ZAMM 55, 3 – 8 (1975)

H. GÖRTLER

Zur Geschichte des Π-Theorems

HELMUT HEINRICH zum 70. Geburtstag gewidmet

Die Geschichte des Π-Theorems, wie sie in modernen Büchern über die Methode der Dimensionsanalyse und über Modelltheorie zu finden ist, bedarf in mancher Hinsicht der Korrektur und Ergänzung. Insbesondere ist die fundamentale Leistung eines Mathematikers aus dem Jahre 1911 ganz in Vergessenheit geraten und war sogar jenen Wissenschaftlern unbekannt geblieben, die zu jener Zeit das Π-Theorem allgemein zu formulieren und zu beweisen bemüht waren. Es erscheint daher lohnend, im folgenden Beitrag eine Neubearbeitung der Geschichte des Π-Theorems vorzulegen.

The history of the Pi Theorem as presented in modern books on the method of dimensional analysis and model theory must be corrected and supplemented in some respects. In particular, the fundamental result published by a mathematician in 1911 has been completely forgotten and was not even known to those scientists who, around that time, were trying to give a general formulation and proof of the Pi Theorem. Therefore, it seems worth while to give, in the following paper, a revised presentation of the history of the Pi Theorem.

История П-теоремы, которую можно найти в современных книгах о методе анализа размерностей и о теории моделей, нуждается в некотором отношении в поправке и деполнении. Прежде всего была полностью преданна забвению фундаментальная работа одного математика в 1911, которая осталась неизвестной даже тем исследователям, которые в то время делали попытки сформулировать и доказать общую П-теорему. Кажется поэтому заслуживающим внимания представить в этой работе вновь разработанную историю П-теоремы.

1. Das Π-Theorem

Das Π-Theorem ist der Fundamentalsatz der Theorie der physikalischen Dimensionen. Er bildet die Grundlage für die sehr fruchtbare Methode der Dimensionsanalyse sowie für die Praxis der Ähnlichkeits- oder Modellphysik. Besonders in der Mechanik fand und findet das Π-Theorem zahlreiche Anwendungen von großer Tragweite.

Der Behandlung eines physikalischen oder ingenieurwissenschaftlichen Problems liege ein *Grundgrößensystem* $\{M_1, \dots, M_m\}$ mit m *Grundgrößenarten* zugrunde, z. B. ein $\{M, L, T\}$-System mit den drei Grundgrößenarten Masse, Länge und Zeit.

$x_1, \dots, x_n$ seien die *Maßzahlen* von n physikalischen Größen. Mit $[x_j], j = 1, \dots, n$ werde die *Dimension* der physikalischen Größe mit der Maßzahl x_j im $\{M_1, \dots, M_m\}$ -System bezeichnet:

$$[x_j] = M_1^{a_{j1}} \cdots M_m^{a_{jm}} . \tag{1.1}$$

Dann heißt

$$A = (a_{jk}) \begin{cases} j = 1, \dots, n \\ k = 1, \dots, m \end{cases} \tag{1.2}$$

die *Dimensionsmatrix* der physikalischen Größen mit den Maßzahlen $x_1, \dots, x_n$ in dem Grundgrößensystem $\{M_1, \dots, M_m\}$.

Ein Potenzprodukt

$$\Pi := x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \tag{1.3}$$

heißt *dimensionsloses Potenzprodukt* der $x_1, \dots, x_n$, wenn die physikalische Größe mit der Maßzahl Π die Dimension

$$[\Pi] = M_1^0 \cdots M_m^0 = 1 \tag{1.4}$$

besitzt („dimensionslos" ist).

Ein System $\Pi_1, \dots, \Pi_p$ von dimensionslosen Potenzprodukten der $x_1, \dots, x_n$ heißt *unabhängiges System dimensionsloser Potenzprodukte*, wenn sich kein Π_k als Potenzprodukt der übrigen Π_i, $i \neq k$, identisch in den x_j, $(x_1, \dots, x_n) \in R_n^+$, darstellen läßt.

Das System $\Pi_1, \dots, \Pi_p$ heißt *Fundamentalsystem dimensionsloser Potenzprodukte*, wenn es ein unabhängiges System ist, und wenn jedes beliebige dimensionslose Potenzprodukt Π der $x_1, \dots, x_n$ sich als Potenzprodukt der $\Pi_1, \dots, \Pi_p$ darstellen läßt. Man beweist leicht: *Ein Fundamentalsystem dimensionsloser Potenzprodukte der $x_1, \dots, x_n$ im $\{M_1, \dots, M_m\}$-System besteht aus $p = n - r$ Potenzprodukten $\Pi_1, \dots, \Pi_p$, wobei $r =$ Rang A ist.*

Sei f eine reellwertige Funktion von $x_1, \dots, x_n$ auf ihrem Definitionsbereich $D \subseteq R_n^+$. Sie heißt *dimensionshomogene Funktion* in den reellen Variablen $x_1, \dots, x_n$, wenn reelle Zahlen b_k, $k = 1, \dots, m$ existieren, so daß die Gleichung

$$f(\alpha_1^{a_{11}} \cdots \alpha_m^{a_{1m}} x_1, \dots, \alpha_1^{a_{n1}} \cdots \alpha_m^{a_{nm}} x_n) = \alpha_1^{b_1} \cdots \alpha_m^{b_m} f(x_1, \dots, x_n) \tag{1.5}$$

für alle $\alpha_k > 0$, $k = 1, \dots, m$ und $(x_1, \dots, x_n) \in D$ erfüllt ist.

Bei Einheitenänderungen der Grundgrößenarten des $\{M_1, \ldots, M_m\}$-Systems (Übergang zur ,,$1/\alpha_k$-fachen" Einheit der k-ten Grundgrößenart) gehen die Maßzahlen $x_1, \ldots, x_n$ über in $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ mit $\bar{x}_j = \alpha_1^{a_{j1}} \cdots \alpha_m^{a_{jm}} x_j$, $j = 1, \ldots, n$. Sollen daher die Funktionswerte

$$y = f(x_1, \ldots, x_n) \tag{1.6}$$

wiederum Maßzahlen einer physikalischen Größenart sein, so muß f die Eigenschaft der Dimensionshomogenität besitzen. Die physikalische Größe mit der Maßzahl y hat dann die Dimension

$$[y] = M_1^{b_1} \cdots M_m^{b_m} . \tag{1.7}$$

Zu jeder dimensionshomogenen, nicht identisch verschwindenden Funktion f in den Maßzahlen $x_1, \ldots, x_n$ gibt es, wie man allgemein beweisen kann, mindestens ein Potenzprodukt $x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ dieser Maßzahlen derart, daß gilt:

$$[x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}] = [y] . \tag{1.8}$$

Mit anderen Worten, man kann die Größen mit den Maßzahlen $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ stets mit Hilfe eines Potenzproduktes der Argumente der Funktion f ,,dimensionslos machen":

$$[f(x_1, \ldots, x_n)/x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}] = M_1^0 \cdots M_m^0 = 1 . \tag{1.9}$$

Der Leser sei für eine allgemeine Theorie der physikalischen Dimensionen, in der nach Grundlegung des Begriffs ,,physikalische Dimension" die obigen Sachverhalte ausführlich dargelegt (und in einer großen Zahl von Beispielen angewandt) werden, auf das in Kürze erscheinende Buch [14] des Verfassers verwiesen.

Nunmehr folge die Aussage, die oben angekündigt wurde:

Π-Theorem: *Es seien $x_1, \ldots, x_n$ Maßzahlen von n physikalischen Größen und $A = (a_{jk}) \begin{cases} j = 1, \ldots, n \\ k = 1, \ldots, m \end{cases}$ deren Dimensionsmatrix in einem Grundgrößensystem $\{M_1, \ldots, M_m\}$. Mit f werde eine beliebige dimensionshomogene Funktion in $x_1, \ldots, x_n$ auf ihrem Definitionsbereich $D \subseteq R_n^+$ bezeichnet. Schließlich sei $\Pi_1, \ldots, \Pi_p$, $p = n - r$,* $r =$ Rang A, *ein beliebiges Fundamentalsystem dimensionsloser Potenzprodukte der $x_1, \ldots, x_n$.*

Dann gilt : Es existiert eine Funktion G von p Variablen, und es existieren reelle Zahlen $k_1, \ldots, k_n$, so daß

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} G(\Pi_1, \ldots, \Pi_p) \tag{1.10}$$

für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ ist.

Jeder Ingenieur und Physiker begegnet einer Fülle verschiedener Nutzanwendungen dieses Theorems und ist auf diese stark angewiesen, ohne daß er sich der Allgemeinheit dieser Aussage über die Menge der dimensionshomogenen Funktionen im allgemeinen bewußt ist. Hier ist nicht der Ort, auf diese Nutzanwendungen einzugehen. Man vergleiche das Buch [14] und die dort angegebene weitere Literatur.

2. Geschichte des Π-Theorems

Dem Verfasser kommt es mit diesem Beitrag darauf an, die Geschichte des Π-Theorems in mancher Hinsicht gegenüber vorliegenden anderen Darstellungen zurechtzurücken. Dabei wird insbesondere der Leistung eines Mannes zu gedenken sein, der zu einem Zeitpunkt, als bekannte Forscher noch um die korrekte und allgemeine Formulierung des Π-Theorems rangen, bereits, ohne daß sie dies wußten, einen mathematisch strengen Beweis des Theorems veröffentlichte — mit einer Einengung der Aussage durch eine unnötige Voraussetzung und mit Beweismitteln, die, wie man heute weiß, unnötige Forderungen an die betrachteten Funktionen f erforderlich machten. In keinem der mir in Fülle bekannten heute gängigen Lehrbücher zur Dimensionsanalyse und zur Modell- oder Ähnlichkeitsmechanik wird sein Name genannt. Es handelt sich um A. Federmann (St. Petersburg, 1911). Sein Satz ergab sich als Anwendungsbeispiel im Rahmen einer rein mathematischen Untersuchung über die Integration partieller Differentialgleichungen [12], und das ist wohl der Grund, daß er nur wenigen Interessenten bekannt wurde. Zwar findet sich der Name Federmann noch in einem 1949 erschienenen russischen Buch über Modellübertragung von L. S. Eigenson [11] kurz erwähnt[1]), ohne aber daß dort auf den Federmannschen Satz im einzelnen eingegangen wird. Dasselbe gilt für ein 1938 erschienenes Werk über Elektromagnetismus von A. O'Rahilly [23]. Man muß, soweit ich sehe, bis 1916 zurückgehen, um den Satz von Federmann in einer Veröffentlichung behandelt zu sehen. Genauer: Der Satz wird in einer Arbeit von T. Ehrenfest-Afanassjewa [9] aus dem Jahre 1916 bei einer Untersuchung über den Dimensionsbegriff und über die besondere Art verallgemeinerter Homogenität physikalischer Gleichungen verwendet. Die Arbeit [9] dagegen wurde selbst häufig zitiert, freilich ohne den Erfolg, die Aufmerksamkeit auf die dort wiederum zitierte Arbeit von Federmann zu lenken. — Auf die Leistung von Federmann kommen wir noch zurück.

Die Geschichte des Dimensionsbegriffs der Physik beginnt, darüber sind sich alle Autoren einig, mit J. B. J. Fourier, der 1822 in seinem bekannten Werk ,,Théorie analytique de la chaleur" [13] den Begriff der physikalischen Dimension geprägt und zugleich hervorgehoben hat, daß die Summanden in einer physikalischen Gleichung Maßzahlen von Größen gleicher Dimension sein müssen, daß also eine physikalische Gleichung jene Eigenschaft haben muß, die heute präzis als ,,Dimensionshomogenität" bezüglich des gewählten Grundgrößensystems definiert wird.

---

[1]) Den Hinweis verdanke ich Herrn L. Loitsianski.

In einer Vorgeschichte des Dimensionsbegriffs wird der Historiker natürlich auf bedeutende Namen, u.a. auf GALILEI und NEWTON, verweisen können, aber dann kann man auch gleich zu den Griechen zurückgreifen und etwa EUKLID zitieren. Hier sei eine Stelle von THEON wiedergegeben[2]) (Theonis Smyrnaei Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium, Ed. HILLER, B. G. Teubner, Leipzig 1878, S. 73f.): „Verhältnis ist das gewisse Verhalten zweier homogener Größen zueinander, wie z.B. Doppeltes, Dreifaches. Denn wie sich Inhomogenes zueinander verhält, ist, wie ANDRASTOS sagt, zu wissen unmöglich. So kann z. B. die Elle mit der Mine oder die Choinix [ein Getreidemaß] mit der Kotyle [ein Flüssigkeitsmaß] oder das Weiße mit dem Süßen oder mit dem Warmen nicht zusammengefaßt oder verglichen werden. Bei homogenen Größen aber ist es möglich, wie z. B. Längen zu Längen, Flächen zu Flächen, Körper zu Körpern, Flüssiges zu Flüssigem, Geschüttetes zu Geschüttetem [vermutlich meint er Getreide], Trockenes zu Trockenem, Zahlen zu Zahlen, Zeit zu Zeit, Bewegung zu Bewegung, Klang zu Klang, Geschmack zu Geschmack, Farbe zu Farbe und allgemein Dinge von gleicher Gattung oder von gleicher Art sich irgendwie zueinander verhalten".

Wurde hier etwas Zutreffendes gewiß noch unklar umschrieben, so folgte aber auch nach FOURIER (1822) noch ein langer Weg der Irrung und Verwirrung, bis der Begriff der Dimensionshomogenität und die eigentliche Aussage des Π-Theorems als mathematisches Gesetz für die Menge der dimensionshomogenen Funktionen klar und zutreffend gefaßt wurden. Immerhin datiert aber von FOURIER an die bewußt genutzte Möglichkeit der Dimensionskontrolle physikalischer Gleichungen sowie die Möglichkeit, durch eine Analyse der Dimensionen zu Schlüssen über physikalische Zusammenhänge zu gelangen.

W. ALBRING [1] hat auf die wenig bekannte Tatsache aufmerksam gemacht, daß H. HELMHOLTZ 1873 die für die Hydromechanik wesentlichen dimensionslosen Potenzprodukte („Kennzahlen") untersuchte und dabei unter anderem bereits die „REYNOLDSsche Zahl" besaß zehn Jahre bevor REYNOLDS 1883 seine Beobachtungen über den laminar-turbulenten Umschlag bei Strömungen durch Rohre veröffentlichte. Warum diese HELMHOLTZsche Arbeit [18], die sich insbesondere mit dem Problem der Lenkung von Luftballons befaßt, in Vergessenheit geraten konnte, wird in [1] geschildert.

Es ist klar, daß manchem Forscher in den letzten Jahrzehnten vor Beginn des 20. Jahrhunderts beim Praktizieren der Methode der Dimensionsanalyse die allgemeine Aussage des Π-Theorems mehr oder weniger klar ins Bewußtsein dringen mußte. Um die Jahrhundertwende gilt dies sicher für den vielzitierten Meister in der Vielfalt solcher Anwendungen Lord RAYLEIGH. Es sei aber hier auch speziell auf eine Arbeit von J. H. JEANS [20] aus dem Jahre 1905 hingewiesen als Beispiel dafür, wie greifbar nahe die Aussage des Π-Theorems in der Luft lag. Verwiesen sei aber auch auf die „Diskussionen über Mechanik" von V. L. KIRPICHEV [21].

Fragt man, wer nun erstmals versuchte, das Π-Theorem allgemein als Konsequenz der Dimensionshomogenität physikalischer Gleichungen zu fassen — wenn auch noch unzulänglich und ohne Präzisierung von Voraussetzungen und schon gar nicht unter Anbietung eines strengen mathematischen Beweises —, und diese Gedanken auch veröffentlichte, so muß man nach heutigem Wissen diesen Ruhm einem Manne zusprechen, dessen Arbeit bereits aus dem Jahre 1890 stammt. Aber offenbar wurde sie kaum wahrgenommen und erst in der Mitte unseres Jahrhunderts wiederentdeckt, als das Theorem, das heute unpersönlich Π-Theorem genannt wird, bereits inzwischen mit dem Namen anderer Wissenschaftler belegt[3]) wurde. Jene Veröffentlichung aus dem Jahre 1890 stammt von A. VASCHY [31], vgl. auch [32].

Noch als andere um die Formulierung des Π-Theorems rangen und bevor insbesondere E. BUCKINGHAM 1914 unabhängig von VASCHY das Theorem plausibel begründete aber nicht ganz korrekt formulierte — wir kommen unten darauf zurück —, veröffentlichte A. FEDERMANN 1911 seinen mathematisch streng bewiesenen Satz [12].

Der FEDERMANNsche Satz ist insofern ein Sonderfall des allgemeinen Π-Theorems, als der Rang r der Exponentenmatrix $A = (a_{jk})$ bereits in den Voraussetzungen explizit festgelegt wird.

Seine Differenzierbarkeitsvoraussetzungen sind, wie man heute weiß, entbehrlich. Sie sind auch von der Physik her unsachgemäß, in der Mechanik z. B. bei Anwendung auf Überschallströmungen. Voraussetzung darf allein die Dimensionshomogenität der Beziehung sein.

Es möge nun der Satz von FEDERMANN, in einer für den vorliegenden Zweck unwesentlichen Beziehung vereinfacht, formuliert werden, wobei auch die zur Beweisführung benutzten unnötigen Voraussetzungen unterschlagen werden. Unter Verwendung unserer oben eingeführten Symbole lautet der

Satz von FEDERMANN (1911): *Sei*

$$\begin{aligned} \bar{x}_j &= \alpha_j x_j\,, & j &= 1, \ldots, m \\ \bar{x}_j &= x_j \prod_{k=1}^{m} \alpha_k^{a_{jk}}\,, & j &= m+1, \ldots, n \end{aligned} \tag{2.1}$$

oder mit $a_{jk} = \delta_{jk} \begin{cases} j = 1, \ldots, m \\ k = 1, \ldots, m \end{cases}$ *sei also*

$$\bar{x}_j = x_j \prod_{k=1}^{m} \alpha_k^{a_{jk}} \qquad \text{für alle } j = 1, \ldots, n\,. \tag{2.2}$$

(Bemerkung: Diese Annahme impliziert bereits: Rang $(a_{jk})_{\substack{j=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,m}} = m$.)

---

[2]) Diesen Hinweis und das ins Deutsche übertragene Zitat verdanke ich Herrn H. GERICKE.

[3]) Herrn H. GERICKE verdanke ich auch den „Fundamentalsatz der Mathematikgeschichte", der lautet: „Ein Satz, der einen Namen trägt, stammt von einem Anderen".

Sei ferner

$$f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = f(x_1, \dots, x_n) \prod_{k=1}^{m} \alpha_k^{b_k} . \tag{2.3}$$

Dann existieren eine Funktion G von $n - m$ Variablen und $n - m$ dimensionslose Potenzprodukte $\Pi_1, \dots, \Pi_{n-m}$ der $x_1, \dots, x_n$ mit der Eigenschaft

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{m} x_j^{b_j} \cdot G(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-m}) . \tag{2.4}$$

Soweit der Satz von FEDERMANN. Im Gegensatz hierzu geht das allgemeine Π-Theorem nur von der Voraussetzung

$$\bar{x}_j = x_j \prod_{k=1}^{m} \alpha_k^{a_{jk}} \qquad \text{für alle } j = 1, \dots, n \tag{2.5}$$

für (2.4) aus und läßt Rang $(a_{jk}) = r$ beliebig. Die Anzahl der dimensionslosen Potenzprodukte $\Pi_1, \dots, \Pi_p$ ist dann $p = n - r$, und es gibt n reelle Zahlen $k_1, \dots, k_n$ so, daß gilt:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} x_j^{k_j} \cdot G(\Pi_1, \dots, \Pi_p) . \tag{2.6}$$

Trotz dieser Einengung sind Formulierung und Beweisführung weit mehr, als VASCHY 1890 zu bieten vermochte, aber auch weit mehr als die drei Jahre nach 1911 veröffentlichte Arbeit [6] von E. BUCKINGHAM (1914), dem weder die Arbeit von VASCHY noch jene von FEDERMANN bekannt war.

BUCKINGHAM formuliert in [6], vgl. auch [7] das Π-Theorem und begründet es unzulänglich (und wieder unter unnötigen Voraussetzungen an f). Seine Formulierung ist insofern falsch, als er $p = n - m$ behauptet, wo hier m die Anzahl der Grundgrößenarten im benutzten Grundgrößensystem ist (statt richtig: $p = n - r$, wo $r =$ Rang (a_{jk})).

Nun aber hat BUCKINGHAM durchaus nicht den Anspruch erhoben, erstmals das Π-Theorem formuliert und begründet zu haben. Er verweist vielmehr auf D. RIABOUCHINSKY als dem nach seinem Wissen eigentlichen Entdecker des Π-Theorems mit seiner Arbeit [27] aus dem Jahre 1911. Wenn trotzdem in der Literatur oft vom „BUCKINGHAMschen Theorem" gesprochen wurde, so hat das andere Gründe. Blieb die Formulierung von VASCHY aus 1890 in Veröffentlichungen für Elektrotechniker den Interessenten aus der Mechanik verborgen, und blieb der Satz von FEDERMANN als Anwendungsbeispiel in einer mathematischen Untersuchung zur Integration partieller Differentialgleichungen für Physiker und Ingenieure begraben, so fanden die Arbeiten von BUCKINGHAM (Phys. Review und Trans. Am. Soc. Mech. Eng.) weite Verbreitung bei potentiellen Interessenten. Das hat neben diesem bedeutenden Vorteil freilich auch den Nachteil gehabt, daß sich der oben genannte Fehler ($p = n - m$ statt $p = n - r$) noch heute durch die Literatur fortpflanzt, und dies obwohl P. W. BRIDGMAN 1922 in seinem bahnbrechenden und sehr stark verbreiteten Buch [4] nachdrücklich auf diesen Fehler hingewiesen hat.

Spricht man heute von dem Theorem als „Π-Theorem", so lebt hierin der Beitrag von BUCKINGHAM weiter, denn er war es, der für die dimensionslosen Potenzprodukte die Schreibweise $\Pi_1, \Pi_2, \dots$ einführte.

Eine Darstellung des Theorems mit Anwendungsbeispielen gab 1916 C. RUNGE [29]. Dieser Beitrag weist zugleich eine bemerkenswerte Emanzipation in der damals noch sehr kontroversen Frage der Wahl von Grundgrößensystemen auf. Auch RUNGE kannte die Arbeit von FEDERMANN nicht.

Während auch noch in dem Buche [4] von BRIDGMAN 1922 der Beweis des Π-Theorems unter der unangemessenen Voraussetzung der Differenzierbarkeit von f geführt wurde, sind die später von H. L. LANGHAAR [22] 1951, G. BIRKHOFF [2] 1950 und L. BRAND [3] 1957 gegebenen Beweise rein algebraisch und gültig für jede reellwertige Funktion aus der Menge der dimensionshomogenen Funktionen auf ihrem Definitionsbereich $D \subseteq R_n^+$. Dem Beweis von L. BRAND kommt der erhebliche Vorteil zu, daß er einen konstruktiven Existenzbeweis darstellt. Zu erwähnen ist noch ein Beweis von S. DROBOT [8] 1953, jedoch wird in dieser Arbeit eine Aussage bewiesen, die, ähnlich wie einst der Satz von FEDERMANN, kein volles Äquivalent zum allgemeinen Π-Theorem ist. Außerdem ist der Beweis mit Beiwerk versehen, das dazu angetan ist, das Wesen der Aussage des Π-Theorems zu verdecken statt zu erhellen.

3. Verallgemeinerung des Π-Theorems

Die Anwendung des Π-Theorems führt zu einer Reduktion der Anzahl der Argumente von n auf $p = n - r$. Der Nutzen der so erzielten Information hängt von der Größe dieser Reduktion ab. Diese hängt im allgemeinen von der Wahl des Grundgrößensystems ab. Sie kann für die erstrebten Ziele unbefriedigend sein.

Oft liegt zusätzliche physikalische Information vor, die es ermöglicht, die Anzahl der Argumente nach Anwendung des Π-Theorems weiter zu erniedrigen, vgl. [14].

Man hat schon früh begonnen, nach Möglichkeiten zu suchen, das Π-Theorem in diesem oder jenem Sinne zu verallgemeinern.

T. EHRENFEST-AFANASSJEWA [10] hat 1926 die Mängel der Methode der Dimensionsanalyse kritisiert trotz aller erstaunlichen Erfolge dieser Methode. Sie forderte, diese Methode durch eine allgemeine Methode der Invarianz von Gleichungen unter Transformationsgruppen zu ersetzen.

Mit Recht konnte P. W. BRIDGMAN [5] entgegnen: Während man hierzu die Bestimmungsgleichungen des jeweiligen Problems vollständig kennen müsse, biete die Methode der Dimensionsanalyse den großen Vorteil, daß man nur die Argumente $x_1, \ldots, x_n$ (variable Maßzahlen von Größen sowie die ebenfalls von Einheitenänderungen der Grundgrößenarten abhängigen Dimensionskonstanten) der gesuchten Funktion kennen brauche, um schon vermöge des Π-Theorems Information über die gesuchte Lösung zu erhalten, da eben alle physikalischen Gleichungen invariant sind unter der Transformationsgruppe der Einheitenänderungen der Grundgrößenarten. Man könne also auch Probleme behandeln, deren Bestimmungsgleichungen man nicht einmal hinzuschreiben vermag.

Aber BRIDGMAN irrte sich zugleich, als er weiter erklärte, es sei nicht erforderlich, über die Methode der Dimensionsanalyse hinaus die von Frau EHRENFEST propagierte Methode zu verfolgen, deren Anwendung zudem mathematisch für die Physiker so sehr viel schwieriger sei. Die propagierte Erweiterung der Methode hat wohl erstmals A. E. RUARK [28] 1935 ernstlich in Angriff genommen, u. zw. unter der Bezeichnung „inspectional analysis". Vgl. hierzu auch G. BIRKHOFF [2]. Heute weiß man, daß „inspectional analysis" sowohl für theoretische Untersuchungen als auch für das Modellversuchswesen großen Nutzen bringen kann. Leider hat sich die Bezeichnung „inspectional analysis" nicht durchgesetzt, vielmehr spricht man von „Ähnlichkeit" („similitude") nicht nur im Sinne des Π-Theorems, sondern auch in dem Sinne der Erweiterung der Methode.

Während hier auf einen anders gerichteten erfolgreichen Versuch, Aussagen über die Struktur von Invarianten, wie sie das Π-Theorem darstellt, zu gewinnen — von J. HAINZL [15, 16] erreicht für eine recht allgemeine LIEsche Transformationsgruppe — nicht eingegangen werden soll, sei noch etwas über die Erweiterung im Sinne der „inspectional analysis" gesagt.

Physikalische Gleichungen haben zwar alle die Eigenschaft der Invarianz unter Einheitenänderungen der Grundgrößenarten — sie sind dimensionshomogen —, aber von Fall zu Fall können die physikalischen Bestimmungsgleichungen eines Problems oder Problemkreises darüber hinaus invariant sein unter weiteren Transformationsgruppen. Hier kann sich also entsprechend von Fall zu Fall die Möglichkeit zur Erlangung von Information bieten, die über jene des Π-Theorems entscheidend hinausgeht. Die in diesem Sinne verstandene „Inspektion" der Bestimmungsgleichungen oder „Methode der Transformationsgruppen" setzt aber die vollständige Kenntnis aller Bestimmungsgleichungen voraus. Es sei hier vor allem auf das in englischer Übersetzung aus dem Russischen vorliegende Buch von L. V. OVSJANNIKOV [26] verwiesen. Man vergleiche auch das Buch von A. G. HANSEN [17].

In der Mechanik hat die „Methode der Transformationsgruppen" bedeutende Erfolge erzielt. Man vergleiche etwa das in englischer Übersetzung aus dem Russischen vorliegende Werk von L. I. SEDOV [30].

Es ist klar, daß, je nachdem wie man in Grenzfällen die Bestimmungsgleichungen eines Problems vereinfacht — etwa die NAVIER-STOKESschen Gleichungen für große REYNOLDSsche Zahlen zu den PRANDTLschen Grenzschichtgleichungen, Hyperschallgleichungen für große MACHsche Zahlen —, sich neue asymptotisch gültige Invarianzen ergeben können. Insbesondere für die Gasdynamik vergleiche man das Buch von J. ZIEREP [33]. So ist etwa die erstmals von K. OSWATITSCH (1951) aufgezeigte Tatsache, daß für reibungsfreie Hyperschallströmungen um beliebige Körper die Bestimmungsgleichungen von der MACH-Zahl Ma für Ma $\to \infty$ unabhängig werden („Einfrieren des Strömungsfeldes") von wesentlichem Interesse. Eine andere „Einfrierungseigenschaft" kennt man bei schallnahen Strömungen (Ma nahe an 1).

Zum Abschluß noch folgende Bemerkung: Eine Vermehrung der Anzahl der Grundgrößenarten geht mit einer Verringerung der Anzahl der Dimensionslosen einher. Daher wird unter Umständen auch der Rang r der Dimensionsmatrix $A = (a_{jk})$ eines Problems erhöht bei unverändertem n. Das bedeutet dann eine Erniedrigung von $p = n - r$ und eine entsprechende Verschärfung der Aussage des Π-Theorems. (Für Beispiele siehe etwa [14].) Wenn nun einige Autoren — erstmals, soweit mir bekannt, H. E. HUNTLEY [19] 1952 und später mehrere andere Autoren — zur Erreichung dieses Zieles zum Beispiel für die physikalische Größenart Länge nicht nur eine Dimension (Grundgrößenart), sondern für jede räumliche Komponente des Längenvektors eine eigene einführen und dabei Erfolg haben, so bleiben zwar dieses Vorgehen und seine Begründung mindestens befremdlich, der Erfolg läßt sich aber legalisieren, wenn man — bei diesem Beispiel — nicht nur nach Invarianz unter geometrischen Ähnlichkeitstransformationen — Änderung der Einheit der einen Grundgrößenart Länge — sondern allgemein nach Invarianz des speziellen Problems unter affinen Transformationen fragt, also spezielle „inspectional analysis" treibt.

Literatur

1 ALBRING, W., HELMHOLTZ schuf eine Ähnlichkeitstheorie für Strömungen, Maschinenbautechnik **15**, 113—118 (1966).
2 BIRKHOFF, G., Hydrodynamics, a Study in Logic, Fact, and Similitude, Princeton University Press, Princeton 1950.
3 BRAND, L., The Pi theorem of dimensional analysis, Arch. Rat. Mech. Anal. **1**, 35—45 (1957).
4 BRIDGMAN, P. W., Theorie der physikalischen Dimensionen, Übersetzung aus dem Englischen von HOLL, H., B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1932 (englische Originalausgabe: 1922).
5 BRIDGMAN, P. W., Dimensional analysis again, Philos. Mag. **2**, 1263—1266 (1926).
6 BUCKINGHAM, E., On physically similar systems, illustration of the use of dimensional equations, Phys. Review **4**, 345—376 (1914).
7 BUCKINGHAM, E., Model experiments and the forms of empirical equations, Trans. Amer. Soc. Mech. Eng. **37**, 263—288 (1915).
8 DROBOT, S., On the foundations of dimensional analysis, Studia Mathematica **14**, 84—99 (1953).
9 EHRENFEST-AFANASSJEWA, T., Der Dimensionsbegriff und der analytische Bau physikalischer Gleichungen, Math. Ann. **77**, 259—276 (1916).

10 EHRENFEST-AFANASSJEWA, T., Dimensional analysis. Philos. Mag. **1**, 257–272 (1926).
11 EIGENSON, L. S., Modellübertragung, Staatl. Verlag für Baustoffliteratur, Moskau 1949 [Russisch].
12 FEDERMANN, A., Über einige allgemeine Integrationsmethoden der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Ann. Polytechn. Inst. Peter der Große zu St. Petersburg **16**, 97–154 (1911) [Russisch].
13 FOURIER, J. B. J., Théorie analytique de la chaleur, Paris 1822.
14 GÖRTLER, H., Theorie der physikalischen Dimensionen mit Anwendungen, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, im Druck.
15 HAINZL, J., Verallgemeinerung des Π-Theorems mit Hilfe spezieller Koordinaten in LIEschen Transformationsgruppen, Arch. Rat. Mech. Anal. **30**, 321–344 (1968).
16 HAINZL, J., On local generalizations of the Pi theorem of dimensional analysis, J. Franklin Inst. **292**, 463–470 (1971).
17 HANSEN, A. G., Similarity analyses of boundary value problems in engineering. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1964.
18 HELMHOLTZ, H., Über ein Theorem, geometrisch ähnliche Bewegungen flüssiger Körper betreffend, nebst Anwendung auf das Problem, Luftballons zu lenken, Monatsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin **1873**, 501–514 (1873).
19 HUNTLEY, H. E., Dimensional analysis, Macdonald, London 1952.
20 JEANS, J. H., On the laws of radiation, Proc. Roy. Soc. **76**, 545–551 (1905).
21 KIRPICHEV, V. L., Besedy o mekhanike, I izd. Petersburg 1907 (II izd. Gos. tekh.-teoret. 1932).
22 LANGHAAR, H. L., Dimensional analysis and theory of models, 6. Aufl. J. Wiley & Sons, New York, Chapman & Hall, London 1964 (1. Aufl. 1951).
23 O'RAHILLY, A., Electromagnetics, a discussion of fundamentals, Longman, Green & Co., London/New York/Toronto 1938; ungekürzte Wiedergabe: Dover Publications, New York 1965.
24 OSWATITSCH, K., Ähnlichkeitsgesetze für Hyperschallströmungen, Z. angew. Math. Phys. **2**, 249–264 (1951).
25 OSWATITSCH, K., Gasdynamik, Springer, Wien 1952.
26 OVSJANNIKOV, L. V., Group properties of differential equations, übersetzt aus dem Russischen von BLUMAN, G. W., Sibirische Sektion der Akademie der Wissenschaften der USSR, Novosibirsk 1962.
27 RIABOUCHINSKY, D., Méthode des variables de dimension zéro, L'Aérophile **19**, 407–408 (1911); nachgedruckt in Bull. Inst. Aérodynamique de Kouchino **1912**, fasc. IV., 50–55 (1912).
28 RUARK, A. E., Inspectional analysis: A method which supplements dimensional analysis, J. Elisha Mitchell Sci. Soc. **51**, 127–133 (1935).
29 RUNGE, C., Über die Dimensionen physikalischer Größen, Phys. Z. **17**, 202–212 (1916).
30 SEDOV, L. I., Similarity and dimensional methods in mechanics (Übersetzung aus dem Russischen der 4. Aufl. 1956 des erstmals 1943 erschienenen Buches), Academic Press, New York 1959.
31 VASCHY, A., Traité d'électricité et de magnétisme, tome I, Baudry et Cie 1890.
32 VASCHY, A., Sur les lois de similtude en physique, Annales télégraphiques **19**, 25–28 (1892).
33 ZIEREP, J., Ähnlichkeitsgesetze und Modellregeln der Strömungslehre. G. Braun, Karlsruhe 1972.

Eingereicht am 8. 8. 1974.

Anschrift: Prof. Dr. HENRY GÖRTLER, Institut für Angewandte Mathematik der Universität Freiburg, D-78 Freiburg i. Br., Hebelstr. 40, BRD und Institut für Angewandte Mathematik und Mechanik der DFVLR, D-78 Freiburg i. Br., Hebelstr. 27, BRD