COMPTE RENDU

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 24 MAI 1847.

PRÉSIDENCE DE M. ADOLPHE BRONGNIART.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur les lieux analytiques; par* M. Augustin Cauchy.

« Considérons plusieurs variables x, y, z,... et diverses fonctions explicites u, v, w,... de ces mêmes variables. A chaque système de valeurs des variables x, y, z,... correspondra généralement une valeur déterminée de chacune des fonctions u, v, w,... Si d'ailleurs les variables x, y, z,... sont au nombre de deux ou trois seulement, elle pourront être censées représenter les coordonnées rectangulaires d'un point situé dans un plan ou dans l'espace, et, par suite, chaque système de valeurs des variables pourra être censé correspondre à un point déterminé. Enfin, si les variables x, y, ou x, y, z, sont assujetties à certaines conditions représentées par certaines inégalités, les divers systèmes de valeurs de x, y, z, pour lesquels ces conditions seront remplies, correspondront à divers points d'un certain lieu; et les lignes ou les surfaces qui limiteront ce lieu dans le plan dont il s'agit, ou dans l'espace, seront représentées par les équations dans lesquelles se transforment les inégalités données quand on y remplace le signe $<$ ou $>$ par le signe $=$.

» Concevons maintenant que le nombre des variables x, y, z,... devienne supérieur à trois. Alors chaque système des valeurs de $x, y, z, \ldots$ déterminera ce que nous appellerons un *point analytique,* dont ces variables seront les *coordonnées,* et, à ce point, répondra une certaine valeur de chaque fonction de $x, y, z, \ldots$. De plus, si les diverses variables sont assujetties à diverses conditions représentées par des inégalités, les systèmes des valeurs de $x, y, z, \ldots$, pour lesquels ces conditions seront remplies, correspondront à divers points analytiques dont l'ensemble formera ce que nous appellerons un *lieu analytique*. Ce lieu sera d'ailleurs limité par des enveloppes analytiques dont les équations seront celles auxquelles se réduisent les inégalités données quand on y remplace le signe $<$ ou $>$ par le signe $=$.

» Nous appellerons encore *droite analytique* un système de *points analytiques* dont les diverses coordonnées s'exprimeront à l'aide de fonctions linéaires données de l'une d'entre elles. Enfin, la *distance* de deux points analytiques sera la racine carrée de la somme des carrés des différences entre les coordonnées correspondantes de ces deux points.

» La considération des points et des lieux analytiques fournit le moyen d'éclaircir un grand nombre de questions délicates, et spécialement celles qui se rapportent à la théorie des polynômes radicaux. Elle confirme et laisse subsister non-seulement les formules et propositions établies dans les Mémoires que j'ai présentés en 1830, et qui ont été publiés, soit dans le Bulletin de M. de Férussac, soit dans le Recueil des Mémoires de l'Académie; mais encore les formules et propositions que renferme mon Mémoire du 15 mars de cette année, sur les racines des équations algébriques à coefficients entiers, et même celles que contient le Mémoire présenté dans la séance du 22 mars, et dans les suivantes, et relatif à la théorie des polynômes radicaux, sauf toutefois quelques modifications que je vais indiquer.

» Soit ρ une racine primitive de l'équation

$$x^n = 1;$$

soit, de plus, $\mathrm{f}(\rho)$ un polynôme radical et à coefficients réels, représenté par une fonction linéaire des diverses puissances de ρ. La méthode du plus grand commun diviseur de deux polynômes radicaux à coefficients entiers, et par suite la théorie des polynômes radicaux, pourront être complétement établies, pour une valeur donnée du nombre n, s'il est prouvé que le polynôme $\mathrm{f}(\rho)$ peut toujours être décomposé en deux parties, dont l'une soit un polynôme radical à coefficients entiers, et dont l'autre corresponde à une factorielle Θ plus petite que l'unité, les coefficients demeurant finis. Il y a plus : quand il s'agira de fonder la méthode et la théorie en question, on pourra, conformément à l'observation que j'ai faite dans la séance du 5 avril, prendre pour Θ non plus la factorielle, mais le module même du polynôme $f(\rho)$, et substituer partout ce module à la factorielle que Θ représentait auparavant; en conséquence, il suffira de prouver que le polynôme $f(\rho)$ peut toujours être décomposé en deux parties, dont l'une soit un polynôme radical à coefficients entiers, et dont l'autre offre un module inférieur à l'unité, les coefficients demeurant finis.

» Or, en premier lieu, il résulte des principes exposés dans les divers paragraphes de mon dernier Mémoire, et spécialement dans le paragraphe 2, page 518, que la décomposition dont il s'agit pourra être effectuée pour un polynôme radical composé de trois ou quatre termes au plus. Pour des polynômes radicaux composés d'un nombre quelconque de termes, la même décomposition a été réduite à la solution d'un problème de *maximum* ou de *minimum*. Mais cette réduction suppose (page 518) que, parmi les diverses valeurs que peut acquérir Θ quand on fait croître ou décroître d'une ou de plusieurs unités les coefficients renfermés dans le polynôme $f(\rho)$, il y en a une inférieure à toutes les autres, et produite par des valeurs finies de ces coefficients. C'est ce qui aura lieu, par exemple, si, n étant égal à 3, le polynôme $f(\rho)$ se réduit, comme on peut alors le supposer, à un binôme de la forme $\alpha + 6\rho$. C'est ce qui aura encore lieu toutes les fois que Θ deviendra infiniment grand pour des valeurs infinies des coefficients renfermés dans le polynôme $f(\rho)$. Mais on conçoit que cette dernière condition pourrait n'être pas remplie, et alors la solution du second problème n'entraînerait pas nécessairement la solution du premier.

» Comme je le montrerai dans un prochain article, la considération des lieux analytiques est éminemment propre à guider le calculateur au milieu des difficultés que je viens de signaler.

» Dans la dernière séance, M. Liouville a parlé de travaux de M. Kummer, relatifs aux polynômes complexes. Le peu qu'il en a dit me persuade que les conclusions auxquelles M. Kummer est arrivé sont, au moins en partie, celles auxquelles je me trouve conduit moi-même par les considérations précédentes. Si M. Kummer a fait faire à la question quelques pas de plus, si même il était parvenu à lever tous les obstacles, j'applaudirais le premier au succès de ses efforts; car ce que nous devons surtout désirer, c'est que les travaux de tous les amis de la science concourent à faire connaître et à propager la vérité. »

ancien confrère. La demande de M. Laugier est exceptionnellement accordée par l'Académie.

Après la lecture du Mémoire de *M. Laugier*, M. **Seguier** demande la parole, et s'exprime ainsi :

« Les éloges si bien mérités qui viennent d'être publiquement donnés au grand cercle astronomique exécuté par Gambey, pour l'Observatoire, m'engagent à saisir cette occasion pour renouveler la prière à laquelle l'Académie tout entière s'est spontanément associée une première fois, je veux parler de la demande que l'Académie a bien voulu adresser à M. le Ministre de l'Instruction publique, pour obtenir de lui, dans l'intérêt des sciences, la publication de la méthode suivie par Gambey, pour diviser son admirable instrument. Cette méthode, vérifiée par une Commission désignée par vous, est consignée dans un paquet cacheté, déposé à votre Secrétariat par la veuve de notre illustre confrère; elle forme la partie la plus précieuse du modeste patrimoine laissé par le grand artiste à sa veuve et à son orpheline. »

L'Académie décide qu'une nouvelle Lettre sera écrite en son nom au Ministre de l'Instruction publique, conformément à la demande présentée par M. Seguier.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les clefs algébriques;*
par **M. Augustin Cauchy.**

« Considérons n polynômes A, B, C,... dont les divers termes soient proportionnels à certains facteurs α, β, γ,..., et concevons qu'en suivant les règles de la multiplication algébrique on multiplie ces divers polynômes l'un par l'autre. Dans le nouveau polynôme résultant de cette multiplication, chaque terme sera proportionnel à l'un des produits que l'on peut former avec les facteurs α, β, γ,... pris n à n; et l'on pourra d'ailleurs supposer que, dans chacun de ces produits, on a conservé la trace de l'ordre dans lequel les multiplications diverses ont été successivement effectuées. On pourra aussi concevoir que, dans le nouveau polynôme, on substitue à chacun de ces produits un nombre déterminé, ou plus généralement une quantité déterminée, deux quantités distinctes pouvant être substituées à deux produits distincts, dans le cas même où ces deux produits ne diffèrent entre eux que par l'ordre dans lequel sont rangés les divers facteurs. Ces conventions étant admises, nous désignerons les facteurs α, β, γ,... sous le nom de *clefs*, et les polynômes A, B, C,... qui les renferment, sous le nom de *facteurs symboliques* du produit ABC... définitivement obtenu. Les substitutions ou *transmutations*, qui consisteront à remplacer les produits des clefs prises n à n par certaines quantités, seront indiquées à l'aide du signe $\succeq$ que j'ai déjà employé dans un autre Mémoire; et il est clair que du système de ces transmutations dépendront la valeur et les propriétés du produit ABC.... Ajoutons qu'il suffira généralement d'intervertir l'ordre dans lequel sont rangés les facteurs A, B, C,... du produit ABC... pour altérer la valeur de ce même produit.

» Les clefs algébriques, telles que je viens de les définir, permettent de résoudre avec une grande facilité des questions d'analyse ou de mécanique, dans lesquelles l'application des méthodes ordinaires entraînerait de longs et pénibles calculs. C'est ce que je me propose de montrer, avec quelques détails, dans une suite de Mémoires que j'aurai l'honneur de présenter successivement à l'Académie. Pour donner une idée des résultats auxquels on est ainsi conduit, je me bornerai aujourd'hui à deux exemples. Je commencerai par faire voir que la théorie des clefs résout généralement le problème de l'élimination des inconnues entre plusieurs équations linéaires ou non linéaires; puis je montrerai comment s'introduisent dans le calcul trois clefs, correspondantes aux trois dimensions de l'espace, qui fournissent le moyen d'obtenir sous une forme très-simple la solution d'un grand nombre de problèmes de géométrie et de mécanique.

ANALYSE.

» Supposons d'abord qu'il s'agisse d'éliminer n inconnues x, y, z,... entre n équations dont les premiers membres sont des fonctions linéaires et homogènes de ces inconnues, les seconds membres étant réduits à zéro. Soient d'ailleurs A, B, C,... ce que deviennent ces premiers membres, quand on y remplace les n inconnues x, y, z,... par n clefs correspondantes α, β, γ,.... Enfin, concevons qu'après avoir multiplié ces clefs n à n, en tenant compte de l'ordre dans lequel les multiplications sont effectuées, on convienne, 1° de remplacer par zéro chaque produit dans lequel entre deux ou plusieurs fois une même clef; 2° de substituer toujours deux quantités égales aux signes près, mais affectées de signes contraires, à deux produits qui se déduisent l'un de l'autre à l'aide d'un échange opéré entre deux clefs. En d'autres termes, supposons que les n clefs α, β, γ,... soient assujetties aux transmutations de la forme

$$\alpha^2 \succeq 0, \quad \beta^2 \succeq 0, \ldots, \quad \beta\alpha \succeq -\alpha\beta, \quad \text{etc.,}$$

et à celles qui en dérivent. L'équation résultante de l'élimination des inconnues x, y, z,... entre les équations données, sera

$$ABC... = 0.$$

» On démontre aisément ce théorème, en partant de cette remarque très-simple, que les facteurs symboliques A, B, C,... jouissent des mêmes propriétés que possèdent les clefs α, β, γ,....

» Concevons à présent qu'il s'agisse d'éliminer l'inconnue x entre deux équations dont les degrés m et m' donnent pour somme le nombre n. Pour y parvenir, il suffira de recourir encore à l'intervention des n clefs α, β, γ,... assujetties aux conditions ci-dessus énoncées. En effet, en supposant ces clefs écrites à la suite les unes des autres dans l'ordre qu'indique l'alphabet, et le premier membre de chaque équation ordonné suivant les puissances ascendantes, ou suivant les puissances descendantes de x, cherchez tous les facteurs symboliques que l'on peut former en remplaçant dans le premier membre de la première équation les diverses puissances de x par $m+1$ termes consécutifs de la suite des clefs. Soient A, B, C,... les facteurs symboliques ainsi obtenus, et A', B', C',... ce que deviennent ces facteurs quand on remplace la première équation par la seconde. L'équation résultante de l'élimination sera la formule symbolique

$$ABC...A'B'C'... = 0.$$

On pourra d'ailleurs, sans altérer l'équation résultante, intervertir arbitrairement l'ordre des facteurs symboliques

$$A,\ B,\ C,...,\ A',\ B',\ C',....$$

» Pour montrer une application de ces formules, supposons qu'il s'agisse d'éliminer x entre les deux équations

$$a + bx + cx^2 = 0,$$
$$a' + b'x + c'x^2 = 0.$$

Alors il suffira d'introduire dans le calcul quatre clefs distinctes

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,$$

et, en posant

$$A = a\alpha + b\beta + c\gamma,\quad B = a\beta + b\gamma + c\delta,$$
$$A' = a'\alpha + b'\beta + c'\gamma,\quad B' = a'\beta + b'\gamma + c'\delta,$$

on obtiendra pour équation résultante la formule symbolique

$$AA'BB' = 0.$$

On aura d'ailleurs, en vertu des propriétés ci-dessus assignées aux clefs α, β, γ, δ,

$$AA' = (bc' - b'c)\beta\gamma + (ca' - c'a)\gamma\alpha + (ab' - a'b)\alpha\beta,$$
$$BB' = (bc' - b'c)\gamma\delta + (ca' - c'a)\delta\beta + (ab' - a'b)\beta\gamma,$$

par conséquent,

$$AA'BB' = K\alpha\beta\gamma\delta,$$

la valeur de K étant

$$K = (ab' - a'b)(bc' - b'c) - (ca' - c'a)^2,$$

et, puisque la quantité qu'on doit substituer au produit $\alpha\beta\gamma\delta$ peut être arbitrairement choisie, l'équation résultante sera simplement

$$K = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(ab' - a'b)(bc' - b'c) - (ca' - c'a)^2 = 0.$$

» Au reste, comme je l'expliquerai dans une prochaine séance, la théorie des clefs peut être appliquée de diverses manières à l'élimination, et réduit à de simples multiplications un grand nombre d'opérations algébriques, par exemple, la division algébrique, la recherche du plus grand commun diviseur de deux fonctions entières, etc. Elle fournit aussi, comme je le ferai voir, des démonstrations très-rapides des théorèmes sur les résultantes algébriques, et des méthodes très-expéditives pour la résolution des équations linéaires ou non linéaires, à une ou à plusieurs inconnues.

» Concevons, maintenant, que l'on trace dans l'espace trois axes coordonnés rectangulaires ou obliques des x, y, z, qui partent d'un point fixe O; et soient

$$\bar{r},\ \bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z}$$

des quantités géométriques qui représentent : 1° le rayon vecteur mené de l'origine O à un autre point A; 2° les projections de ce rayon vecteur sur les axes. La première de ces quatre quantités géométriques sera la somme des trois autres, en sorte qu'on aura

$$\bar{r} = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}.$$

Soient d'ailleurs h, i, j ce que deviennent les quantités géométriques $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, quand, la longueur de chacune d'elles étant réduite à l'unité, elles se mesurent toutes trois dans les directions des coordonnées positives. En nommant x, y, z les projections algébriques du rayon vecteur $\bar{r}$ sur les axes coordonnés, on aura

$$\bar{x} = \mathrm{h}x, \quad \bar{y} = \mathrm{i}y, \quad \bar{z} = \mathrm{j}z,$$

et, par suite,

$$\bar{r} = \mathrm{h}x + \mathrm{i}y + \mathrm{j}z.$$

Pareillement, si A' est un second point distinct de A, et si l'on nomme $\bar{r}'$, x', y', z' ce que deviennent $\bar{r}$, x, y, z quand on substitue le second point au premier, on aura

$$\bar{r}' = \mathrm{h}x' + \mathrm{i}y' + \mathrm{j}z'.$$

Si, maintenant, on multiplie l'une par l'autre les valeurs précédentes de $\bar{r}$ et de $\bar{r}'$, en suivant les règles de la multiplication algébrique, le résultat de l'opération ne pourra évidemment acquérir un sens déterminé qu'en vertu d'une convention nouvelle servant à définir ce qu'on doit entendre par le produit de deux quantités géométriques dirigées dans l'espace suivant des droites quelconques. Concevons, pour fixer les idées, que l'on traite les trois quantités géométriques h, i, j, comme des clefs auxquelles on attribuerait les propriétés précédemment énoncées. Les carrés et les produits de ces quantités géométriques devront satisfaire aux six équations symboliques

$$\mathrm{h}^2 = 0, \quad \mathrm{i}^2 = 0, \quad \mathrm{j}^2 = 0,$$
$$\mathrm{ji} = -\mathrm{ij}, \quad \mathrm{hj} = -\mathrm{jh}, \quad \mathrm{ih} = -\mathrm{hi},$$

et l'on aura, par suite,

$$\bar{r}\bar{r}' = \mathrm{ij}\,(yz' - y'z) + \mathrm{jh}\,(zx' - z'x) + \mathrm{hi}\,(xy' - x'y).$$

Or les trois différences

$$yz' - y'z, \quad zx' - z'x, \quad xy' - x'y,$$

sont les projections algébriques du moment linéaire de la longueur $\bar{r}'$ transportée parallèlement à elle-même, de manière qu'elle parte non plus du point O, mais du point A. Donc le produit $\bar{r}\bar{r}'$ représentera ce moment linéaire, si l'on assujettit les quantités géométriques h, i, j non-seulement aux six équations symboliques ci-dessus écrites, mais encore aux trois suivantes :

$$\mathrm{ij} = \mathrm{h}, \quad \mathrm{jh} = \mathrm{i}, \quad \mathrm{hi} = \mathrm{j}.$$

Alors on aura simplement

$$\bar{r}\bar{r}' = \mathrm{h}\,(yz' - y'z) + \mathrm{i}\,(zx' - z'x) + \mathrm{j}\,(xy' - x'y).$$

Le produit $\bar{r}\bar{r}'$, déterminé par la formule précédente, est ce qu'on peut appeler le *produit angulaire* des longueurs $\bar{r}$ et $\bar{r}'$. Il change de signe quand on intervertit l'ordre des facteurs, et représente alors le moment linéaire de la longueur $\bar{r}$ mesurée à partir du point A'. Si l'on considérait ce même produit comme propre à représenter non plus une longueur, mais une surface, il deviendrait ce que M. de Saint-Venant a nommé *produit géométrique*, dans un Mémoire où il a déduit de la considération de ce produit des conséquences qui méritent d'être remarquées.

» Dans un autre article, j'expliquerai les avantages que présente, en mécanique, l'emploi des trois clefs h, i, j, quand on veut substituer, ce qui est souvent utile, des axes mobiles à des axes fixes.

» Je remarquerai, en finissant, que la théorie des *imaginaires*, prise au point de vue sous lequel je l'ai envisagée dans mon *Analyse algébrique*, et la théorie des *quaternia* de M. Hamilton, sont des cas spéciaux de la théorie des clefs auxquels on arrive, en supposant l'une des clefs réduite à l'unité. Ainsi, en particulier, l'expression imaginaire

$$a + b\,\mathrm{i}$$

pourrait être considérée comme un facteur symbolique, dans lequel la première clef se réduirait à l'unité, la seconde clef i étant assujettie à la condition

$$\mathrm{i}^2 \;\underline{\underline{\smile}}\; -1. \text{ »}$$

MÉCANIQUE. — *Sur la théorie des moments linéaires et sur les moments linéaires des divers ordres; par* **M. Augustin Cauchy.**

« J'ai développé, depuis plus d'un quart de siècle, non-seulement dans mes *Exercices de Mathématiques*, mais aussi dans mes leçons données à l'École Polytechnique et à la Faculté des Sciences, la théorie des *moments linéaires*. Comme j'en ai fait la remarque, cette théorie se lie intimement, d'un côté, à la théorie des *moments* des forces, pris par rapport à un point fixe, et représentés par des surfaces planes, de l'autre, à la théorie des *couples* établie par M. Poinsot. Elle a d'ailleurs l'avantage de s'appliquer non-seulement aux forces, mais encore à toutes les quantités qui ont pour mesure des longueurs portées sur des droites dans des directions détermide l'heureuse application que l'on a faite aux États-Unis, sur une très-grande échelle, de la télégraphie électrique à la détermination des longitudes; mais il m'a paru que ces procédés seraient notablement perfectionnés par l'intervention de la photographie. C'est ce qui m'a engagé, il y a quatre ans déjà, à proposer un système dont on peut lire les détails dans le XXVIII^{e} tome des *Comptes rendus*, aux pages 243 et 244. Je n'ai pu, il est vrai, soumettre ces idées à l'épreuve de la pratique; pour les juger, il faudrait quelques expériences préalables, mais je suis convaincu que ces essais seront faits tôt ou tard, parce que l'idée répond à un besoin réel, à une lacune grave dans l'art d'observer.

» Je termine par les remarques suivantes : pour mesurer ces quatre-vingt-six latitudes, ces quatre-vingt-six longitudes, ces quatre-vingt-six azimuts absolus, et pour rattacher les stations au réseau général, aucun instrument météorologique n'est nécessaire; car la réfraction se trouve entièrement éliminée dans ce système d'observations. Il serait pourtant utile de tenir note de leurs indications afin de satisfaire au vœu, depuis longtemps exprimé, de comparer les altitudes géodésiques à un nivellement barométrique complet. Quant aux déclinaisons absolues des nombreuses petites étoiles qu'il faudrait employer, leur détermination précise deviendrait un digne sujet d'émulation entre les observatoires nationaux et étrangers; tous s'empresseraient certainement de prêter à cette œuvre un concours actif; et je conserve l'espoir qu'il résulterait de tous ces travaux un notable progrès dans la *mesure des parallaxes stellaires.* »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les clefs algébriques; par* **M. AUGUSTIN CAUCHY**. (Suite.)

« Les *clefs algébriques*, telles que je les ai définies, peuvent être considérées comme des quantités véritables. Mais ce sont des quantités dont le rôle est spécial et transitoire, des quantités qui n'apparaissent que passagèrement dans les formules où leurs produits sont définitivement remplacés par d'autres quantités qui n'ont avec elles aucune relation, aucune liaison nécessaire. Elles méritent doublement le nom de clefs, puisqu'elles ouvrent la porte en quelque sorte, non-seulement au calculateur dont elles guident la marche et facilitent les recherches, mais encore aux quantités nouvelles qui, se glissant à leur suite, viennent s'emparer de postes où elles puissent utilement concourir à la démonstration des théorèmes ou à la solution des problèmes que l'on a en vue. C'est ce que l'on a pu déjà reconnaître, en lisant l'article inséré dans le *Compte rendu* de la dernière séance, et ce que je vais confirmer par de nouveaux exemples.

» Considérons d'abord n variables distinctes x, y, z,..., w liées entre elles par une équation de la forme

$$ax + by + cz + \ldots + hw = k. \tag{1}$$

Si l'on attribue successivement aux constantes que renferme la formule (1), n systèmes distincts de valeurs, indiqués à l'aide des indices

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n,$$

placés au bas des lettres a, b, c,..., h, k, on obtiendra, entre les inconnues x, y, z,..., w, les équations linéaires

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + h_1 w = k_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + h_2 w = k_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n x + b_n y + c_n z + \ldots + h_n w = k_n, \end{array}\right. \tag{2}$$

qui suffiront généralement pour déterminer ces inconnues ; et si l'on combine entre elles par voie d'addition les équations (2), respectivement multipliées par les n facteurs

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots,\ \eta,$$

on obtiendra une nouvelle équation linéaire de la forme

$$Ax + By + Cz + \ldots + Hw = K, \tag{3}$$

A, B, C,..., H, K désignant n fonctions linéaires de α, β, γ,..., η. On aura, par exemple,

$$A = a_1 \alpha + a_2 \beta + a_3 \gamma + \ldots + a_n \eta,$$

et pour obtenir B, C, H,..., K, il suffira de substituer à la lettre a, dans le second membre de la formule précédente, la lettre b, ou c,.... D'ailleurs, les facteurs α, β, γ,..., η étant complétement arbitraires, il en résulte que l'équation (3) peut remplacer à elle seule le système des équations (2). J'ajoute que, si l'on considère ces facteurs comme des clefs assujetties aux transmutations de la forme

$$\alpha^2 \mathrel{\underline{\smile}} 0, \ldots, \quad \beta\alpha \mathrel{\underline{\smile}} -\alpha\beta, \ldots, \tag{4}$$

on pourra,, de l'équation (3), déduire immédiatement, à l'aide d'une simple multiplication algébrique, la valeur de chacune des inconnues x,

y, z,..., w. Alors, en effet, les polynômes A, B, C,..., H, K, jouissant des mêmes propriétés que les facteurs α, β, γ,..., η, satisferont aux conditions de la forme

$$(5) \qquad A^2 = 0,\ldots, \quad BA = -AB,\ldots,$$

et en multipliant les deux membres de l'équation (3) par le produit symbolique $BC\ldots H$, on trouvera

$$BC\ldots HAx = BC\ldots HK,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(6) \qquad ABC\ldots Hx = KBC\ldots H.$$

On aura donc

$$(7) \qquad x = \frac{KBC\ldots H}{ABC\ldots H}.$$

» En déterminant de la même manière y, z,..., on obtiendrait pour valeurs des inconnues celles que donnent les formules symboliques

$$(8) \qquad x = \frac{KBC\ldots H}{ABC\ldots H}, \quad y = \frac{AKC\ldots H}{ABC\ldots H}, \quad z = \frac{ABK\ldots H}{ABC\ldots H}, \quad \text{etc.}$$

Mais il est bon d'observer qu'après avoir déterminé x, on pourra simplifier la recherche des valeurs de y, z,... en les tirant de la formule (3) multipliée, non plus par le produit $BC\ldots H$, mais par ceux qu'on en déduit, quand on supprime le facteur B, ou les deux facteurs BC,..., etc. Il y a plus; en admettant que l'on suive cette marche, on pourra réduire à zéro, une clef dans la valeur de y, deux clefs dans la valeur de z,..., et comme on pourra choisir arbitrairement les clefs auxquelles ces réductions seront appliquées, il est clair que le calcul pourra s'effectuer de diverses manières, ce qui fournira un grand nombre de vérifications des résultats obtenus. Supposons, pour fixer les idées, que les inconnues x, y, z soient au nombre de trois. Leurs valeurs pourront être tirées des formules symboliques

$$(9) \qquad x = \frac{KBC}{ABC}, \quad y = \frac{KC - ACx}{BC}, \quad z = \frac{K - Ax - By}{C};$$

d'ailleurs, on pourra réduire à zéro une clef dans la valeur de y, et deux clefs dans la valeur de z.

» Concevons à présent que les seconds membres des équations (1) s'évanouissent; alors entre les équations réduites aux formules

$$(10)\quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + h_1 w = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + h_2 w = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n x + b_n y + c_n z + \ldots + h_n w = 0, \end{cases}$$

on pourra éliminer les variables x, y, z,..., et l'on obtiendra ainsi une équation de condition entre les coefficients représentés par les divers termes du tableau

$$(11)\quad \begin{cases} a_1,\ b_1,\ c_1,\ldots,\ h_1, \\ a_2,\ b_2,\ c_2,\ldots,\ h_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n,\ b_n,\ c_n,\ldots,\ h_n. \end{cases}$$

Alors aussi la formule (6) sera réduite à

$$ABC\ldots Hx = 0;$$

et comme elle devra se vérifier, quel que soit x, il est clair que la formule

$$(12)\quad ABC\ldots H = 0$$

sera précisément l'équation résultante de l'élimination des variables x, y, z,..., w entre les équations (10). Enfin, comme on aura encore

$$(13)\quad ABC\ldots H = \alpha\beta\gamma\ldots\eta\, \mathrm{S}(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots h_n),$$

on tirera de l'équation (12), en y posant, comme on peut le faire, $\alpha\beta\gamma\ldots\eta = 1$,

$$(14)\quad \mathrm{S}(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots h_n) = 0.$$

On peut remarquer d'ailleurs que le premier membre de la formule (14), c'est-à-dire la *résultante algébrique* des divers termes du tableau (11) demeure invariable, tandis que dans ce tableau on échange entre elles les colonnes horizontales et verticales. Donc l'équation (13) continuera de subsister si l'on suppose les valeurs de A, B, C,... déterminées par les formules

$$(15)\quad \begin{cases} A = a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma + \ldots + h_1\eta, \\ B = a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma + \ldots + h_2\eta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K = a_n\alpha + b_n\beta + c_n\gamma + \ldots + h_n\eta; \end{cases}$$

et l'on peut énoncer la proposition suivante :

» 1^{er} *Théorème.* Si l'on élimine n variables $x, y, z, \ldots, w$ entre n équations dont les premiers membres soient des fonctions linéaires et homogènes de ces variables, il suffira, pour obtenir l'équation résultante, d'égaler à zéro le produit des premiers membres des équations données, et de considérer les variables $x, y, z, \ldots, w$ comme des clefs assujetties aux transmutations de la forme

$$x^2 \,\underline{\underline{\smile}}\, 0, \ldots, \quad xy \,\underline{\underline{\smile}}\, -xy, \ldots,$$

» Revenons maintenant aux équations (1); supposons que, dans les premiers membres de ces équations, on attribue successivement aux variables

$$x, \; y, \; z, \ldots, \; w$$

n systèmes distincts de valeurs, indiqués à l'aide des indices

$$1, \; 2, \; 3, \ldots, \; n,$$

placés en bas des lettres qui représentent ces variables, et nommons $k_{l,m}$ ce que devient k_l, quand on y pose

$$x = x_m, \quad y = y_m, \quad z = z_m, \ldots, \quad w = w_m.$$

A la place de la formule (3), on obtiendra n équations de la forme

$$(16) \qquad \begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + \ldots + Hw_1 = K_1, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + \ldots + Hw_2 = K_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Ax_n + By_n + Cz_n + \ldots + Hw_n = K_n, \end{cases}$$

les valeurs de $K_1, K_2, \ldots, K_n$ étant déterminées par les formules

$$(17) \qquad \begin{cases} K_1 = k_{1,1}\alpha + k_{2,1}\beta + k_{3,1}\gamma + \ldots + k_{n,1}\eta, \\ K_2 = k_{1,2}\alpha + k_{2,2}\beta + k_{3,2}\gamma + \ldots + k_{n,2}\eta, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_n = k_{1,n}\alpha + k_{2,n}\beta + k_{3,n}\gamma + \ldots + k_{n,n}\eta. \end{cases}$$

D'ailleurs, si aux facteurs symboliques $A, B, C, \ldots, H$, dont les valeurs sont données par les formules (15), on substitue les facteurs $K_1, K_2, \ldots, K_n$, dont les valeurs sont données par les formules (17), on obtiendra, en formant le produit de ces facteurs symboliques, non plus la formule (13), mais la suivante :

$$(18) \qquad K_1 K_2 \ldots K_n = \alpha\beta\gamma\ldots\eta \, \mathrm{S}(\pm k_{1,1} k_{2,2} k_{3,3} \ldots k_{n,n}),$$

dans laquelle l'expression $S(\pm k_{1,1}\, k_{2,2}\, k_{3,3} \ldots k_{n,n})$ est la résultante algébrique des divers termes du tableau

$$(19)\qquad \begin{cases} k_{1,1}, & k_{2,1}, & k_{3,1},\ldots, & k_{n,1}, \\ k_{1,2}, & k_{2,2}, & k_{3,2},\ldots, & k_{n,2}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{1,n}, & k_{2,n}, & k_{3,n},\ldots, & k_{n,n}, \end{cases}$$

le signe S pouvant être censé relatif à l'un quelconque des deux systèmes d'indices; et puisque les facteurs symboliques A, B, C,..., H vérifient les conditions (5), on tirera encore des formules (16),

$$(20)\qquad ABC\ldots H\, S(\pm x_1 y_2 z_3 \ldots w_n) = K_1 K_2 K_3 \ldots K_n.$$

Si, dans cette dernière formule, on substitue les valeurs des produits $ABC\ldots H$, $K_1 K_2 K_3 \ldots K_n$ fournies par les équations (13) et (18), et si, dans l'équation nouvelle ainsi obtenue, on suppose, pour plus de simplicité,

$$\alpha\beta\gamma\ldots\eta = 1,$$

on trouvera

$$(21)\qquad S(a_1 b_2 c_3 \ldots h_n)\, S(\pm x_1 y_2 z_3 \ldots w_n) = S(\pm k_{1,1}\, k_{2,2}\, k_{3,3} \ldots k_{n,n}).$$

On sera ainsi ramené, par la considération des produits symboliques, à un théorème que j'ai démontré dans le XVIIe cahier du *Journal de l'École Polytechnique* [*], et que l'on peut énoncer comme il suit :

» 2e *Théorème*. Le produit de deux résultantes algébriques est encore une résultante algébrique.

» Pour mettre en évidence les avantages que présente l'intervention des clefs dans les applications numériques, supposons que l'on se propose de résoudre les trois équations

$$(22)\qquad \begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ 3x + y + 2z = 3, \\ 2x + 3y + z = 5. \end{cases}$$

De ces équations respectivement multipliées par α, β, γ, puis combinées entre elles par voie d'addition, l'on tirera

$$(23)\qquad Ax + By + Cz = K,$$

[*] *Voir* aussi dans le même cahier un Mémoire de M. Binet.

les valeurs de A, B, C, K étant

$$(24)\quad \begin{cases} A = \alpha + 3\beta + 2\gamma, \quad B = 2\alpha + \beta + 3\gamma, \quad C = 3\alpha + 2\beta + \gamma, \\ K = \alpha + 3\beta + 5\gamma, \end{cases}$$

puis en considérant α, β, γ comme des clefs assujetties aux conditions de la forme

$$\alpha^2 \smile 0, \ldots, \quad \beta\alpha \smile -\alpha\beta, \ldots,$$

on tirera immédiatement de l'équation (23) multipliée par le produit BC la valeur de l'inconnue x. Effectivement, dans cette hypothèse, les formules (24) donneront

$$BC = -5\beta\gamma + 7\gamma\alpha + \alpha\beta;$$

et, par suite, en posant, pour abréger,

$$\alpha\beta\gamma \smile 1,$$

on trouvera

$$ABC = -1.5 + 3.7 + 2.1 = 18,$$
$$KBC = -1.5 + 3.7 + 5.1 = 21,$$
$$x = \frac{KBC}{ABC} = \frac{21}{18} = \frac{7}{6}.$$

La valeur de x étant ainsi obtenue, on déduira immédiatement de la formule (23) multipliée par le seul facteur C la valeur de y, et l'on pourra même, dans la détermination de y, réduire à zéro l'une quelconque des trois clefs α, β, γ. En prenant, pour fixer les idées, $\gamma = 0$, on tirera des formules (24)

$$(25)\quad \begin{cases} A = \alpha + 3\beta, \quad B = 2\alpha + \beta, \quad C = 3\alpha + 2\beta, \\ K = A, \end{cases}$$

puis, en posant, pour abréger,

$$\alpha\beta \smile 1,$$

on trouvera

$$BC = 1, \quad AC = KC = -7,$$
$$y = \frac{AC}{BC}(1 - x) = -7(1 - x) = \frac{7}{6} = x.$$

Enfin, l'on tirera de la formule (23), en réduisant à zéro deux clefs, par exemple α et β,

$$z = 5 - 2x - 3y = 5(1 - x) = -\frac{5}{6}.$$

On aura donc, en définitive,

$$(26)\qquad x = y = \frac{7}{6}, \quad z = -\frac{5}{6}.$$

» Remarquons d'ailleurs qu'en appliquant l'équation (23) à la détermination des inconnues x, y, z, on peut choisir arbitrairement, 1° l'ordre dans lequel on déterminera ces inconnues; 2° l'ordre dans lequel on multipliera les facteurs symboliques des produits $\overline{ABC}$, $\overline{KBC}$...; 3° les clefs que l'on fera évanouir dans les valeurs des inconnues y et z. Il y aura donc un grand nombre de manières différentes d'effectuer le calcul; mais quelle que soit celle que l'on adopte, on sera toujours conduit au même résultat. Ainsi, par exemple, si dans la détermination de y on pose, non plus $\gamma = 0$, mais $\beta = 0$, on trouve

$$A = \alpha + 2\gamma, \quad B = 2\alpha + 3\gamma, \quad C = 3\alpha + \gamma,$$
$$K = \alpha + 5\gamma,$$

puis, en posant, pour abréger, $\overline{\gamma\alpha} = 1$, on trouvera

$$\overline{BC} = 7, \quad \overline{AC} = 5, \quad \overline{KC} = 14,$$
$$y = \frac{\overline{KC} - \overline{AC}x}{\overline{BC}} = \frac{14 - 5x}{7} = \frac{7}{6}.$$

» Dans un prochain article, je montrerai les avantages que présente l'emploi des clefs algébriques dans la résolution des équations non linéaires. »

MÉMOIRES LUS.

GÉOLOGIE. — *Note sur le soulèvement des Apennins; par* **M. Ponzi**, professeur d'Anatomie comparée à Rome; *avec une addition, par* **M. Rozet.** (Extrait par M. Rozet.)

(Commissaires, MM. Élie de Beaumont, Dufrénoy, Constant Prevost.)

« Il résulte de tous les faits consignés dans la Note de M. Ponzi, et constatés par ses observations, celles de MM. Murchison, Meneghini, Savi et Spada :

» 1°. Que, dans l'Apennin, les schistes, avec leurs calcaires, et les grès, macignos, contenant des Fucoïdes, Nummulites et autres fossiles tertiaires, appartiennent aux étages *éocène* et *miocène;*

» 2°. Que les strates de ces roches, toujours parallèles entre eux, passent