ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

P. DUHEM

Sur les lois générales de l'induction électrodynamique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 7, nº 1 (1893), p. B 1-B 28.

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1893_1_7_1_B1_0>

SUR LES LOIS GÉNÉRALES

DE

L'INDUCTION ÉLECTRODYNAMIQUE,

PAR M. P. DUHEM,

Chargé d'un Cours complémentaire de Physique mathématique et de Cristallographie
à la Faculté des Sciences de Lille.

INTRODUCTION.

En 1874, M. H. von Helmholtz (1) a donné des formules qui représentent les lois générales de l'induction électromagnétique entre conducteurs d'étendue finie en tout sens. Ces formules, l'illustre physicien les a posées presque sans aucune démonstration. Nous nous proposons, dans cet écrit, de les déduire d'hypothèses très simples sur les phénomènes d'induction. La méthode que nous suivrons est analogue à celle que nous avons adoptée, au Livre XIII de nos *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, pour étudier l'induction entre courants linéaires.

(1) H. Helmholtz, *Ueber die Theorie der Elektrodynamik*. IIIte Abhandlung : *Die elektrodynamischen Kräfte in bewegten Leitern* (*Borchardt's Journal*, t. LXXVIII, p. 309; 1874. *Helmholtz wissenschaftliche Abhandlungen*, t. I, p. 745).

CHAPITRE I.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

Soit $d\varpi$ un élément conducteur, que nous supposerons *isotrope;* soit ρ la résistance spécifique de la matière qui forme cet élément; soient u, v, w les composantes, suivant trois axes de coordonnées rectangulaires, du flux électrique en un point de cet élément. Lorsque l'élément en question fait partie d'un système de courants électriques uniformes, immobiles et constants, on a

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho u &= -\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon V + \Theta) + \varphi_x, \\ \rho v &= -\frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon V + \Theta) + \varphi_y, \\ \rho w &= -\frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon V + \Theta) + \varphi_z, \end{aligned}\right.$$

ε étant la constante des lois de Coulomb;
V la fonction potentielle électrostatique;
Θ une quantité qui dépend de la matière qui forme le conducteur dans un très petit rayon autour du point (x, y, z);
φ_x, φ_y, φ_z trois quantités qui dépendent des phénomènes thermo-électriques et hydro-électriques dont l'élément est le siège, quantités que nous supposons déterminées par la théorie des courants thermo-électriques et hydro-électriques.

Lorsque l'élément $d\varpi$ fait partie d'un système de conducteurs mobiles, traversés par des courants variables, ces égalités ne sont plus exactes.

Tout d'abord, l'élément $d\varpi$, faisant maintenant partie d'un système variable, peut être déformable; quelle que soit la déformation infiniment petite que subit l'élément $d\varpi$ pendant le temps dt, on sait que l'on peut toujours trouver trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, invariablement liés à la matière qui forme l'élément $d\varpi$, qui demeurent rectangulaires pendant la déformation. Si, dans l'élément $d\varpi$, on découpe, avant la déformation, un cube dont les arêtes soient parallèles aux axes Ox, Oy,

Oz, il se transforme, par la déformation, en un parallélépipède rectangle dont les arêtes sont parallèles aux nouvelles positions des mêmes axes. La transformation infiniment petite de l'élément $d\varpi$ se compose de *trois translations*, respectivement parallèles aux axes Ox, Oy, Oz; de *trois rotations* autour des mêmes axes; enfin, de *trois dilatations* suivant ces axes.

Les axes en question sont les *axes principaux de dilatation* en un point de l'élément $d\varpi$.

Si l'élément $d\varpi$ ne se déforme pas, on pourra prendre pour axes principaux de dilatation en un point de cet élément trois droites rectangulaires quelconques invariablement liées à la matière qui forme cet élément.

Considérons donc un élément $d\varpi$ qui fasse partie d'un système de conducteurs mobiles, traversés par des courants variables.

Soient Ox, Oy, Oz les axes principaux de dilatation de l'élément $d\varpi$.

Les égalités (1), devenues inexactes, devront être remplacées par les égalités

$$(1\ bis)\quad \begin{cases} \rho u = -\dfrac{\partial}{\partial x}(\varepsilon V + \Theta) + \varphi_x + \mathcal{E}_x, \\ \rho v = -\dfrac{\partial}{\partial y}(\varepsilon V + \Theta) + \varphi_y + \mathcal{E}_y, \\ \rho w = -\dfrac{\partial}{\partial z}(\varepsilon V + \Theta) + \varphi_z + \mathcal{E}_z, \end{cases}$$

$\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$ étant ce que nous nommerons les *composantes de la force électromotrice d'induction au point* (x, y, z), *à l'instant* t.

Ce sont ces quantités $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$ que nous allons chercher à déterminer en suivant une série d'hypothèses et de déductions analogues à celles qui nous ont fait connaître les lois de l'induction électrodynamique dans les conducteurs linéaires.

L'hypothèse fondamentale que nous ferons est la suivante :

Supposons que le système conducteur étudié soit formé par les éléments $d\varpi$, $d\varpi_1$, $d\varpi_2$, ...

Nous admettrons que l'on a

$$(2)\quad \begin{cases} \mathcal{E}_x\, dt = \delta l_1 + \delta l_2 + \ldots, \\ \mathcal{E}_y\, dt = \delta m_1 + \delta m_2 + \ldots, \\ \mathcal{E}_z\, dt = \delta n_1 + \delta n_2 + \ldots, \end{cases}$$

les quantités δl_k, δm_k, δn_k, dépendant uniquement des valeurs qu'ont, au *temps t, les paramètres qui définissent, au point de vue de l'Électrodynamique, l'état du système des deux éléments $d\varpi$, $d\varpi_k$, et des variations que ces paramètres subissent pendant le temps dt.*

Quels sont ces paramètres?

Soient $O_1x'_1$, $O_1y'_1$, $O_1z'_1$ les axes principaux de dilatation de l'élément $d\varpi_1$. Nous dirons que le système formé par les deux éléments $d\varpi$, $d\varpi_1$ est *défini au point de vue de l'Électrodynamique*, lorsqu'on connaîtra :

1° Le volume $d\varpi$;

2° Les paramètres α, β, ... qui déterminent la forme de la surface qui le limite;

3° Les composantes u, v, w, suivant Ox, Oy, Oz, du flux électrique en un point de l'élément $d\varpi$;

4° Le volume $d\varpi_1$;

5° Les paramètres α_1, β_1, ... qui déterminent la forme de la surface qui la limite;

6° Les composantes u'_1, v'_1, w'_1, suivant $O_1x'_1$, $O_1y'_1$, $O_1z'_1$, du flux électrique en un point de l'élément $d\varpi_1$;

7° La distance r d'un point O de l'élément $d\varpi$ à un point O_1 de l'élément $d\varpi_1$;

8° Les angles (r, x), (r, y), (r, z) que la droite OO_1 fait avec les axes Ox, Oy, Oz, angles dont deux seulement sont arbitraires, grâce à la relation

$$\cos^2(r, x) + \cos^2(r, y) + \cos^2(r, z) = 1;$$

9° Les neuf cosinus

$$\begin{array}{lll} \cos(x'_1, x), & \cos(x'_1, y), & \cos(x'_1, z), \\ \cos(y'_1, x), & \cos(y'_1, y), & \cos(y'_1, z), \\ \cos(z'_1, x), & \cos(z'_1, y), & \cos(z'_1, z), \end{array}$$

dont trois seulement sont arbitraires, grâce aux relations

$$\begin{aligned} \cos^2(x'_1, x) + \cos^2(x'_1, y) + \cos^2(x'_1, z) &= 1, \\ \cos^2(y'_1, x) + \cos^2(y'_1, y) + \cos^2(y'_1, z) &= 1, \\ \cos^2(z'_1, x) + \cos^2(z'_1, y) + \cos^2(z'_1, z) &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(y'_1, x)\cos(z'_1, x) + \cos(y'_1, y)\cos(z'_1, y) + \cos(y'_1, z)\cos(z'_1, z) &= 0, \\ \cos(z'_1, x)\cos(x'_1, x) + \cos(z'_1, y)\cos(x'_1, y) + \cos(z'_1, z)\cos(x'_1, z) &= 0, \\ \cos(x'_1, x)\cos(y'_1, x) + \cos(x'_1, y)\cos(y'_1, y) + \cos(x'_1, z)\cos(y'_1, z) &= 0. \end{aligned}$$

Nous admettons donc que δl_1, δm_1, δn_1 dépendent uniquement des paramètres que nous venons d'énumérer et des variations que ces paramètres éprouvent pendant le temps dt.

De plus, il est évident :

1° Que, *si l'élément* $d\varpi_1$ *est invariable de forme,* chacune des quantités δl_1, δm_1, δn_1 doit garder une valeur indépendante de l'orientation initiale des axes $O_1 x'_1$, $O_1 y'_1$, $O_1 z'_1$ au sein de l'élément $d\varpi_1$;

2° Que, *si l'élément* $d\varpi$ *est invariable de forme,* la grandeur géométrique dont δl_1, δm_1, δn_1 sont les composantes est indépendante, en grandeur et direction, de l'orientation initiale des axes Ox, Oy, Oz au sein de l'élément $d\varpi$.

Ces principes vont nous servir à déterminer la forme des quantités δl_1, δm_1, δn_1.

I. La première proposition que nous démontrerons, au sujet de ces quantités, est la suivante :

Les trois quantités δl_1, δm_1, δn_1 *sont des fonctions linéaires et homogènes des variations subies pendant le temps* dt *par les paramètres indépendants qui définissent le système des deux éléments* $d\varpi$ *et* $d\varpi_1$.

Soient $a, b, \ldots, l$ ces paramètres indépendants; pour la proposition que nous avons en vue de démontrer, il est inutile de les désigner plus explicitement. Pendant le temps dt, ces paramètres subissent des variations da, $db, \ldots, dl$, et l'on a

$$\begin{aligned}
\delta l_1 &= f(a, b, \ldots, l, da, db, \ldots, dl),\\
\delta m_1 &= g(a, b, \ldots, l, da, db, \ldots, dl),\\
\delta n_1 &= h(a, b, \ldots, l, da, db, \ldots, dl).
\end{aligned}$$

Si ρ est la résistance spécifique de l'élément $d\varpi$ et U, V, W les composantes du flux qu'engendrerait, en un point de cet élément, l'induction de l'élément $d\varpi_1$, nous aurons

$$\begin{aligned}
\rho \mathrm{U}\, dt &= f(a, b, \ldots, l, da, db, \ldots, dl),\\
\rho \mathrm{V}\, dt &= g(a, b, \ldots, l, da, db, \ldots, dl),\\
\rho \mathrm{W}\, dt &= h(a, b, \ldots, l, da, db, \ldots, dl).
\end{aligned}$$

Traçons une surface plane AB, d'aire Ω, invariablement liée aux axes Ox, Oy, Oz et partageant en deux l'élément $d\varpi$. Soit N la direction de la normale à la face positive de cette surface. Dans le temps dt, l'induction exercée par l'élément $d\varpi_1$ transporte du côté négatif au côté positif de cette surface une quantité d'électricité

$$dQ = \Omega[\mathrm{U}\cos(\mathrm{N},x) + \mathrm{V}\cos(\mathrm{N},y) + \mathrm{W}\cos(\mathrm{N},z)]\,dt$$

ou bien

$$\begin{aligned} dQ = \frac{\Omega}{\rho}[\quad & f(a, b, \ldots, l, da, db, \ldots, dl)\cos(\mathrm{N},x) \\ & + g(a, b, \ldots, l, da, db, \ldots, dl)\cos(\mathrm{N},y) \\ & + h(a, b, \ldots, l, da, db, \ldots, dl)\cos(\mathrm{N},z)]. \end{aligned}$$

A la suite de l'élément de temps dt, prenons un second élément de temps $\mathrm{D}t$, pendant lequel les paramètres a, b, ..., l subissent de nouvelles variations $\mathrm{D}a, \mathrm{D}b, \ldots, \mathrm{D}l$. La déformation que l'élément $d\varpi$ a subie pendant le temps dt a fait prendre à sa résistance spécifique une nouvelle valeur $(\rho + d\rho)$ et à la surface AB une nouvelle aire $(\Omega + d\Omega)$.

Nous supposerons que les axes principaux de dilatation pendant le temps dt soient encore axes principaux de dilatation pendant le temps $\mathrm{D}t$. Pendant le temps $\mathrm{D}t$ et par l'effet de l'induction due à l'élément $d\varpi_1$, la surface AB est traversée par une quantité d'électricité

$$\begin{aligned} \mathrm{D}Q = \frac{\Omega + d\Omega}{\rho + d\rho}[\quad & f(a + da, b + db, \ldots, l + dl, \mathrm{D}a, \mathrm{D}b, \ldots, \mathrm{D}l)\cos(\mathrm{N},x) \\ & + g(a + da, b + db, \ldots, l + dl, \mathrm{D}a, \mathrm{D}b, \ldots, \mathrm{D}l)\cos(\mathrm{N},y) \\ & + h(a + da, b + db, \ldots, l + dl, \mathrm{D}a, \mathrm{D}b, \ldots, \mathrm{D}l)\cos(\mathrm{N},z)]. \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'élément de temps

$$\Delta t = dt + \mathrm{D}t.$$

Pendant ce temps, les paramètres a, b, ..., l subissent des variations $(da + \mathrm{D}a)$, $(db + \mathrm{D}b)$, ..., $(dl + \mathrm{D}l)$. L'induction exercée par l'élément $d\varpi_1$ met en mouvement, au travers de la surface AB, une quantité d'électricité

$$\begin{aligned} \Delta Q = \frac{\Omega}{\rho}[\quad & f(a, b, \ldots, l, da + \mathrm{D}a, db + \mathrm{D}b, \ldots, dl + \mathrm{D}l)\cos(\mathrm{N},x) \\ & + g(a, b, \ldots, l, da + \mathrm{D}a, db + \mathrm{D}b, \ldots, dl + \mathrm{D}l)\cos(\mathrm{N},y) \\ & + h(a, b, \ldots, l, da + \mathrm{D}a, db + \mathrm{D}b, \ldots, dl + \mathrm{D}l)\cos(\mathrm{N},z)]. \end{aligned}$$

Or on a évidemment

$$\Delta Q = dQ + \mathrm{D}Q.$$

Si, dans cette égalité, on remplace chacune des trois quantités dQ, DQ, ΔQ par sa valeur et si l'on néglige les infiniment petits d'ordre supérieur, on trouve l'égalité

$$\begin{aligned}
&[\ f(a, b, \ldots, l, \quad da, \quad db, \ldots, \quad dl) \\
&\quad + f(a, b, \ldots, l, \quad \mathrm{D}a, \quad \mathrm{D}b, \ldots, \quad \mathrm{D}l) \\
&\quad - f(a, b, \ldots, l, da + \mathrm{D}a, db + \mathrm{D}b, \ldots, dl + \mathrm{D}l)] \cos(\mathrm{N}, x) \\
&+ [\ g(a, b, \ldots, l, \quad da, \quad db, \ldots, \quad dl) \\
&\quad + g(a, b, \ldots, l, \quad \mathrm{D}a, \quad \mathrm{D}b, \ldots, \quad \mathrm{D}l) \\
&\quad - g(a, b, \ldots, l, da + \mathrm{D}a, db + \mathrm{D}b, \ldots, dl + \mathrm{D}l)] \cos(\mathrm{N}, y) \\
&+ [\ h(a, b, \ldots, l, \quad da, \quad db, \ldots, \quad dl) \\
&\quad + h(a, b, \ldots, l, \quad \mathrm{D}a, \quad \mathrm{D}b, \ldots, \quad \mathrm{D}l) \\
&\quad - h(a, b, \ldots, l, da + \mathrm{D}a, db + \mathrm{D}b, \ldots, dl + \mathrm{D}l)] \cos(\mathrm{N}, z) = 0.
\end{aligned}$$

Cette égalité doit demeurer vraie de quelque manière qu'on oriente la surface plane AB; si nous faisons

$$\cos(\mathrm{N}, x) = 1, \qquad \cos(\mathrm{N}, y) = 0, \qquad \cos(\mathrm{N}, z) = 0,$$

nous aurons la première des égalités

$$\begin{aligned}
&f(a, b, \ldots, l, da, db, \ldots, dl) + f(a, b, \ldots, l, \mathrm{D}a, \mathrm{D}b, \ldots, \mathrm{D}l) \\
&\quad = f(a, b, \ldots, l, da + \mathrm{D}a, db + \mathrm{D}b, \ldots, dl + \mathrm{D}l), \\
&g(a, b, \ldots, l, da, db, \ldots, dl) + g(a, b, \ldots, l, \mathrm{D}a, \mathrm{D}b, \ldots, \mathrm{D}l) \\
&\quad = g(a, b, \ldots, l, da + \mathrm{D}a, db + \mathrm{D}b, \ldots, dl + \mathrm{D}l), \\
&h(a, b, \ldots, l, da, db, \ldots, dl) + h(a, b, \ldots, l, \mathrm{D}a, \mathrm{D}b, \ldots, \mathrm{D}l) \\
&\quad = h(a, b, \ldots, l, da + \mathrm{D}a, db + \mathrm{D}b, \ldots, dl + \mathrm{D}l);
\end{aligned}$$

les deux dernières se démontrent d'une manière analogue.

Ces égalités démontrent la proposition que nous avons énoncée.

II. Cette proposition établie, arrivons à celle-ci :

Les trois quantités δl_1, δm_1, δn_1 sont fonctions linéaires et homogènes des quatre quantités $d\varpi_1$, $\delta\lambda_1 \, d\varpi_1$, $\delta\mu_1 \, d\varpi_1$, $\delta\nu_1 \, d\varpi_1$; $\delta\lambda_1$, $\delta\mu_1$, $\delta\nu_1$ étant les trois dilatations principales en un point de l'élément $d\varpi_1$; elles ne dépendent pas des autres paramètres qui fixent la forme de l'élément $d\varpi_1$, non plus que des variations de ces paramètres.

Découpons l'élément $d\varpi_1$ en un nombre illimité n de cubes $d\varpi'_1$,

$d\varpi''_1$, ..., $d\varpi^{(n)}_1$, dont les dimensions soient infiniment petites par rapport à celles de l'élément $d\varpi_1$; qui soient tous égaux entre eux et égaux à un même cube infiniment petit, *choisi une fois pour toutes;* qui aient tous leurs arêtes parallèles aux axes $O_1x'_1$, $O_1y'_1$, $O_1z'_1$.

Si nous considérons l'un des paramètres qui définissent le système $d\varpi^{(i)}_1 d\varpi$ et le paramètre correspondant qui figure dans la définition du système $d\varpi^{(j)}_1 d\varpi$, ces deux paramètres ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite par rapport à leur propre valeur; dans le temps dt, ces deux paramètres éprouvent des variations qui ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite par rapport à leur propre valeur. Si donc l'on désigne par $\delta l^{(i)}_1$, $\delta l^{(j)}_1$ les quantités analogues à δl_1, qui sont relatives à l'induction des éléments $d\varpi^{(i)}_1$, $d\varpi^{(j)}_1$ sur l'élément $d\varpi$, ces quantités auront une différence infiniment petite par rapport à elles-mêmes, en sorte que l'on peut écrire

$$\delta l'_1 = \delta l''_1 = \ldots = \delta l^{(n)}_1.$$

Mais, d'autre part, de l'hypothèse marquée par les égalités (2), on déduit aisément que l'on doit avoir

$$\delta l_1 = \delta l'_1 + \delta l'' + \ldots + \delta l^{(n)}_1.$$

On a donc

$$\delta l_1 = n\,\delta l'_1 = \delta l'_1 \frac{d\varpi_1}{d\varpi'_1}. \tag{3}$$

Cherchons maintenant quelle doit être la forme de $\delta l'_1$.

Parmi les paramètres qui définissent le système $d\varpi\, d\varpi'_1$, nous n'avons plus à faire figurer aucune variable propre à représenter la forme ou le volume de l'élément $d\varpi'_1$, puisque nous savons que celui-ci est un petit cube, *choisi une fois pour toutes,* dont les arêtes sont parallèles à $O_1x'_1$, $O_1y'_1$, $O_1z'_1$.

Le volume et la forme de l'élément $d\varpi'_1$ sont ainsi complètement définis.

Pour achever la définition du système $d\varpi\, d\varpi'_1$, il suffit de se donner, outre les paramètres qui déterminent le volume et la forme de l'élément $d\varpi$, les grandeurs

$$u,\quad v,\quad w,\quad u'_1,\quad v'_1,\quad w'_1,$$
$$r,\quad \cos(r,x),\quad \cos(r,y),\quad \cos(r,z),$$
$$\cos(x'_1,x),\quad \ldots,\quad \cos(z'_1,z).$$

Ces paramètres, *qui diffèrent infiniment peu de ceux qui servent à définir le système* $d\varpi\, d\varpi_1$, seront, pour plus de brièveté, désignés par $a, b, \ldots, k$.

Pour définir la variation que le système $d\varpi\, d\varpi'_1$ subit pendant le temps dt, il suffit de connaître, d'une part, les variations $\delta a, \delta b, \ldots, \delta k$, et, d'autre part, le changement de forme de l'élément $d\varpi'_1$; or ce dernier changement est entièrement défini par la connaissance des trois dilatations principales $\delta\lambda_1$, $\delta\mu_1$, $\delta\nu_1$. Si donc nous appliquons la proposition démontrée au nº I, nous pourrons écrire

$$\delta l'_1 = \mathrm{A}'\,\delta a + \mathrm{B}'\,\delta b + \ldots + \mathrm{K}'\,\delta k + \mathrm{L}'\,\delta\lambda_1 + \mathrm{M}'\,\delta\mu_1 + \mathrm{N}'\,\delta\nu_1,$$

A′, B′, ..., K′, L′, M′, N′ devenant, lorsque le cube type est choisi, des fonctions des seules variables $a, b, \ldots, k$. Il en est de même des quantités

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{A}'}{d\varpi'_1}, \qquad \mathrm{B} = \frac{\mathrm{B}'}{d\varpi'_1}, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{K} = \frac{\mathrm{K}'}{d\varpi'_1},$$

$$\mathrm{L} = \frac{\mathrm{L}'}{d\varpi'_1}, \qquad \mathrm{M} = \frac{\mathrm{M}'}{d\varpi'_1}, \qquad \mathrm{N} = \frac{\mathrm{N}'}{d\varpi'_1},$$

moyennant lesquelles l'égalité précédente, jointe à l'égalité (3), donne

$$(4)\qquad \delta l_1 = (\mathrm{A}\,\delta a + \mathrm{B}\,\delta b + \ldots + \mathrm{K}\,\delta k)\, d\varpi_1 + \mathrm{L}\,\delta\lambda_1\, d\varpi_1 + \mathrm{M}\,\delta\mu_1\, d\varpi_1 + \mathrm{N}\,\delta\nu_1\, d\varpi_1,$$

ce qui démontre la proposition énoncée, du moins en ce qui concerne la quantité δl_1; une démonstration analogue s'applique aux quantités δm_1, δn_1.

III. Voici une nouvelle proposition, analogue à la précédente :

Les quantités δl_1, δm_1, δn_1 *sont des fonctions linéaires des trois dilatations principales* $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ *en un point de l'élément* $d\varpi$; *elles ne dépendent ni du volume* $d\varpi$, *ni de la forme de la surface qui limite cet élément.*

Partageons l'élément $d\varpi$ en un nombre illimité n de cubes $d\varpi'$, $d\varpi''$, ..., $d\varpi^{(n)}$; ayant tous leurs dimensions infiniment petites par rapport à celles de l'élément $d\varpi$; tous égaux entre eux et égaux à un même cube, *choisi une fois pour toutes;* ayant tous leurs arêtes respectivement parallèles aux axes Ox, Oy, Oz.

Les paramètres qui définissent le système $d\varpi_1\, d\varpi^{(i)}$ et ceux qui définissent le système $d\varpi_1\, d\varpi^{(j)}$ ne diffèrent les uns des autres que de quantités infiniment petites par rapport à eux-mêmes; les variations de ces paramètres sont les mêmes pour les deux systèmes, aux infiniment petits d'ordre supérieur près. Si nous supposons que la résistance spécifique soit la même en tout point de l'élément $d\varpi$, nous voyons que l'induction de l'élément $d\varpi_1$ engendrera sensiblement le même flux électrique $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W})$ en un point de l'élément $d\varpi^{(i)}$ et en un point de l'élément $d\varpi^{(j)}$; ce sera le flux électrique que l'induction de l'élément $d\varpi_1$ engendre en un point quelconque de l'élément $d\varpi$.

La quantité $\rho \mathrm{U}\, dt$ aura donc la même valeur, que l'on prenne pour élément induit l'élément $d\varpi$, ou que l'on prenne l'un des éléments $d\varpi'$, $d\varpi''$, ..., $d\varpi^{(n)}$, l'élément $d\varpi'$ par exemple.

Or, dans le premier cas, la quantité $\rho \mathrm{U}\, dt$ n'est autre chose que la quantité δl_1 dont nous voulons déterminer la forme; dans le second cas, elle représente la quantité $\delta l'_1$ qui est, pour le système $d\varpi'\, d\varpi_1$, analogue à la quantité δl_1. On a donc

$$\delta l_1 = \delta l'_1. \tag{5}$$

Déterminons la forme de la quantité $\delta l'_1$.

Parmi les paramètres qui définissent le système $d\varpi'\, d\varpi_1$, nous n'avons plus à faire figurer aucune grandeur propre à représenter la forme ou le volume de l'élément $d\varpi'$, puisque nous savons que celui-ci est un cube, *choisi une fois pour toutes,* dont les arêtes sont parallèles à Ox, Oy, Oz. Le volume et la forme de l'élément $d\varpi'$ sont ainsi complètement définis.

Pour achever la définition du système $d\varpi'\, d\varpi_1$, il suffit de se donner :

1° Les paramètres qui déterminent le volume et la forme de l'élément $d\varpi_1$;

2° Les grandeurs

$$\begin{gathered} u, \quad v, \quad w, \quad u'_1, \quad v'_1, \quad w'_1, \\ r, \quad \cos(r, x), \quad \cos(r, y), \quad \cos(r, z), \\ \cos(x'_1, x), \quad \ldots, \quad \cos(z'_1, z). \end{gathered}$$

Pour abréger, nous désignerons ces paramètres, *qui sont sensiblement les mêmes pour le système $d\varpi\, d\varpi_1$ et pour le système $d\varpi'\, d\varpi_1$*, par a', b', ..., k'.

Pour définir la variation que le système $d\varpi'\, d\varpi_1$ subit pendant le temps dt, il suffit de connaître, d'une part, les variations $\delta a'$, $\delta b'$, ..., $\delta k'$, et, d'autre part, le changement de forme de l'élément $d\varpi'$; or ce dernier changement est complètement défini par la connaissance des trois dilatations principales $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ en un point de l'élément $d\varpi'$ ou de l'élément $d\varpi$. Si donc nous faisons usage de la proposition démontrée au n° I, nous pourrons écrire

$$\delta l'_1 = \mathrm{A}'\,\delta a' + \mathrm{B}'\,\delta b' + \ldots + \mathrm{K}'\,\delta k' + \mathrm{L}'\,\delta\lambda + \mathrm{M}'\,\delta\mu + \mathrm{N}'\,\delta\nu,$$

A′, B′, ..., K′, L′, M′, N′ dépendant uniquement du cube normal $d\varpi'$ et des variables a', b', ..., k'.

L'égalité (5) donne alors

$$\delta l_1 = \mathrm{A}'\,\delta a' + \mathrm{B}'\,\delta b' + \ldots + \mathrm{K}'\,\delta k' + \mathrm{L}'\,\delta\lambda + \mathrm{M}'\,\delta\mu + \mathrm{N}'\,\delta\nu. \tag{6}$$

Les quantités A′, B′, ..., K′, L′, M′, N′ étant indépendantes du volume et de la forme de l'élément $d\varpi$, l'égalité (6) démontre la proposition énoncée, du moins en ce qui concerne la quantité δl_1; une démonstration analogue s'applique aux quantités δm_1 et δn_1.

Si nous réunissons les résultats exprimés par les égalités (4) et (6), nous voyons que l'on peut écrire

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \delta l_1 = (&\mathcal{A}\,\delta\alpha + \mathcal{B}\,\delta\beta + \ldots + \mathcal{C}\,\delta\gamma \\ &+ \mathcal{L}\,\delta\lambda + \mathcal{M}\,\delta\mu + \mathcal{N}\,\delta\nu + \mathcal{L}_1\,\delta\lambda_1 + \mathcal{M}_1\,\delta\mu_1 + \mathcal{N}_1\,\delta\nu_1)\,d\varpi_1,\end{aligned}\right.$$

les quantités

$$\mathcal{A},\quad \mathcal{B},\quad \ldots,\quad \mathcal{C},$$
$$\mathcal{L},\quad \mathcal{M},\quad \mathcal{N},\quad \mathcal{L}_1,\quad \mathcal{M}_1,\quad \mathcal{N}_1$$

dépendant des seules variables α, β, ..., γ, qui désignent abréviativement les variables

$$u,\quad v,\quad w,\quad u'_1,\quad v'_1,\quad w'_1,$$
$$r,\quad \cos(r,x),\quad \cos(r,y),\quad \cos(r,z),$$
$$\cos(x'_1,x),\quad \ldots,\quad \cos(z'_1,z).$$

Pour δm_1 et δn_1, on peut écrire des égalités analogues à l'égalité (7).

IV. Nous allons maintenant déterminer de quelle manière les quantités δl_1, δm_1, δn_1 dépendent de

$$u'_1,\quad v'_1,\quad w'_1,\quad \delta u'_1,\quad \delta v'_1,\quad \delta w'_1,$$

et, pour y parvenir, nous allons nous appuyer sur une *hypothèse* nouvelle.

Imaginons un conducteur cylindrique, de section extrêmement petite, traversé par un courant quelconque. Ce conducteur peut n'être pas homogène et la nature de la substance qui le forme peut même varier d'un point à l'autre d'une manière discontinue; par exemple, il peut être formé par une corde dont les torons sont les uns de cuivre, les autres de laiton, les autres de maillechort, etc. De même, les composantes du flux électrique peuvent varier d'une manière continue ou discontinue d'un point à l'autre de la section droite de ce cylindre.

Soient Ω_1 une section droite de ce conducteur, menée par un point P, et $d\Omega_1$ un élément de cette section.

Si l'on considère, dans le conducteur cylindrique dont il s'agit, un segment de hauteur ds compris entre deux sections droites infiniment voisines, on admet que ce segment exercera les mêmes actions qu'un segment de même grandeur, de même forme, dans lequel le flux électrique, uniformément distribué aux divers points de la surface Ω_1, aurait pour composantes, en chaque point de cette surface,

$$\varphi'_1 = \frac{1}{\Omega_1} \int u'_1 \, d\Omega_1, \qquad \psi'_1 = \frac{1}{\Omega_1} \int v'_1 \, d\Omega_1, \qquad \chi'_1 = \frac{1}{\Omega_1} \int w'_1 \, d\Omega_1.$$

Cette hypothèse va nous permettre de démontrer la proposition suivante :

Les quantités δl_1, δm_1, δn_1 sont fonctions linéaires et homogènes des six variables

$$u'_1, \quad v'_1, \quad w'_1, \quad \delta u'_1, \quad \delta v'_1, \quad \delta w'_1.$$

Nous pouvons, sans altérer l'expression de δl_1, supposer que l'élément $d\varpi_1$ a la forme d'un prisme droit à base rectangle et que les arêtes de ce prisme sont en même temps les axes principaux de dilatation $O_1 x'_1$, $O_1 y'_1$, $O_1 z'_1$. Soit α la hauteur de ce prisme, dirigée suivant $O_1 x'_1$. Soient β_1, γ_1 ses arêtes de bases, dirigées respectivement suivant $O_1 y'_1$ et $O_1 z'_1$.

La base de ce prisme sera

$$d\Omega_1 = \beta_1 \gamma_1.$$

Le volume de ce prisme sera

$$d\varpi_1 = \alpha_1 \, d\Omega_1.$$

Les trois dilatations principales seront

$$\delta\lambda_1 = \frac{\delta\alpha_1}{\alpha_1}, \qquad \delta\mu_1 = \frac{\delta\beta_1}{\beta_1}, \qquad \delta\nu_1 = \frac{\delta\gamma_1}{\gamma_1}.$$

Pour le système de cet élément inducteur $d\varpi_1$ et d'un élément induit quelconque $d\varpi$, nous aurons

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}\delta l_1 = [\ & A_1(u'_1, v'_1, w'_1)\,\delta a + B_1(u'_1, v'_1, w'_1)\,\delta b + \ldots + K_1(u'_1, v'_1, w'_1)\,\delta k \\ & + L_1(u'_1, v'_1, w'_1)\,\delta\lambda_1 + M_1(u'_1, v'_1, w'_1)\,\delta\mu_1 \quad + N_1(u'_1, v'_1, w'_1)\,\delta\nu_1 \\ & + U_1(u'_1, v'_1, w'_1)\,\delta u'_1 + V_1(u'_1, v'_1, w'_1)\,\delta v'_1 \quad + W_1(u'_1, v'_1, w'_1)\,\delta w'_1]\,\alpha_1\, d\Omega_1.\end{aligned}\right.$$

Les lettres $a, b, \ldots, k$ désignent les paramètres qui dépendent du seul élément $d\varpi$, et aussi ceux qui fixent la position relative des deux systèmes d'axes Ox, Oy, Oz, $O_1x'_1$, $O_1y'_1$, $O_1z'_1$. Les fonctions où nous n'avons mis en évidence que les seules variables u'_1, v'_1, w'_1 peuvent dépendre aussi des variables $a, b, \ldots, k$.

Mettons côte à côte un certain nombre d'éléments analogues à $d\varpi_1$, dans lesquels les dilatations principales aient toutes la même grandeur et la même direction que dans $d\varpi_1$. Leur ensemble constituera un élément cylindrique, de base

$$\Omega_1 = \int d\Omega_1,$$

de longueur α_1, pour lequel les quantités

$$a,\quad b,\quad \ldots,\quad k,\quad \delta a,\quad \delta b,\quad \ldots,\quad \delta k,\quad \delta\lambda_1,\quad \delta\mu_1,\quad \delta\nu_1$$

auront exactement ou sensiblement la même valeur que pour chacun des éléments $d\varpi_1$.

D'après l'hypothèse exprimée par la première égalité (2), ce faisceau d'éléments exerce la même action inductrice qu'un élément unique $d\Pi_1$ pour lequel la quantité analogue à δl_1 aurait une valeur

$$(9)\qquad \delta\mathfrak{L}_1 = \sum \delta l_1.$$

D'autre part, d'après l'hypothèse précédente, il est équivalent à un élément unique pour lequel les quantités $a, b, \ldots, k$ auraient les mêmes valeurs que pour l'un quelconque des éléments $d\varpi_1$, et au sein duquel le flux aurait pour composantes

$$(10)\qquad \varphi'_1 = \frac{1}{\Omega_1}\int u'_1\, d\Omega_1,\qquad \psi'_1 = \frac{1}{\Omega_1}\int v'_1\, d\Omega_1,\qquad \chi'_1 = \frac{1}{\Omega_1}\int w'_1\, d\Omega_1.$$

On doit donc avoir

$$(11)\quad \begin{cases} \delta\mathfrak{L}_1 = [\ \mathrm{A}_1(\varphi'_1, \psi'_1, \chi'_1)\,\delta a + \mathrm{B}_1(\varphi'_1, \psi'_1, \chi'_1)\,\delta b + \ldots + \mathrm{K}_1(\varphi'_1, \psi'_1, \chi'_1)\,\delta k \\ \qquad + \mathrm{L}_1(\varphi'_1, \psi'_1, \chi'_1)\,\delta\lambda_1 + \mathrm{M}_1(\varphi'_1, \psi'_1, \chi'_1)\,\delta\mu_1 + \mathrm{N}_1(\varphi'_1, \psi'_1, \chi'_1)\,\delta\nu_1 \\ \qquad + \mathrm{U}_1(\varphi'_1, \psi'_1, \chi'_1)\,\delta\varphi'_1 + \mathrm{V}_1(\varphi'_1, \psi'_1, \chi'_1)\,\delta\psi'_1 + \mathrm{W}_1(\varphi'_1, \psi'_1, \chi'_1)\,\delta\chi'_1]\,\alpha_1\,\Omega_1. \end{cases}$$

Calculons les quantités $\delta\varphi'_1$, $\delta\psi'_1$, $\delta\chi'_1$; nous aurons

$$\delta\varphi'_1 = \frac{1}{\Omega_1}\mathbf{S}(u'_1\,\delta\,d\Omega_1 + \delta u'_1\,d\Omega_1) - \frac{1}{\Omega_1^2}\mathbf{S}u'_1\,d\Omega_1\,\mathbf{S}\delta\,d\Omega_1.$$

Mais

$$\delta\,d\Omega_1 = (\delta\mu_1 + \delta\nu_1)\,d\Omega_1$$

et

$$\mathbf{S}\delta\,d\Omega_1 = (\delta\mu_1 + \delta\nu_1)\,\mathbf{S}d\Omega_1 ;$$

on a donc

$$(12)\quad \begin{cases} \delta\varphi'_1 = \frac{1}{\Omega_1}\mathbf{S}\delta u'_1\,d\Omega_1 \\ \text{et de même} \\ \delta\psi'_1 = \frac{1}{\Omega_1}\mathbf{S}\delta v'_1\,d\Omega_1, \\ \delta\chi'_1 = \frac{1}{\Omega_1}\mathbf{S}\delta w'_1\,d\Omega_1. \end{cases}$$

Les égalités (10), (11) et (12) nous donnent l'expression de $\delta\mathfrak{L}_1$.

L'égalité (8), qui fait connaître δl_1, peut s'écrire

$$\delta l_1 = \left[\mathrm{A}_1\left(\frac{u'_1\,d\Omega_1}{d\Omega_1}, \frac{v'_1\,d\Omega_1}{d\Omega_1}, \frac{w'_1\,d\Omega_1}{d\Omega_1}\right)\delta a + \ldots \right.$$
$$\left. + \mathrm{W}_1\left(\frac{u'_1\,d\Omega_1}{d\Omega_1}, \frac{v'_1\,d\Omega_1}{d\Omega_1}, \frac{w'_1\,d\Omega_1}{d\Omega_1}\right)\delta w'_1\right]\alpha_1\,d\Omega_1.$$

Remplaçons les deux membres de l'égalité (9) par les expressions que nous venons d'obtenir et identifions les termes qui, dans les deux membres, dépendent des mêmes variations; nous obtiendrons deux types d'identités :

1° Les fonctions A_1, B_1, ..., K_1, L_1, M_1, N_1 vérifieront des identités du type suivant

$$(13)\quad \begin{cases} \mathbf{S}\mathrm{A}_1\left(\frac{u'_1\,d\Omega_1}{d\Omega_1}, \frac{v'_1\,d\Omega_1}{d\Omega_1}, \frac{w'_1\,d\Omega_1}{d\Omega_1}\right)d\Omega_1 \\ \quad = \mathrm{A}_1\left(\frac{\mathbf{S}u'_1\,d\Omega_1}{\mathbf{S}d\Omega_1}, \frac{\mathbf{S}v'_1\,d\Omega_1}{\mathbf{S}d\Omega_1}, \frac{\mathbf{S}w'_1\,d\Omega_1}{\mathbf{S}d\Omega_1}\right)\mathbf{S}d\Omega_1 ; \end{cases}$$

2° Les fonctions U_1, V_1, W_1 vérifient des identités du type suivant

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{S}\, U_1\left(\frac{u'_1\, d\Omega_1}{d\Omega_1}, \frac{v'_1\, d\Omega_1}{d\Omega_1}, \frac{w'_1\, d\Omega_1}{d\Omega_1}\right)\delta u'_1\, d\Omega_1 \\ &\quad = U_1\left(\frac{\mathrm{S}\, u'_1\, d\Omega_1}{\mathrm{S}\, d\Omega_1}, \frac{\mathrm{S}\, v'_1\, d\Omega_1}{\mathrm{S}\, d\Omega_1}, \frac{\mathrm{S}\, w'_1\, d\Omega_1}{\mathrm{S}\, d\Omega_1}\right)\mathrm{S}\, \delta u'_1\, d\Omega_1. \end{aligned}\right.$$

Les égalités du type (13) nous enseignent que les fonctions

$$\begin{gathered} A_1(u'_1, v'_1, w'_1)\, d\Omega_1, \\ B_1(u'_1, v'_1, w'_1)\, d\Omega_1, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ K_1(u'_1, v'_1, w'_1)\, d\Omega_1, \\ L_1(u'_1, v'_1, w'_1)\, d\Omega_1, \\ M_1(u'_1, v'_1, w'_1)\, d\Omega_1, \\ N_1(u'_1, v'_1, w'_1)\, d\Omega_1 \end{gathered}$$

sont des fonctions linéaires et homogènes des quatre quantités

$$u'_1\, d\Omega_1, \quad v'_1\, d\Omega_1, \quad w'_1\, d\Omega_1, \quad d\Omega_1.$$

D'ailleurs δl_1 ne peut contenir aucun terme indépendant de u'_1, v'_1, w'_1, $\delta u'_1$, $\delta v'_1$, $\delta w'_1$, car, si l'élément $d\varpi_1$ ne renferme aucun courant pendant toute la durée du temps dt, il ne pourra donner lieu à aucune induction en l'élément $d\varpi$. Donc les quantités

$$A_1, \quad B_1, \quad \dots, \quad K_1, \quad L_1, \quad M_1, \quad N_1$$

sont des fonctions linéaires et homogènes de u'_1, v'_1, w'_1.

Les égalités du type (14) montrent que les quantités

$$\begin{gathered} U_1\ (u'_1, v'_1, w'_1)\, \delta u'_1\, d\Omega_1, \\ V_1\ (u'_1, v'_1, w'_1)\, \delta v'_1\, d\Omega_1, \\ W_1(u'_1, v'_1, w'_1)\, \delta w'_1\, d\Omega_1 \end{gathered}$$

sont des fonctions linéaires et homogènes des sept quantités

$$\begin{gathered} u'_1\, d\Omega_1, \quad v'_1\, d\Omega_1, \quad w'_1\, d\Omega_1, \\ \delta u'_1\, d\Omega_1, \quad \delta v'_1\, d\Omega_1, \quad \delta w'_1\, d\Omega_1, \\ d\Omega_1. \end{gathered}$$

Il faut et il suffit pour cela que les quantités U_1, V_1, W_1 soient indépendantes de u'_1, v'_1, w'_1.

Nous avons donc, comme nous l'avions annoncé,

$$\delta l_1 = [A_1\,\delta a + B_1\,\delta b + \ldots + K_1\,\delta k + L_1\,\delta\lambda_1 + M_1\,\delta\mu_1 + N_1\,\delta\nu_1 \\ + U_1\,\delta u'_1 + V_1\,\delta v'_1 + W_1\,\delta w'_1]\,d\varpi_1,$$

A_1, B_1, ..., K_1, L_1, M_1, N_1 étant des fonctions linéaires et homogènes des variables u'_1, v'_1, w'_1 et U_1, V_1, W_1 étant indépendants des mêmes variables.

On démontrerait de même que δm_1, δn_1 présentent une forme analogue.

V. Il s'agit maintenant de savoir comment δl_1 dépend des variables

$$u, \quad v, \quad w, \quad \delta u, \quad \delta v, \quad \delta w.$$

Nous nous appuierons sur une nouvelle *hypothèse*.

Imaginons un élément induit $d\varpi$ ayant la forme d'un prisme droit à base rectangle; α est sa hauteur; β, γ sont les deux dimensions de sa base; l'aire de sa base est $d\Omega = \beta\gamma$; son volume est $d\varpi = \alpha\, d\Omega$.

Les trois dimensions α, β, γ coïncident avec les axes principaux de dilatation, en sorte que l'on a

$$\delta\lambda = \frac{\delta\alpha}{\alpha}, \qquad \delta\mu = \frac{\delta\beta}{\beta}, \qquad \delta\nu = \frac{\delta\gamma}{\gamma}.$$

Soit ρ la résistance spécifique de cet élément. Soient u, v, w les composantes du flux qui le parcourt. L'induction qu'y engendre l'élément $d\varpi_1$ y produirait un flux dont les composantes $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ auraient pour valeur

$$\begin{aligned} \rho\,\mathfrak{U}\,dt &= \delta l_1, \\ \rho\,\mathfrak{V}\,dt &= \delta m_1, \\ \rho\,\mathfrak{W}\,dt &= \delta n_1. \end{aligned}$$

Accolons côte à côte un certain nombre de semblables éléments $d\varpi$, $d\varpi'$, $d\varpi''$, ... prismatiques ayant la même longueur α, les mêmes directions d'axes principaux de la dilatation, les mêmes dilatations principales, mais pouvant être formés de substances différentes. Leur ensemble forme un élément cylindrique complexe, *hétérogène*, $d\Pi$, qui a, en chaque point, pour axes principaux de dilatation les directions Ox, Oy, Oz; qui a pour dilatations principales λ, μ, ν; qui a pour hauteur α et pour base $\Omega = \int d\Omega$.

Remplaçons cet élément $d\Pi$ par un autre élément, possédant les diverses propriétés que nous venons d'énumérer, mais ayant une structure homogène. Supposons que la conductibilité spécifique $\frac{1}{R}$ de cet élément soit la moyenne des conductibilités spécifiques $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho'}, \frac{1}{\rho''}, \cdots$ des éléments $d\varpi$, $d\varpi'$, $d\varpi''$, ...

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\Omega} \mathbf{S} \frac{d\Omega}{\rho}.$$

Imaginons que cet élément soit parcouru par un flux homogène et que les composantes φ, ψ, χ de ce flux soient données par les formules

$$\varphi = \frac{1}{\Omega} \mathbf{S}\, u\, d\Omega, \qquad \psi = \frac{1}{\Omega} \mathbf{S}\, v\, d\Omega, \qquad \chi = \frac{1}{\Omega} \mathbf{S}\, w\, d\Omega.$$

Dans cet élément $d\Pi$, l'induction de l'élément $d\varpi_1$ engendrerait un flux (Φ, Ψ, X); nous *admettrons* que l'on a

$$\Phi = \frac{1}{\Omega} \mathbf{S}\, \mathfrak{U}\, d\Omega, \qquad \Psi = \frac{1}{\Omega} \mathbf{S}\, \mathfrak{V}\, d\Omega, \qquad X = \frac{1}{\Omega} \mathbf{S}\, \mathfrak{W}\, d\Omega.$$

Cette hypothèse va nous servir à démontrer le théorème suivant :

Les quantités δl_1, δm_1, δn_1 *sont indépendantes de* u, v, w, δu, δv, δw.

Pour le système $d\varpi\, d\varpi_1$, nous avons évidemment

$$\begin{aligned}\delta l_1 = {} & A(u, v, w)\,\delta a + B(u, v, w)\,\delta b + \ldots + K(u, v, w)\,\delta k \\ & + L(u, v, w)\,\delta\lambda + M(u, v, w)\,\delta\mu + N(u, v, w)\,\delta\nu \\ & + U(u, v, w)\,\delta u + V(u, v, w)\,\delta v + W(u, v, w)\,\delta w,\end{aligned}$$

a, b, ..., k désignant ici les paramètres qui dépendent exclusivement de l'élément $d\varpi_1$ et aussi ceux qui fixent la situation relative des deux systèmes d'axes Ox, Oy, Oz, $O_1x'_1$, $O_1y'_1$, $O_1z'_1$. Les fonctions où nous n'avons fait figurer que u, v, w peuvent dépendre aussi de a, b, ..., k.

Pour le groupe $d\Pi\, d\varpi_1$, les quantités a, b, ..., k auront la même valeur que pour le groupe $d\varpi\, d\varpi_1$; soit $\delta\mathfrak{L}_1$ la quantité analogue à δl_1 pour le groupe $d\Pi\, d\varpi_1$. Nous aurons

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{L}_1 = {} & A(\varphi, \psi, \chi)\,\delta a + B(\varphi, \psi, \chi)\,\delta b + \ldots + K(\varphi, \psi, \chi)\,\delta k \\ & + L(\varphi, \psi, \chi)\,\delta\lambda + M(\varphi, \psi, \chi)\,\delta\mu + N(\varphi, \psi, \chi)\,\delta\nu \\ & + U(\varphi, \psi, \chi)\,\delta\varphi + V(\varphi, \psi, \chi)\,\delta\psi + W(\varphi, \psi, \chi)\,\delta\chi.\end{aligned}$$

Mais nous avons

$$\rho \mho \, dt = \delta l_1,$$
$$R \Phi \, dt = \delta \zeta_1.$$

L'identité que nous avons admise

$$\Phi = \frac{1}{\Omega} \mathbf{S} \mho \, d\Omega$$

devient donc

$$\frac{\Omega}{R} \delta \zeta_1 = \mathbf{S} \frac{\delta l_1}{\rho} d\Omega$$

ou encore, en vertu de l'égalité qui définit R,

$$\delta \zeta_1 = \frac{\mathbf{S} \dfrac{\delta l_1}{\rho} d\Omega}{\mathbf{S} \dfrac{d\Omega}{\rho}}.$$

Si l'on remplace dans cette identité $\delta\zeta_1$ et δl_1 par leurs valeurs, en observant en outre que

$$\delta\varphi = \frac{1}{\Omega} \mathbf{S} \delta u \, d\Omega, \qquad \delta\psi = \frac{1}{\Omega} \mathbf{S} \delta v \, d\Omega, \qquad \delta\chi = \frac{1}{\Omega} \mathbf{S} \delta w \, d\Omega,$$

on trouve une suite d'identités qui appartiennent à deux types différents :

1° Les fonctions A, B, ..., K, L, M, N vérifient des identités du type

$$(15) \qquad A\left(\frac{\mathbf{S} u \, d\Omega}{\mathbf{S} d\Omega}, \frac{\mathbf{S} v \, d\Omega}{\mathbf{S} d\Omega}, \frac{\mathbf{S} w \, d\Omega}{\mathbf{S} d\Omega}\right) \mathbf{S} \frac{d\Omega}{\rho} = \mathbf{S} A\left(\frac{u \, d\Omega}{d\Omega}, \frac{v \, d\Omega}{d\Omega}, \frac{w \, d\Omega}{d\Omega}\right) \frac{d\Omega}{\rho}.$$

2° Les fonctions U, V, W vérifient des identités du type

$$(16) \qquad \begin{aligned} U\left(\frac{\mathbf{S} u \, d\Omega}{\mathbf{S} d\Omega}, \frac{\mathbf{S} v \, d\Omega}{\mathbf{S} d\Omega}, \frac{\mathbf{S} w \, d\Omega}{\mathbf{S} d\Omega}\right) \mathbf{S} \frac{d\Omega}{\rho} \frac{\mathbf{S} \delta u \, d\Omega}{\mathbf{S} d\Omega} \\ = \mathbf{S} U\left(\frac{u \, d\Omega}{d\Omega}, \frac{v \, d\Omega}{d\Omega}, \frac{w \, d\Omega}{d\Omega}\right) \frac{d\Omega}{\rho} \frac{\delta u \, d\Omega}{d\Omega}. \end{aligned}$$

L'identité (15) nous apprend que l'expression

$$A\left(\frac{u \, d\Omega}{d\Omega}, \frac{v \, d\Omega}{d\Omega}, \frac{w \, d\Omega}{d\Omega}\right) \frac{d\Omega}{\rho}$$

est linéaire et homogène par rapport aux cinq quantités

$$u\,d\Omega,\quad v\,d\Omega,\quad w\,d\Omega,\quad d\Omega,\quad \frac{d\Omega}{\rho}.$$

Il faut et il suffit pour cela que la fonction $A(u, v, w)$ soit indépendante de u, v, w. Une démonstration analogue prouverait que les quantités

$$\begin{array}{lll} B(u, v, w), & \ldots\ldots\ldots, & K(u, v, w), \\ L(u, v, w), & M(u, v, w), & N(u, v, w) \end{array}$$

sont toutes indépendantes de u, v, w.

L'identité (16) nous apprend que l'expression

$$U\left(\frac{u\,d\Omega}{d\Omega}, \frac{v\,d\Omega}{d\Omega}, \frac{w\,d\Omega}{d\Omega}\right)\frac{\delta u\,d\Omega}{d\Omega}\,\frac{d\Omega}{\rho}$$

est linéaire et homogène par rapport aux six quantités

$$u\,d\Omega,\quad v\,d\Omega,\quad w\,d\Omega,\quad d\Omega,\quad \delta u\,d\Omega,\quad \frac{d\Omega}{\rho}.$$

Il faut et il suffit pour cela que la fonction U soit identiquement nulle. Une démonstration analogue prouverait que les fonctions V et W sont identiquement nulles.

On voit donc que l'on a simplement

$$\delta l_1 = A\,\delta a + B\,\delta b + \ldots + K\,\delta k + L\,\delta\lambda + M\,\delta\mu + N\,\delta\nu,$$

les fonctions A, B, ..., K, L, M, N ne dépendant pas des variables u, v, w.

VI. Résumons les résultats obtenus dans ce qui précède.

La quantité δl_1 *est de la forme*

$$(17)\qquad \begin{aligned} \delta l_1 = [\;&(A_1\,\delta a + B_1\,\delta b + \ldots\ldots + K_1\,\delta k \\ &\qquad + L_1\,\delta\lambda + M_1\,\delta\mu + N_1\,\delta\nu \\ &\qquad + L'_1\,\delta\lambda_1 + M'_1\,\delta\mu_1 + N'_1\,\delta\nu_1)\,u'_1 + \mathfrak{U}\,\delta u'_1 \\ &+ (A_2\,\delta a + B_2\,\delta b + \ldots\ldots + K_2\,\delta k \\ &\qquad + L_2\,\delta\lambda + M_2\,\delta\mu + N_1\,\delta\nu \\ &\qquad + L'_2\,\delta\lambda_1 + M'_2\,\delta\mu_1 + N'_2\,\delta\nu_1)\,v'_1 + \mathfrak{V}\,\delta v'_1 \\ &+ (A_3\,\delta a + B_3\,\delta b + \ldots\ldots + K_3\,\delta k \\ &\qquad + L_3\,\delta\lambda + M_3\,\delta\mu + N_3\,\delta\nu \\ &\qquad + L'_3\,\delta\lambda_1 + M'_3\,\delta\mu_1 + N'_3\,\delta\nu_1)\,w'_1 + \mathfrak{W}\,\delta w'_1\,]\,d\varpi_1. \end{aligned}$$

Les quantités

$$\mathbf{A}_i,\quad \mathbf{B}_i,\quad \ldots,\quad \mathbf{K}_i,\quad \mathbf{L}_i,\quad \mathbf{M}_i,\quad \mathbf{N}_i,\quad \mathbf{L}'_i,\quad \mathbf{M}'_i,\quad \mathbf{N}'_i,\quad \mathfrak{V},\quad \mathfrak{P},\quad \mathfrak{W}$$

sont des fonctions des seules variables

$$a,\quad b,\quad \ldots,\quad k.$$

Par a, b, ..., k, il faut entendre les paramètres suivants :

$$(18)\qquad \left\{\begin{array}{lll} & r, & \\ \cos(r,\ x), & \cos(r,\ y), & \cos(r,\ z), \\ \cos(x'_1, x), & \cos(x'_1, y), & \cos(x'_1, z), \\ \cos(y'_1, x), & \cos(y'_1, y), & \cos(y'_1, z), \\ \cos(z'_1, x), & \cos(z'_1, y), & \cos(z'_1, z). \end{array}\right.$$

CHAPITRE II.

APPLICATION DES LOIS DE L'INDUCTION ENTRE CONDUCTEURS LINÉAIRES.

Il nous faut maintenant déterminer comment les fonctions

$$\mathbf{A}_i,\quad \mathbf{B}_i,\quad \ldots,\quad \mathbf{K}_i,\quad \mathbf{L}_i,\quad \mathbf{M}_i,\quad \mathbf{N}_i,\quad \mathbf{L}'_i,\quad \mathbf{M}'_i,\quad \mathbf{N}'_i,\quad \mathfrak{V},\quad \mathfrak{V},\quad \mathfrak{W}$$

dépendent des variables qui figurent dans le tableau (18) du Chapitre précédent.

Ces fonctions ne dépendent ni de la forme des éléments $d\varpi$, $d\varpi_1$, ni des quantités

$$\begin{array}{cccccc} u, & v, & w, & u'_1, & v'_1, & w'_1, \\ \delta u, & \delta v, & \delta w, & \delta u'_1, & \delta v'_1, & \delta w'_1; \end{array}$$

on peut donc, pour déterminer ces fonctions, choisir arbitrairement toutes ces variables.

Nous supposerons que l'élément $d\varpi_1$ ait la forme d'un prisme droit ayant une de ses dimensions α_1 dirigée suivant $O'_1 x'_1$, très grande par rapport aux deux autres, β_1 et γ_1, qui sont dirigées suivant $O'_1 y'_1$ et $O_1 z'_1$.

Nous supposerons en outre que l'on ait

$$v'_1 = 0, \qquad w'_1 = 0, \qquad \delta v'_1 = 0, \qquad \delta w'_1 = 0.$$

Nous admettrons qu'un tel élément inducteur est assimilable à un élément de courant linéaire, dirigé suivant $O'_1 x'_1$, ayant pour longueur α_1, et traversé par un courant d'intensité

$$J_1 = u'_1 \beta_1 \gamma_1.$$

Nous supposerons ensuite que l'élément $d\varpi$ ait la forme d'un prisme droit ayant une de ses dimensions α, dirigée suivant Ox, très grande par rapport aux deux autres, β et γ, qui sont dirigées suivant Oy et Oz. L'induction due à l'élément $d\varpi_1$ y détermine un flux dont la composante, dans la direction Ox, a pour valeur U_1, en sorte que cette induction transporte d'une extrémité à l'autre de cet élément, dans le temps dt, une quantité d'électricité

$$dQ_1 = \beta\gamma U_1\, dt,$$

qui peut encore s'écrire, en vertu de la définition de δl_1,

$$dQ_1 = \frac{\delta l_1}{\rho} \beta\gamma.$$

Nous admettrons que cette quantité d'électricité est aussi celle que l'induction de l'élément $d\varpi_1$ transporterait, dans le temps dt, d'une extrémité à l'autre d'un élément linéaire de longueur α, de résistance $R = \frac{\rho\alpha}{\beta\gamma}$, dirigé suivant Ox.

Ces deux hypothèses vont nous servir à déterminer, dans δl_1, les termes qui dépendent de u'_1 et $\delta u'_1$.

En effet, d'après les résultats obtenus au Chapitre précédent, nous devons avoir

$$(1) \qquad \begin{aligned} R\,dQ_1 = \alpha\,\delta l_1 = \alpha\,d\varpi_1 [(A_1\,\delta a + B_1\,\delta b + \ldots\ldots + K_1\,\delta k \\ + L_1\,\delta\lambda + M_1\,\delta\mu + N_1\,\delta\nu \\ + L'_1\,\delta\lambda_1 + M'_1\,\delta\mu_1 + N'_1\,\delta\nu_1)\,u'_1 + \upsilon\,\delta u'_1]. \end{aligned}$$

D'autre part, si nous appliquons aux deux éléments $d\varpi$, $d\varpi_1$ les lois de l'induction électrodynamique entre éléments de courants linéaires, nous aurons [Tome III, p. 120, égalité (2)]

$$(2) \quad R\,dQ_1 = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\delta\left\{\left[\frac{1-\lambda}{2}\cos(r,x)\cos(r,x'_1) + \frac{1+\lambda}{2}\cos(x'_1,x)\right]\frac{J_1}{r}\,\alpha\alpha_1\right\}.$$

Dans cette formule, λ représente la constante d'Helmholtz; cette même lettre λ va figurer dans certaines de nos équations pour représenter à la fois la constante d'Helmholtz et la dilatation suivant Ox en un point de l'élément $d\varpi$; le lecteur évitera sans peine toute confusion.

Nous allons identifier ces deux expressions (1) et (2) de $R\,dQ_1$. Remarquons pour cela que nous avons

$$\begin{aligned} \cos(r,x'_1) &= \cos(r,x)\cos(x'_1,x) + \cos(r,y)\cos(x'_1,y) + \cos(r,z)\cos(x'_1,z), \\ \delta\cos(r,x'_1) &= \cos(r,x)\,\delta\cos(x'_1,x) + \cos(r,y)\,\delta\cos(x'_1,y) + \cos(r,z)\,\delta\cos(x'_1,z) \\ &\quad + \cos(x'_1,x)\,\delta\cos(r,x) + \cos(x'_1,y)\,\delta\cos(r,y) + \cos(x'_1,z)\,\delta\cos(r,z), \\ \delta\alpha &= \alpha\,\delta\lambda, \\ \delta\alpha_1 &= \alpha_1\,\delta\lambda_1, \qquad \delta\beta_1 = \beta_1\,\delta\mu_1, \qquad \delta\gamma_1 = \gamma_1\,\delta\nu_1, \\ \alpha_1\beta_1\gamma_1 &= d\varpi_1, \\ J_1 &= u'_1\,\beta_1\gamma_1, \\ \delta(J_1\alpha_1) &= d\varpi_1\,\delta u'_1 + u'_1\,\delta d\varpi_1. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$
\begin{aligned}
(3)\quad & [(A_1\,\delta a + B_1\,\delta b + \ldots\ldots + K_1\,\delta k \\
& \quad + L_1\,\delta\lambda + M_1\,\delta\mu + N_1\,\delta\nu \\
& \quad + L'_1\,\delta\lambda_1 + M'_1\,\delta\mu_1 + N'_1\,\delta\nu_1)\,u'_1 + \mho\,\delta u'_1]\,d\varpi_1 \\
& = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\Bigg(\frac{1-\lambda}{2r}[2\cos(r,x)\cos(x'_1,x) + \cos(r,y)\cos(x'_1,y) \\
& \qquad\qquad + \cos(r,z)\cos(x'_1,z)]\,u'_1\,d\varpi_1\,\delta\cos(r,x) \\
& \quad + \frac{1-\lambda}{2r}\cos(r,x)\cos(x'_1,y)\,u'_1\,d\varpi_1\,\delta\cos(r,y) \\
& \quad + \frac{1-\lambda}{2r}\cos(r,x)\cos(x'_1,z)\,u'_1\,d\varpi_1\,\delta\cos(r,z) \\
& \quad + \left[\frac{1-\lambda}{2r}\cos^2(r,x) + \frac{1+\lambda}{2r}\right]u'_1\,d\varpi_1\,\delta\cos(x'_1,x) \\
& \quad + \frac{1-\lambda}{2r}\cos(r,x)\cos(r,y)\,u'_1\,d\varpi_1\,\delta\cos(x'_1,y) \\
& \quad + \frac{1-\lambda}{2r}\cos(r,x)\cos(r,z)\,u'_1\,d\varpi_1\,\delta\cos(x'_1,z) \\
& \quad - \Big\{\frac{1-\lambda}{2r^2}\cos(r,x)[\cos(r,x)\cos(x'_1,x) + \cos(r,y)\cos(x'_1,y) \\
& \qquad\qquad + \cos(r,z)\cos(x'_1,z)] \\
& \qquad + \frac{1+\lambda}{2r^2}\cos(x'_1,x)\Big\}\,u'_1\,d\varpi_1\,\delta r \\
& \quad + \Big\{\frac{1-\lambda}{2r}\cos(r,x)[\cos(r,x)\cos(x'_1,x) + \cos(r,y)\cos(x'_1,y) \\
& \qquad\qquad + \cos(r,z)\cos(x'_1,z)] \\
& \qquad + \frac{1+\lambda}{2r}\cos(x'_1,x)\Big\}[\delta(u'_1\,d\varpi_1) + u'_1\,d\varpi_1\,\delta\lambda]\Bigg).
\end{aligned}
$$

Si, au lieu de prendre pour l'élément $d\varpi_1$ un prisme allongé suivant $O_1x'_1$ et parcouru par un flux parallèle à $O_1x'_1$, nous avions placé l'élément et le flux suivant $O_1y'_1$ ou suivant $O_1z'_1$, nous aurions obtenu de même la forme des quantités

$$
\begin{aligned}
& [(A_2\,\delta a + B_2\,\delta b + \ldots\ldots + K_2\,\delta k \\
& \quad + L_2\,\delta\lambda + M_2\,\delta\mu + N_2\,\delta\nu \\
& \quad + L'_2\,\delta\lambda_1 + M'_2\,\delta\mu_1 + N'_2\,\delta\nu_1)\,u'_1 + \Upsilon\,\delta v'_1]\,d\varpi_1, \\
& [(A_3\,\delta a + B_3\,\delta b + \ldots\ldots + K_3\,\delta k \\
& \quad + L_3\,\delta\lambda + M_3\,\delta\mu + N_3\,\delta\nu \\
& \quad + L'_1\,\delta\lambda_1 + M'_3\,\delta\mu_1 + N'_3\,\delta\nu_1)\,w'_1 + \Psi\,\delta w'_1]\,d\varpi_1,
\end{aligned}
$$

ce qui aurait achevé de déterminer δl_1.

En prenant l'élément $d\varpi$ non plus parallèle à l'axe Ox, mais parallèle à l'axe Oy ou à l'axe Oz, on déterminerait de même δm_1, δn_1.

Ces quantités δl_1, δm_1, δn_1 peuvent se mettre sous une forme très simple.

Soient u_1, v_1, w_1 les composantes du flux en un point de l'élément $d\varpi_1$ suivant les axes principaux de dilatation Ox, Oy, Oz de l'élément $d\varpi$. Nous aurons

$$\begin{aligned}
u_1 &= u'_1 \cos(x'_1, x) + v'_1 \cos(y'_1, x) + w'_1 \cos(z'_1, x),\\
v_1 &= u'_1 \cos(x'_1, y) + v'_1 \cos(y'_1, y) + w'_1 \cos(z'_1, y),\\
w_1 &= u'_1 \cos(x'_1, z) + v'_1 \cos(y'_1, z) + w'_1 \cos(z'_1, z).
\end{aligned}$$

Posons

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
U_1 &= \frac{1+\lambda}{2}\frac{u_1}{r} + \frac{1-\lambda}{2}\left(\frac{x_1-x}{r}u_1 + \frac{y_1-y}{r}v_1 + \frac{z_1-z}{r}w_1\right)\frac{x_1-x}{r^2},\\
V_1 &= \frac{1+\lambda}{2}\frac{v_1}{r} + \frac{1-\lambda}{2}\left(\frac{x_1-x}{r}u_1 + \frac{y_1-y}{r}v_1 + \frac{z_1-z}{r}w_1\right)\frac{y_1-y}{r^2},\\
W_1 &= \frac{1+\lambda}{2}\frac{w_1}{r} + \frac{1-\lambda}{2}\left(\frac{x_1-x}{r}u_1 + \frac{y_1-y}{r}v_1 + \frac{z_1-z}{r}w_1\right)\frac{z_1-z}{r^2},
\end{aligned}\right.$$

et nous aurons

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta l_1 &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}[\delta(U_1\, d\varpi_1) + U_1\, d\varpi_1\, \delta\lambda],\\
\delta m_1 &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}[\delta(V_1\, d\varpi_1) + V_1\, d\varpi_1\, \delta\mu],\\
\delta n_1 &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}[\delta(W_1\, d\varpi_1) + W_1\, d\varpi_1\, \delta\nu].
\end{aligned}\right.$$

Telle est la forme très simple sous laquelle peuvent être mises les lois de l'induction électrodynamique lorsque l'on prend à chaque instant pour axes de coordonnées les axes principaux de dilatation de l'élément induit.

Ce choix particulier d'axes de coordonnées peut, dans certains cas, être incommode; nous allons donc chercher les formules que l'on doit substituer aux formules (5), lorsque l'on prend pour axes de coordonnées trois axes rectangulaires quelconques $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ assujettis seulement à demeurer, pendant le temps dt, invariablement liés à la matière qui forme l'élément $d\varpi$.

Le flux qui parcourt l'élément $d\varpi_1$ a pour composantes, suivant $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
\varphi_1 &= u_1\cos(\xi, x) + v_1\cos(\xi, y) + w_1\cos(\xi, z),\\
\psi_1 &= u_1\cos(\eta, x) + v_1\cos(\eta, y) + w_1\cos(\eta, z),\\
\chi_1 &= u_1\cos(\zeta, x) + v_1\cos(\zeta, y) + w_1\cos(\zeta, z).
\end{aligned}\right.$$

Soient δL_1, δM_1, δN_1 les quantités, analogues à δl_1, δm_1, δn_1, qui sont relatives aux axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$; on voit sans peine que l'on doit avoir

$$(7)\quad \begin{cases} \delta L_1 = \delta l_1 \cos(\xi, x) + \delta m_1 \cos(\xi, y) + \delta n_1 \cos(\xi, z), \\ \delta M_1 = \delta l_1 \cos(\eta, x) + \delta m_1 \cos(\eta, y) + \delta n_1 \cos(\eta, z), \\ \delta N_1 = \delta l_1 \cos(\zeta, x) + \delta m_1 \cos(\zeta, y) + \delta n_1 \cos(\zeta, z). \end{cases}$$

Posons

$$(8)\quad \begin{cases} \Phi_1 = \dfrac{1+\lambda}{2}\dfrac{\varphi_1}{r} + \dfrac{1-\lambda}{2}\left(\dfrac{\xi_1-\xi}{r}\varphi_1 + \dfrac{\eta_1-\eta}{r}\psi_1 + \dfrac{\zeta_1-\zeta}{r}\chi_1\right)\dfrac{\xi_1-\xi}{r^2}, \\ \Psi_1 = \dfrac{1+\lambda}{2}\dfrac{\psi_1}{r} + \dfrac{1-\lambda}{2}\left(\dfrac{\xi_1-\xi}{r}\varphi_1 + \dfrac{\eta_1-\eta}{r}\psi_1 + \dfrac{\zeta_1-\zeta}{r}\chi_1\right)\dfrac{\eta_1-\eta}{r^2}, \\ X_1 = \dfrac{1+\lambda}{2}\dfrac{\chi_1}{r} + \dfrac{1-\lambda}{2}\left(\dfrac{\xi_1-\xi}{r}\varphi_1 + \dfrac{\eta_1-\eta}{r}\psi_1 + \dfrac{\zeta_1-\zeta}{r}\chi_1\right)\dfrac{\zeta_1-\zeta}{r^2}. \end{cases}$$

Nous verrons sans peine que l'on a, en vertu des égalités (4) et (6),

$$(9)\quad \begin{cases} \Phi_1 = U_1 \cos(\xi, x) + V_1 \cos(\xi, y) + W_1 \cos(\xi, z), \\ \Psi_1 = U_1 \cos(\eta, x) + V_1 \cos(\eta, y) + W_1 \cos(\eta, z), \\ X_1 = U_1 \cos(\zeta, x) + V_1 \cos(\zeta, y) + W_1 \cos(\zeta, z). \end{cases}$$

D'ailleurs, comme les axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ sont, comme les axes Ox, Oy, Oz, invariablement liés à l'élément $d\varpi$, les neuf cosinus

$$\begin{matrix} \cos(\xi, x), & \cos(\xi, y), & \cos(\xi, z), \\ \cos(\eta, x), & \cos(\eta, y), & \cos(\eta, z), \\ \cos(\zeta, x), & \cos(\zeta, y), & \cos(\zeta, z) \end{matrix}$$

demeurent invariables pendant le temps dt, en sorte que les égalités (9) permettent d'écrire

$$(10)\quad \begin{cases} \delta(U_1\, d\varpi_1)\cos(\xi, x) + \delta(V_1\, d\varpi_1)\cos(\xi, y) + \delta(W_1\, d\varpi_1)\cos(\xi, z) = \delta(\Phi_1\, d\varpi_1), \\ \delta(U_1\, d\varpi_1)\cos(\eta, x) + \delta(V_1\, d\varpi_1)\cos(\eta, y) + \delta(W_1\, d\varpi_1)\cos(\eta, z) = \delta(\Psi_1\, d\varpi_1), \\ \delta(U_1\, d\varpi_1)\cos(\zeta, x) + \delta(V_1\, d\varpi_1)\cos(\zeta, y) + \delta(W_1\, d\varpi_1)\cos(\zeta, z) = \delta(X_1\, d\varpi_1). \end{cases}$$

Considérons la quantité

$$U_1 \cos(\xi, x)\,\delta\lambda + V_1 \cos(\xi, y)\,\delta\mu + W_1 \cos(\xi, z)\,\delta\nu.$$

Nous pourrons l'écrire, en vertu des égalités

$$(9\ bis)\quad \begin{cases} U_1 = \Phi_1 \cos(\xi, x) + \Psi_1 \cos(\eta, x) + X_1 \cos(\zeta, x), \\ V_1 = \Phi_1 \cos(\xi, y) + \Psi_1 \cos(\eta, y) + X_1 \cos(\zeta, y), \\ W_1 = \Phi_1 \cos(\xi, z) + \Psi_1 \cos(\eta, z) + X_1 \cos(\zeta, z), \end{cases}$$

qui se déduisent des égalités (9), sous la forme suivante

$$(11)\quad \begin{aligned} &\mathbf{U}_1\cos(\xi,x)\,\partial\lambda + \mathbf{V}_1\cos(\xi,y)\,\partial\mu + \mathbf{W}_1\cos(\xi,z)\,\partial\nu \\ &= \Phi_1[\cos^2(\xi,x)\,\partial\lambda + \cos^2(\xi,y)\,\partial\mu + \cos^2(\xi,z)\,\partial\nu] \\ &+ \Psi_1[\cos(\xi,x)\cos(\eta,x)\,\partial\lambda + \cos(\xi,y)\cos(\eta,y)\,\partial\mu + \cos(\xi,z)\cos(\eta,z)\,\partial\nu] \\ &+ \mathbf{X}_1[\cos(\xi,x)\cos(\zeta,x)\,\partial\lambda + \cos(\xi,y)\cos(\zeta,y)\,\partial\mu + \cos(\xi,z)\cos(\zeta,z)\,\partial\nu]. \end{aligned}$$

Soient f, g, h les composantes, par rapport aux axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, du déplacement éprouvé, pendant le temps dt, par un point matériel (ξ, η, ζ) appartenant à l'élément $d\varpi$. On sait que l'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi} &= \cos^2(\xi,x)\,\partial\lambda + \cos^2(\xi,y)\,\partial\mu + \cos^2(\xi,z)\,\partial\nu, \\ \frac{\partial g}{\partial \xi} &= \cos(\xi,x)\cos(\eta,x)\,\partial\lambda + \cos(\xi,y)\cos(\eta,y)\,\partial\mu + \cos(\xi,z)\cos(\eta,z)\,\partial\nu, \\ \frac{\partial h}{\partial \xi} &= \cos(\xi,x)\cos(\zeta,x)\,\partial\lambda + \cos(\xi,y)\cos(\zeta,y)\,\partial\mu + \cos(\xi,z)\cos(\zeta,z)\,\partial\nu. \end{aligned}$$

L'égalité (11) devient donc la première des trois égalités

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} &\mathbf{U}_1\cos(\xi,x)\,\partial\lambda + \mathbf{V}_1\cos(\xi,y)\,\partial\mu + \mathbf{W}_1\cos(\xi,z)\,\partial\nu \\ &\qquad = \Phi_1\frac{\partial f}{\partial\xi} + \Psi_1\frac{\partial g}{\partial\xi} + \mathbf{X}_1\frac{\partial h}{\partial\xi}, \\ &\mathbf{U}_1\cos(\eta,x)\,\partial\lambda + \mathbf{V}_1\cos(\eta,y)\,\partial\mu + \mathbf{W}_1\cos(\eta,z)\,\partial\nu \\ &\qquad = \Phi_1\frac{\partial f}{\partial\eta} + \Psi_1\frac{\partial g}{\partial\eta} + \mathbf{X}_1\frac{\partial h}{\partial\eta}, \\ &\mathbf{U}_1\cos(\zeta,x)\,\partial\lambda + \mathbf{V}_1\cos(\zeta,y)\,\partial\mu + \mathbf{W}_1\cos(\zeta,z)\,\partial\nu \\ &\qquad = \Phi_1\frac{\partial f}{\partial\zeta} + \Psi_1\frac{\partial g}{\partial\zeta} + \mathbf{X}_1\frac{\partial h}{\partial\zeta}; \end{aligned} \right.$$

les deux autres se démontrent de même.

Les égalités (5), (7), (10) et (12) donnent

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} \partial\mathbf{L}_1 &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\partial(\Phi_1\,d\varpi_1) + \left(\Phi_1\frac{\partial f}{\partial\xi} + \Psi_1\frac{\partial g}{\partial\xi} + \mathbf{X}_1\frac{\partial h}{\partial\xi}\right)d\varpi_1\right], \\ \partial\mathbf{M}_1 &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\partial(\Psi_1\,d\varpi_1) + \left(\Phi_1\frac{\partial f}{\partial\eta} + \Psi_1\frac{\partial g}{\partial\eta} + \mathbf{X}_1\frac{\partial h}{\partial\eta}\right)d\varpi_1\right], \\ \partial\mathbf{N}_1 &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\partial(\mathbf{X}_1\,d\varpi_1) + \left(\Phi_1\frac{\partial f}{\partial\zeta} + \Psi_1\frac{\partial g}{\partial\zeta} + \mathbf{X}_1\frac{\partial h}{\partial\zeta}\right)d\varpi_1\right]. \end{aligned} \right.$$

Ces formules nous donnent les lois générales de l'induction électrodynamique; elles supposent les axes des coordonnées $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ invariablement liés à la matière qui forme l'élément induit.

Cherchons maintenant à écrire les équations qui conviennent à trois axes de coordonnées $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, *fixes dans l'espace*.

Dans ce cas, les équations (10) ne seront plus exactes. La première de ces équations, par exemple, devra être remplacée par

$$(10\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta(U_1\,d\varpi_1)\cos(\xi,x)+\delta(V_1\,d\varpi_1)\cos(\xi,y)+\delta(W_1\,d\varpi_1)\cos(\xi,z)\\ &\quad+U_1\,d\varpi_1\,\delta\cos(\xi,x)+V_1\,d\varpi_1\,\delta\cos(\xi,y)+W_1\,d\varpi_1\,\delta\cos(\xi,z)=\delta(\Phi_1\,d\varpi_1).\end{aligned}\right.$$

Soient ω, ω', ω'' les composantes de la rotation éprouvée par l'élément $d\varpi_1$, pendant le temps dt, autour des trois axes parallèles à $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ issus d'un point de l'élément. On voit aisément que l'on a

$$\begin{aligned}\delta\cos(\xi,x)&=\cos(\zeta,x)\,\omega'-\cos(\eta,x)\,\omega'',\\ \delta\cos(\xi,y)&=\cos(\zeta,y)\,\omega'-\cos(\eta,y)\,\omega'',\\ \delta\cos(\xi,z)&=\cos(\zeta,z)\,\omega'-\cos(\eta,z)\,\omega''.\end{aligned}$$

Dès lors, en vertu des égalités (9), on a

$$U_1\,\delta\cos(\xi,x)+V_1\,\delta\cos(\xi,y)+W_1\,\delta\cos(\xi,z)=X_1\,\omega'-\Psi_1\,\omega'',$$

et l'égalité (10 *bis*) devient la première des égalités

$$(10\ ter)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta(U_1\,d\varpi_1)\cos(\xi,x)+\delta(V_1\,d\varpi_1)\cos(\xi,y)+\delta(W_1\,d\varpi_1)\cos(\xi,z)\\ &\qquad\qquad=\delta(\Phi_1\,d\varpi_1)-(X_1\,\omega'-\Psi_1\,\omega'')\,d\varpi_1,\\ &\delta(U_1\,d\varpi_1)\cos(\eta,x)+\delta(V_1\,d\varpi_1)\cos(\eta,y)+\delta(W_1\,d\varpi_1)\cos(\eta,z)\\ &\qquad\qquad=\delta(\Psi_1\,d\varpi_1)-(\Phi_1\,\omega''-X_1\,\omega)\,d\varpi_1,\\ &\delta(U_1\,d\varpi_1)\cos(\zeta,x)+\delta(V_1\,d\varpi_1)\cos(\zeta,y)+\delta(W_1\,d\varpi_1)\cos(\zeta,z)\\ &\qquad\qquad=\delta(X_1\,d\varpi_1)-(\Psi_1\,\omega-\Phi_1\,\omega')\,d\varpi_1.\end{aligned}\right.$$

Les deux autres égalités (10 *ter*) se démontrent comme la première.

Telles sont les égalités que l'on doit substituer aux égalités (10) si l'on veut regarder les axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ comme fixes dans l'espace.

D'autre part, on voit sans peine que l'on doit remplacer

$$\begin{aligned}&\frac{\partial g}{\partial\xi}\quad\text{par}\quad\frac{\partial g}{\partial\xi}-\omega'',\\ &\frac{\partial h}{\partial\xi}\quad\text{par}\quad\frac{\partial h}{\partial\xi}+\omega',\end{aligned}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \eta} \quad \text{par} \quad \frac{\partial h}{\partial \eta} - \omega,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} \quad \text{par} \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} + \omega'',$$

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} \quad \text{par} \quad \frac{\partial f}{\partial \zeta} - \omega',$$

$$\frac{\partial g}{\partial \zeta} \quad \text{par} \quad \frac{\partial g}{\partial \zeta} + \omega.$$

On voit alors que, lorsqu'on prend pour axes de coordonnées un trièdre trirectangle fixe dans l'espace, on retrouve les égalités (13) comme expression des lois de l'induction électrodynamique. Ce sont les égalités données par M. H. von Helmholtz.