{R}'_2} \right) + \psi_2 \right] \delta \mathbf{N}_2 d\theta_{23} \\ & \quad + \mathbf{S} \left[ \mathbf{A}_{30} \left( \frac{1}{\mathbf{R}_3} + \frac{1}{\mathbf{R}'_3} \right) + \psi_3 \right] \delta \mathbf{N}_3 d\theta_{30} + \mathbf{S} \left[ \mathbf{A}_{32} \left( \frac{1}{\mathbf{R}_3} + \frac{1}{\mathbf{R}'_3} \right) + \psi_3 \right] \delta \mathbf{N}_3 d\theta_{32}. \end{aligned} \right.$$

Enfin, en vertu des égalités (32) (t. V, p. 138), (33) (t. V, p. 138) et (34) (t. V, p. 139) du Chapitre II de la I<sup>re</sup> Partie, on a

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta \varepsilon = & - \sum [(P + \Omega) D_1 + \nu_1] \delta N_1 d\theta_{10} - \sum [(P + \Omega) D_2 + \nu_2] \delta N_2 d\theta_{20} \\ & - \sum [(P + \Omega) D_3 + \nu_3] \delta N_3 d\theta_{30} \\ & - \sum (\Omega D_1 + \nu_1) \delta N_1 d\theta_{12} - \sum (\Omega D_3 + \nu_3) \delta N_3 d\theta_{32} \\ & - \sum (\Omega D_2 + \nu_2) \delta N_2 d\theta_{21} - \sum (\Omega D_2 + \nu_2) \delta N_2 d\theta_{23}. \end{aligned} \right.$$

Il reste à calculer les deux termes  $\delta W$  et  $\delta \sum \Theta Q$ .

Comme dans l'égalité (8) du Chapitre II de la I<sup>re</sup> Partie, on a

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta W = & \varepsilon \sum q \frac{\partial V}{\partial N} \delta N - \frac{\varepsilon}{8\pi} \left[ \sum \left( \frac{\partial V}{\partial N_1} + \frac{\partial V}{\partial N'_1} \right)^2 \delta N_1 d\theta_{10} \right. \\ & + \sum \left( \frac{\partial V}{\partial N_2} + \frac{\partial V}{\partial N'_2} \right)^2 \delta N_2 d\theta_{20} + \sum \left( \frac{\partial V}{\partial N_3} + \frac{\partial V}{\partial N'_3} \right)^2 \delta N_3 d\theta_{30} \\ & \left. + \sum \left( \frac{\partial V}{\partial N_1} + \frac{\partial V}{\partial N'_1} \right)^2 \delta N_1 d\theta_{12} + \sum \left( \frac{\partial V}{\partial N_3} + \frac{\partial V}{\partial N'_3} \right)^2 \delta N_3 d\theta_{32} \right], \end{aligned} \right.$$

le signe  $\sum$  s'étendant à toutes les charges  $q$  réparties à l'intérieur du système.

Pour chacun des deux corps 1 et 3, le premier terme se calcule comme au Chapitre II de la I<sup>re</sup> Partie [égalité (16)]. On a donc, pour le corps 1,

$$(7) \quad \varepsilon \sum q \frac{\partial V}{\partial N} \delta N = \beta_{10} \sum \delta N_1 d\theta_{10} + \beta_{12} \sum \delta N_1 d\theta_{12}$$

et, pour le corps 3,

$$(7 \text{ bis}) \quad \varepsilon \sum q \frac{\partial V}{\partial N} \delta N = \beta_{30} \sum \delta N_3 d\theta_{30} + \beta_{32} \sum \delta N_3 d\theta_{32}.$$

Pour le corps 2, ce terme s'exprime d'une manière plus complexe. Pour ce corps, nous partagerons la quantité  $\varepsilon \sum q \frac{\partial V}{\partial N} \delta N$  en deux parties : l'une, relative à la région du corps dont tous les points sont à une distance de la surface au moins égale à  $\lambda + \mu$ ; l'autre, relative à

la région du corps dont tous les points sont à une distance de la surface inférieure à  $\lambda + \mu$ .

Soient  $u \delta t$ ,  $v \delta t$ ,  $w \delta t$  les composantes du déplacement d'un point de la première région,  $\delta t$  étant une quantité infiniment petite qui a la même valeur pour tous les points de cette région. Pour cette région, on aura

$$\varepsilon \sum q \frac{\partial V}{\partial N} \delta N = \varepsilon \rho_0 \delta t \iiint \left( \frac{\partial V}{\partial x} u + \frac{\partial V}{\partial y} v + \frac{\partial V}{\partial z} w \right) dx dy dz,$$

$\rho_0$  étant la densité constante de l'électricité à l'intérieur de cette région et l'intégrale s'étendant à tous les éléments de volume de cette région. Une intégration par parties nous donne alors

$$\begin{aligned} \varepsilon \sum q \frac{\partial V}{\partial N} \delta N = \varepsilon \rho_0 \left[ \sum V(2, 0, \lambda + \mu) \delta N_2 d\theta_{20} \right. \\ \left. + \sum V(2, 1, \lambda + \mu) \delta N_2 d\theta_{21} + \sum V(2, 3, \lambda + \mu) \delta N_3 d\theta_{23} \right] \\ - \varepsilon \rho_0 \delta t \iiint V \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

Mais on a, en vertu de l'égalité (7) du Chapitre II de la I<sup>re</sup> Partie (t. V, p. 126),

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{D_2}{M_2} \left( \sum \delta N_2 d\theta_{20} + \sum \delta N_2 d\theta_{21} + \sum \delta N_2 d\theta_{23} \right),$$

$M_2$  étant le poids de l'électrolyte. Si donc on pose

$$(8) \quad \mathfrak{T}_2 = \frac{\rho_0 D_2}{M_2} \iiint V dx dy dz,$$

l'intégrale s'étendant à la première région, ou, ce qui revient au même, au volume entier du fluide 2, on aura, pour cette première région,

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon \sum q \frac{\partial V}{\partial N} \delta N &= [\varepsilon \rho_0 V(2, 0, \lambda + \mu) - \varepsilon \mathfrak{T}_2] \sum \delta N_2 d\theta_{20} \\ &+ [\varepsilon \rho_0 V(2, 1, \lambda + \mu) - \varepsilon \mathfrak{T}_2] \sum \delta N_2 d\theta_{21} \\ &+ [\varepsilon \rho_0 V(2, 3, \lambda + \mu) - \varepsilon \mathfrak{T}_2] \sum \delta N_2 d\theta_{23}. \end{aligned} \right.$$

Les quantités  $\rho_0$ ,  $V$ ,  $N_2$  qui figurent dans cette formule dépendent

de la forme du système, de la nature des fluides qui le composent et de la différence de niveau potentiel qui existe entre les fluides 1 et 3.

Pour calculer la quantité  $\varepsilon \sum q \frac{\partial V}{\partial N} \delta N$  relative à la seconde région, nous examinerons d'abord les parties de cette région qui sont voisines de l'une des surfaces  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{23}$ , de la première par exemple. Pour cette partie, nous aurons

$$\varepsilon \sum q \frac{\partial V}{\partial N} \delta N = -\varepsilon \int_0^{\lambda+\mu} \rho(2, 1, l) \frac{\partial V(2, 1, l)}{\partial l} dl \int \delta N_2 d\theta_{12}.$$

Posons

$$\begin{aligned} \rho(2, 1, l) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \Delta \Theta(2, 1, l) + \rho'(2, 1, l), \\ \frac{\partial V(2, 1, l)}{\partial l} &= -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Theta(2, 1, l)}{\partial l} + \varpi(2, 1, l). \end{aligned}$$

Soit, suivant la notation employée en l'équation (15) du Chapitre II de la 1<sup>re</sup> Partie (t. V, p. 132),

$$\beta_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_0^{\lambda+\mu} \Delta \Theta(2, 1, l) \frac{\partial \Theta(2, 1, l)}{\partial l} dl,$$

et soit, en outre,

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{w}_{21} &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\lambda+\mu} \Delta \Theta(2, 1, l) \varpi(2, 1, l) dl \\ &+ \int_0^{\lambda+\mu} \frac{\partial \Theta(2, 1, l)}{\partial l} \rho'(2, 1, l) dl - \varepsilon \int_0^{\lambda+\mu} \rho'(2, 1, l) \varpi(2, 1, l) dl. \end{aligned} \right.$$

Nous aurons, pour la partie considérée du fluide 2,

$$(11) \quad \varepsilon \sum q \frac{\partial V}{\partial N} \delta N = (\beta_{21} + \mathfrak{w}_{21}) \int \delta N_2 d\theta_{12},$$

la quantité  $\beta_{21}$  ne dépendant que de la nature que les fluides 1 et 2 présentent loin des surfaces terminales, tandis que la quantité  $\mathfrak{w}_{21}$  dépend de la nature des fluides qui forment le système, de leur forme et de la différence du niveau potentiel entre les fluides 1 et 3.

De même, pour la partie du fluide 2 voisine de la surface  $\theta_{23}$ , nous aurons

$$(11 \text{ bis}) \quad \varepsilon \sum q \frac{\partial V}{\partial N} \delta N = (\beta_{23} + \mathfrak{w}_{23}) \int \delta N_2 d\theta_{23}.$$

Envisageons maintenant la partie du fluide 2 voisine de la surface  $\theta_{20}$ . Dans cette région, la distribution électrique nous est entièrement inconnue; en deux points équidistants de la surface  $\theta_{20}$ , la densité électrique et le niveau potentiel peuvent avoir des valeurs différentes; l'intégrale

$$(12) \quad \gamma_2 = -\varepsilon \int_0^{\lambda+\mu} \rho \frac{\partial V}{\partial l} dl$$

a, en général, des valeurs différentes aux divers points de la surface  $\theta_{20}$ . On a, pour la région considérée,

$$(13) \quad \varepsilon \sum q \frac{\partial V}{\partial N} \delta N = \sum \gamma_2 \delta N_2 d\theta_{20}.$$

En vertu des égalités (9), (11), (11 bis) et (13), on a, pour toutes les charges réparties à l'intérieur du corps 2,

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon \sum q \frac{\partial V}{\partial N} \delta N &= \sum [\varepsilon \rho_0 V(2, 0, \lambda + \mu) - \varepsilon \gamma_2 + \gamma_2] \delta N_2 d\theta_{20} \\ &+ [\varepsilon \rho_0 V(2, 1, \lambda + \mu) - \varepsilon \gamma_2 + \beta_{21} + \gamma_{21}] \sum \delta N_2 d\theta_{21} \\ &+ [\varepsilon \rho_0 V(2, 3, \lambda + \mu) - \varepsilon \gamma_2 + \beta_{23} + \gamma_{23}] \sum \delta N_2 d\theta_{23}. \end{aligned} \right.$$

D'après les calculs effectués au Chapitre II de la 1<sup>re</sup> Partie (t. V, p. 133), nous avons

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\varepsilon}{8\pi} \sum \left( \frac{\partial V}{\partial N_1} + \frac{\partial V}{\partial N'_1} \right)^2 \delta N_1 d\theta_{10} &= \sum (\gamma_{10} + \partial_{10} \Delta + 2\pi\varepsilon \Delta^2) \delta N_1 d\theta_{10}, \\ \frac{\varepsilon}{8\pi} \sum \left( \frac{\partial V}{\partial N_2} + \frac{\partial V}{\partial N'_2} \right)^2 \delta N_2 d\theta_{20} &= \sum (\gamma_{20} + \partial_{20} \Delta + 2\pi\varepsilon \Delta^2) \delta N_2 d\theta_{20}, \\ \frac{\varepsilon}{8\pi} \sum \left( \frac{\partial V}{\partial N_3} + \frac{\partial V}{\partial N'_3} \right)^2 \delta N_3 d\theta_{30} &= \sum (\gamma_{30} + \partial_{30} \Delta + 2\pi\varepsilon \Delta^2) \delta N_3 d\theta_{30}. \end{aligned} \right.$$

En chacun des points de la surface  $\theta_{12}$ , la densité électrique a une même valeur  $\mathcal{R}_{12}$  qui dépend de la nature des fluides qui composent le système, de leur forme, de la différence de niveau potentiel  $H$  qui existe entre les deux fluides 1 et 3. On a alors

$$(16) \quad \frac{\varepsilon}{8\pi} \sum \left( \frac{\partial V}{\partial N_1} + \frac{\partial V}{\partial N'_1} \right)^2 \delta N_1 d\theta_{12} = 2\pi\varepsilon \mathcal{R}_{12}^2 \sum \delta N_1 d\theta_{12}$$



et de même

$$(16 \text{ bis}) \quad \frac{\varepsilon}{8\pi} \mathbf{S} \left( \frac{\partial V}{\partial N_3} + \frac{\partial V}{\partial N'_3} \right)^2 \delta N_3 d\theta_{32} = 2\pi\varepsilon \mathcal{R}_{32}^2 \mathbf{S} \delta N_3 d\theta_{32}.$$

Les égalités (6), (7), (7 *bis*), (14), (15), (16) et (16 *bis*) donnent, pour tout le système,

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta W = & \mathbf{S} (\beta_{10} - \gamma_{10} - \partial_{10} \Delta - 2\pi\varepsilon \Delta^2) \delta N_1 d\theta_{10} \\ & + \mathbf{S} (\beta_{30} - \gamma_{30} - \partial_{30} \Delta - 2\pi\varepsilon \Delta^2) \delta N_3 d\theta_{30} \\ & + \mathbf{S} [\varepsilon \rho_0 V(2, 0, \lambda + \mu) - \varepsilon \mathfrak{U}_2 + \mathfrak{J}_2 - \gamma_{20} - \partial_{20} \Delta - 2\pi\varepsilon \Delta^2] \delta N_2 d\theta_{20} \\ & + [\varepsilon \rho_0 V(2, 1, \lambda + \mu) - \varepsilon \mathfrak{U}_2 + \beta_{21} + \mathfrak{U}_{21} + 2\pi\varepsilon \mathcal{R}_{12}^2] \mathbf{S} \delta N_2 d\theta_{21} \\ & + [\varepsilon \rho_0 V(2, 3, \lambda + \mu) - \varepsilon \mathfrak{U}_2 + \beta_{23} + \mathfrak{U}_{23} + 2\pi\varepsilon \mathcal{R}_{32}^2] \mathbf{S} \delta N_2 d\theta_{23}. \end{aligned} \right.$$

Il nous reste enfin à calculer, pour tout le système, la quantité

$$\delta \sum \Theta q = \sum q \delta \Theta.$$

Pour les charges réparties à l'intérieur du corps 1, en vertu de l'égalité (24) du Chapitre II de la I<sup>re</sup> Partie (t. V, p. 135), on a

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum q \delta \Theta = & \zeta_{10} \frac{\theta_{10}}{\mathbf{M}_1} \left( \mathbf{S} \delta N_1 d\theta_{10} + \mathbf{S} \delta N_1 d\theta_{12} \right) \\ & + \zeta_{12} \frac{\theta_{12}}{\mathbf{M}_1} \left( \mathbf{S} \delta N_1 d\theta_{10} + \mathbf{S} \delta N_1 d\theta_{12} \right) \\ & + \eta_{12} \frac{\theta_{12}}{\mathbf{M}_2} \left( \mathbf{S} \delta N_2 d\theta_{20} + \mathbf{S} \delta N_2 d\theta_{21} + \mathbf{S} \delta N_2 d\theta_{23} \right). \end{aligned} \right.$$

De même, pour les charges réparties à l'intérieur du corps 3, on a

$$(18 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum q \delta \Theta = & \zeta_{30} \frac{\theta_{30}}{\mathbf{M}_3} \left( \mathbf{S} \delta N_3 d\theta_{30} + \mathbf{S} \delta N_3 d\theta_{32} \right) \\ & + \zeta_{32} \frac{\theta_{32}}{\mathbf{M}_3} \left( \mathbf{S} \delta N_3 d\theta_{30} + \mathbf{S} \delta N_3 d\theta_{32} \right) \\ & + \eta_{32} \frac{\theta_{32}}{\mathbf{M}_2} \left( \mathbf{S} \delta N_2 d\theta_{20} + \mathbf{S} \delta N_2 d\theta_{21} + \mathbf{S} \delta N_2 d\theta_{23} \right). \end{aligned} \right.$$

Pour les charges réparties sur la surface  $\theta_{10}$ , on a, en vertu de l'égalité (28) du Chapitre II de la I<sup>re</sup> Partie (t. V, p. 136),

$$(19) \quad \sum q \partial \Theta = \frac{\lambda_{10} Q_{10} + \mu_{10} \theta_{10}}{M_1} \left( \int \partial N_1 d\theta_{10} + \int \partial N_1 d\theta_{12} \right),$$

et de même, pour les charges réparties sur la surface  $\theta_{30}$ ,

$$(10 \text{ bis}) \quad \sum q \partial \Theta = \frac{\lambda_{30} Q_{30} + \mu_{30} \theta_{30}}{M_3} \left( \int \partial N_3 d\theta_{30} + \int \partial N_3 d\theta_{32} \right).$$

Évaluons maintenant la quantité

$$\sum q \partial \Theta$$

pour toutes les charges réparties à l'intérieur de l'électrolyte 2.

Examinons, en premier lieu, dans cet électrolyte, la région dont tous les points sont à une distance des surfaces limites supérieure à  $\lambda + \mu$ . En tous ces points, la densité électrique a une même valeur  $\rho_0$ ,  $\Theta$  une même valeur  $\Theta_0$ . On a donc, pour cette région,

$$\sum q \partial \Theta = \rho_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial \sigma_2} \iiint dx dy dz.$$

Si nous posons

$$(20) \quad \mathfrak{K}'_2 = \frac{\rho_0}{M_2} \frac{\partial \Theta_0}{\partial \sigma_2} \iiint dx dy dz,$$

nous aurons, pour la région considérée,

$$(21) \quad \sum q \partial \Theta = \mathfrak{K}'_2 \left( \int \partial N_2 d\theta_{20} + \int \partial N_2 d\theta_{21} + \int \partial N_2 d\theta_{23} \right).$$

Examinons en second lieu la région du corps 2 voisine de la surface  $\theta_{21}$ . Pour cette région, nous aurons

$$\sum q \partial \Theta = \theta_{12} \int_0^{\lambda+\mu} \rho(2, 1, l) \left[ \frac{\partial \Theta(2, 1, l)}{\partial \sigma_1} \partial \sigma_1 + \frac{\partial \Theta(2, 1, l)}{\partial \sigma_2} \partial \sigma_2 \right] dl.$$

Si l'on remarque que l'on a

$$\rho(2, 1, l) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \Delta \Theta(2, 1, l) + \rho'(2, 1, l)$$

et si l'on pose

$$(22) \quad \begin{cases} \mathfrak{Q}_{21} = \frac{\theta_{12}}{\mathbf{M}_1} \int_0^{\lambda+\mu} \rho'(2, 1, l) \frac{\partial \Theta(2, 1, l)}{\partial \sigma_1} dl, \\ \mathfrak{Q}_{21} = \frac{\theta_{12}}{\mathbf{M}_2} \int_0^{\lambda+\mu} \rho'(2, 1, l) \frac{\partial \Theta(2, 1, l)}{\partial \sigma_2} dl, \end{cases}$$

en vertu des égalités (23) du Chapitre II de la I<sup>re</sup> Partie (t. V, p. 135), on aura, pour la région considérée,

$$(23) \quad \begin{cases} \sum q \partial \Theta = \left( \zeta_{21} \frac{\theta_{12}}{\mathbf{M}_1} + \mathfrak{Q}_{21} \right) \left( \mathbf{S} \partial \mathbf{N}_2 d\theta_{20} + \mathbf{S} \partial \mathbf{N}_2 d\theta_{21} + \mathbf{S} \partial \mathbf{N}_2 d\theta_{23} \right) \\ \quad + \left( \gamma_{21} \frac{\theta_{12}}{\mathbf{M}_2} + \mathfrak{Q}_{21} \right) \left( \mathbf{S} \partial \mathbf{N}_1 d\theta_{10} + \mathbf{S} \partial \mathbf{N}_1 d\theta_{12} \right). \end{cases}$$

De même, pour la région du corps 2 voisine du corps 3, on a

$$(23 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \sum q \partial \Theta = \left( \zeta_{23} \frac{\theta_{23}}{\mathbf{M}_3} + \mathfrak{Q}_{23} \right) \left( \mathbf{S} \partial \mathbf{N}_2 d\theta_{20} + \mathbf{S} \partial \mathbf{N}_2 d\theta_{21} + \mathbf{S} \partial \mathbf{N}_2 d\theta_{23} \right) \\ \quad + \left( \gamma_{23} \frac{\theta_{23}}{\mathbf{M}_2} + \mathfrak{Q}_{23} \right) \left( \mathbf{S} \partial \mathbf{N}_3 d\theta_{30} + \mathbf{S} \partial \mathbf{N}_3 d\theta_{32} \right). \end{cases}$$

La région du corps 2 voisine de la surface  $\theta_{20}$  fournit une certaine quantité

$$\sum q \partial \Theta.$$

Posons

$$(24) \quad \mathfrak{S}'_2 = \frac{1}{\mathbf{M}_2} \int_0^{\lambda+\mu} \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma_2} dl,$$

quantité qui aura une valeur différente, suivant la position qu'occupe sur la surface  $\theta_{20}$  l'élément  $d\theta_{20}$  que l'on considère, et

$$(25) \quad \mathfrak{S}_2 = \mathbf{S} \mathfrak{S}'_2 d\theta_{20};$$

nous aurons, pour la région considérée,

$$(26) \quad \sum q \partial \Theta = \mathfrak{S}_2 \left( \mathbf{S} \partial \mathbf{N}_2 d\theta_{20} + \mathbf{S} \partial \mathbf{N}_2 d\theta_{21} + \mathbf{S} \partial \mathbf{N}_2 d\theta_{23} \right).$$

Pour les charges situées sur la surface  $\theta_{20}$  même, en vertu de l'éga-

lité (28) du Chapitre II de la I<sup>re</sup> Partie (t. V, p. 136), nous aurons

$$(19 \text{ ter}) \quad \sum q \partial \Theta = \frac{\lambda_{20} Q_{20} + \mu_{20} \theta_{20}}{M_2} \left( \int \partial N_2 d\theta_{20} + \int \partial N_2 d\theta_{21} + \int \partial N_2 d\theta_{23} \right).$$

Pour les charges distribuées sur la surface  $\theta_{12}$ , si l'on pose

$$(27) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_{21} = \frac{\partial \Theta(2, 1, 0)}{\partial \sigma_1}, \\ \mathcal{N}_{21} = \frac{\partial \Theta(2, 1, 0)}{\partial \sigma_2}, \end{cases}$$

on a

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum q \partial \Theta &= \frac{\mathcal{L}_{21} Q_{12}}{M_1} \left( \int \partial N_1 d\theta_{10} + \int \partial N_1 d\theta_{12} \right) \\ &+ \frac{\mathcal{N}_{21} Q_{12}}{M_2} \left( \int \partial N_2 d\theta_{20} + \int \partial N_2 d\theta_{21} + \int \partial N_2 d\theta_{23} \right). \end{aligned} \right.$$

De même, pour les charges distribuées sur la surface  $\theta_{23}$ , nous aurons

$$(28 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum q \partial \Theta &= \frac{\mathcal{L}_{23} Q_{23}}{M_3} \left( \int \partial N_3 d\theta_{30} + \int \partial N_3 d\theta_{32} \right) \\ &+ \frac{\mathcal{N}_{23} Q_{23}}{M_2} \left( \int \partial N_2 d\theta_{20} + \int \partial N_2 d\theta_{21} + \int \partial N_2 d\theta_{23} \right). \end{aligned} \right.$$

En vertu des égalités (18), (18 bis), (19), (19 bis), (19 ter), (21), (23), (23 bis), (26), (28), (28 bis) du présent Chapitre, si l'on pose

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \chi_1 &= \frac{\zeta_{10} \theta_{10} + \zeta_{12} \theta_{12}}{M_1} + \eta_{21} \frac{\theta_{12}}{M_2} + \frac{\mathcal{L}_{21} Q_{12}}{M_1}, \\ \chi_3 &= \frac{\zeta_{30} \theta_{30} + \zeta_{32} \theta_{32}}{M_3} + \eta_{23} \frac{\theta_{32}}{M_2} + \frac{\mathcal{L}_{23} Q_{32}}{M_3}, \\ \omega_2 &= \frac{\eta_{12} \theta_{12} + \eta_{32} \theta_{32}}{M_2} + \zeta_{21} \frac{\theta_{12}}{M_1} + \zeta_{23} \frac{\theta_{32}}{M_3} + \mathfrak{N}'_2 + \delta_2 \\ &+ \mathcal{Q}_{21} + \mathcal{Q}_{23} + \frac{\lambda_{20} Q_{20} + \mu_{20} \theta_{20}}{M_2} + \frac{\mathcal{N}_{21} Q_{12} + \mathcal{N}_{23} Q_{32}}{M_2}, \\ \xi_2 &= \frac{\eta_{12} \theta_{12} + \eta_{32} \theta_{32}}{M_3} + \zeta_{21} \frac{\theta_{12}}{M_1} + \zeta_{23} \frac{\theta_{32}}{M_3} + \mathfrak{N}'_2 + \delta_2 \\ &+ \mathcal{Q}_{21} + \mathcal{Q}_{23} + \frac{\lambda_{20} Q_{20} + \mu_{20} \theta_{20}}{M_2} + \frac{\mathcal{N}_{21} Q_{12} + \mathcal{N}_{23} Q_{32}}{M_2} \\ &- \frac{\mathcal{L}_{21} Q_{12}}{M_1} - \frac{\mathcal{L}_{23} Q_{32}}{M_3}, \end{aligned} \right.$$

nous aurons, pour le système tout entier,

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta \sum \Theta q = & + \left( \chi_1 + \mathfrak{Q}_{21} + \frac{\lambda_{10} Q_{10} + \mu_{10} \theta_{10}}{M_1} \right) S \delta N_1 d\theta_{10} \\ & + \left( \chi_3 + \mathfrak{Q}_{23} + \frac{\lambda_{30} Q_{30} + \mu_{30} \theta_{30}}{M_3} \right) S \delta N_3 d\theta_{30} \\ & + \omega_2 S \delta N_2 d\theta_{20} \\ & + \left( \xi_2 - \mathfrak{Q}_{21} - \frac{\lambda_{10} Q_{10} + \mu_{10} \theta_{10}}{M_1} \right) S \delta N_2 d\theta_{12} \\ & + \left( \xi_2 - \mathfrak{Q}_{23} - \frac{\lambda_{30} Q_{30} + \mu_{30} \theta_{30}}{M_3} \right) S \delta N_2 d\theta_{32}. \end{aligned} \right.$$

En vertu des égalités (3), (4), (5), (17) et (30) du présent Chapitre, l'égalité (2), qui va nous donner les conditions d'équilibre, prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} & S \left[ E \left( \frac{\partial Y_1}{\partial \sigma_1} - T \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \sigma_1} \right) + A_{10} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} \right) + P + \Omega D_1 + \psi_1 + \nu_1 \right. \\ & \quad \left. + \beta_{10} - \gamma_{10} - \delta_{10} \Delta - 2\pi \varepsilon \Delta^2 + \chi_1 + \mathfrak{Q}_{21} + \frac{\lambda_{10} Q_{10} + \mu_{10} \theta_{10}}{M_1} \right] \delta N_1 d\theta_{10} \\ & + S \left[ E \left( \frac{\partial Y_3}{\partial \sigma_3} - T \frac{\partial \Sigma_3}{\partial \sigma_3} \right) + A_{30} \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R'_3} \right) + P + \Omega D_3 + \psi_3 + \nu_3 \right. \\ & \quad \left. + \beta_{30} - \gamma_{30} - \delta_{30} \Delta - 2\pi \varepsilon \Delta^2 + \chi_3 + \mathfrak{Q}_{23} + \frac{\lambda_{30} Q_{30} + \mu_{30} \theta_{30}}{M_3} \right] \delta N_3 d\theta_{30} \\ & + S \left[ E \left( \frac{\partial Y_2}{\partial \sigma_2} - T \frac{\partial \Sigma_{12}}{\partial \sigma_2} \right) + A_{20} \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_2} \right) + P + \Omega_2 D_2 + \psi_2 + \nu_2 \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon \rho_0 V(2, 0, \lambda + \mu) - \varepsilon \mathfrak{T}_2 + \mathfrak{J}_2 - \gamma_{20} - \delta_{20} \Delta - 2\pi \varepsilon \Delta^2 + \omega_2 \right] \delta N_2 d\theta_{20} \\ & + S \left[ E \left( \frac{\partial Y_2}{\partial \sigma_2} - T \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \sigma_2} \right) - E \left( \frac{\partial Y_1}{\partial \sigma_1} - T \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \sigma_1} \right) + \Omega (D_2 - D_1) \right. \\ & \quad + (A_{12} + A_{21}) \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_2} \right) + (\psi_2 - \psi_1) + (\nu_2 - \nu_1) + \varepsilon \rho_0 V(2, 1, \lambda + \mu) \\ & \quad \left. - \varepsilon \mathfrak{T}_2 + \beta_{21} + \mathfrak{V}_{21} + 2\pi \varepsilon \mathfrak{R}_{12}^2 + \xi_2 - \mathfrak{Q}_{21} - \frac{\lambda_{10} Q_{10} + \mu_{10} \theta_{10}}{M_1} \right] \delta N_2 d\theta_{12} \\ & + S \left[ E \left( \frac{\partial Y_2}{\partial \sigma_2} - T \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \sigma_2} \right) - E \left( \frac{\partial Y_3}{\partial \sigma_3} - T \frac{\partial \Sigma_3}{\partial \sigma_3} \right) + \Omega (D_2 - D_3) \right. \\ & \quad + (A_{32} + A_{23}) \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_2} \right) + (\psi_2 - \psi_3) + (\nu_2 - \nu_3) + \varepsilon \rho_0 V(2, 3, \lambda + \mu) \\ & \quad \left. - \varepsilon \mathfrak{T}_2 + \beta_{23} + \mathfrak{V}_{23} + 2\pi \varepsilon \mathfrak{R}_{32}^2 + \xi_2 - \mathfrak{Q}_{23} - \frac{\lambda_{30} Q_{30} + \mu_{30} \theta_{30}}{M_3} \right] \delta N_2 d\theta_{23} = 0. \end{aligned}$$

Si l'on remarque maintenant que tous les  $\delta N$  sont arbitraires, on voit que l'on doit avoir :

1° En tous les points de la surface  $\theta_{10}$ ,

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} & E \left( \frac{\partial Y_1}{\partial \sigma_1} - T \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \sigma_1} \right) + A_{10} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} \right) + P + \Omega D_1 + \psi_1 + \nu_1 + \beta_{10} \\ & - \gamma_{10} - \delta_{10} \Delta - 2\pi\varepsilon \Delta^2 + \chi_1 + \mathcal{Q}_{21} + \frac{\lambda_{10} Q_{10} + \mu_{10} \theta_{10}}{M_1} = 0, \end{aligned} \right.$$

et une égalité analogue en tous les points de la surface  $\theta_{30}$ .

2° En tous les points de la surface  $\theta_{30}$ ,

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} & E \left( \frac{\partial Y_2}{\partial \sigma_2} - T \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \sigma_2} \right) + A_{20} \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_2} \right) + P + \Omega D_2 + \psi_2 + \nu_2 \\ & + \varepsilon \rho_0 V(2, 0, \lambda + \mu) - \varepsilon \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{J}_2 - \gamma_{20} - \delta_{20} \Delta - 2\pi\varepsilon \Delta^2 + \omega_2 = 0. \end{aligned} \right.$$

3° En tous les points de la surface  $\theta_{12}$ ,

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} & E \left( \frac{\partial Y_2}{\partial \sigma_2} - T \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \sigma_2} \right) - E \left( \frac{\partial Y_1}{\partial \sigma_1} - T \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \sigma_1} \right) + \Omega(D_2 - D_1) \\ & + (A_{12} + A_{21}) \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_2} \right) + (\psi_2 - \psi_1) + (\nu_2 - \nu_1) + \varepsilon \rho_0 V(2, 1, \lambda + \mu) \\ & - \varepsilon \mathfrak{G}_2 - \beta_{21} + \mathfrak{H}_{21} + 2\pi\varepsilon R_{12}^2 + \xi_2 + \mathcal{Q}_{21} - \frac{\lambda_{10} Q_{10} + \mu_{10} \theta_{10}}{M_1} = 0, \end{aligned} \right.$$

et une égalité analogue aux divers points de la surface  $\theta_{23}$ .

Telles sont les conditions d'équilibre que nous voulions obtenir.

### III. — Conséquences des conditions précédentes. Interprétation des phénomènes électrocapillaires.

3. C'est sur la dernière de ces conditions, sur l'égalité (34), que nous porterons maintenant notre attention.

Si l'on réunit sous le symbole  $C$  une somme de quantités qui toutes ont une valeur unique pour tous les points de la surface  $\theta_{12}$ , cette égalité devient

$$(A_{12} + A_{21}) \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_2} \right) + \Omega(D_2 - D_1) = C.$$

Sous cette forme, on reconnaît sans peine l'équation donnée par

Laplace pour la surface de séparation de deux fluides soumis à des forces extérieures qui admettent une fonction potentielle  $\Omega$ . On peut donc énoncer le théorème suivant :

*Dans un système formé de fluides conducteurs et d'électrolytes polarisés, la forme de chacune des surfaces de séparation vérifie toujours l'équation aux dérivées partielles de Laplace.*

Si l'on continue à donner le nom de *constante capillaire* au coefficient qui, dans cette équation, affecte le binôme des courbures, on voit que :

*La constante capillaire propre à la surface de séparation d'un fluide conducteur et d'un électrolyte dépend exclusivement de la nature que chacun des deux fluides présente, à l'état neutre, loin des surfaces terminales; elle est indépendante de la grandeur et de la forme des fluides ou de leur surface de contact, et de l'état d'électrisation du système.*

Mais il n'en est pas de même de la quantité C. Cette dernière dépend de la différence de niveau potentiel qui existe entre les fluides conducteurs, et c'est par cette variation que doivent s'expliquer les phénomènes électrocapillaires.

Si nous reprenons, par exemple, l'électromètre capillaire de M. Lippmann sous la forme qui a été représentée dans la *fig. 3*, et si nous supposons que les deux fils F et F' soient maintenus à des niveaux potentiels différents, nous verrons que, en un point de la surface plane  $\theta_{10}$ , on a, en vertu de l'équation (32),

$$(32 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{aligned} & E \left( \frac{\partial Y_1}{\partial \sigma_1} - T \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \sigma_1} \right) + P_1 + D_1 g z_{10} + \psi_1 + \nu_1 + \beta_{10} \\ & - \gamma_{10} - \partial_{10} \Delta_1 - 2\pi \varepsilon \Delta_1^2 + \chi_1 + \mathcal{Q}_{21} + \frac{\lambda_{10} Q_{10} + \mu_{10} \theta_{10}}{M_1} = 0. \end{aligned} \right.$$

En un point de la surface capillaire  $\theta_{12}$  on a, en vertu de l'équation (34),

$$(34 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{aligned} & E \left( \frac{\partial Y_2}{\partial \sigma_2} - T \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \sigma_2} \right) - E \left( \frac{\partial Y_1}{\partial \sigma_1} - T \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \sigma_1} \right) + (D_2 - D_1) g z_{12} \\ & + (A_{12} + A_{21}) \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2'} \right) + (\psi_2 - \psi_1) + (\nu_2 - \nu_1) + \varepsilon \rho_0 V(2, r, \lambda + \mu) \\ & - \varepsilon \mathcal{T}_2 + \beta_{21} + \mathcal{U}_{21} + 2\pi \varepsilon R_{12}^2 + \zeta_2 - \mathcal{Q}_{21} - \frac{\lambda_{10} Q_{10} + \mu_{10} \theta_{10}}{M_1} = 0. \end{aligned} \right.$$

En un point de la surface plane  $\theta_{13}$  on a

$$(34 \text{ ter}) \left\{ \begin{aligned} & E \left( \frac{\partial Y_2}{\partial \sigma_2} - T \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \sigma_2} \right) - E \left( \frac{\partial Y_3}{\partial \sigma_3} - T \frac{\partial \Sigma_3}{\partial \sigma_3} \right) + (D_2 - D_{13}) g z_{23} \\ & + (\psi_2 - \psi_3) + (\nu_2 - \nu_3) + \varepsilon \rho_0 V(2, 3, \lambda + \mu) \\ & - \varepsilon \mathfrak{T}_2 + \beta_{23} + \mathfrak{V}_{23} + 2\pi\varepsilon \mathfrak{R}_{32}^2 + \xi_2 - \mathfrak{Q}_{23} - \frac{\lambda_{30} Q_{30} + \mu_{30} \theta_{30}}{M_3} = 0. \end{aligned} \right.$$

Enfin, en un point de la surface plane  $\theta_{30}$ , on a

$$(32 \text{ ter}) \left\{ \begin{aligned} & E \left( \frac{\partial Y_3}{\partial \sigma_3} - T \frac{\partial \Sigma_3}{\partial \sigma_3} \right) + P_3 + D_3 g z_{30} + \psi_3 + \nu_3 + \beta_{30} \\ & - \gamma_{30} - \partial_{30} \Delta_3 - 2\pi\varepsilon \Delta_3^2 + \chi_3 + \mathfrak{Q}_{23} + \frac{\lambda_{30} Q_{30} + \mu_{30} \theta_{30}}{M_3} = 0. \end{aligned} \right.$$

Si nous ajoutons membre à membre les quatre équations (32 bis), (34 bis), (34 ter), (32 ter), après avoir changé le signe des deux dernières, et si nous remarquons en outre que, d'après l'identité de nature des fluides 1 et 3, on a

$$\begin{aligned} D_1 &= D_3, \\ \gamma_{10} &= \gamma_{30}, \\ \beta_{10} &= \beta_{30}, \\ \beta_{21} &= \beta_{23}, \\ \partial_{10} &= \partial_{30}, \end{aligned}$$

nous aurons la relation

$$(35) \left\{ \begin{aligned} & P_1 - P_3 + D_1 g [(z_{10} - z_{12}) - (z_{30} - z_{32})] + D_2 g (z_{12} - z_{32}) - (\gamma_3 - \gamma_1) \\ & + (A_{12} + A_{21}) \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2'} \right) - \partial_{10} (\Delta_1 - \Delta_3) - 2\pi\varepsilon (\Delta_1^2 - \Delta_3^2) \\ & = \mathfrak{V}_{23} - \mathfrak{V}_{21} + \varepsilon \rho_0 [V(2, 3, \lambda + \mu) - V(2, 1, \lambda + \mu)] + 2\pi\varepsilon (\mathfrak{R}_{23}^2 - \mathfrak{R}_{21}^2). \end{aligned} \right.$$

Le second membre serait égal à 0 si le système était uniquement formé de conducteurs laissant passer l'électricité sans électrolyse, en supposant d'ailleurs l'électricité en équilibre sur ce système. Dans le cas actuel, au contraire, où ce système renferme des électrolytes, tous les termes de ce second membre dépendent de la différence de niveau potentiel que l'on établit entre les deux masses de mercure. C'est par la présence de ces termes que s'expliquent les propriétés de l'électromètre capillaire. Malheureusement, l'extrême ignorance où nous sommes des lois de la distribution de l'électricité au sein d'un électro-



lyte polarisé ne nous permet point de préciser davantage la forme des fonctions qui figurent au second membre de l'équation (35) et de pousser jusqu'au bout l'examen de ces propriétés. Cette ignorance, toutefois, n'empêche pas de retrouver la réciprocité signalée par M. G. Lippmann entre la variation que subit la différence de niveau potentiel des deux masses de mercure lorsqu'on exerce une pression sur l'une d'elles, et le mouvement que prend la surface capillaire lorsqu'on fait varier cette même différence de niveau potentiel; et l'on ne doit pas s'étonner que cette réciprocité se retrouve aussi bien dans notre manière de voir que dans celle de M. G. Lippmann, car elle n'est au fond qu'une conséquence immédiate de ce fait qu'il existe pour le système un état d'équilibre stable.

#### § IV. — D'une classe de phénomènes que l'on a confondus avec les phénomènes électrocapillaires.

4. Il existe une classe de phénomènes rangés par M. G. Lippmann dans la même catégorie que les phénomènes précédents, sous le titre de *phénomènes électrocapillaires*, et qui nous semblent cependant demander une autre explication que ceux que nous venons d'étudier. Voici comment M. G. Lippmann <sup>(1)</sup> décrit l'expérience fondamentale dans laquelle se manifestent ces phénomènes :

« Deux verres, contenant tous les deux du mercure recouvert par de l'eau acidulée, sont placés l'un à côté de l'autre; ils sont mis en communication électrique l'un avec l'autre au moyen d'une mèche de coton ou de papier à filtrer; les deux masses de mercure peuvent être mises en communication avec l'extérieur au moyen de fils de platine qui ne touchent pas l'eau acidulée.

» On met ces fils en communication avec les extrémités du fil d'un galvanomètre; cela fait, on incline l'un des deux verres. Aussitôt l'aiguille du galvanomètre est déviée, indiquant un courant qui va à travers le liquide du verre penché vers le verre resté droit.

» Si, au lieu d'un galvanomètre, on emploie un électromètre, cet

---

(1) G. LIPPMANN, *Relations entre les phénomènes électriques et capillaires*.

instrument indique que le mercure du verre penché est électrisé négativement par rapport au mercure du verre resté droit.

» Cette électrisation se dissipe avec le temps.

» Si, après avoir incliné le verre, on le redresse immédiatement, l'électrisation disparaît aussitôt. La tension électrique varie d'ailleurs très régulièrement avec l'inclinaison du verre.

» Au lieu d'incliner l'un des verres, on peut augmenter la surface du mercure qu'il contient en déprimant cette surface; on y plonge, par exemple, l'extrémité d'une baguette de verre, de bois ou de papier. Il n'est pas nécessaire d'employer un galvanomètre sensible. »

Le caractère qui distingue tout particulièrement le phénomène ainsi décrit par M. Lippmann des autres phénomènes qu'il a nommés *électrocapillaires*, c'est que le premier ne consiste pas, comme les seconds, dans la création d'un état permanent, mais bien dans la production d'un régime variable; *l'électrisation ainsi produite*, dit M. Lippmann, *se dissipe avec le temps*.

M. G. Van der Mensbrugghe <sup>(1)</sup> a donné du phénomène que nous venons de décrire l'interprétation suivante : Lorsqu'on incline l'un des deux verres, la variation de l'aire de la surface de contact du mercure et de l'eau acidulée entraîne un phénomène thermique qui fait varier la température de la surface. L'ensemble des deux verres forme alors un véritable couple thermo-électrique. « M. Lippmann ajoute, dit M. Van der Mensbrugghe, que l'électrisation se dissipe avec le temps; cela est tout naturel, puisque le courant ne provient que d'une différence de température. »

M. Van der Mensbrugghe a indiqué quelques développements mathématiques sur cette manière de voir. Il nous est facile, en partant des principes posés au Chapitre I, de suivre ici des considérations analogues.

Si  $U$  désigne l'énergie interne,  $S$  l'entropie,  $T$  la température absolue d'un système, si l'on pose

$$\mathcal{F} = E(U - TS),$$

---

<sup>(1)</sup> G. VAN DER MENSBRUGGHE, *Application de la Thermodynamique à l'étude des variations d'énergie potentielle des surfaces liquides. — Conséquences diverses* (Bulletin de l'Académie de Bruxelles, I<sup>re</sup> Partie, t. LI, p. 777; 1876).

la quantité de chaleur  $\delta Q$  dégagée par le système dans une modification infiniment petite, dans laquelle les forces extérieures n'effectuent aucun travail, a pour valeur

$$\delta Q = -A \delta \left( \mathcal{F} - T \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \right).$$

Si la transformation est réversible, les conditions d'équilibre sont réalisées à chaque instant; si, de plus, elle est isothermique, on a à chaque instant

$$\delta \mathcal{F} = 0$$

et, par conséquent,

$$\delta Q = -AT \delta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}.$$

Supposons le système formé de conducteurs électrisés, sur lesquels l'équilibre électrique est établi. On a alors

$$\mathcal{F} = E(Y - T\Sigma) + W + \sum \Theta q,$$

les lettres ayant la même signification que dans l'égalité (4) du Chapitre II de la 1<sup>re</sup> Partie (t. V, p. 124).

D'après l'égalité (5) du même Chapitre et l'égalité (15) du Chapitre I (t. V, p. 119), on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \sum_{p=1}^{p=n} E M_p (Y_p - T \Sigma_p) + \sum_{p=1}^{p=n} A_{p0} \theta_{p0} + \sum_{pq} (A_{pq} + A_{qp}) \theta_{pq} \\ & + \sum_{p=1}^{p=n} \left[ (\alpha_{p0} + \alpha'_{p0}) \theta_{p0} + \Theta(p, 0, 0) S^{\Delta} d\theta_{p0} \right] + \sum_{pq} (\alpha_{pq} + \alpha_{qp}) \theta_{pq} + W. \end{aligned}$$

D'après cette expression de  $\mathcal{F}$ , il est facile de voir que l'on aura l'expression suivante de  $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} = & E \sum_{p=1}^{p=n} M_p \frac{\partial}{\partial T} (Y_p - T \Sigma_p) + \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial}{\partial T} (A_{p0} + \alpha_{p0} + \alpha'_{p0}) \theta_{p0} \\ & + \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial \Theta(p, 0, 0)}{\partial T} S^{\Delta} d\theta_{p0} + \sum_{pq} \frac{\partial}{\partial T} (A_{pq} + A_{qp} + \alpha_{pq} + \alpha_{qp}) \theta_{pq}. \end{aligned}$$

Ceci posé, supposons que les forces extérieures qui agissent sur le système se réduisent à des pressions normales appliquées aux divers éléments de la surface qui le limite. Supposons que cette dernière demeure invariable en toutes ses parties, tellement que le travail externe soit égal à 0, et que de plus l'aire de chacune des surfaces  $\theta_{p0}$  soit invariable. Imposons alors au système les déformations et dilata-tions compatibles avec ces restrictions. La quantité de chaleur dégagée  $\delta Q$  aura pour valeur

$$\begin{aligned} \delta Q &= -AT \delta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \\ &= -T \sum_{p=1}^{p=n} M_p \frac{\partial^2}{\partial T \partial \sigma_p} (Y_p - T \Sigma_p) \delta \sigma_p \\ &\quad - AT \sum_{pq} \left[ \frac{\partial^2}{\partial T \partial \sigma_p} (A_{pq} + A_{qp} + \alpha_{pq} + \alpha_{qp}) \delta \sigma_p + \frac{\partial^2}{\partial T \partial \sigma_q} (A_{pq} + A_{qp} + \alpha_{pq} + \alpha_{qp}) \delta \sigma_q \right] \theta_{pq} \\ &\quad - AT \sum_{pq} \frac{\partial}{\partial T} (A_{pq} + A_{qp} + \alpha_{pq} + \alpha_{qp}) \delta \theta_{pq}. \end{aligned}$$

Cette quantité de chaleur peut se partager de la façon suivante :

1° Dans chaque élément de volume  $d\sigma_p$  du système est dégagée une quantité de chaleur

$$-T \frac{\partial^2}{\partial T \partial \sigma_p} (Y_p - T \Sigma_p) \delta (d\sigma_p).$$

2° Au voisinage de chaque élément  $d\theta_{pq}$  de l'une des surfaces qui sépare deux fluides du système est dégagée une quantité de chaleur

$$\begin{aligned} -AT \left\{ \left[ \frac{\partial^2}{\partial T \partial \sigma_p} (A_{pq} + A_{qp} + \alpha_{pq} + \alpha_{qp}) \delta \sigma_p + \frac{\partial^2}{\partial T \partial \sigma_q} (A_{pq} + A_{qp} + \alpha_{pq} + \alpha_{qp}) \delta \sigma_q \right] \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial T} (A_{pq} + A_{qp} + \alpha_{pq} + \alpha_{qp}) \left( \frac{1}{R_q} + \frac{1}{R'_q} \right) \delta N_q \right\} d\theta_{pq}. \end{aligned}$$

Si l'on suppose que le volume spécifique de chacun des corps  $p$  et  $q$  demeure invariable, la chaleur mise en jeu dans le phénomène considéré se composera simplement d'une somme d'autant de termes égaux à

$$-AT \frac{\partial}{\partial T} (A_{pq} + A_{qp} + \alpha_{pq} + \alpha_{qp}) \left( \frac{1}{R_q} + \frac{1}{R'_q} \right) \delta N_q d\theta_{pq}$$

qu'il y a d'éléments dans la surface  $\theta_{pq}$ . Cette chaleur mise en jeu fera

varier la température de la surface  $\theta_{pq}$  et provoquera ainsi les phénomènes thermo-électriques au moyen desquels M. Van der Mensbrugghe a expliqué l'expérience de M. Lippmann décrite ci-dessus.

Toutefois, on doit remarquer que cette explication, qui serait la seule possible si les fluides en contact étaient tous deux conducteurs, peut fort bien ne pas être la seule lorsqu'un des deux fluides est un électrolyte; le phénomène observé par M. G. Lippmann peut alors tenir à ce fait que l'état d'électrisation d'un électrolyte polarisé dépend de l'étendue et de la forme des surfaces qui le limitent <sup>(1)</sup>. Il convient de réserver toute conclusion à ce sujet jusqu'au jour où nous serons mieux renseignés sur la distribution qu'affecte l'électricité sur un électrolyte.

### Conclusions.

Les principes par lesquels, dans un autre Ouvrage, nous avons cherché à rendre compte de la différence de niveau potentiel qui subsiste durant l'état d'équilibre entre deux conducteurs contigus nous ont permis, dans un précédent Mémoire et dans celui-ci, d'arriver à quelques résultats nouveaux dans l'étude de la pression électrique. Cette étude, faite en détail, d'abord pour les systèmes formés de conducteurs sur lesquels l'électricité est en équilibre, puis pour les systèmes formés de conducteurs parcourus par des courants permanents, enfin pour les systèmes qui renferment des électrolytes, nous a fourni une théorie nouvelle des phénomènes dits *électrocapillaires*. Nous avons vu que ces phénomènes ne peuvent se produire au sein des systèmes qui ne renferment que des conducteurs, si l'équilibre électrique est

---

<sup>(1)</sup> Le présent Mémoire était déjà rédigé lorsque, dans la séance du 20 mai 1887, M. Pellat a communiqué à la Société de Physique une explication du phénomène découvert par M. Lippmann, explication analogue à celle que nous indiquons ici. « C'est là un phénomène découvert par M. Lippmann, dit M. Pellat, et dont l'explication n'est pas douteuse, aujourd'hui que nous connaissons l'existence des couches électriques doubles; le circuit étant fermé, la différence de potentiel entre l'eau acidulée et le mercure est constante; si l'on fait varier l'étendue de la surface de contact, on est dans le même cas que si l'on faisait varier l'étendue des armatures d'un condensateur maintenant constante leur différence de potentiel : la variation d'étendue entraînerait un courant de charge ou de décharge. » (*Séances de la Société française de Physique*, 1887, p. 130.)

établi sur ces conducteurs. Si ces conducteurs sont parcourus par des courants permanents, le système présente des phénomènes analogues aux phénomènes électrocapillaires. Mais les véritables phénomènes électrocapillaires ne se produisent qu'au sein des systèmes qui renferment des électrolytes polarisés : ils sont dus à la différence qui existe entre la distribution de l'électricité en équilibre sur un conducteur et la distribution de l'électricité en équilibre sur un semblable électrolyte. Le défaut de connaissances touchant cette distribution vient seul limiter l'étude analytique des phénomènes électrocapillaires.

Nous aurions pu simplifier un peu cette étude en admettant, comme on le fait en général, que le niveau potentiel est constant à l'intérieur d'un électrolyte en équilibre; mais nous avons préféré n'introduire aucune hypothèse contestable.

Quelque incomplète que soit jusqu'ici cette étude, une conclusion peut, dès maintenant, en être dégagée de la manière la plus certaine : l'interprétation des phénomènes observés par Draper n'est pas celle que M. G. Lippmann a donnée; la constante capillaire relative à la surface de séparation de deux fluides a une valeur indépendante de leur état d'électrisation; plus explicitement, lorsque l'équilibre électrique est établi sur un système de fluides électrolytiques ou non, la surface de séparation de deux fluides quelconques est toujours déterminée par l'équation de Laplace; le coefficient du binôme des courbures dans cette équation dépend uniquement de la densité et de l'état des deux fluides en contact et nullement de l'état d'électrisation du système. Mais, si l'un au moins des deux fluides est un électrolyte, la quantité qui forme le second membre de cette équation, quantité qui a la même valeur en tous les points de la surface considérée, est une fonction de l'état d'électrisation du système, et c'est par là que s'expliquent les phénomènes dits *électrocapillaires*.

Ainsi les phénomènes en question peuvent s'expliquer au moyen des seules lois connues de l'Hydrostatique et de l'Électrostatique, sans faire intervenir aucune propriété électrique nouvelle de la matière, aucune variation inexpliquée de la constante capillaire. C'est, nous semble-t-il, le grand avantage de l'application de l'analyse aux phénomènes physiques, de réduire au minimum le nombre des lois premières et irréductibles. Au contraire, le physicien qui prétend se passer du

secours de l'instrument mathématique est aisément conduit à imaginer une propriété nouvelle de la matière toutes les fois qu'il a à expliquer un phénomène quelque peu étrange et dont les liens avec les lois déjà connues sont assez complexes pour ne se point laisser débrouiller par le raisonnement privé de son arme la plus sûre et la plus pénétrante.

