SOPRA LE EQUAZIONI FONDAMENTALI DELLA ELETTRODINAMICA;
NOTA DEL PROF. VITO VOLTERRA.

Come le questioni di dinamica dipendono da un unico sistema di equazioni differenziali (le equazioni di Lagrange) così, secondo quanto ha mostrato Hertz, tutte le questioni di elettrodinamica si riducono a dipendere da un unico sistema di equazioni differenziali [1]). Le equazioni della dinamica di Lagrange (quando le forze ammettono un potenziale) possono ricondursi a dipendere da un unico principio di calcolo delle variazioni (il principio di Hamilton). Mi sono proposto analogamente di ricondurre le equazioni fondamentali della elettrodinamica da cui è partito Hertz nel caso dei sistemi in quiete, a dipendere da una questione di calcolo delle variazioni.

Questo resultato, come mostreremo può conseguirsi in infiniti modi ricorrendo a delle variabili ausiliarie da cui dipendono le componenti della forza elettrica e della forza magnetica.

§ 1.

Siano ϵ_{rs}, μ_{rs}, λ_{rs}, $(r, s = 1, 2, 3)$ delle funzioni delle variabili x_1, x_2, x_3, tali che

$$\epsilon_{rs} = \epsilon_{sr}\,, \quad \mu_{rs} = \mu_{sr}\,, \quad \lambda_{rs} = \lambda_{sr}$$

e siano X_1, X_2. X_3; L_1, L_2, L_3 delle funzioni delle variabili x_1, x_2, x_3, t. Queste funzioni siano definite in un campo S a tre dimensioni rispetto alle variabili x_1, x_2, x_3 e per i valori di t compresi fra t_0 e t_1.

Si ponga

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi_r = \dfrac{d}{dt} \Sigma_s\, \epsilon_{rs}\, X_s - \dfrac{dL_{r+1}}{dx_{r+2}} + \dfrac{dL_{r+2}}{dx_{r+1}} + 4\pi\, \Sigma_h\, \lambda_{rh}\, X_h \\[2ex] \eta_r = \dfrac{d}{dt} \Sigma_s\, \mu_{rs}\, L_s - \dfrac{dX_{r+2}}{dx_{r+1}} + \dfrac{dX_{r+1}}{dx_{r+2}}\,. \end{cases}$$

1) Vedi *N. Cimento* S. 3, Vol. XXVIII, pag. 193.

Denotando con Y_r e M_r delle nuove funzioni di x_1, x_2, x_3, t, moltiplichiamo le relazioni precedenti per δY_r e δM_r, sommiamo e integriamo a tutto lo spazio S rispetto alle variabili x_1, x_2, x_3 e per i valori di t compresi fra t_0 e t_1. Si otterrà

$$
(2) \quad \left\{ \begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} dt \int_S \Sigma_r (\xi_r \delta Y_r + \eta_r \delta M_r)\, dS = - \int_{t_0}^{t_1} \int_S \Sigma_r (X_r \delta u_r + L_r \delta v_r)\, dS \\
& + \left[\int_S \Sigma_{r,s} (\varepsilon_{rs} X_s \delta Y_r + \mu_{rs} L_s \delta M_r)\, dS \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \Sigma_r \int_\sigma (L_{r+1} \delta Y_{r+2} \\
& - L_{r+2} \delta Y_{r+1} + X_{r+2} \delta M_{r+1} - X_{r+1} \delta M_{r+2}) \cos nx_r \, d\sigma \quad [1])
\end{aligned} \right.
$$

denotando con σ la superficie contorno di S e con n la sua normale diretta verso l' esterno, e ponendo

$$
(3) \quad \left\{ \begin{aligned}
u_r &= \frac{d}{dt} \Sigma_s \varepsilon_{rs} Y_s - \frac{dM_{r+1}}{dx_{r+2}} + \frac{dM_{r+2}}{dx_{r+1}} - 4\pi \Sigma_h \lambda_{rh} Y_h \\
v_r &= \frac{d}{dt} \Sigma_s \mu_{rs} M_s - \frac{dY_{r+2}}{dx_{r+1}} + \frac{dY_{r+1}}{dx_{r+2}} .
\end{aligned} \right.
$$

Ciò premesso consideriamo le quantità

$$\alpha_{rs} = \alpha_{sr}, \qquad \beta_{rs} = \beta_{sr}, \qquad r, s = 1, 2, 3,$$

supponiamole funzioni di x_1, x_2, x_3, e tali che

$$
(4) \quad a = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha_{13} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \alpha_{23} \\ \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33} \end{vmatrix} \gtrless 0, \qquad b = \begin{vmatrix} \beta_{11}, & \beta_{12}, & \beta_{13} \\ \beta_{21}, & \beta_{22}, & \beta_{23} \\ \beta_{31}, & \beta_{32}, & \beta_{33} \end{vmatrix} \gtrless 0
$$

Pongasi

$$a_{rs} = \frac{d \log a}{d\alpha_{rs}}, \qquad b_{rs} = \frac{d \log b}{d \beta_{rs}}$$

$$(5) \qquad \Sigma_s a_{rs} u_s = Z_r, \qquad \Sigma_s b_{rs} v_s = N_r$$

1) Il simbolo $\Sigma_{r,s}$ denota la doppia somma $\Sigma_r \Sigma_s$ in tutto il corso della presente nota.

Avremo

$$\Sigma_r (X_r \delta u_r + L_r \delta v_r) = \Sigma_{r,s} \alpha_{rs} X_r \delta Z_s + \Sigma_{r,s} \beta_{rs} L_r \delta N_s$$

La equazione (1) potrà dunque scriversi

$$\text{(I)} \quad \int_{t_0}^{t_1} dt \int_S (\Sigma_{r,s} \alpha_{rs} X_r \delta Z_s + \Sigma_{r,s} \beta_{rs} L_r \delta N_s) dS = -\int_{t_0}^{t_1} dt \int_S \Sigma_r (\xi_r \delta Y_r$$
$$+ \eta_r \delta M_r) dS + \left[\int_S \Sigma_{r,s} (\varepsilon_{rs} X_s \delta Y_r + \mu_{rs} L_s \delta M_r) dS \right]_{t_0}^{t_1}$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} \int_\sigma \Sigma_r (L_{r+1} \delta Y_{r+2} - L_{r+2} \delta Y_{r+1} + X_{r+2} \delta M_{r+1} - X_{r+1} \delta M_{r+2}) \cos nx_r \, d\sigma.$$

§ 2.

L' ultima formula del § precedente fornisce subito il modo per risolvere la questione propostaci.

Poniamo infatti

$$(6) \qquad Z_r = X_r , \qquad N_r = L_r ,$$

in tale ipotesi il primo membro della equazione precedente diviene

$$\delta \int_0^{t_1} P \, dt$$

in cui

$$P = {}^1/_2 \int_S \Sigma_{r,s} (\alpha_{rs} X_r X_s + \Sigma_{r,s} \beta_{rs} L_r L_s) dS$$

e la condizione

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} P \, dt = 0$$

condurrà alle equazioni

$$(7) \qquad \xi_r = 0 , \qquad \eta_r = 0 ,$$

che sono appunto le equazioni fondamentali della elettrodinamica dei sistemi in quiete, quando si supponga che X_1, X_2, X_3 siano le componenti della forza elettrica, L_1, L_2, L_3 quelle della forza magnetica secondo gli assi coordinati x_1, x_2, x_3, le ϵ_{rs} i coefficienti della polarizzazione elettrica, μ_{rs} quelli della polarizzazione magnetica e λ_{rs} i coefficienti della conducibilità elettrica.

Nella espressione di P compariscono le α_{rs}, β_{rs} che sono quantità le quali possono scegliersi arbitrariamente, salvo a supporre soddisfatte le (3) e (4). Si ha quindi che le equazioni (7) possono farsi dipendere in infiniti modi da questioni di calcolo delle variazioni.

In particolare potremo fare in modo che P sia eguale alla energia elettromagnetica del sistema. A tal fine basterà prendere

$$\epsilon_{rs} = \alpha_{rs}, \qquad \mu_{rs} = \beta_{rs}$$

e avremo

$$P = {}^1/_2 \int_S \Sigma_{r,s} (\epsilon_{rs} X_r X_s + \mu_{rs} L_r L_s).$$

Prendiamo invece

$$\alpha_{rs} = \epsilon_{rs}, \qquad \beta_{rs} = -\mu_{rs},$$

si otterrà

$$\begin{aligned} {}^1/_2 \Sigma_{r,s} \alpha_{rs} X_r X_s = {}^1/_2 \Sigma_{r,s} a_{rs} u_r u_s = {}^1/_2 \Sigma_{r,s} \epsilon_{rs} \frac{dY_r}{dt}\frac{dY_s}{dt} \\ + {}^1/_2 \Sigma_{r,s} a_{rs} \left(\frac{dM_{r+1}}{dx_{r+2}} - \frac{dM_{r+2}}{dx_{r+1}} + 4\pi \Sigma_h \lambda_{rh} Y_h\right)\left(\frac{dM_{s+1}}{dx_{s+2}} - \frac{dM_{s+2}}{dx_{s+1}}\right. \\ \left. + 4\pi \Sigma_h \lambda_{sh} Y_h\right) - {}^1/_2 \Sigma_r \frac{dY_r}{dt}\left(\frac{dM_{r+1}}{dx_{r+2}} - \frac{dM_{r+2}}{dx_{r+1}}\right) - 2\pi \Sigma_{r,s} \lambda_{rs} \frac{dY_r}{dt} Y_s; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^1/_2 \Sigma_{r,s} \beta_{rs} L_r L_s = {}^1/_2 \Sigma_{r,s} b_{rs} v_r v_s = - {}^1/_2 \Sigma_{r,s} \mu_{rs} \frac{dM_r}{dt}\frac{dM_s}{dt} \\ + {}^1/_2 \Sigma_{r,s} b_{rs} \left(\frac{dY_{r+1}}{dx_{r+2}} - \frac{dY_{r+2}}{dx_{r+1}}\right)\left(\frac{dY_{s+1}}{dx_{s+2}} - \frac{dY_{s+2}}{dx_{s+1}}\right) \\ - {}^1/_2 \Sigma_r \frac{dM_r}{dt}\left(\frac{dY_{r+1}}{dx_{r+2}} - \frac{dY_{r+2}}{dx_{r+1}}\right) \end{aligned}$$

Quindi

$$(8) \quad {}^1/_2 \Sigma_{r,s} \alpha_{rs} X_r X_s + {}^1/_2 \Sigma_{r,s} \beta_{rs} L_r L_s = G - \frac{d}{dt}\left[{}^1/_2 \Sigma_r Y_r \left(\frac{dM_{r+1}}{dx_{r+2}} - \frac{dM_{r+2}}{dx_{r+1}}\right) - 2\pi \Sigma_{r,s} \lambda_{rs} Y_r Y_s\right] + {}^1/_2 \Sigma_r \frac{d}{dx_r}\left(Y_{r+1} \frac{dM_{r+2}}{dt} - Y_{r+2} \frac{dM_{r+1}}{dt}\right)$$

essendo

$$G = {}^1/_2\, \Sigma_{r,s}\, \varepsilon_{rs} \frac{d\,Y_r}{dt} \frac{d\,Y_s}{dt} - {}^1/_2\, \Sigma_{r,s}\, \mu_{rs} \frac{dM_r}{dt} \frac{dM_s}{dt}$$

$$+ {}^1/_2\, \Sigma_{r,s}\, a_{rs} \left(\frac{dM_{r+1}}{dx_{r+2}} - \frac{dM_{r+2}}{dx_{r+1}} + 4\pi \Sigma_h \lambda_{rh} Y_h \right) \left(\frac{dM_{s+1}}{dx_{s+2}} - \frac{dM_{s+2}}{dx_{s+1}} \right.$$

$$\left. + 4\pi\, \Sigma_h \lambda_{sh} Y_h \right) + {}^1/_2\, \Sigma_{r,s}\, b_{rs} \left(\frac{dY_{r+1}}{dx_{r+2}} - \frac{dY_{r+2}}{dx_{r+1}} \right) \left(\frac{dY_{s+1}}{dx_{s+2}} - \frac{dY_{s+2}}{dx_{s+1}} \right).$$

Formando in questo caso l' integrale

$$\int_{t_0}^{t_1} P\, dt$$

avremo che tutti i termini del secondo membro della equazione (8) i quali sono delle derivate esatte rispetto alle variabili t, x_1, x_2, x_3, danno luogo ad una somma di integrali estesi al contorno dello spazio S è di termini i cui valori vanno presi ai limiti t_0 e t_1.

Se trascuriamo questa somma otterremo

$$\int_{t_0}^{t_1} Q\, dt \qquad \text{in cui } Q = \int_S G\, dt.$$

Come è ben noto dalla teoria del calcolo delle variazioni, se annulliamo la variazione di $\int_{t_0}^{t_1} Q\, dt$ otteniamo le stesse equazioni indefinite come annullando la variazione di $\int_{t_0}^{t_1} P\, dt$. Ne segue che le equazioni fondamentali della elettrodinamica potranno ottenersi dalla variazione dell' integrale

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_S G\, dS.$$

Nella espressione di G sono separati i termini che contengono le derivate delle Y_r ed M_r rapporto a t, (i quali formano una funzione omogenea di 2° grado rispetto alle derivate stesse) da-gli altri termini, come ha luogo nella espressione dell' azione di Hamilton che si trova nella dinamica.

§ 3.

Dalle (1) si ricava

$$\Sigma_i\left(\xi_i \frac{dY_i}{dt}+\eta_i \frac{dM_i}{dt}\right)=\Sigma_s \frac{dX_s}{dt}\Sigma_i \varepsilon_{is} \frac{dY_i}{dt}+\Sigma_s \frac{dL_s}{dt}\Sigma_i \mu_{is}\frac{dM_i}{dt}$$

$$-\Sigma_i \frac{dY_i}{dt}\left(\frac{dL_{i+1}}{dx_{i+2}}-\frac{dL_{i+2}}{dx_{i+1}}\right)+\Sigma_i \frac{dM_i}{dt}\left(\frac{dX_{i+1}}{dx_{i+2}}-\frac{dX_{i+2}}{dx_{i+1}}\right)+4\pi\,\Sigma_{i,h}\lambda_{ih} X_h \frac{dY_i}{dt}$$

Quindi a cagione delle (2)

$$=\Sigma_i\left(u_i \frac{dX_i}{dt}+v_i \frac{dL_i}{dt}\right)-\Sigma_i\left[\frac{dL_i}{dt}\left(\frac{dY_{i+1}}{dx_{i+2}}-\frac{dY_{i+2}}{dx_{i+1}}\right)+\frac{dY_i}{dt}\left(\frac{dL_{i+1}}{dx_{i+2}}-\frac{dL_{i+2}}{dx_{i+1}}\right)\right]$$

$$+\Sigma_i\left[\frac{dX_i}{dt}\left(\frac{dM_{i+1}}{dx_{i+2}}-\frac{dM_{i+2}}{dx_{i+1}}\right)+\frac{dM_i}{dt}\left(\frac{dX_{i+1}}{dx_{i+2}}-\frac{dX_{i+2}}{dx_{i+1}}\right)\right]$$

$$+4\pi\,\Sigma_{i,h}\lambda_{ih}\left(X_h \frac{dY_i}{dt}+Y_i \frac{dX_h}{dt}\right)$$

ovvero per le (5) e (6)

$$=\frac{d}{dt}\left\{{}^1\!/_2\,\Sigma_{i,s}(\alpha_{is} X_i X_s+\beta_{is} L_i L_s)-\Sigma_i\left[L_i\left(\frac{dY_{i+1}}{dx_{i+2}}-\frac{dY_{i+2}}{dx_{i+1}}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-X_i\left(\frac{dM_{i+1}}{dx_{i+2}}-\frac{dM_{i+2}}{dx_{i+1}}\right)\right]+4\pi\,\Sigma_{i,h}\lambda_{ih} X_h Y_i\right\}$$

$$+\Sigma_i \frac{d}{dx_i}\left\{L_{i+1}\frac{dY_{i+2}}{dt}-L_{i+2}\frac{dY_{i+1}}{dt}-X_{i+1}\frac{dM_{i+2}}{dt}+X_{i+2}\frac{dM_{i+1}}{dt}\right\}$$

Integrando a tutto lo spazio S e supponendo soddisfatte le equazioni

$$\xi_i=0, \qquad \eta_i=0\,,$$

otterremo

$$\frac{d}{dt}\int\left\{{}^1\!/_2\,\Sigma_{i,s}(\alpha_{is} X_i X_s+\beta_{is} L_i L_s)-\Sigma_i\left[L_i\left(\frac{dY_{i+1}}{dx_{i+2}}-\frac{dY_{i+2}}{dx_{i+1}}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-X_i\left(\frac{dM_{i+1}}{dx_{i+2}}-\frac{dM_{i+2}}{dx_{i+1}}\right)\right]+\Sigma_{i,h}4\pi\,\lambda_{ih} X_h Y_i\right\}dS=\int\Sigma_i\left(X_{i+1}\frac{dM_{i+2}}{dt}\right.$$

$$\left.-X_{i+2}\frac{dM_{i+1}}{dt}-L_{i+1}\frac{dY_{i+2}}{dt}+L_{i+2}\frac{dY_{i+1}}{dt}\right)\cos nx_i\,d\sigma\,.$$

Nel caso in cui S rappresenti lo spazio indefinito e le X_i, L_i a distanza infinita siano infinitesimi di terzo ordine, allora il secondo membro va a zero e otteniamo l' integrale

$$\int \Big\{ {}^1/_2 (\Sigma_{i,s} \alpha_{is} X_i X_s + \beta_{is} L_i L_s) - \Sigma_i \Big[L_i \Big(\frac{dY_{i+1}}{dx_{i+2}} - \frac{dY_{i+2}}{dx_{i+1}} \Big) - X_i \Big(\frac{dM_{i+1}}{dx_{i+2}} - \frac{dM_{i+2}}{dx_{i+1}} \Big) \Big] + 4\pi\, \Sigma_{i,h} \lambda_{ih} X_h Y_i \Big\} dS = \text{cost.}$$

§ 4.

Consideriamo due sistemi di valori per le X_i, L_i, Y_i, M_i, ξ_i, η_i, u_i, v_i, L_i, N_i che distingueremo ponendo uno o due apici alle quantità stesse.

Avremo dalle (1)

$$\Sigma_i (Y''_i \xi'_i + M''_i \eta'_i - Y'_i \xi''_i - M'_i \eta''_i)$$

$$= \Sigma_{i,s} \Big[\varepsilon_{is} \Big(\frac{dX'_s}{dt} Y''_i - \frac{dX''_s}{dt} Y'_i \Big) + \mu_{is} \Big(\frac{dL'_s}{dt} M''_i - \frac{dL''_s}{dt} M'_i \Big) \Big]$$

$$- \Sigma_i \Big[Y''_i \Big(\frac{dL'_{i+1}}{dx_{i+2}} - \frac{dL'_{i+2}}{dx_{i+1}} \Big) - Y'_i \Big(\frac{dL''_{i+1}}{dx_{i+2}} - \frac{dL''_{i+2}}{dx_{i+1}} \Big) \Big] + \Sigma_i \Big[M''_i \Big(\frac{dX'_{i+1}}{dx_{i+2}} - \frac{dX'_{i+2}}{dx_{i+1}} \Big) - M'_i \Big(\frac{dX''_{i+1}}{dx_{i+2}} - \frac{dX''_{i+2}}{dx_{i+1}} \Big) \Big] + 4\pi\, \Sigma_{i,h} \lambda_{ih} (X'_h Y''_i - X''_h Y'_i)$$

$$= \frac{d}{dt} \Sigma_{i,s} \Big[\varepsilon_{is} (X'_s Y''_i - X''_s Y'_i) + \mu_{is} (L'_s M''_i - L''_s M'_i) \Big]$$

$$- \Sigma_i \frac{d}{dx_i} (Y''_{i+1} L'_{i+2} - Y''_{i+2} L'_{i+1} - Y'_{i+1} L''_{i+2} + Y'_{i+2} L''_{i+1} - M''_{i+1} X'_{i+2} + M''_{i+2} X'_{i+1} + M'_{i+1} X''_{i+2} - M'_{i+2} X''_{i+1})$$

$$- \Sigma_i X'_i \Big\{ \Sigma_s \varepsilon_{is} \frac{dY''_s}{dt} - \frac{dM''_{i+1}}{dx_{i+2}} + \frac{dM''_{i+2}}{dx_{i+1}} - 4\pi\, \Sigma_h \lambda_{ih} Y''_h \Big\}$$

$$- \Sigma_i L'_i \Big\{ \Sigma_s \mu_{is} \frac{dM''_s}{dt} + \frac{dY''_{i+1}}{dx_{i+2}} - \frac{dY''_{i+2}}{dx_{i+1}} \Big\} + \Sigma_i X''_i \Big\{ \Sigma_s \varepsilon_{is} \frac{dY'_s}{dt} - \frac{dM'_{i+1}}{dx_{i+2}} + \frac{dM'_{i+2}}{dx_{i+1}} - 4\pi\, \Sigma_h \lambda_{ih} Y'_h \Big\} + \Sigma_i L''_i \Big\{ \Sigma_s \mu_{is} \frac{dM'_s}{dt_s} + \frac{dY'_{i+1}}{dx_{i+2}} - \frac{dY'_{i+2}}{dx_{i+1}} \Big\}$$

Quindi tenendo presenti le (2) e (5) si otterrà

$$= \frac{d}{dt} \Sigma_{i,s} \Big[\varepsilon_{is} (X'_s Y''_i - X''_s Y'_i) + \mu_{is} (L'_s M''_i - L''_s M'_i)$$

$$- \Sigma_i \frac{d}{dx_i} (Y''_{i+1} L'_{i+2} - Y''_{i+2} L'_{i+1} - Y'_{i+1} L''_{i+2} + Y'_{i+2} L''_{i+1}$$

$$- M''_{i+1} X'_{i+2} + M''_{i+2} X'_{i+1} + M'_{i+1} X''_{i+2} - M'_{i+2} X''_{i+1})$$

$$- \Sigma_{i,s} \Big[\alpha_{is} (X'_i Z''_s - X''_s Z'_i) + \beta_{is} (L'_i N''_s - L''_s N'_i) \Big] .$$

Se sono soddisfatte le (6) e (7) avremo

$$X'_i = Z'_i, \quad X''_i = Z''_i, \quad L'_i = N'_i, \quad L''_i = N''_i$$

$$\xi'_i = \eta'_i = \xi''_i = \eta''_i = 0,$$

onde integrando a tutto lo spazio S

$$\frac{d}{dt} \int_S \Sigma_{i,s} \Big[\varepsilon_{is} (X'_s Y''_i - X''_s Y'_i) + \mu_{is} (L'_s M''_i - L''_s M'_i) \Big] dS$$

$$= \int_\sigma \Sigma_i (Y''_{i+1} L'_{i+2} - Y''_{i+2} L'_{i+1} - Y'_{i+1} L''_{i+2} + Y'_{i+2} L''_{i+1}$$

$$- M''_{i+1} X'_{i+2} + M''_{i+2} X'_{i+1} + M'_{i+1} X''_{i+2} - M'_{i+2} X''_{i+1}) \cos n x_i \, d\sigma$$

la qual formula corrisponde nel nostro caso al lemma di Green.