Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels

de l'heureuse application que l'on a faite aux États-Unis, sur une très-grande échelle, de la télégraphie électrique à la détermination des longitudes; mais il m'a paru que ces procédés seraient notablement perfectionnés par l'intervention de la photographie. C'est ce qui m'a engagé, il y a quatre ans déjà, à proposer un système dont on peut lire les détails dans le XXVIII^e tome des *Comptes rendus*, aux pages 243 et 244. Je n'ai pu, il est vrai, soumettre ces idées à l'épreuve de la pratique; pour les juger, il faudrait quelques expériences préalables, mais je suis convaincu que ces essais seront faits tôt ou tard, parce que l'idée répond à un besoin réel, à une lacune grave dans l'art d'observer.

» Je termine par les remarques suivantes : pour mesurer ces quatre-vingt-six latitudes, ces quatre-vingt-six longitudes, ces quatre-vingt-six azimuts absolus, et pour rattacher les stations au réseau général, aucun instrument météorologique n'est nécessaire; car la réfraction se trouve entièrement éliminée dans ce système d'observations. Il serait pourtant utile de tenir note de leurs indications afin de satisfaire au vœu, depuis longtemps exprimé, de comparer les altitudes géodésiques à un nivellement barométrique complet. Quant aux déclinaisons absolues des nombreuses petites étoiles qu'il faudrait employer, leur détermination précise deviendrait un digne sujet d'émulation entre les observatoires nationaux et étrangers; tous s'empresseraient certainement de prêter à cette œuvre un concours actif; et je conserve l'espoir qu'il résulterait de tous ces travaux un notable progrès dans la *mesure des parallaxes stellaires.* »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les clefs algébriques; par* **M. Augustin Cauchy**. (Suite.)

« Les *clefs algébriques*, telles que je les ai définies, peuvent être considérées comme des quantités véritables. Mais ce sont des quantités dont le rôle est spécial et transitoire, des quantités qui n'apparaissent que passagèrement dans les formules où leurs produits sont définitivement remplacés par d'autres quantités qui n'ont avec elles aucune relation, aucune liaison nécessaire. Elles méritent doublement le nom de clefs, puisqu'elles ouvrent la porte en quelque sorte, non-seulement au calculateur dont elles guident la marche et facilitent les recherches, mais encore aux quantités nouvelles qui, se glissant à leur suite, viennent s'emparer de postes où elles puissent utilement concourir à la démonstration des théorèmes ou à la solution des problèmes que l'on a en vue. C'est ce que l'on a pu déjà reconnaître, en lisant l'article inséré dans le *Compte rendu* de la dernière séance, et ce que je vais confirmer par de nouveaux exemples.

» Considérons d'abord n variables distinctes x, y, z,..., w liées entre elles par une équation de la forme

$$ax + by + cz + \ldots + hw = k. \tag{1}$$

Si l'on attribue successivement aux constantes que renferme la formule (1), n systèmes distincts de valeurs, indiqués à l'aide des indices

$$1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n,$$

placés au bas des lettres a, b, c,..., h, k, on obtiendra, entre les inconnues x, y, z,..., w, les équations linéaires

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + h_1 w = k_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + h_2 w = k_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n x + b_n y + c_n z + \ldots + h_n w = k_n, \end{array}\right. \tag{2}$$

qui suffiront généralement pour déterminer ces inconnues ; et si l'on combine entre elles par voie d'addition les équations (2), respectivement multipliées par les n facteurs

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots,\ \eta,$$

on obtiendra une nouvelle équation linéaire de la forme

$$Ax + By + Cz + \ldots + Hw = K, \tag{3}$$

A, B, C,..., H, K désignant n fonctions linéaires de α, β, γ,..., η. On aura, par exemple,

$$A = a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma + \ldots + a_n\eta,$$

et pour obtenir B, C, H,..., K, il suffira de substituer à la lettre a, dans le second membre de la formule précédente, la lettre b, ou c,.... D'ailleurs, les facteurs α, β, γ,..., η étant complétement arbitraires, il en résulte que l'équation (3) peut remplacer à elle seule le système des équations (2). J'ajoute que, si l'on considère ces facteurs comme des clefs assujetties aux transmutations de la forme

$$\alpha^2 \,\underline{\underline{\smile}}\, 0,\ldots, \quad \beta\alpha \,\underline{\underline{\smile}}\, -\alpha\beta,\ldots, \tag{4}$$

on pourra,, de l'équation (3), déduire immédiatement, à l'aide d'une simple multiplication algébrique, la valeur de chacune des inconnues x,

y, z,..., w. Alors, en effet, les polynômes A, B, C,..., H, K, jouissant des mêmes propriétés que les facteurs α, β, γ,..., η, satisferont aux conditions de la forme

$$(5) \qquad A^2 = 0,\ldots, \quad BA = -AB,\ldots,$$

et en multipliant les deux membres de l'équation (3) par le produit symbolique $BC\ldots H$, on trouvera

$$BC\ldots HAx = BC\ldots HK,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(6) \qquad ABC\ldots Hx = KBC\ldots H.$$

On aura donc

$$(7) \qquad x = \frac{KBC\ldots H}{ABC\ldots H}.$$

» En déterminant de la même manière y, z,..., on obtiendrait pour valeurs des inconnues celles que donnent les formules symboliques

$$(8) \qquad x = \frac{KBC\ldots H}{ABC\ldots H}, \quad y = \frac{AKC\ldots H}{ABC\ldots H}, \quad z = \frac{ABK\ldots H}{ABC\ldots H}, \quad \text{etc.}$$

Mais il est bon d'observer qu'après avoir déterminé x, on pourra simplifier la recherche des valeurs de y, z,... en les tirant de la formule (3) multipliée, non plus par le produit $BC\ldots H$, mais par ceux qu'on en déduit, quand on supprime le facteur B, ou les deux facteurs BC,..., etc. Il y a plus; en admettant que l'on suive cette marche, on pourra réduire à zéro, une clef dans la valeur de y, deux clefs dans la valeur de z,..., et comme on pourra choisir arbitrairement les clefs auxquelles ces réductions seront appliquées, il est clair que le calcul pourra s'effectuer de diverses manières, ce qui fournira un grand nombre de vérifications des résultats obtenus. Supposons, pour fixer les idées, que les inconnues x, y, z soient au nombre de trois. Leurs valeurs pourront être tirées des formules symboliques

$$(9) \qquad x = \frac{KBC}{ABC}, \quad y = \frac{KC - ACx}{BC}, \quad z = \frac{K - Ax - By}{C};$$

d'ailleurs, on pourra réduire à zéro une clef dans la valeur de y, et deux clefs dans la valeur de z.

» Concevons à présent que les seconds membres des équations (1) s'évanouissent; alors entre les équations réduites aux formules

$$(10)\quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + h_1 w = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + h_2 w = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n x + b_n y + c_n z + \ldots + h_n w = 0, \end{cases}$$

on pourra éliminer les variables $x, y, z, \ldots$, et l'on obtiendra ainsi une équation de condition entre les coefficients représentés par les divers termes du tableau

$$(11)\quad \begin{cases} a_1,\ b_1,\ c_1, \ldots,\ h_1, \\ a_2,\ b_2,\ c_2, \ldots,\ h_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n,\ b_n,\ c_n, \ldots,\ h_n. \end{cases}$$

Alors aussi la formule (6) sera réduite à

$$ABC\ldots Hx = 0;$$

et comme elle devra se vérifier, quel que soit x, il est clair que la formule

$$(12)\qquad ABC\ldots H = 0$$

sera précisément l'équation résultante de l'élimination des variables x, $y, z, \ldots, w$ entre les équations (10). Enfin, comme on aura encore

$$(13)\qquad ABC\ldots H = \alpha\beta\gamma\ldots\eta\, \mathrm{S}(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots h_n),$$

on tirera de l'équation (12), en y posant, comme on peut le faire, $\alpha\beta\gamma\ldots\eta = 1$,

$$(14)\qquad \mathrm{S}(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots h_n) = 0.$$

On peut remarquer d'ailleurs que le premier membre de la formule (14), c'est-à-dire la *résultante algébrique* des divers termes du tableau (11) demeure invariable, tandis que dans ce tableau on échange entre elles les colonnes horizontales et verticales. Donc l'équation (13) continuera de subsister si l'on suppose les valeurs de A, B, C,... déterminées par les formules

$$(15)\quad \begin{cases} A = a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma + \ldots + h_1\eta, \\ B = a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma + \ldots + h_2\eta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K = a_n\alpha + b_n\beta + c_n\gamma + \ldots + h_n\eta; \end{cases}$$

et l'on peut énoncer la proposition suivante :

» 1er *Théorème*. Si l'on élimine n variables x, y, z,..., w entre n équations dont les premiers membres soient des fonctions linéaires et homogènes de ces variables, il suffira, pour obtenir l'équation résultante, d'égaler à zéro le produit des premiers membres des équations données, et de considérer les variables x, y, z,..., w comme des clefs assujetties aux transmutations de la forme

$$x^2 \succeq 0,\ldots, \quad xy \succeq -xy,\ldots,$$

» Revenons maintenant aux équations (1); supposons que, dans les premiers membres de ces équations, on attribue successivement aux variables

$$x,\ y,\ z,\ldots,\ w$$

n systèmes distincts de valeurs, indiqués à l'aide des indices

$$1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n,$$

placés en bas des lettres qui représentent ces variables, et nommons $k_{l,m}$ ce que devient k_l, quand on y pose

$$x = x_m,\ y = y_m,\ z = z_m,\ldots,\ w = w_m.$$

A la place de la formule (3), on obtiendra n équations de la forme

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{l} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + \ldots + Hw_1 = K_1, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + \ldots + Hw_2 = K_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Ax_n + By_n + Cz_n + \ldots + Hw_n = K_n, \end{array}\right.$$

les valeurs de K_1, K_2,..., K_n étant déterminées par les formules

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{l} K_1 = k_{1,1}\alpha + k_{2,1}\beta + k_{3,1}\gamma + \ldots + k_{n,1}\eta, \\ K_2 = k_{1,2}\alpha + k_{2,2}\beta + k_{3,2}\gamma + \ldots + k_{n,2}\eta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K_n = k_{1,n}\alpha + k_{2,n}\beta + k_{3,n}\gamma + \ldots + k_{n,n}\eta. \end{array}\right.$$

D'ailleurs, si aux facteurs symboliques A, B, C,..., H, dont les valeurs sont données par les formules (15), on substitue les facteurs K_1, K_2,..., K_n, dont les valeurs sont données par les formules (17), on obtiendra, en formant le produit de ces facteurs symboliques, non plus la formule (13), mais la suivante:

$$(18)\qquad K_1 K_2 \ldots K_n = \alpha\beta\gamma\ldots\eta\, \mathrm{S}(\pm k_{1,1} k_{2,2} k_{3,3} \ldots k_{n,n}),$$

dans laquelle l'expression $S(\pm k_{1,1}\, k_{2,2}\, k_{3,3} \ldots k_{n,n})$ est la résultante algébrique des divers termes du tableau

$$(19)\qquad \begin{cases} k_{1,1}, & k_{2,1}, & k_{3,1}, \ldots, & k_{n,1}, \\ k_{1,2}, & k_{2,2}, & k_{3,2}, \ldots, & k_{n,2}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{1,n}, & k_{2,n}, & k_{3,n}, \ldots, & k_{n,n}, \end{cases}$$

le signe S pouvant être censé relatif à l'un quelconque des deux systèmes d'indices; et puisque les facteurs symboliques $A, B, C, \ldots, H$ vérifient les conditions (5), on tirera encore des formules (16),

$$(20)\qquad ABC \ldots H\, S(\pm x_1 y_2 z_3 \ldots w_n) = K_1 K_2 K_3 \ldots K_n.$$

Si, dans cette dernière formule, on substitue les valeurs des produits $ABC \ldots H$, $K_1 K_2 K_3 \ldots K_n$ fournies par les équations (13) et (18), et si, dans l'équation nouvelle ainsi obtenue, on suppose, pour plus de simplicité,

$$\alpha 6 \gamma \ldots \eta \asymp 1,$$

on trouvera

$$(21)\qquad S(a_1 b_2 c_3 \ldots h_n)\, S(\pm x_1 y_2 z_3 \ldots w_n) = S(\pm k_{1,1}\, k_{2,2}\, k_{3,3} \ldots k_{n,n}).$$

On sera ainsi ramené, par la considération des produits symboliques, à un théorème que j'ai démontré dans le XVII^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique* [*], et que l'on peut énoncer comme il suit :

» 2^e *Théorème*. Le produit de deux résultantes algébriques est encore une résultante algébrique.

» Pour mettre en évidence les avantages que présente l'intervention des clefs dans les applications numériques, supposons que l'on se propose de résoudre les trois équations

$$(22)\qquad \begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ 3x + y + 2z = 3, \\ 2x + 3y + z = 5. \end{cases}$$

De ces équations respectivement multipliées par α, 6, γ, puis combinées entre elles par voie d'addition, l'on tirera

$$(23)\qquad Ax + By + Cz = K,$$

[*] *Voir* aussi dans le même cahier un Mémoire de M. Binet.

les valeurs de A, B, C, K étant

$$(24)\quad \begin{cases} A = \alpha + 3\beta + 2\gamma, \quad B = 2\alpha + \beta + 3\gamma, \quad C = 3\alpha + 2\beta + \gamma, \\ \qquad\qquad K = \alpha + 3\beta + 5\gamma, \end{cases}$$

puis en considérant α, β, γ comme des clefs assujetties aux conditions de la forme

$$\alpha^2 \asymp 0, \ldots, \quad \beta\alpha \asymp -\alpha\beta, \ldots,$$

on tirera immédiatement de l'équation (23) multipliée par le produit BC la valeur de l'inconnue x. Effectivement, dans cette hypothèse, les formules (24) donneront

$$BC = -5\beta\gamma + 7\gamma\alpha + \alpha\beta;$$

et, par suite, en posant, pour abréger,

$$\alpha\beta\gamma \asymp 1,$$

on trouvera

$$ABC = -1.5 + 3.7 + 2.1 = 18,$$
$$KBC = -1.5 + 3.7 + 5.1 = 21,$$
$$x = \frac{KBC}{ABC} = \frac{21}{18} = \frac{7}{6}.$$

La valeur de x étant ainsi obtenue, on déduira immédiatement de la formule (23) multipliée par le seul facteur C la valeur de y, et l'on pourra même, dans la détermination de y, réduire à zéro l'une quelconque des trois clefs α, β, γ. En prenant, pour fixer les idées, $\gamma = 0$, on tirera des formules (24)

$$(25)\quad \begin{cases} A = \alpha + 3\beta, \quad B = 2\alpha + \beta, \quad C = 3\alpha + 2\beta, \\ \qquad\qquad K = A, \end{cases}$$

puis, en posant, pour abréger,

$$\alpha\beta \asymp 1,$$

on trouvera

$$BC = 1, \quad AC = KC = -7,$$
$$y = \frac{AC}{BC}(1 - x) = -7(1 - x) = \frac{7}{6} = x.$$

Enfin, l'on tirera de la formule (23), en réduisant à zéro deux clefs, par exemple α et β,

$$z = 5 - 2x - 3y = 5(1 - x) = -\frac{5}{6}.$$

18..

On aura donc, en définitive,

$$(26) \qquad x = y = \frac{7}{6}, \quad z = -\frac{5}{6}.$$

» Remarquons d'ailleurs qu'en appliquant l'équation (23) à la détermination des inconnues x, y, z, on peut choisir arbitrairement, 1° l'ordre dans lequel on déterminera ces inconnues; 2° l'ordre dans lequel on multipliera les facteurs symboliques des produits $\overline{ABC}$, KBC...; 3° les clefs que l'on fera évanouir dans les valeurs des inconnues y et z. Il y aura donc un grand nombre de manières différentes d'effectuer le calcul; mais quelle que soit celle que l'on adopte, on sera toujours conduit au même résultat. Ainsi, par exemple, si dans la détermination de y on pose, non plus $\gamma = 0$, mais $\beta = 0$, on trouve

$$A = \alpha + 2\gamma, \quad B = 2\alpha + 3\gamma, \quad C = 3\alpha + \gamma,$$
$$K = \alpha + 5\gamma,$$

puis, en posant, pour abréger, $\gamma\alpha = 1$, on trouvera

$$\overline{BC} = 7, \quad \overline{AC} = 5, \quad \overline{KC} = 14,$$
$$y = \frac{\overline{KC} - \overline{AC}x}{\overline{BC}} = \frac{14 - 5x}{7} = \frac{7}{6}.$$

» Dans un prochain article, je montrerai les avantages que présente l'emploi des clefs algébriques dans la résolution des équations non linéaires. »

MÉMOIRES LUS.

GÉOLOGIE. — *Note sur le soulèvement des Apennins; par* **M. Ponzi**, professeur d'Anatomie comparée à Rome; *avec une addition, par* **M. Rozet.** (Extrait par M. Rozet.)

(Commissaires, MM. Élie de Beaumont, Dufrénoy, Constant Prevost.)

« Il résulte de tous les faits consignés dans la Note de M. Ponzi, et constatés par ses observations, celles de MM. Murchison, Meneghini, Savi et Spada :

» 1°. Que, dans l'Apennin, les schistes, avec leurs calcaires, et les grès, macignos, contenant des Fucoïdes, Nummulites et autres fossiles tertiaires, appartiennent aux étages *éocène* et *miocène;*

» 2°. Que les strates de ces roches, toujours parallèles entre eux, passent