BnF

gallica
BIBLIOTHÈQUE NUMÉRIQUE

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Académie des sciences (France). Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels. 1835-1965.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF.Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :
*La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.
*La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

Cliquer ici pour accéder aux tarifs et à la licence

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

*des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
*des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisation@bnf.fr.

ancien confrère. La demande de M. Laugier est exceptionnellement accordée par l'Académie.

Après la lecture du Mémoire de *M. Laugier*, M. **Seguier** demande la parole, et s'exprime ainsi :

« Les éloges si bien mérités qui viennent d'être publiquement donnés au grand cercle astronomique exécuté par Gambey, pour l'Observatoire, m'engagent à saisir cette occasion pour renouveler la prière à laquelle l'Académie tout entière s'est spontanément associée une première fois, je veux parler de la demande que l'Académie a bien voulu adresser à M. le Ministre de l'Instruction publique, pour obtenir de lui, dans l'intérêt des sciences, la publication de la méthode suivie par Gambey, pour diviser son admirable instrument. Cette méthode, vérifiée par une Commission désignée par vous, est consignée dans un paquet cacheté, déposé à votre Secrétariat par la veuve de notre illustre confrère; elle forme la partie la plus précieuse du modeste patrimoine laissé par le grand artiste à sa veuve et à son orpheline. »

L'Académie décide qu'une nouvelle Lettre sera écrite en son nom au Ministre de l'Instruction publique, conformément à la demande présentée par M. Seguier.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les clefs algébriques; par* **M. Augustin Cauchy.**

« Considérons n polynômes A, B, C,... dont les divers termes soient proportionnels à certains facteurs α, β, γ,..., et concevons qu'en suivant les règles de la multiplication algébrique on multiplie ces divers polynômes l'un par l'autre. Dans le nouveau polynôme résultant de cette multiplication, chaque terme sera proportionnel à l'un des produits que l'on peut former avec les facteurs α, β, γ,... pris n à n; et l'on pourra d'ailleurs supposer que, dans chacun de ces produits, on a conservé la trace de l'ordre dans lequel les multiplications diverses ont été successivement effectuées. On pourra aussi concevoir que, dans le nouveau polynôme, on substitue à chacun de ces produits un nombre déterminé, ou plus généralement une quantité déterminée, deux quantités distinctes pouvant être substituées à deux produits distincts, dans le cas même où ces deux produits ne diffèrent entre eux que par l'ordre dans lequel sont rangés les divers facteurs. Ces conventions étant admises, nous désignerons les facteurs α, β, γ,... sous le nom de *clefs*, et les polynômes A, B, C,... qui les renferment, sous le nom de *facteurs symboliques* du produit ABC... définitivement obtenu. Les substitutions ou *transmutations*, qui consisteront à remplacer les produits des clefs prises n à n par certaines quantités, seront indiquées à l'aide du signe $\succeq$ que j'ai déjà employé dans un autre Mémoire; et il est clair que du système de ces transmutations dépendront la valeur et les propriétés du produit ABC.... Ajoutons qu'il suffira généralement d'intervertir l'ordre dans lequel sont rangés les facteurs A, B, C,... du produit ABC... pour altérer la valeur de ce même produit.

» Les clefs algébriques, telles que je viens de les définir, permettent de résoudre avec une grande facilité des questions d'analyse ou de mécanique, dans lesquelles l'application des méthodes ordinaires entraînerait de longs et pénibles calculs. C'est ce que je me propose de montrer, avec quelques détails, dans une suite de Mémoires que j'aurai l'honneur de présenter successivement à l'Académie. Pour donner une idée des résultats auxquels on est ainsi conduit, je me bornerai aujourd'hui à deux exemples. Je commencerai par faire voir que la théorie des clefs résout généralement le problème de l'élimination des inconnues entre plusieurs équations linéaires ou non linéaires; puis je montrerai comment s'introduisent dans le calcul trois clefs, correspondantes aux trois dimensions de l'espace, qui fournissent le moyen d'obtenir sous une forme très-simple la solution d'un grand nombre de problèmes de géométrie et de mécanique.

ANALYSE.

» Supposons d'abord qu'il s'agisse d'éliminer n inconnues x, y, z,... entre n équations dont les premiers membres sont des fonctions linéaires et homogènes de ces inconnues, les seconds membres étant réduits à zéro. Soient d'ailleurs A, B, C,... ce que deviennent ces premiers membres, quand on y remplace les n inconnues x, y, z,... par n clefs correspondantes α, β, γ,.... Enfin, concevons qu'après avoir multiplié ces clefs n à n, en tenant compte de l'ordre dans lequel les multiplications sont effectuées, on convienne, 1° de remplacer par zéro chaque produit dans lequel entre deux ou plusieurs fois une même clef; 2° de substituer toujours deux quantités égales aux signes près, mais affectées de signes contraires, à deux produits qui se déduisent l'un de l'autre à l'aide d'un échange opéré entre deux clefs. En d'autres termes, supposons que les n clefs α, β, γ,... soient assujetties aux transmutations de la forme

$$\alpha^2 \succeq 0, \quad \beta^2 \succeq 0, \ldots, \quad \beta\alpha \succeq -\alpha\beta, \quad \text{etc.},$$

et à celles qui en dérivent. L'équation résultante de l'élimination des inconnues x, y, z,... entre les équations données, sera

$$ABC... = 0.$$

» On démontre aisément ce théorème, en partant de cette remarque très-simple, que les facteurs symboliques A, B, C,... jouissent des mêmes propriétés que possèdent les clefs α, β, γ,....

» Concevons à présent qu'il s'agisse d'éliminer l'inconnue x entre deux équations dont les degrés m et m' donnent pour somme le nombre n. Pour y parvenir, il suffira de recourir encore à l'intervention des n clefs α, β, γ,... assujetties aux conditions ci-dessus énoncées. En effet, en supposant ces clefs écrites à la suite les unes des autres dans l'ordre qu'indique l'alphabet, et le premier membre de chaque équation ordonné suivant les puissances ascendantes, ou suivant les puissances descendantes de x, cherchez tous les facteurs symboliques que l'on peut former en remplaçant dans le premier membre de la première équation les diverses puissances de x par $m+1$ termes consécutifs de la suite des clefs. Soient A, B, C,... les facteurs symboliques ainsi obtenus, et A', B', C',... ce que deviennent ces facteurs quand on remplace la première équation par la seconde. L'équation résultante de l'élimination sera la formule symbolique

$$ABC... A'B'C'... = 0.$$

On pourra d'ailleurs, sans altérer l'équation résultante, intervertir arbitrairement l'ordre des facteurs symboliques

$$A,\ B,\ C,...,\ A',\ B',\ C',....$$

» Pour montrer une application de ces formules, supposons qu'il s'agisse d'éliminer x entre les deux équations

$$a + bx + cx^2 = 0,$$
$$a' + b'x + c'x^2 = 0.$$

Alors il suffira d'introduire dans le calcul quatre clefs distinctes

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,$$

et, en posant

$$A = a\alpha + b\beta + c\gamma,\quad B = a\beta + b\gamma + c\delta,$$
$$A' = a'\alpha + b'\beta + c'\gamma,\quad B' = a'\beta + b'\gamma + c'\delta,$$

on obtiendra pour équation résultante la formule symbolique

$$AA'BB' = 0.$$

On aura d'ailleurs, en vertu des propriétés ci-dessus assignées aux clefs α, β, γ, δ,

$$\begin{aligned} AA' &= (bc' - b'c)\beta\gamma + (ca' - c'a)\gamma\alpha + (ab' - a'b)\alpha\beta, \\ BB' &= (bc' - b'c)\gamma\delta + (ca' - c'a)\delta\beta + (ab' - a'b)\beta\gamma, \end{aligned}$$

par conséquent,

$$AA'BB' = K\alpha\beta\gamma\delta,$$

la valeur de K étant

$$K = (ab' - a'b)(bc' - b'c) - (ca' - c'a)^2,$$

et, puisque la quantité qu'on doit substituer au produit $\alpha\beta\gamma\delta$ peut être arbitrairement choisie, l'équation résultante sera simplement

$$K = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(ab' - a'b)(bc' - b'c) - (ca' - c'a)^2 = 0.$$

» Au reste, comme je l'expliquerai dans une prochaine séance, la théorie des clefs peut être appliquée de diverses manières à l'élimination, et réduit à de simples multiplications un grand nombre d'opérations algébriques, par exemple, la division algébrique, la recherche du plus grand commun diviseur de deux fonctions entières, etc. Elle fournit aussi, comme je le ferai voir, des démonstrations très-rapides des théorèmes sur les résultantes algébriques, et des méthodes très-expéditives pour la résolution des équations linéaires ou non linéaires, à une ou à plusieurs inconnues.

» Concevons, maintenant, que l'on trace dans l'espace trois axes coordonnés rectangulaires ou obliques des x, y, z, qui partent d'un point fixe O; et soient

$$\bar{r}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$$

des quantités géométriques qui représentent : 1° le rayon vecteur mené de l'origine O à un autre point A; 2° les projections de ce rayon vecteur sur les axes. La première de ces quatre quantités géométriques sera la somme des trois autres, en sorte qu'on aura

$$\bar{r} = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}.$$

Soient d'ailleurs h, i, j ce que deviennent les quantités géométriques $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, quand, la longueur de chacune d'elles étant réduite à l'unité, elles se mesurent toutes trois dans les directions des coordonnées positives. En nommant x, y, z les projections algébriques du rayon vecteur $\bar{r}$ sur les axes coordonnés, on aura

$$\bar{x} = \mathrm{h}x, \quad \bar{y} = \mathrm{i}y, \quad \bar{z} = \mathrm{j}z,$$

et, par suite,

$$\bar{r} = \mathrm{h}x + \mathrm{i}y + \mathrm{j}z.$$

Pareillement, si A' est un second point distinct de A, et si l'on nomme $\bar{r}'$, x', y', z' ce que deviennent $\bar{r}$, x, y, z quand on substitue le second point au premier, on aura

$$\bar{r}' = \mathrm{h}x' + \mathrm{i}y' + \mathrm{j}z'.$$

Si, maintenant, on multiplie l'une par l'autre les valeurs précédentes de $\bar{r}$ et de $\bar{r}'$, en suivant les règles de la multiplication algébrique, le résultat de l'opération ne pourra évidemment acquérir un sens déterminé qu'en vertu d'une convention nouvelle servant à définir ce qu'on doit entendre par le produit de deux quantités géométriques dirigées dans l'espace suivant des droites quelconques. Concevons, pour fixer les idées, que l'on traite les trois quantités géométriques h, i, j, comme des clefs auxquelles on attribuerait les propriétés précédemment énoncées. Les carrés et les produits de ces quantités géometriques devront satisfaire aux six équations symboliques

$$\mathrm{h}^2 = 0, \quad \mathrm{i}^2 = 0, \quad \mathrm{j}^2 = 0,$$
$$\mathrm{ji} = -\mathrm{ij}, \quad \mathrm{hj} = -\mathrm{jh}, \quad \mathrm{ih} = -\mathrm{hi},$$

et l'on aura, par suite,

$$\bar{r}\bar{r}' = \mathrm{ij}\,(yz' - y'z) + \mathrm{jh}\,(zx' - z'x) + \mathrm{hi}\,(xy' - x'y).$$

Or les trois différences

$$yz' - y'z, \quad zx' - z'x, \quad xy' - x'y,$$

sont les projections algébriques du moment linéaire de la longueur $\bar{r}'$ transportée parallèlement à elle-même, de manière qu'elle parte non plus du point O, mais du point A. Donc le produit $\bar{r}\bar{r}'$ représentera ce moment linéaire, si l'on assujettit les quantités géométriques h, i, j non-seulement aux six équations symboliques ci-dessus écrites, mais encore aux trois suivantes :

$$\mathrm{ij} = \mathrm{h}, \quad \mathrm{jh} = \mathrm{i}, \quad \mathrm{hi} = \mathrm{j}.$$

Alors on aura simplement

$$\bar{r}\bar{r'} = \mathrm{h}(yz' - y'z) + \mathrm{i}(zx' - z'x) + \mathrm{j}(xy' - x'y).$$

Le produit $\bar{r}\bar{r'}$, déterminé par la formule précédente, est ce qu'on peut appeler le *produit angulaire* des longueurs $\bar{r}$ et $\bar{r'}$. Il change de signe quand on intervertit l'ordre des facteurs, et représente alors le moment linéaire de la longueur $\bar{r}$ mesurée à partir du point A'. Si l'on considérait ce même produit comme propre à représenter non plus une longueur, mais une surface, il deviendrait ce que M. de Saint-Venant a nommé *produit géométrique*, dans un Mémoire où il a déduit de la considération de ce produit des conséquences qui méritent d'être remarquées.

» Dans un autre article, j'expliquerai les avantages que présente, en mécanique, l'emploi des trois clefs h, i, j, quand on veut substituer, ce qui est souvent utile, des axes mobiles à des axes fixes.

» Je remarquerai, en finissant, que la théorie des *imaginaires*, prise au point de vue sous lequel je l'ai envisagée dans mon *Analyse algébrique*, et la théorie des *quaternia* de M. Hamilton, sont des cas spéciaux de la théorie des clefs auxquels on arrive, en supposant l'une des clefs réduite à l'unité. Ainsi, en particulier, l'expression imaginaire

$$a + b\mathrm{i}$$

pourrait être considérée comme un facteur symbolique, dans lequel la première clef se réduirait à l'unité, la seconde clef i étant assujettie à la condition

$$\mathrm{i}^2 \,\underline{\smile}\, -1. \text{ »}$$

MÉCANIQUE. — *Sur la théorie des moments linéaires et sur les moments linéaires des divers ordres; par* **M. AUGUSTIN CAUCHY.**

« J'ai développé, depuis plus d'un quart de siècle, non-seulement dans mes *Exercices de Mathématiques*, mais aussi dans mes leçons données à l'École Polytechnique et à la Faculté des Sciences, la théorie des *moments linéaires*. Comme j'en ai fait la remarque, cette théorie se lie intimement, d'un côté, à la théorie des *moments* des forces, pris par rapport à un point fixe, et représentés par des surfaces planes, de l'autre, à la théorie des *couples* établie par M. Poinsot. Elle a d'ailleurs l'avantage de s'appliquer non-seulement aux forces, mais encore à toutes les quantités qui ont pour mesure des longueurs portées sur des droites dans des directions détermi-