PROPOSITIONS LOGISTIQUES VRAIES. DÉMONSTRABILITÉ. ARITHMÉTISATION
Author(s): M.-L.-G. des Lauriers
Source: *Revue des Sciences philosophiques et théologiques*, Vol. [30], Les Science Philosophiques et Théologiques: Volume ii (1941-42), pp. 327-345
Published by: Librairie Philosophique J. Vrin
Stable URL: https://www.jstor.org/stable/44410744
Accessed: 15-08-2019 00:35 UTC

PROPOSITIONS LOGISTIQUES VRAIES. DÉMONSTRABILITÉ. ARITHMÉTISATION

Jacques Herbrand a donné dans sa thèse un critère arithmétique de la vérité des propositions logistiques contenues dans la première partie (section A) des *Principia Mathematica.* Herbrand fait appel, au fur et à mesure des besoins de sa démonstration, à l'une ou à l'autre des propositions des *Principia,* en sorte que l'on mesure mal l'étendue de la démarche proprement logistique prérequise à l'introduction du critère et par conséquent l'économie sémantique réalisée par celui-ci. En second lieu, Herbrand donne un critère permettant d'attribuer à une proposition logistique donnée à priori la valeur vrai ou la valeur faux (nous les désignerons respectivement dans la suite par V et F); il montre également, mais sans y insister, que toute proposition ayant la valeur V est logistiquement démontrable à partir des axiomes élémentaires. Enfin, le critère arithmétique proposé n'étant pas, à priori, le seul possible, il importe de justifier le choix qui en est fait. Nous nous proposons, dans la présente note, de préciser à ce triple point de vue la démarche d'Herbrand, et de la souder avec plus de rigueur aux *Principia Mathematica.* Nous suivrons, par raison de commodité, un ordre didactique qu'il eût été facile mais trop long de justifier en restituant l'ordre de la recherche; nous pensons d'autre part préférable de ne supposer chez le lecteur aucune connaissance logistique antécédente.

* * *

Composition d'une propriété logistique. Idées primitives. Nous appellerons constituant élémentaire une proposition susceptible de prendre l'une des deux valeurs V on F; le mot proposition ayant ici le sens ordinaire, celui de la logique classique par exemple. Une telle proposition ne sera jamais explicitée dans notre enquête, mais sera représentée par une lettre unique : p, q, etc.

Une proposition logistique est un ensemble de constituants élémentaires liés entre eux par les idées primitives dont les symboles sont, conformément à l'axiomatique russellienne :

$\vdash$ affirmation $\vdash$ p se lit : j'affirme la proposition p (ou p a la valeur v)
$\sim$ négation $\sim$ p se lit : Négation de la proposition p.
v disjonction pvq se lit : Proposition p on proposition q.
• conjonction p•q se lit : Proposition p et proposition q.
$\supset$ implication $p \supset q$ se lit : La proposition p entraine la proposition q comme conséquence.

Il importe de noter que seul le premier de ces symboles a un sens catégorique, celui de l'affirmation. Les autres n'ont qu'un sens assertorique; c'est-à-dire qu'ils posent des structures logiques qui ne peuvent constituer des propositions que si elles sont affirmées. Ainsi, $\sim$ p ne veut pas dire : je nie la proposition p, mais : je considère la négation de p, la proposition contradictoire de p. Nier la proposition p s'écrit $\vdash . \sim p$. Il arrive qu'on sous entende le signe $\vdash$ lorsque son omission ne présente pas d'inconvénient.

Les membres d'une proposition logistique sont séparés les uns des autres par des groupes de points hiérarchisés entre eux par leur nombre; on coupera la proposition en examinant d'abord les groupes qui comportent le nombre maximum, tout comme on coupe le discours ordinaire en examinant d'abord les points, etc.

Deux autres symboles permettent utilement d'abréger l'écriture :

$=$ sépare le défini de sa définition. Défini et définition sont, à notre point de vue, rigoureusement équivalents. La seule commodité commandant le choix de l'un ou de l'autre, il est toujours loisible de remplacer l'un par l'autre en quelque expression logique que ce soit.

$\equiv$ équivalence logique. Les propositions p et q sont équivalentes lorsqu'elles s'impliquent réciproquement :

$$p \equiv q . = : p \supset q . \ q \supset p \qquad \text{Df}$$

Les idées primitives ci-dessus indiquées ne sont pas toutes indépendantes, et notamment :

v et • sont dualistiques l'une de l'autre et peuvent se définir l'une par l'autre :

$$p \cdot q : = : \sim (\sim p \cdot v \cdot \sim q) \qquad p v q : = : \sim (\sim p \cdot \sim q) \qquad \text{Df}$$

$\supset$ peut se définir au moyen de $\sim$ et v :

$$p \supset q \cdot = : \sim p . v\, q \qquad \text{Df}$$

v peut se définir au moyen de $\sim$ et $\supset$:

$$p v q \cdot = : \sim p . \supset . q \qquad \text{Df}$$

(Il faut, pour admettre ces deux dernières définitions, passer sur des nuances dans la discussion desquelles nous n'avons pas à entrer ici).

Mais il est intéressant de noter que $\sim$ ne peut être défini au moyen des autres symboles. C'est que l'idée de négation est la plus pauvre de toutes, et par là la plus générale. Nicod a même montré qu'elle peut servir à définir les autres, d'un point de vue logique bien entendu; mais cette réduction entraîne une grande complication pratique qui ne fait que traduire la priorité de l'affirmation. Nous retenons avec Russell, les trois idées primitives : $\vdash$, $\sim$, V. et les deux définitions corrélatives :

$$D_1 \quad p \supset q. = : \sim p.v.q \qquad D_2 \quad p.q: = : \sim (\sim p.v. \sim q).$$

Si, dans un énoncé logistique donné, certains constituants n'interviennent que par un groupement qui est toujours le même, on pourra considérer ce groupement comme étant lui-même un constituant élémentaire et le remplacer par une seule lettre.

Valeur d'une proposition logistique. Axiomes de valeur. Une proposition logistique qui ne comporte qu'un nombre fini de constituants élémentaires (et nous ne nous occuperons que de celles-là) peut toujours, en raison du choix qui a été fait concernant les idées primitives, se ramener à l'une des formes $\vdash$.PVQ, $\vdash . \sim$P, où P et Q sont des propositions plus simples que la proposition initiale. La lecture progressive de la proposition en ramènera donc, d'une manière univoque, la valeur à celle des complexes élémentaires. Il est par conséquent nécessaire de fixer un premier ensemble d'axiomes que nous appellerons axiomes de valeur, et qui rattachent à la valeur des constituants élémentaires celle des complexes dérivés des idées primitives.

α_1 Tout constituant élémentaire est V ou F.

α_2 Si p est V, $\sim$ p est F.

α_3 Si p est F, $\sim$ p est V.

α_4 Une disjonction est V si l'un de ses deux membres est V, F si ses deux membres sont F.

L'axiome α_4 ainsi exprimé recouvre quatre axiomes logistiquement réductibles à trois :

α_{41} Si p est V et si q est V, pvq est V.

α_{42} Si p est V et si q est F, pvq est V.

α_{43} Si p est F et si q est V, pvq est V.

α_{44} Si p est F et si q est F, pvq est F.

α_{42} et α_{43} se ramènent l'un à l'autre par A_3 (Cf. infra).

Il résulte de ces axiomes que :

α_0 Tout énoncé dans lequel on a fixé la valeur des constituants est V *ou* F.

On déterminera cette valeur en suivant de proche en proche les phases de la construction de l'énoncé proposé.

Ceci permet de déduire de α_2 et α_3 les axiomes homologues :

α'_2 Si $\backsim$ p est V, p est F.

α'_3 Si $\backsim$ p est F, p est V.

Ils se démontrent par l'absurde, mais à la condition d'admettre, conformément à α_0 que $\backsim$ p ne peut pas avoir simultanément les deux valeurs V et F.

Axiomes propositionels. Les axiomes de valeur suffisent à fixer la qualification du discours logistique, mais non a en assurer le développement. Il faut pour cela des axiomes faisant passer d'une proposition vraie à une proposition vraie, les deux propositions comportant un nombre de constituants différents. Nous conserverons les cinq axiomes des *Principia*, la question de leur réduction étant sans rapport immédiat avec l'objet que nous avons en vue.

A_1 $\vdash$: pvp.$\supset$.p — A_3 $\vdash$: pvq.$\supset$.qvp.

A_2 $\vdash$: q.$\supset$.pvq — A_4 $\vdash$: pv(qvr).$\supset$.qv(pvr).

A_5 $\vdash$:. q$\supset$r:pvq.$\supset$.pvr — A'_5 $\vdash$:. q$\supset$r:p$\supset$q.$\supset$.p$\supset$r.

(A_5 et A'_5 sont équivalents; nous les introduisons simultanément par commodité).

La règle qui permet de passer d'une proposition vraie à une autre est, dans les *Principia* :

R $\vdash.\Phi(x) : \Phi(x).\supset.\Psi(x) .: \supset : \vdash.\Psi(x)$

$\Phi(x).\Psi(x)$: fonctions propositionnelles.

En d'autres termes, une proposition impliquée par une proposition vraie est vraie.

Nous retenons également R à cause de la précision formelle requise dans les démonstrations, mais il faut noter qu'elle est implicitement contenue dans les axiomes α_2 et α_4 : si p est V, $\backsim$ p est F (α_2); et pour que p$\supset$q. = : $\backsim$ p.vq soit V, il faut que q soit V (α_{43}).

C'est par le jeu des axiomes et conformément à la règle que peut et doit être obtenue toute proposition logistique. Comme la règle fait passer d'une proposition V à une proposition V, il suffit, pour qu'une proposition déduite des axiomes soit V que les axiomes aient eux-mêmes la valeur V. Cette condition est d'ailleurs requise à leur affirmation et il ne saurait s'agir de le démontrer. Il faut simplement vérifier la cohérence des deux séries d'axiomes. Les axiomes α n'ont fait que dégager sous une forme analytique plus précise la valeur V implicitement accordée aux axiomes A du fait qu'ils sont choisis comme axiomes.

Il résulte tout d'abord de α_0 que les axiomes A ont la valeur V ou F, étant supposé que la valeur V ou F a été attribuée aux constituants. Mais une proposition logique n'ayant d'intérêt que si elle est V, quelles que soient les valeurs prises par ses constituants, il doit en être de même des axiomes. On pourrait le vérifier en donnant aux constituants les valeurs V ou F de toutes les manières possibles. Il est plus simple de montrer que les A ne peuvent pas être F en se souvenant que, d'après α_4 :

pvq n'est F que si p et q sont F
p⊃q n'est F que si p étant V, q est F

Il est plus simple de raisonner sur la valeur F parce que celle-ci, attribuée aux symboles v ⊃ détermine d'une manière unique la valeur de leurs constituants. Ainsi par exemple, pour que A_5 soit F, il faut :

$$\text{pvq.⊃.pvr : F, donc} \begin{cases} \text{pvr : F} & \text{donc} \quad \text{p : F} \quad \text{r : F.} \\ \text{pvq : V} & \text{donc} \quad \text{(p : F) q : V.} \end{cases}$$

Mais alors q⊃r est F, tandis qu'il devrait être V pour que A_5 fût F.

Les deux séries d'axiomes ne sont d'ailleurs pas indépendantes. Si en effet on admet A comme V (au lieu de vérifier cette valeur comme nous venons de le faire), on attribue du même coup une valeur à certaines propositions qui peuvent impliquer les axiomes α. Ainsi on peut démontrer à partir des A (Cf. infra). ⊢ : ∽ p.v.p. qui, par α_4, redonne α_3 et α'_3. Il y aurait lieu d'en tenir compte si on voulait réduire au minimum le nombre des axiomes exprimés, mais la présentation adoptée offre l'avantage de la symétrie.

Notons que l'axiomatisation précédente comporte trois stades :

I. Idées primitives. ⊢ ∽ v (.⊃).
II. Axiomes de valeur. α_1 α_2 α_3 α_4. (α_0 α'_2 α'_3).
III. Axiomes propositionnels. A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 (A'_5).

Les idées primitives sont logiquement antérieures aux axiomes de valeur, comme l'être aux qualifications qu'il reçoit de par la relation que l'esprit soutient avec lui; mais la notion du vrai, mise en œuvre par les axiomes de valeur, est à la fois postérieure à l'affirmation et antérieure à la négation qui sont l'une et l'autre des idées primitives. Il n'est donc pas possible d'établir une priorité absolue, et cela tient à la richesse irréductible de l'affirmation qui est simultanément idée et valeur. Les axiomes propositionnels, au contraire, sont postérieurs aux deux premiers stades, sans ambiguïté. Nous rencontrons là un cas très net de subalternation. La subalternante apporte toute l'intelligibilité; la subalternée doit son originalité irréductible à l'apport de principes nouveaux, hétérogènes à la subalternante. L'intelligibilité de la logistique tient dans les axiomes de valeur (nous avons vu qu'ils incluent la règle) qui sont la codification des lois de l'esprit et qui appartiennent à toutes les logiques à deux valeurs. Mais si la logistique n'ajoute rien de ce point de vue, elle ajoute tout ce qui découle des axiomes A sans lesquels les axiomes α ne donneraient aucun discours logique et tout ce qui découle de leur forme précise sans laquelle la science du discours logique demeure à un stade rudimentaire.

* * *

Nous croyons devoir donner ici la démonstration des propositions qui seront requises pour l'enquête ultérieure. Ces propositions se trouvent dans les *Principia*, mais leur enchaînement dans cet ouvrage ne répond pas au principe d'économie qui nous inspire principalement.

1 Si on a $\vdash . p \supset q$, $\vdash . q \supset r$,... $\vdash . s \supset t$ on a $\vdash . p \supset t$.

A'_5 $\vdash :. q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r$ $\vdash . q \supset r$ et R : $\vdash : p \supset q . \supset . p \supset r$ $\vdash . p \supset q$ et R : $\vdash : p \supset r$.
et ainsi de suite par récurrence.

1' Si, outre l'hypothèse 1, on a $\vdash . p$ on a également (par R) : $\vdash . t$.

Dans les cas suffisamment simples nous nous contenterons d'indiquer la marche des calculs en renvoyant, par une référence au début de la ligne, aux axiomes et propositions mis en œuvre.

2 $\vdash : \sim p . v p$.

A_2 (q — p; nous indiquons par ce tiret que la lettre q qui figure dans A_2 doit être remplacé par p) :

$\vdash : p \supset . p v p$. ; A_1, **1** $\vdash : p \supset p$. ; Définition de $\supset$ (D_1) $p \supset p . = : \sim p . v p$.

3 $\vdash : p v . \sim p$.

A_3 (p — $\sim p$; q — p); **2**; R.

4 $\vdash : p \supset . \sim \sim p$.

3 (p — $\sim p$), D_1.

5 $\vdash : \sim \sim p . \supset p$.

4 (p — $\sim p$). $\vdash : \sim p . \supset . \sim \sim \sim p$. (1)

A_5 (q — $\sim p$; r — $\sim \sim \sim p$). $\vdash :: \sim p . \supset . \sim \sim \sim p : \supset :. p v . \sim p : \supset : p v . \sim \sim \sim p$.

$\vdash .(1)$; R; $\vdash . 3$; R $\vdash : p v . \sim \sim \sim p$. A_3; R; D_1.

6 $\vdash :. p \supset q . \supset : \sim q . \supset . \sim p$.

A_5 (p — $\sim p$; r — $\sim \sim q$). $\vdash :: q \supset . \sim \sim q : \supset :. \sim p . v q : \sim p . v . \sim \sim q$.

4 (p — q); R $\vdash :. \sim p v q : \supset : \sim p . v . \sim \sim q$. A_3 (p — $\sim p$; q — $\sim \sim q$); **1**; D_1.

7 $\vdash :. q \supset r : \supset : q v p . \supset . r v p$.

L'axiome A_5 énonce la possibilité de multiplier à gauche les deux membres d'une implication par un même terme. Nous avons ici un théorème de multiplication à droite.

A_3 et A_5 $\vdash :. M . \supset . p v r : \supset : M . \supset . r v p$. M désignant une expression quelconque (1)

$M = p v q$; A_5; (1); **1** $\vdash :. q \supset r : \supset : p v q . \supset . r v p$. (2)

A_3 (p — q; q — p); **6** $\vdash : \sim (p v q) . \supset . \sim (q v p)$. (3)

(3); A_5; R $\vdash :. N v . \sim (p v q) : \supset : N v . \sim (q v p)$. (4)

A_3 et R appliqués successivement pour les deux membres de (4) et enfin D_1 donnent : $\vdash :. p v q . \supset . N : \supset : q v p . \supset . N$ (5)

(2); (5) (N — $r v p$); **1**. Ceci montre qu'on peut écrire dans un ordre quelconque les deux dernières disjonctions qui se trouvent dans A_5 et **7**.

8 $\vdash : (p v q) v r . \supset . p v (q v r)$.

A_3; A_4 successivement : $\vdash : (p v q) v r . \supset . r v (p v q) . \supset . p (r v q)$. (1)

A_3 (p — r); A_5; R $\vdash : p v (r v q) . \supset . p v (q v r)$. (2)

9 $\vdash : p v (q v r) . \supset . (p v q) v r$.

(2) (q — r; r — q); A_4; A_3; **1**.

8'; **9'**. On démontrera de la même façon [cf. p. 337, VI] que l'on peut, dans une disjonction composée telle que (pvq) vr, intervertir les constituants d'une manière quelconque : les expressions obtenues sont équivalentes.

10 Si on a $\vdash P$ et si on a $\vdash Q$, on a $\vdash : P . Q$.

8 $(p — \sim P;\ q — \sim Q;\ r — \sim (vP.v.\sim Q))$; **3**; R; D_1.

Les propositions qui suivent pourraient être établies directement, mais on simplifie beaucoup leur démonstration en utilisant un résultat que la clarté de l'exposition a conduit à énoncer plus loin, mais qui s'appuie exclusivement sur les propositions **1** à **7**. Ce résultat est le suivant : *Si on remplace dans un énoncé logique T un constituant par un constituant équivalent, on obtient un énoncé T′ équivalent à T et par conséquent démontrable en même temps que T.* (Cf. p. 334 I).

Ceci permet, dans ce qui suit immédiatement, de ne pas regarder comme différents deux énoncés qui ne diffèrent entre eux que par des expressions dont l'équivalence résulte des propositions **1** à **10**.

Pour exprimer que la démonstrabilité de P résulte de celle de Q, à la condition que la proposition R soit vraie, nous écrirons :

$P \underset{\text{mod. R}}{\longleftarrow} Q$ ou bien $P \longleftarrow Q$ mod. R. (mod. étant l'abréviation [de « module »).

Dans ces conditions la démonstration de P revient à celle de Q et à celle de R. (Le résultat ci-dessus rappelé est toujours sous entendu dans R.)

11 $\vdash :. p.q : \supset p.$

11. $= . \vdash : \sim \sim (\sim p.v.\sim q).v.p \underset{\text{mod. 4;5}}{\longleftarrow} \vdash : (\sim p.v.\sim q).v.p \underset{\text{mod. 8′,9′}}{\longleftarrow} \vdash : [\sim q.v.(\sim p.v.p)$.

et cette dernière proposition résulte de **3**; A_2

12 $\vdash :. p.q : \supset q$

Comme pour **11**. On voit que c'est surtout dans le premier passage (celui qui a pour mod. 4;5) que la proposition I rappelée ci-dessus rend service en économisant un grand nombre d'intermédiaires. Mais c'est la proposition suivante qui justifie l'infraction que nous nous sommes permis par rapport à l'ordre didactique.

13 $\vdash :. pv(q.r) . \supset : pvq.pvr$

11; A_5 $\vdash : pv(q.r).\supset.pvq$ 12; A_5 $\vdash : pv(q.r).\supset.pvr$ (1)

$13 \longleftarrow (1)$; 10; R mod. $\vdash :: p\supset q . p\supset r : \supset : . p . \supset : q.r$ (2)

Tout revient donc à démontrer (2) (nous supprimons pour simplifier le signe initial $\vdash$).

$p\supset q . p\supset r :\supset:. p . \supset : q.r$

$\uparrow$ mod. $P\supset . Q\supset R : \supset : P.Q.\supset R. \longleftarrow \sim Pv(\sim QvR).\supset.\sim\sim(\sim Pv\sim Q)vR$ $\uparrow$
4; 5; 8′; 9′.

$p\supset q.\supset:. p\supset r . \supset : p.\supset : q.r$

$\uparrow$ mod. $(p\supset.r\supset Q).\supset:(p\supset r).\supset.p\supset Q$.

$p\supset q . \supset :: p . \supset :. r.\supset : q.r$

$\uparrow$ mod. $R\supset.S\supset T : \supset : S.\supset.R\supset T$

$\uparrow$

$\uparrow$

$(p\supset r).\supset:(p\supset.r\supset Q).\supset.p\supset Q$.

$(p.\sim q)\ v\ \{\sim p\ v[\sim r\ v\ (q.r)]\}$

$\uparrow$

$\sim Rv(\sim SvT).\supset.\sim Sv(\sim RvT)$
8′; 9′ $\uparrow$

$\uparrow$

$(p.\sim q)\ v\ (q.r)\ v\ (\sim p\ v\ \sim r)$

$p\supset r.\supset:(\sim pv\sim r)\ v\ Q.\supset.\sim p\ v\ Q$. $\uparrow$ mod. 7: 1.

$\uparrow$

$p\supset r.\supset:\sim pv\sim r.\supset.\sim p$. $\uparrow$ mod. 6; A_1; A_2.

A_5

$\sim r\supset\sim p.\supset:\sim p\ v\ \sim r.\supset.\sim p\ v\sim p$ $\uparrow$
A_5

Là où le module n'est pas mentionné, il comporte simplement les

propositions 8, 9, 8′, 9′.; et on sous-entend, partout la possibilité de substituer l'une à l'autre deux expressions équivalentes. Les traits obliques font ressortir les articulations essentielles de l'analyse régressive.

14 $\vdash :. (q.r,) \vee p. \supset : p \vee q. p \vee r.$

$14 \leftarrow 13$ mod. A_3.

15 $\vdash :. p \vee q. p \vee r : \supset. p \vee (q.r).$

16 $\vdash :. p \vee q. p \vee r : \supset. (q.r) \vee p.$

Qui ne sont autre que la proposition (2) de la démonstration de 13, toujours à une équivalence près.

* * *

Démonstrabilité des propositions vraies. Il résulte de l'axiomatisation que toute proposition démontrée est V. Démontrer veut dire déduire des axiomes A par application de la règle. La valeur des axiomes étant indépendante de celle des constituants, il en est de même de la valeur de la conclusion. Ceci suppose seulement que si au cours de la transformation on introduit des constituants qui ne figurent pas dans les axiomes, leur valeur est sans influence sur celle de la consécution. Nous allons démontrer que, réciproquement :

Toute proposition logistique ayant la valeur V quelles que soient les valeurs de ses constituants, est démontrable à partir des axiomes A.

Pour abréger nous désignerons par T une telle proposition. Remarquons que si T′ est une proposition logiquement équivalente à T ($T \supset T'$ *et* $T' \supset T$), T′ est vraie en même temps que T d'après la règle et T′ est démontrable en même temps que T d'après A_5. Dire en effet que T est démontrable, c'est dire qu'il existe une proposition $\vdash . A \supset T$ dans laquelle A désigne une combinaison convenable des axiomes A. On en déduit, par A_5, $T \supset T'$, et par deux applications de la règle $\vdash . A \supset T'$. La question de la démonstrabilité demeurant invariante par l'équivalence logique, nous substituerons successivement à T des propositions équivalentes jusqu'à arriver à une proposition dont la démonstrabilité est évidente.

I. *Si on remplace dans T un constituant par un constituant équivalent, on obtient une proposition T′ équivalente à T.*

Nous désignons par p le constituant que nous voulons remplacer par le constituant équivalent p′.

a. Le proposition est vraie lorsque T se réduit à une négation ou à une disjonction :

$p \supset p'. \supset : \backsim p'. \supset. \backsim p$ (1) $\quad p \supset p' : \supset : p \vee q. \supset. p' \vee q \quad p \supset p' : \supset : q \vee p. \supset. q \vee p'$

(1) Pour déduire T′ de T on partira de $p \supset p'$; et pour déduire T de T′ on partira de $p' \supset p$; tandis que le choix est inverse si T est une disjonction.

Ce sont respectivement **6**, **7**, A_5.

b. La même suite *finie* d'opérations appliquée à deux énoncés équivalents conduit à deux énoncés équivalents.

Nous supposons que E et E′ sont équivalents; nous supposons d'ailleurs que la même suite d'opérations conduise d'une part à la suite d'énoncés $E\ E_1 \ldots E_n$, et d'autre part à la suite. $E' E'_1 \ldots E'_n$. Les opérations dont il est ici question sont : $\sim$ et v. Il suffit alors d'appliquer *a.* de proche en proche :

$$E \supset E' . \supset . E_1 \supset E'_1 \text{ avec } \begin{cases} E_1 = \sim E \text{ et } E'_1 = \sim E'. \text{ (on suppose aussi } E' \supset E). \\ \text{ou } E_1 = E v p \text{ et } E'_1 = E' v p. \\ \text{ou } E_1 = p v E \text{ et } E'_1 = p v E'. \end{cases}$$

Puis $E_1 \supset E'_1 . \supset . E_2 \supset E'_2$ en passant des E_1 aux E_2 comme des E aux E_1. Etc. On conclut alors des E aux E_n au moyen de **1**.

c. Numérotons alors les incidences de p dans T, par exemple de la gauche vers la droite. Aux deux énoncés (ici des constituants) équivalents p et p′ appliquons la même suite d'opérations, savoir celle qui fait passer de p considéré dans sa première incidence à l'énoncé T lui-même. On obtient ainsi un énoncé T_1, équivalent à T d'après *b.*, et dans lequel la première incidence de p est remplacée par p′ : $p \supset p' . \supset . T \supset T_1$ (1).

On opérera sur T_1 comme sur T; c'est-à-dire qu'on effectuera sur les deux énoncés équivalents p et p′ la même suite d'opérations : savoir celle qui conduit de la première incidence de p dans T_1 à T_1 lui-même. Cette suite d'opérations, appliquée à p′ conduit à un énoncé T_2 qui se déduit formellement de T par le fait que les *deux* premières incidences de p y ont été remplacées par p′, et on a : $p \supset p' . \supset . T_1 \supset T_2$ et par suite (puisque, par hypothèse, on a séparément $\vdash . p \supset p'$) ; $\vdash . T \supset T_2$. Au bout d'un nombre suffisant d'opérations, p aura été remplacé par p′ dans toutes ses incidences.

II. *On obtient une proposition T′ équivalente à T en supprimant ou en ajoutant devant l'un de ses constituants un nombre pair de négations superposées.*

Il résulte en effet de **4**, **5**, **6** que cette modification ne change pas la valeur du constituant envisagé.

Il suffit alors d'appliquer I.

III. *Il existe une proposition T″ équivalente à T′, et dans laquelle le signe $\sim$ ne porte sur aucun symbole opératoire mais seulement sur les*

Comme on ne restreint pas la forme de T, on supposera à la fois $\vdash . p \supset p'$ et $\vdash . p' \supset p$ pour passer soit de T à T′ soit de T′ à T.

(1) Pour déduire T′ de T on partira de $p \supset p'$; et pour déduire T de T′ on partira de $p' \supset p$; tandis que le choix est inverse si T est une disjonction. Comme on ne restreint pas la forme de T, on supposera à la fois $\vdash . p \supset p'$ et $\vdash . p' \supset p$ pour passer soit de T à T′ soit de T′ à T.

constituants élémentaires. (On suppose ici l'utilisation simultanée des deux opérations v et •, ce qui implique la réintroduction de cette dérnière).

Considérons dans T' le champ maximum (ou l'un des champs maximum) sur lesquels porte le signe $\sim$ et dans lequel figuré le signe v. T' est par exemple de la forme :

T' $\qquad \vdash : \sim (PvQ) .v. \; R.$

où P, Q, R sont des expressions analogues à T' mais de moindre étendue.

De **4**, **5**, et Ib on déduit l'équivalence de T' et de

$T_1 \quad \vdash : \sim (\sim \sim P.v. \sim \sim Q) .v. R .:=:. \vdash : (\sim P. \sim Q) .v. R$ (par D_2)

Dans la dernière proposition écrite, la superposition initiale de $\sim$ à v a disparu. Si P se présente, sous la forme $\sim P'$ on supprimera, conformément à II, les deux signes $\sim \sim$ superposés devant P'. Si P est de la forme P_1 v P_2 on traitera T_1 comme T, de manière à faire disparaître la superposition $\sim (P_1$ v $P_2)$. En continuant de la sorte, on arrive à une proposition T_2.

T_2 $\qquad \vdash :. (\quad) . \sim Q : v. R$

dans laquelle la paranthèse qui remplace $\sim P$ ne contient plus d'irrégularités. On appliquera ensuite le même procédé pour réduire les irrégularités contenues dans Q puis celles contenues dans R.

La proposition à laquelle on aboutit comprend alors des constituants élémentaires affectés ou non du signe $\sim$ et groupés entre eux par les seuls symboles v et •. C'est cette troisième forme de la proposition T que nous désignons par T''.

IV. *Il existe une proposition T''' équivalente à T'' dans laquelle le signe de disjonction porte exclusivement sur les constituants élémentaires (affectés ou non du signe $\sim$) mais ne porte plus sur aucun signe de conjonction.* (Ce sont au contraire les signes v qui entrent dans le champ du signe •). Considérons l'un des *plus petits* champs (car il peut y en avoir plusieurs de même étendue et indépendants) sur lesquels porte le signe v et qui comporte un signe•. Soit par exemple Pv (Q.R) où P,Q,R ne présentent pas la superposition de v à • (sans quoi, il aurait fallu considérer un champ plus petit). On s'appuiera sur **13** ou **14**, **15** ou **16**

13 $\vdash :. pv(q.r) . \supset : pvq . pvr$ $\qquad$ **14** $\vdash :. (q.r) vp . \supset : pvq . pvr.$

Les deux expressions pv (q•r) et pvq• pvr étant équivalentes, on peut leur appliquer la proposition Ib. La *même* construction qui, appliquée à la première, conduit à T'', conduira, appliquée à la seconde, à une proposition équivalente à T'' et contenant une irrégularité de moins. Il suffira de pousuivre de proche en proche, et de ramener par **1** les équivalences successives à une équivalence unique. Dans le cas où le champ initial se présente sous la forme (Q•R) vP, on fait usage de **14** et **16**. Au terme de ces opérations, la proposition T‴ se présente sous la forme :

T‴ $\vdash : [(P \cdot Q) \cdot R] \ldots \cdot (S \cdot U)$

la distribution des parenthèses, qui règle celle des signes de conjonction, pouvant être quelconque; P,..., U sont des propositions formées de constituants élémentaires affectés ou non du signe ∽ et séparés entre eux par des signes de disjonction.

Nous appellerons P,..., U propositions *intrinsèquement disjonctives*, pour les distinguer des propositions *apparemment* disjonctives dans lesquelles p•q est écrit sous la forme ∽ (∽ p•v• ∽ q) et qui comportent la superposition de ∽ à v. Nous appellerons proposition intrinsèquement disjonctive *normale* celle pour laquelle l'ordre de superposition des disjonctions est aussi l'ordre dans lequel elles se présentent. Ainsi : [(pvq)r] vs. L'absence de parenthèse équivaut, par convention, à la forme normale.

Rappelons que, d'après la démarche précédente, T⊃T‴ et T‴⊃T, d'où résulte :

que la démonstrabilité de T et la démonstrabilité de T‴ sont simultanées

que T‴ a, comme T, la valeur V quelles que soient les valeurs des constituants élémentaires.

V. *La démonstrabilité de T est équivalente à celle des propositions intrinsèquement disjonctives qui la constituent.*

Cela résulte immédiatement de l'application répétés de **10, 11, 12**.

VI. *Toute proposition intrinsèquement disjonctive D, vraie quelles que soient les valeurs des constituants élémentaires, est démontrable à partir des axiomes A.*

Nous montrerons d'abord (nous ne ferons qu'esquisser un raisonnement d'arithmétique élémentaire bien connu) qu'il existe une proposition normale D′ équivalente à D et dans laquelle les constituants peuvent être rangés dans un ordre arbitraire.

a. D est équivalente à une proposition normale D_1, les constituants étant rangés dans le même ordre. Cela résulte de **8**, **9** lorsqu'il y a trois constituants. Il suffit donc de raisonner par récurrence. Supposons que D comporte n constituants et se présente sous la forme PvQ. Q, ayant moins de n constituants, peut être mis sous forme normale Rvw. Il en sera de même, pour la même raison, de l'ensemble $PvR = \pi$ et par conséquent de πvw. **8** et **9** suffisent d'ailleurs à expliciter les démonstrations d'équivalence entre ces diverses formes.

b. D_1 est équivalente à la proposition qui s'en déduit par permutation des deux derniers constituants.

c. D_1 demeure équivalente à elle-même par permutation de deux constituants consécutifs.

d. Id. pour deux constituants quelconques.

La proposition D est un ensemble de constituants élémentaires c'est-à-dire de lettres :

affectées ou non du signe $\sim$ et séparées par le signe v;
pouvant prendre à volonté la valeur V ou la valeur F.

Comme D est V, quelles que soient les valeurs des lettres qui y entrent :

— il est impossible que toutes les lettres qui figurent dans D soient différentes.

— il est impossible que, relativement à chacune des lettres, toutes les incidences soient simultanément privées ou simultanément affectées du signe $\sim$.

Dans l'un et l'autre de ces cas en effet, on pourrait choisir la valeur des lettres de telle manière que D ait la valeur F.

— il y a donc pour une lettre au moins une incidence affectée du signe $\sim$ et une qui en est privée.

— en effectuant les permutations convenables, légitimées par VI *a*, *b*, *c*, *d*, on peut rapprocher ces deux incidences et donner à D la forme $[(\sim p.vp)vQ]$ ou $[Qv(\sim p.vp)]$

— cette derniere proposition résulte de $\vdash : \sim p.vp.$ **2** par **A2**.

Notons que cette démonstration de la démonstrabilité fournit une démonstration effective de la proposition. Il suffira d'effectuer les opérations qui correspondent pratiquement aux différentes étapes :

réduction des négations superposées à zéro ou à une; et ce même principe doit être appliqué chaque fois que des négations superposées réapparaissent ;

distribution de tout signe v sur les différents membres de son champ qui seraient séparés par le signe• ;

séparation de la proposition en propositions intrinsèquement disjonctives ;

réduction de chacune de ces dernières à une forme normale dans laquelle deux incidences opposées de la même lettre soient consécutives ;

preuve de chacune de ces propositions, et remonter la suite des opérations.

Les propositions 1 à 16 suffisent donc à assurer la démonstration de toute proposition logistique V. Mais il convient d'ajouter que la démonstration dont on vient d'établir l'existence sera généralement très longue. Il est donc d'autant plus utile d'avoir un moyen de reconnaître si la proposition est V sans avoir à la démontrer. C'est l'objet de l'arithmétisation.

* * *

Discussion des symbolismes possibles. Choix de l'un d'entre eux. La représentation de la valeur logique d'une proposition au moyen de l'arithmétique est fondée sur le parallélisme suivant :

α Si on adjoint du F à une disjonction, elle conserve la même valeur.	*a* Si on ajoute o (ou un nombre pair) à un nombre, il demeure le même (ou bien conserve la même parité).
β Si on adjoint du V à une conjonction, elle conserve la même valeur.	*b* Si on multiplie par 1 (ou par un nombre impair) un nombre, il demeure le même (ou bien conserve la même parité).
γ Si on adjoint du V à une disjonction, on obtient une disjonction ayant la valeur V.	*c* Si on multiplie par o (ou par un nombre pair) un nombre, on obtient o (ou bien un nombre pair.)
δ Si on adjoint du F à une conjonction, on obtient une conjonction ayant la valeur F.	*d* Si on ajoute 1 (ou un nombre impair) à un nombre, on obtient un nombre de parité opposée.
ε Si on prend la contradiction d'une proposition, elle change de valeur.	

En quelque domaine que ce soit les invariants, lorsqu'ils existent, constituent le répondant concret de l'unité et sont de nature à assurer la maîtrise de tout l'ensemble. Aussi est-ce par le rapprochement des invariants que s'établissent les connexions entre domaines différents. Nous distinguerons ici du point de vue de l'invariance :

— cas de permanence du donné (c'est-à-dire du terme antérieur à l'opération effectuée)

a et α, et alors O = F   v = +   b et α, et alors 1 = F   v = ×
a et β, et alors O = V   • = +   b et β, et alors 1 = V   • = ×

— cas de permanence du résultat (c'est-à-dire que le résultat ne dépend que de l'opération effectuée et non pas du terme dont on est parti).

c et γ, et alors O = V   v = ×   c et δ, et alors O = F   • = ×

— cas de modification du donné.

d et ϵ et alors : pair, impair = V, F,   ∽ = +.

Il y a évidemment intérêt à retenir simultanément le plus possible de ces rapprochements; mais il faut que chacun des signes • v ∽

corresponde à un seul des deux signes $+$ $\times$, et réciproquement. Or on a le tableau de correspondance :

	$\bullet$	v	$\sim$
$+$	aβ	aα	dϵ
$\times$	bβ cδ	bα cγ	

On ne peut admettre simultanément les rapprochement qui figurent dans une même rangée soit horizontale (un signe arithmétique correspondrait à plusieurs signes logiques), soit verticale (un signe logique correspondrait à plusieurs signes arithmétiques). Il reste quatre cas possibles :

I	aβ, bα, cγ et alors	$0 = V$ $\;1 = F$ $\;v = \times$ $\;\bullet = +$
II	aα, bβ, cδ et alors	$0 = F$ $\;1 = V$ $\;v = +$ $\;v = \times$
III	dϵ, bα, cγ et alors	$0 = V$ $\;1 = F$ $\;v = \times$ $\;\bullet = + 1$
IV	dϵ, bβ, cδ et alors	$0 = F$ $\;1 = V$ $\;\bullet = \times$ $\;v = + 1$

Les symbolismes I et II sont corrélatifs l'un de l'autre tout comme les deux opérations v et • Ils conserveraient, au point de vue des seuls rapprochements précédents, la même portée si on remplaçait 0 par un nombre pair et 1 par un nombre impair. Mais il faut tenir compte de tous les axiomes qui règlent la valeur d'une disjonction ou d'une conjonction logique, et pas seulement des propriétés énoncées ci-dessus de α à ϵ. Par exemple, pour I, $(p + q)$ étant pair quand p et q sont impairs, p•q serait V quand p et q sont F; et pour II, pvq serait F quand p et q sont V. On doit donc, pour rectifier ces symbolismes, prendre seulement deux valeurs, par exemple pour I :

$O = V$. Valeur différente de 0, 1 par exemple $= F$.

toute valeur non nulle devant être ramenée à 1.

alors $(p + q)$ n'est bien nul que si p et q le sont.

Le symbolisme III se déduit de I en éliminant le cas qui faisait difficulté; et de même IV de II.

En sorte que, pour ces deux derniers symbolismes, il n'y a pas besoin de convention supplémentaire.

Étant donné, d'autre part, que nous avons retenu v, et non •, c'est le symbolisme III qu'il convient d'adopter. Nous poserons donc :

S	$\sim\; = +1$	V = Nombre pair
	$v = \times$	F = Nombre impair.

Nous appellerons *expression arithmétique équivalente* ou plus simplement *équivalence arithmétique* d'une proposition logistique l'expression obtenue en remplaçant les signes $\sim$, v et les constituants élémentaires par leurs correspondants arithmétiques. Lorsque les valeurs des constituants élémentaires demeurent indéterminées (et c'est le cas général), on remplace ceux-ci par une lettre pouvant désigner un nombre pair ou impair. Par exemple :

3 $\vdash : p \vee . \sim p$ Equivalence $p\,(p+1)$
6 $\vdash :. p \supset q . \supset : \sim q . \supset . \sim p$ Equivalence $[(p+1)\,q+1]\,\{[(q+1)+1](p+1)\}$

L'équivalence arithmétique, à supposer qu'elle n'ait encore subi aucune transformation, ne comporte que les deux opérations : $+\ 1$, et multiplication de *deux* facteurs. Réciproquement d'ailleurs, à une expression arithmétique qui ne comporte que ces deux opérations, on peut faire correspondre d'une manière unique une proposition logistique.

Les équivalences des opérations nouvelles sont :

$p \vee q \quad p \times q; \quad p \cdot q \quad pq + (p+q); \quad p \equiv q\,[(p+1)q+1]\,[q+1)p+1]+1$
$\sim p \quad p+1; \quad p \supset q \quad (p+1)q$ [que l'on ramènera à : $p+q$]

On pourrait les déterminer à partir des axiomes α. Par exemple, l'équivalence de $p \vee q$ doit être une fonction de deux nombres, paire si l'un au moins est pair, impaire si les deux sont impairs, etc...

Les équivalences arithmétiques des axiomes de valeur (α) sont conséquences des axiomes de l'arithmétique ordinaire. L'importance de cette remarque, c'est qu'elle permettra de faire bénéficier la logistique des simplifications de l'arithmétique. Il suffit, pour l'établir, de dresser le tableau des équivalences arithmétiques des axiomes α.

α_0 Toute proposition a la valeur V ou la valeur F.	
α_1 Tout constituant a la valeur V ou la valeur F.	β_1 Tout nombre est pair ou impair.
α_2 Si p est V, $\sim p$ est F.	β_2 Si p est pair, $(p+1)$ est impair.
α_3 Si p est F, $\sim p$ est V.	β_3 Si p est impair, $(p+1)$ est pair.
α'_2 Si $\sim p$ est V, p est F.	β'_2 Si $(p+1)$ est pair, p est impair.
α'_3 Si $\sim p$ est F, p est V.	β'_3 Si $(p+1)$ est impair, p est pair.

Les deux axiomes α_0 et α_1 n'ont qu'un seul correspondant β_1; mais on peut attribuer à celui-ci un double sens : tout nombre est, *a priori*, pair ou impair; ou bien : le nombre qui *résulte de l'effectuation* des opérations $+$ et $\times$ sur des nombres pairs ou impairs est encore un nombre pair ou impair. Et sous la première forme, l'axiome β_1 est conséquence des axiomes : β_1 (deuxieme forme), β_2, β_3; tout comme α_0 résulte des axiomes α_1, α_2, α_3.

Nous avons vu d'autre part que les deux axiomes α'_2 α'_3 se déduisent de α_2 et α_3 : et de même β'_2 et β'_3 se déduisent de β_2 et β_3. Enfin, la proposition $\vdash : p \vee . \sim p$ permet de déduire α_3 et α'_3 des autres α. Son équivalence arithmétique est : $p(p+1)$ est pair; c'est-à-dire que l'un au moins des deux nombres p et $(p+1)$ est pair, ce qui redonne β_3 et β'_3. Ceci montre simplement que les axiomes et règles de l'arithmétique ordinaire comprennent comme cas particulier les axiomes β requis à l'arithmétisation.

Toute proposition vraie est représentée par un nombre pair et toute proposition fausse par un nombre impair.

C'est-à-dire que si on calcule, conformément aux règles de l'arithmétique définie par les axiomes β, l'expression arithmétique équivalente d'une proposition logistique, on trouve un nombre que nous appellerons *nombre représentatif*. Ce nombre est pair pour une proposition vraie, impair pour une proposition fausse.

L'énoncé est exact :

a pour les symboles élémentaires par définition du symbolisme adopté S ;

b pour $\backsim$ p en vertu de la succession d'équivalences logiques (double implication) :

$$\backsim pV \underbrace{\qquad}_{\alpha'_2\,\alpha_3} pF \underbrace{\qquad}_{\text{définition}} p \text{ impair} \underbrace{\qquad}_{\beta'_2\,\beta_3} (p+1) \text{ pair}$$

c pour pvq : on le montre en rapprochant α_4 de β_4 comme on vient de rapprocher α'_2 et α_3 de β'_2 et β_3.

Il suffit donc de procéder par récurence. La proposition envisagée T est de l'une des deux formes $\backsim$ P, QVR. Si l'énoncé est vrai pour P,Q,R, il résulte de b, c qu'il est vrai pour T, Or il est vrai pour les membres d'étendue minimum en vertu de a, b, c.

On peut encore montrer comme suit qu'une proposition vraie T est représentée par un nombre pair. T, étant vraie, est démontrable : c'est-à-dire qu'on peut l'obtenir par la règle à partir des axiomes. Or la règle fait passer d'un nombre pair à un nombre pair ; car $P \supset Q$ étant V, son équivalence $(P + 1)Q$ est paire en sorte que la parité de P exige celle de Q. D'autre part les équivalences des axiomessont des nombres toujours pairs comme on le vérifie aisément. Cette seconde démonstration suppose que T est V quelles que soient les valeurs de ses constituants, tandis que la première fait abstraction de cette hypothèse.

Inversement, si T est F, $\backsim$ T est V, et le nombre représentatif de T est impair puisque consécutif à un nombre pair.

Toute proposition dont le nombre représentatif est pair est V, toute proposition dont le nombre représentatif est impair est F. Il résulte en effet de la manière dont la proposition est construite que sa valeur logique d'une part, la parité de son nombre représentatif d'autre part, sont déterminés univoquement en fonction des éléments homologues relatifs aux constituants élémentaires. Il suffit alors de raisonner par l'absurde à partir de l'énoncé précédent.

Calcul du nombre représentatif. Polynôme indicateur. C'est seulement la parité du nombre représentatif qui importe. Étant donné le type des expressions arithmétiques équivalentes (qui contiennent seulement + 1 et la multiplication de deux facteurs), les axiomes β suffisent entièrement pour déterminer cette parité. Mais il est évident que si on applique aux équivalences arithmétiques, non seulement les opérations qui correspondent aux axiomes β mais *toutes* les opérations de l'arithmétique élémentaire (et notamment $(a + b)c = ac + bc$...), on obtient par les deux voies le même nombre et partant un nombre de même parité. Il est donc légitime, pour la détermination du nombre représentatif :

de supposer qu'on est en arithmétique ordinaire;

d'effectuer toutes les simplifications de calcul résultant du fait qu'on cherche exclusivement la parité du résultat.

Il en est une fort importante signalée par Herbrand : Ap et Ap^n sont de même parité puisque leur différence, étant divisible par $p(p - 1)$, est paire. On peut donc, dans l'équivalence arithmétique, remplacer par la première toute puissance d'une variable donnée. On obtiendra de cette manière un polynôme du premier degré par rapport à chacune des variables : Apqr + Bpq + ... + G. Nous appellerons cette expression ainsi réduite *polynôme indicateur*.

Rappelons les trois étapes d'une terminologie d'ailleurs conforme à la nature des choses :

Expression arithmétique équivalente, ou équivalence arithmétique. Expression obtenue par application du symbolisme à une proposition logistique. Aucune simplification ne devant être effectuée, une telle expression ne comporte que les deux symboles opératoires : + 1, et multiplication de *deux* facteurs. Réciproquement, à une expression arithmétique satisfaisant à ces conditions, on peut faire correspondre d'une manière univoque une proposition logistique.

Polynôme indicateur. Équivalence arithmétique dans laquelle toutes réductions compatibles avec l'invariance de parité ont été effectuées. Notamment chaque variable n'intervient qu'à la première puissance et on peut ramener chaque coefficient à l'une des deux valeurs 0 ou 1. A un même polynôme indicateur peuvent correspondre une infinité de propositions logistiques.

Nombre représentatif. Valeur arithmétique du polynôme indicateur pour un choix donné des valeurs de ses constituants, ou plus précisément, de la parité de ces valeurs.

Par exemple, pour pvp.ɔp, ces trois éléments sont respectivement : $(p^2 + 1)p$; 2p; nombre pair.

La proposition qui intéresse le logicien est la proposition vraie quelles que soient les valeurs de ses constituants. Une telle proposition doit avoir un polynôme indicateur toujours pair, et par conséquent à coefficients pairs. Mais lorsque ce polynôme comporte des coefficients impairs, il permet d'attribuer immédiatement à la proposition la note V ou F, en fonction des valeurs des constituants.

Nous sommes donc en mesure, au terme de cette étude qui ne fait que préciser la démarche d'Herbrand, de discerner rapidement une proposition logistique vraie et de donner d'une telle proposition une démonstration logistique. Deux questions demeureraient à examiner. D'une part, la démonstration dont on a établi l'existence est très laborieuse. Le critère la rend heureusement inutile, pratiquement du moins; mais il serait intéressant de pouvoir déterminer à priori le chemin logique minimum conduisant des axiomes à une proposition vraie donnée. D'autre part, découvrir une proposition logistique vraie revient à passer d'un polynôme indicateur à coefficients pairs à une équivalence arithmétique. Le procédé est inépuisable, mais il est sans doute impossible de fixer ici a priori un critère de la *proposition intéressante.*

* * *

Ces quelques remarques suffiront, nous l'espérons, à donner à ceux de nos lecteurs qui seraient peu avertis des questions de logistique une idée suffisamment nette de l'esprit qui anime celle-ci. La pensée, portant sur elle-même un regard critique, accomplit un double effort de précision et d'économie. Chacun de ces mots comporte deux sens; l'un plus métaphysique commande l'autre plus logique. La précision est, attribuée au concept, l'état de séparation dans lequel on l'envisage; et elle procède d'une sorte de mise au point du regard de l'esprit, laquelle entraîne à la fois netteté et appauvrissement. La logistique pousse à l'extrême cette attitude et ses conséquences, puisqu'elle ne considère ni la structure logique des propositions en elles-mêmes ni leur liaison naturelle à l'univers concret, mais les relations qu'elles peuvent soutenir entre elles. La précision de la logistique lui vient de ce que, s'enfermant dans la relation pensée, elle laisse de côté le mystère de la substance. Dautre part la logistique fait également siennes les deux tendances suggérées par le mot économie : systématisation en fonction d'un principe original, options concrètes qu'il convient de faire pour réaliser cette systématisation avec le minimum d'effort. L'originalité de la logistique, c'est de ne retenir des signes conceptuels que leur structure et de remplacer les normes intelligibles du raisonnement par des règles commandant aux structures quel que soit le contenu de celles-ci. La logique dite formelle s'efforce bien d'atteindre ce double but. Mais les règles qu'elle donne, touchant la validité du syllogisme par exemple, sont des règles a posteriori; et de plus elle demeure une logique du premier degré, c'est-à-dire que l'abstraction qui lui apporte son objet s'effectue à partir du concret. La logistique au contraire s'efforce de normaliser a priori des structures dont les références concrètes sont déjà des abstraits du premier degré. Ce qu'elle fixe et codifie, ce ne sont pas tant les discours logiques corrects que les lois permettant de reconnaître si un discours logique est correct : économie nouvelle par le recours systématique à une abstraction supérieure (tout en restant dans le type générique dit « du second degré »), économie également parce que l'on cherche à substituer un principe universel à l'examen indéfini des cas particuliers de raisonnement. L'arithmétisation que nous avons exposée est une réussite très partielle mais très achevée au double point de vue que nous venons de rappeler : précision, économie. Aussi nous a-t-elle paru de nature à donner au lecteur philosophe une expérience concrète de l'esprit et des tendances de la logistique sans exiger de sa part un effort excessif.

M.-L.-G. DES LAURIERS, O. P.