Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels

COMPTE RENDU

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 24 MAI 1847.

PRÉSIDENCE DE M. ADOLPHE BRONGNIART.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur les lieux analytiques; par* M. AUGUSTIN CAUCHY.

« Considérons plusieurs variables x, y, z,... et diverses fonctions explicites u, v, w,... de ces mêmes variables. A chaque système de valeurs des variables x, y, z,... correspondra généralement une valeur déterminée de chacune des fonctions u, v, w,... Si d'ailleurs les variables x, y, z,... sont au nombre de deux ou trois seulement, elle pourront être censées représenter les coordonnées rectangulaires d'un point situé dans un plan ou dans l'espace, et, par suite, chaque système de valeurs des variables pourra être censé correspondre à un point déterminé. Enfin, si les variables x, y, ou x, y, z, sont assujetties à certaines conditions représentées par certaines inégalités, les divers systèmes de valeurs de x, y, z, pour lesquels ces conditions seront remplies, correspondront à divers points d'un certain lieu; et les lignes ou les surfaces qui limiteront ce lieu dans le plan dont il s'agit, ou dans l'espace, seront représentées par les équations dans lesquelles se transforment les inégalités données quand on y remplace le signe $<$ ou $>$ par le signe $=$.

» Concevons maintenant que le nombre des variables x, y, z,... devienne supérieur à trois. Alors chaque système des valeurs de x, y, z,... déterminera ce que nous appellerons un *point analytique,* dont ces variables seront les *coordonnées,* et, à ce point, répondra une certaine valeur de chaque fonction de x, y, z,.... De plus, si les diverses variables sont assujetties à diverses conditions représentées par des inégalités, les systèmes des valeurs de x, y, z,..., pour lesquels ces conditions seront remplies, correspondront à divers points analytiques dont l'ensemble formera ce que nous appellerons un *lieu analytique*. Ce lieu sera d'ailleurs limité par des enveloppes analytiques dont les équations seront celles auxquelles se réduisent les inégalités données quand on y remplace le signe $<$ ou $>$ par le signe $=$.

» Nous appellerons encore *droite analytique* un système de *points analytiques* dont les diverses coordonnées s'exprimeront à l'aide de fonctions linéaires données de l'une d'entre elles. Enfin, la *distance* de deux points analytiques sera la racine carrée de la somme des carrés des différences entre les coordonnées correspondantes de ces deux points.

» La considération des points et des lieux analytiques fournit le moyen d'éclaircir un grand nombre de questions délicates, et spécialement celles qui se rapportent à la théorie des polynômes radicaux. Elle confirme et laisse subsister non-seulement les formules et propositions établies dans les Mémoires que j'ai présentés en 1830, et qui ont été publiés, soit dans le Bulletin de M. de Férussac, soit dans le Recueil des Mémoires de l'Académie; mais encore les formules et propositions que renferme mon Mémoire du 15 mars de cette année, sur les racines des équations algébriques à coefficients entiers, et même celles que contient le Mémoire présenté dans la séance du 22 mars, et dans les suivantes, et relatif à la théorie des polynômes radicaux, sauf toutefois quelques modifications que je vais indiquer.

» Soit ρ une racine primitive de l'équation

$$x^n = 1;$$

soit, de plus, $f(\rho)$ un polynôme radical et à coefficients réels, représenté par une fonction linéaire des diverses puissances de ρ. La méthode du plus grand commun diviseur de deux polynômes radicaux à coefficients entiers, et par suite la théorie des polynômes radicaux, pourront être complétement établies, pour une valeur donnée du nombre n, s'il est prouvé que le polynôme $f(\rho)$ peut toujours être décomposé en deux parties, dont l'une soit un polynôme radical à coefficients entiers, et dont l'autre corresponde à une factorielle Θ plus petite que l'unité, les coefficients demeurant finis. Il y a plus: quand il s'agira de fonder la méthode et la théorie en question, on pourra, conformément à l'observation que j'ai faite dans la séance du 5 avril, prendre pour Θ non plus la factorielle, mais le module même du polynôme $f(\rho)$, et substituer partout ce module à la factorielle que Θ représentait auparavant; en conséquence, il suffira de prouver que le polynôme $f(\rho)$ peut toujours être décomposé en deux parties, dont l'une soit un polynôme radical à coefficients entiers, et dont l'autre offre un module inférieur à l'unité, les coefficients demeurant finis.

» Or, en premier lieu, il résulte des principes exposés dans les divers paragraphes de mon dernier Mémoire, et spécialement dans le paragraphe 2, page 518, que la décomposition dont il s'agit pourra être effectuée pour un polynôme radical composé de trois ou quatre termes au plus. Pour des polynômes radicaux composés d'un nombre quelconque de termes, la même décomposition a été réduite à la solution d'un problème de *maximum* ou de *minimum*. Mais cette réduction suppose (page 518) que, parmi les diverses valeurs que peut acquérir Θ quand on fait croître ou décroître d'une ou de plusieurs unités les coefficients renfermés dans le polynôme $f(\rho)$, il y en a une inférieure à toutes les autres, et produite par des valeurs finies de ces coefficients. C'est ce qui aura lieu, par exemple, si, n étant égal à 3, le polynôme $f(\rho)$ se réduit, comme on peut alors le supposer, à un binôme de la forme $\alpha + \text{ϐ}\rho$. C'est ce qui aura encore lieu toutes les fois que Θ deviendra infiniment grand pour des valeurs infinies des coefficients renfermés dans le polynôme $f(\rho)$. Mais on conçoit que cette dernière condition pourrait n'être pas remplie, et alors la solution du second problème n'entraînerait pas nécessairement la solution du premier.

» Comme je le montrerai dans un prochain article, la considération des lieux analytiques est éminemment propre à guider le calculateur au milieu des difficultés que je viens de signaler.

» Dans la dernière séance, M. Liouville a parlé de travaux de M. Kummer, relatifs aux polynômes complexes. Le peu qu'il en a dit me persuade que les conclusions auxquelles M. Kummer est arrivé sont, au moins en partie, celles auxquelles je me trouve conduit moi-même par les considérations précédentes. Si M. Kummer a fait faire à la question quelques pas de plus, si même il était parvenu à lever tous les obstacles, j'applaudirais le premier au succès de ses efforts; car ce que nous devons surtout désirer, c'est que les travaux de tous les amis de la science concourent à faire connaître et à propager la vérité. »