

Ueber das Doppler'sche Princip

Voigt, W.

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der
Georg-Augusts-Universität zu Göttingenaus dem Jahre ..



Volume 1887 / 1887 / Issue 2 / Article

Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.

Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen: Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.

Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.

Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:

You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.

By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

Kontakt / Contact

DigiZeitschriften e.V.

Papendiek 14

37073 Goettingen

Email: digizeitschriften@sub.uni-goettingen.de

Nachrichten

von der
Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften
und der
Georg-Augusts-Universität
zu Göttingen.

10. März.

Nr. 2.

1887.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 8. Januar.

Ueber das Doppler'sche Princip.

Von

W. Voigt.

Die Differentialgleichungen für die Oscillationen eines elastischen incompressibeln Mediums sind bekanntlich :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \omega^2 \Delta u \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \omega^2 \Delta v \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \omega^2 \Delta w\end{aligned}\quad 1)$$

worin ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Oscillationen — genauer die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen mit constanter Amplitude — bezeichnet. Dabei ist vorausgesetzt, daß u, v, w die Relation erfüllen :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad 1')$$

Es seien nun $u = U, v = V, w = W$ Lösungen dieser Gleichungen, welche an einer gegebenen Oberfläche $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0$ gegebene von der Zeit abhängige Werthe $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$ annehmen, so kann man sagen, daß diese Functionen U, V, W das Gesetz darstellen, nach welchem die Oberfläche $f = 0$ leuchtet.

Vertauscht man in U, V, W resp.

$$\begin{aligned}
 & x \text{ mit } \xi = xm_1 + yn_1 + zp_1 - \alpha t \\
 & y \text{ mit } \eta = xm_2 + yn_2 + zp_2 - \beta t \\
 2) \quad & z \text{ mit } \zeta = xm_3 + yn_3 + zp_3 - \gamma t \\
 & t \text{ mit } \tau = t - (ax + by + cz)
 \end{aligned}$$

und bezeichnet die so erhaltenen Functionen resp. mit $(U), (V), (W)$, so läßt sich durch $u = (U), v = (V), w = (W)$ ebenfalls den Gleichungen (1) genügen.

Denn man erhält z. B. für die erste von ihnen:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2(U)}{\partial \tau^2} (1 - \omega^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)) &= \omega^2 \left\{ \frac{\partial^2(U)}{\partial \xi^2} \left(m_1^2 + n_1^2 + p_1^2 - \frac{\alpha^2}{\omega^2} \right) \right. \\
 &+ \frac{\partial^2(U)}{\partial \eta^2} \left(m_2^2 + n_2^2 + p_2^2 - \frac{\beta^2}{\omega^2} \right) + \frac{\partial^2(U)}{\partial \zeta^2} \left(m_3^2 + n_3^2 + p_3^2 - \frac{\gamma^2}{\omega^2} \right) \\
 &+ 2 \frac{\partial^2(U)}{\partial \eta \partial \zeta} \left(m_2 m_3 + n_2 n_3 + p_2 p_3 - \frac{\beta \gamma}{\omega^2} \right) \\
 &+ 2 \frac{\partial^2(U)}{\partial \zeta \partial \xi} \left(m_3 m_1 + n_3 n_1 + p_3 p_1 - \frac{\gamma \alpha}{\omega^2} \right) \\
 &+ 2 \frac{\partial^2(U)}{\partial \xi \partial \eta} \left(m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 - \frac{\alpha \beta}{\omega^2} \right) \\
 &- 2 \frac{\partial^2(U)}{\partial \tau \partial \xi} \left(am_1 + bn_1 + cp_1 - \frac{\alpha}{\omega^2} \right) \\
 &- 2 \frac{\partial^2(U)}{\partial \tau \partial \eta} \left(am_2 + bn_2 + cp_2 - \frac{\beta}{\omega^2} \right) \\
 &\left. - 2 \frac{\partial^2(U)}{\partial \tau \partial \zeta} \left(am_3 + bn_3 + cp_3 - \frac{\gamma}{\omega^2} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

und diese ist, da ja sein muß:

$$\frac{\partial^2(U)}{\partial \tau^2} = \omega^2 \left(\frac{\partial^2(U)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2(U)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2(U)}{\partial \zeta^2} \right)$$

erfüllt, wenn folgende neue Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned}
 1 - \omega^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) &= m_1^2 + n_1^2 + p_1^2 - \frac{\alpha^2}{\omega^2} \\
 3) \quad &= m_2^2 + n_2^2 + p_2^2 - \frac{\beta^2}{\omega^2} \\
 &= m_3^2 + n_3^2 + p_3^2 - \frac{\gamma^2}{\omega^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\beta\gamma}{\omega^2} &= m_2 m_3 + n_2 n_3 + p_2 p_3 \\ \frac{\gamma\alpha}{\omega^2} &= m_3 m_1 + n_3 n_1 + p_3 p_1 \\ \frac{\alpha\beta}{\omega^2} &= m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 \\ \frac{\alpha}{\omega^2} &= am_1 + bn_1 + cp_1 \\ \frac{\beta}{\omega^2} &= am_2 + bn_2 + cp_2 \\ \frac{\gamma}{\omega^2} &= am_3 + bn_3 + cp_3.\end{aligned}\tag{4}$$

Nimmt man $\alpha\beta\gamma$ als gegeben an, so hat man 12 verfügbare Constanten, kann also über drei von ihnen willkürlich verfügen.

Die Auflösung erfolgt am bequemsten, wenn man vorübergehend ein Coordinatensystem X_1, Y_1, Z_1 benutzt, für welches in den Gleichungen (2) β und γ verschwinden, α gleich x wird; d. h. ein solches, dessen X_1 -Axe in die Richtung fällt, deren Richtungscosinus gegen X, Y, Z mit a, β, γ proportional sind.

Es sei ferner gesetzt

$$\begin{aligned}m_h^2 + n_h^2 + p_h^2 &= q_h^2, \quad m_h/q_h = \mu_h, \quad n_h/q_h = \nu_h, \quad p_h/q_h = \pi_h \\ a^2 + b^2 + c^2 &= d^2, \quad a/d = \mu, \quad b/d = \nu, \quad c/d = \pi,\end{aligned}$$

dann sind μ, ν, π die Richtungscosinus von 4 Richtungen, die wir durch $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ und δ bezeichnen wollen, gegen das System X_1, Y_1, Z_1 .

Durch diese Einführungen werden unsere Gleichungen (3), (4) und (5):

$$1 - \omega^2 d^2 = q_1^2 - \frac{x^2}{\omega^2} = q_2^2 = q_3^2 \tag{3'}$$

$$\begin{aligned}\mu_2 \mu_3 + \nu_2 \nu_3 + \pi_2 \pi_3 &= \mu_3 \mu_1 + \nu_3 \nu_1 + \pi_3 \pi_1 = \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2 + \pi_1 \pi_2 = 0 \\ \text{d. h. } \cos(\delta_2, \delta_3) &= \cos(\delta_3, \delta_1) = \cos(\delta_1, \delta_2) = 0\end{aligned} \tag{4'}$$

$$\mu\mu_1 + \nu\nu_1 + \pi\pi_1 = \frac{x}{\omega^2 q_1 d}, \quad \mu\mu_2 + \nu\nu_2 + \pi\pi_2 = \mu\mu_3 + \nu\nu_3 + \pi\pi_3 = 0$$

$$\text{d. h. } \cos(\delta, \delta_1) = \frac{x}{\omega^2 q_1 d}, \quad \cos(\delta, \delta_2) = \cos(\delta, \delta_3) = 0. \tag{5'}$$

Nach (4') stehen die drei Richtungen $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ zu einander senkrecht, nach (5') fällt δ_1 mit δ zusammen, es muß also sein:

$$\mu = \mu_1, \quad \nu = \nu_1, \quad \pi = \pi_1 \quad \text{und} \quad \frac{x}{\omega^2 q_1 d} = 1. \tag{6}$$

Dies in (3') eingesetzt bestimmt d und q_1, q_2, q_3 .

Man erhält zunächst, da nur positive Zeichen einen Sinn geben:

$$q_1 = 1 \text{ oder } \frac{x}{\omega}$$

$$d = \frac{x}{\omega^2} \text{ oder } \frac{1}{\omega}.$$

Ich werde nur die erste Lösung benutzen, da die zweite kein Interesse bietet¹⁾; aus ihr folgt:

$$7) \quad d = \frac{x}{\omega^2}, \quad q_1 = 1, \quad q_2 = q_3 = \sqrt{1 - \frac{x^2}{\omega^2}} = q.$$

Hiernach können wir die Gleichungen (2) schreiben:

$$8) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= x_1 \mu_1 + y_1 \nu_1 + z_1 \pi_1 - xt = a_1 - xt \\ \eta_1 &= (x_1 \mu_2 + y_1 \nu_2 + z_1 \pi_2) q = b_1 q \\ \zeta_1 &= (x_1 \mu_3 + y_1 \nu_3 + z_1 \pi_3) q = c_1 q \\ \tau &= t - \frac{x}{\omega^2} (\mu_1 x + \nu_1 y + \pi_1 z) = t - \frac{x a_1}{\omega^2}, \end{aligned}$$

wo für μ_n, ν_n, π_n keine weiteren Bedingungen mehr gelten, als die aus ihrer Bedeutung als Richtungscosinus von drei auf einander normalen, aber sonst ganz beliebigen Richtungen hervorgehenden.

Es können daher die mit a_1, b_1, c_1 bezeichneten Aggregate als die Coordinaten der Stelle x_1, y_1, z_1 in Bezug auf ein mit den Richtungen $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ zusammenfallendes Coordinatensystem ABC angesehen werden.

Jedes derartige System μ_n, ν_n, π_n giebt eine Lösung $(U), (V), (W)$ aus gegebenen U, V, W . Nehmen U, V, W an einer Oberfläche $f(x, y, z) = 0$ gegebene Werthe $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$ an, so $(U), (V), (W)$ aus jenen ableitbare $(\bar{U}), (\bar{V}), (\bar{W})$ an der Oberfläche $(f) = f(\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1, \bar{\zeta}_1) = 0$, welche wegen der Werthe von ξ_1, η_1, ζ_1 die Eigenschaft hat, sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit x parallel der durch die Richtungscosinus μ_1, ν_1, π_1 gegebenen Richtung δ_1 oder A fortzuschieben. Die Lösungen $(U), (V), (W)$ geben also die Gesetze, nach welchen gewisse in fortschreitender Bewegung begriffene Oberflächen leuchten, wenn sie nur noch der Bedingung

$$\frac{\partial(U)}{\partial x} + \frac{\partial(V)}{\partial y} + \frac{\partial(W)}{\partial z} = 0$$

1) Aus ihr folgt $q_2 = q_3 = 0$ also auch $m_2, n_2, p_2, m_3, n_3, p_3$ und hiernach $\zeta = \eta = 0$.

genügen. Die beiden Oberflächen $f = 0$ und $(f) = 0$ sind der Form nach nur identisch wenn $q = 1$, d. h. x so klein gegen ω ist, daß x^2 neben ω^2 vernachlässigt werden kann. Ist dies der Fall, so sind sie nur durch ihre Lage gegen die Coordinatenachsen verschieden. Durch geeignete Verfügungen über die willkürlichen Constanten und die Functionen U, V, W kann man anschauliche specielle Fälle erhalten. Durch Transformation der Coordinaten gelangt man dann zu dem wenigstens formell allgemeineren Falle, daß die Verschiebung der Fläche nicht der A -Axe parallel, sondern beliebig gerichtet ist.

Wir verfolgen den speciellen Fall, daß die drei Richtungen $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ in die drei Coordinatenachsen X_1, Y_1, Z_1 fallen, d. h.

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \nu_2 = \pi_3 = 1, \\ \mu_2 &= \mu_3 = \nu_1 = \nu_3 = \pi_1 = \pi_2 = 0 \text{ ist.} \end{aligned} \quad 9)$$

Dann wird sehr einfach, der Form nach naturgemäß mit (8) identisch:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 - xt \\ \eta_1 &= y_1 q \\ \zeta_1 &= z_1 q \end{aligned} \quad 10)$$

$$\tau = t - \frac{xx_1}{\omega^2}, \text{ wobei } q = \sqrt{1 - \frac{x^2}{\omega^2}} \text{ ist.}$$

Die Bedingung (1') lautet in diesem Falle

$$(1-q) \frac{\partial(U)}{\partial \xi} = \frac{x}{\omega^2} \frac{\partial(U)}{\partial \tau}$$

was sich ohne Weiteres vertauschen läßt mit

$$(1-q) \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{\omega^2} \frac{\partial U}{\partial t}. \quad 10')$$

Dies sagt aus, daß in U die Argumente x und t nur in der Verbindung $(1-q)t + \frac{xx}{\omega^2}$ oder garnicht vorkommen dürfen. Letzteres ist der Fall wenn $U = 0$ ist, d. h. wenn die fortgepflanzten Schwingungen überall normal zur Translationsrichtung der leuchtenden Oberfläche stehen.

Geht man von dem vorausgesetzten speciellen Coordinatensystem X_1, Y_1, Z_1 zu dem allgemeinen X, Y, Z über, welches durch die Relationen

$$\begin{aligned} x_1 &= xa_1 + y\beta_1 + z\gamma_1 \\ y_1 &= xa_2 + y\beta_2 + z\gamma_2 \\ z_1 &= xa_3 + y\beta_3 + z\gamma_3 \end{aligned} \quad 11)$$

mit dem erstereu zusammen hängen möge, so erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
 \xi &= xq + (x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1) \alpha_1 (1 - q) - x\alpha_1 t \\
 \eta &= yq + (x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1) \beta_1 (1 - q) - x\beta_1 t \\
 12) \quad \zeta &= zq + (x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1) \gamma_1 (1 - q) - x\gamma_1 t \\
 \tau &= t - \frac{x}{\omega^2} (x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1).
 \end{aligned}$$

Das ist die allgemeine Form (2) von der wir ausgegangen sind, aber mit vollständig durch x , α_1 , β_1 , γ_1 bestimmten Constanten, sie enthält das, was man gewöhnlich unter dem Doppler'schen Princip versteht, soweit dasselbe richtig ist.

Kann man hierin x^2 neben ω^2 vernachlässigen, so ist $q = 1$ und man erhält sehr einfach:

$$\begin{aligned}
 \xi &= x - x\alpha_1 t \\
 \eta &= y - x\beta_1 t \\
 13) \quad \zeta &= z - x\gamma_1 t \\
 \tau &= t - \frac{x}{\omega^2} (x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1).
 \end{aligned}$$

Die Bedingung (1') lautet hierbei:

$$13') \quad 0 = \frac{x}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial t} (U\alpha_1 + V\beta_1 + W\gamma_1)$$

und ist bei den angenommenen Vernachlässigungen nur soweit zu erfüllen nöthig, daß das in $\frac{x}{\omega}$ multiplicirte Glied von erster Ordnung wird.

Bewegt sich außer der leuchtenden Oberfläche auch der Beobachter, etwa mit der constanten Geschwindigkeit x' in einer durch die Richtungscosinus α' , β' , γ' gegebenen Richtung, so sind die Verschiebungen u , v , w , nur auf ein mit dem Beschauer bewegtes Coordinatensystem X' , Y' , Z' zu beziehen, also in (12) oder (13) x mit $x' + x' \alpha' t$, y mit $y' + x' \beta' t$, z mit $z' + x' \gamma' t$ zu vertauschen.

Wir machen von dem Gefundenen einige Anwendungen.

1) Sei eine Ebene parallel der YZ -Ebene in Schwingungen versetzt nach dem Gesetz

$$\overline{W} = A \sin \frac{2\pi t}{T},$$

so ist die nach der positiven X -Axe fortgepflanzte Bewegung gegeben durch:

$$W = A \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{\omega} \right).$$

Machen wir hierin die Substitution nach (10) so ergibt sich:

$$(W) = A \sin \frac{2\pi}{T} \left(1 + \frac{x}{\omega}\right) \left(t - \frac{x}{\omega}\right).$$

Dies giebt für $x = xt$:

$$(\overline{W}) = A \sin \frac{2\pi t}{T} \left(1 - \frac{x^2}{\omega^2}\right) = A \sin \frac{2\pi t}{T'}, \quad (14')$$

wir haben also eine mit der (nur um eine Größe zweiter Ordnung von T verschiedenen) Schwingungsdauer $T' = T / \left(1 - \frac{x^2}{\omega^2}\right)$ schwingende und dabei mit der Geschwindigkeit x parallel der X -Axe fortschreitende (leuchtende) Ebene. Die fortgepflanzte Schwingung läßt sich schreiben:

$$(W) = A \sin \frac{2\pi}{T' \left(1 - \frac{x}{\omega}\right)} \left(t - \frac{x}{\omega}\right). \quad (14)$$

Wir erhalten also in der fortgepflanzten Welle eine im Verhältniß $\left(1 - \frac{x}{\omega}\right)/1$ verringerte Schwingungsdauer.

Bewegt sich auch noch der Beobachter, so gilt:

$$\begin{aligned} (W') &= A \sin \frac{2\pi}{T' \left(1 - \frac{x}{\omega}\right)} \left(t - \frac{x' + x't}{\omega}\right) \\ &= A \sin 2\pi \left(t \frac{(\omega + x')}{T'(\omega - x)} - \frac{x'}{T'(\omega - x)} \right). \end{aligned}$$

Diese Formel giebt das Doppler'sche Princip für ebene Wellen. Aber sie ist keineswegs allgemein gültig, sondern setzt ganz wesentlich eine Wellenebene mit durchweg constanter Amplitude voraus.

2) Sei dieselbe Ebene versetzt in Schwingungen nach dem Gesetz:

$$\overline{W} = A e^{\frac{(\mu y + \nu z)}{T\omega}} \sin \frac{2\pi t}{T}$$

— wie es ähnlich auftritt, wenn eine Welle mit ursprünglich constanter Amplitude durch ein Prisma aus einer absorbirenden Substanz gegangen ist —, dann gilt für die fortgepflanzte Welle:

$$W = A e^{\frac{2\pi(\mu y + \nu z)}{T\omega}} \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x\sigma}{\omega}\right) \text{ worin } \sigma = \sqrt{1 + \mu^2 + \nu^2} \text{ ist.}$$

Nimmt man hier die Substitution gemäß (10) vor, so kommt, falls $\sqrt{1 - \frac{x^2}{\omega^2}} = q$ gesetzt wird:

$$(W) = Ae^{\frac{2\pi(\mu y + \nu z)q}{T\omega}} \sin \frac{2\pi}{T} \left[t \left(1 + \frac{x\sigma}{\omega} \right) - x \left(\frac{\sigma}{\omega} + \frac{x}{\omega^2} \right) \right].$$

Dies gibt für $x = xt$, falls man $\frac{\mu}{q} = \mu'$, $\frac{\nu}{q} = \nu'$ schreibt:

$$(\overline{W}) = Ae^{\frac{2\pi(\mu' y + \nu' z)}{\omega T'}} \sin \frac{2\pi t}{T'}, \text{ wo wiederum } T' = \frac{T}{1 - \frac{x^2}{\omega^2}} \text{ ist,}$$

also eine schwingende und zugleich fortschreitende Ebene; die fortgepflanzte Verrückung aber schreibt sich:

$$15) \quad (W) = Ae^{\frac{2\pi(\mu' y + \nu' z)}{\omega T'}} \sin \frac{2\pi}{T'} \left(t \frac{1 + \frac{x\sigma}{\omega}}{1 - \frac{x^2}{\omega^2}} - x \frac{\frac{\sigma}{\omega} + \frac{x}{\omega^2}}{1 - \frac{x^2}{\omega^2}} \right),$$

worin jetzt $\sigma = \sqrt{1 + (\mu'^2 + \nu'^2)q^2}$ ist.

Man bemerkt, daß hier ganz andere Gesetze gelten als durch das Doppler'sche Princip gegeben sind, selbst wenn man sich auf die erste Annäherung beschränkt und x^2/ω^2 neben 1 vernachlässigt.

3) Ist die leuchtende Oberfläche eine sehr kleine Kugel vom Radius R , welche nach dem Gesetz für den Drehungswinkel

$$\bar{\psi} = A \sin \frac{2\pi t}{T}$$

um die X-Axe oscillirt, so sind in der Entfernung $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ vom Kugelmittelpunkt die fortgepflanzten Drehungen ψ gegeben durch¹⁾:

$$\psi = \frac{R^3 A}{r^3} \left[\sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{r-R}{\omega} \right) + \frac{2\pi(r-R)}{T\omega} \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{r-R}{\omega} \right) \right]$$

$$16) = \frac{R^3 A}{r^3} \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi(r-R)}{T\omega} \right)^2} \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{r-R}{\omega} - \eta \right),$$

worin

$$\frac{2\pi(r-R)}{T\omega} = \text{ctg} \frac{2\pi\eta}{T}$$

1) W. Voigt, Crelles Journ. Bd. 89, 298.

gesetzt ist. Es wird also $\eta = \frac{T}{4}$ für $r = R$ und $\eta = 0$ wenn r sehr groß gegen die Wellenlänge $T\omega$ ist.

Die fortgepflanzten Verrückungen folgen aus ψ durch:

$$U = 0, \quad V = -\psi z, \quad W = \phi y;$$

wir setzen kurz:

$$U = 0, \quad V = MC, \quad W = NC.$$

Setzt man hierin für x, y, z die Werthe ξ, η, ζ nach (10), so wird der periodische Theil C :

$$(C) = \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x\xi}{\omega^2} - \frac{1}{\omega} (\sqrt{(x-x\xi)^2 + y^2 + z^2} - R) - (\eta) \right), \quad 17)$$

$$\text{falls } \cotg \frac{2\pi(\eta)}{T} = \frac{2\pi}{T\omega} (\sqrt{(x-x\xi)^2 + y^2 + z^2} - R) \text{ ist.}$$

Für $(x-x\xi)^2 + y^2 + z^2 = R^2$ d. h. an der Oberfläche einer mit der Geschwindigkeit x parallel der X-Axe verschobenen Kugel wird dies

$$(\bar{C}) = \sin \frac{2\pi}{T} \left(t \left(1 - \frac{x^2}{\omega^2} \right) - \frac{x}{\omega^2} \sqrt{R^2 - y^2 - z^2} \right)$$

also, da nach der Annahme $\frac{x^2}{\omega^2}$ und $\frac{xR}{\omega^2}$ zweiter Ordnung ist:

$$(\bar{C}) = \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

(M) und (N) haben denselben Werth, als ob die kleine Kugel um die zur Zeit t erreichte Position $x_0 = xt$ als Gleichgewichtslage oscillirte. Wir erhalten demnach durch (U), (V), (W) die von einem in fortschreitender Geschwindigkeit x parallel der Richtung der Rotationsaxe befindlichen durch Rotation »leuchtendem Punkte« ausgesandte Bewegung gegeben.

Die fortgepflanzten Wellenflächen beurtheilen sich nach dem Werth (17) für (C), der sich unter Einführung der relativen Coordinaten gegen den bewegten leuchtenden Punkt $\xi = x - x\xi, y = \eta, z = \zeta$ schreiben läßt bei Vernachlässigung von $\frac{x^2}{\omega^2}$ neben 1 und für gegen $T\omega$ großes r :

$$(C) = \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x\xi}{\omega^2} - \frac{1}{\omega} (\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} - R) \right).$$

Die Wellenflächen sind also Kugeln, aber nicht um den leuchtenden Punkt, sondern eine um den $\frac{x}{\omega}$ -ten Theil ihrer Radien nach der der Bewegung entgegengesetzten Richtung von ihm abliegende Stelle als Centrum zu construiren.

Ein ruhender Beobachter würde also, da die Normale auf der Wellenfläche durch die Beobachtungsstelle die Richtung angiebt, in welcher die Lichtquelle wahrzunehmen ist, den leuchtenden Punkt an der Stelle sehen, an welcher er sich vor der Zeit $\frac{r}{\omega}$ befand, oder anders ausgedrückt: er würde, falls sein Radiusvector r mit der Bewegungsrichtung den Winkel φ einschließt, eine »Aberration« von der Größe $\frac{r}{\omega} \sin \varphi$, in der der Bewegung des Punktes entgegengesetzter Richtung wahrnehmen.

Was die fortgepflanzten Amplituden (M) und (N) angeht, so haben sie an der Stelle $x y z$ nach dem Obigen zur Zeit t diejenigen Werthe, als ob der leuchtende Punkt sich dauernd an der zu dieser Zeit t erreichten Stelle befunden hätte, während doch die Wellenfläche in $x y z$ die Form hat, als verharrte der leuchtende Punkt an der zur Zeit $t - \frac{r}{\omega}$ erreichten Stelle. Es gehören also Wellenfläche und Amplitude nicht in dem Sinne, wie bei einem ruhenden leuchtenden Punkte zusammen, letztere ist von der augenblicklichen, erstere von einer verlassenen Position des leuchtenden Punktes abhängig.

So giebt sich das eigenthümliche Resultat, daß ein Beobachter einen so bewegten leuchtenden Punkt constanter Intensität, der sich zur Zeit t in der Entfernung r von ihm befindet, in derjenigen Lage sieht, welche er vor der Zeit $\frac{r}{\omega}$ hatte, aber mit der Intensität, wie sie der augenblicklichen (größeren oder kleineren) Entfernung entspricht.

Die Anwendbarkeit der obigen allgemeinen Betrachtungen auf Probleme der Optik ist beschränkt durch die Nebenbedingung (1'), die auf die Formeln (10') und (13') geführt hat.

Eine solche Beschränkung findet bei den analogen Problemen der Akustik von Flüssigkeiten nicht statt. Denn für die fortgepflanzte Dilatation δ gilt hier die einzige Bedingung

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = \omega^2 \Delta \delta.$$

Es giebt daher, wenn durch die Nebenbedingungen δ längs einer gegebenen Oberfläche als beliebige Function der Zeit vorgeschrieben ist, die Einführung einer der Substitutionen (10), (12) oder (13) stets den Uebergang von der Wirkung einer ruhenden Schallquelle zu derjenigen, welche sie in fortschreitender Bewegung begriffen ausübt.

Ist z. B. an einer sehr kleinen Kugel vom Radius R gegeben $\bar{\delta} = f(t)$, so giebt sich die fortgepflanzte Dilatation:

$$\delta = \frac{R}{r} f\left(t - \frac{r - R}{\omega}\right).$$

Die Substitution (10) giebt den Einfluß einer Translation der »tönenden« Kugel parallel der X -Axe. Die Discussion des Resultates ist der unter 3) angestellten analog.

Universität.

Preisstiftung der Wittwe Petsche.

Die von der theologischen Fakultät gestellte Aufgabe:

»Unter welchen leitenden Gesichtspunkten ist der Dekalog im Ganzen wie im Einzelnen im Zusammenhange des kleinen Lutherschen Katechismus unterrichtlich zu behandeln?«

hat eine Bearbeitung erfahren, die aber den Preis nicht erhalten konnte. Jedoch soll dem Verfasser, wenn er sich meldet, eine Belohnung nach § 8 der Statuten erteilt werden.

Göttingen, den 1. März 1887.

Die theologische Fakultät:
Wiesinger.

Bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Januar 1887.

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Folge 4. Band 5. Heft 4.
Leopoldina. Heft XXII. N. 23—24.
Jahrbücher der K. Akademie gemeinn. Wissenschaften zu Erfurt. Neue Folge.
Heft XIV.
Jahresbericht des physikalischen Vereins zu Frankfurt a. M. Rechnungsjahr
1883—1884.