P. GIUSEPPE ALVAREZ, C.M.F.

LA FILOSOFIA DELLA MATEMATICA IN SAN TOMMASO

« Peccato che San Tommaso non sia stato un matematico! », disse il noto storico della matematica M. Cantor (1).

Le poche nozioni, imparate a Napoli con le altre materie del « Quadrivium » (2) dal 1236 al 1239 circa (3), gli furono però sempre familiari. Ed egli spesso cita gli « Elementi» di Euclide (4) e l'aritmetica di Boezio (5).

San Tommaso, però, era filosofo. Riflettendo su tali nozioni delineò uno schema di filosofia della matematica (6).

« Supponuntur... in (mathematicis) scientiis ea quae sunt prima in genere quantitatis, sicut unitas et linea et superficies et alia hujusmodi.

« Quibus suppositis, per demonstrationem quaeruntur quaedam alia, sicut triangulus aequilaterus, quadratum in geometricis et alia hujusmodi. Quae quidem demonstrationes quasi operativae dicuntur, ut est illud, Super rectam lineam datam triangulum aequilaterum constituere.

« Quo adinvento, rursus de eo aliquae passiones probantur, sicut quod eius anguli sunt aequales aut aliquid huiusmodi » (7).

La matematica ha tre stadi, dice San Tommaso.

Uno, presupposto, strettamente filosofico.

Altro, costrutto, tipicamente matematico.

Il terzo, dedotto, comune alle altre scienze.

Sette secoli più tardi, i matematici moderni stabiliscono ancora questa netta differenza fra la matematica e le altre scienze (8).

San Tommaso non ebbe occasione di ampliare il suo schema, ma lasciò qua e là, nelle numerose sue opere, alcune indicazioni che ci possono servire per completarlo.

Tale lo scopo del presente articolo.

(1) Der Mathematiker nennt Thomas von Aquin mit Bedauern seiner Wissenschaft fremd. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Leipzig, Teubner, 1892, vol. II, p. 86.

(2) Così asseriscono i primi tre biografi: CALO P., *Vita S. Thomae Aq.*; TOCCO G., *Historia B. Thomae Aq.*; GUIDONIS B., *Legenda S. Thomae de Aq.*, ed. Prümmer, pp. 20, 70, 170.

(3) P. PRÜMMER (*Chronologia vitae S. Thomae Aq.* in: « Xenia Thomistica ») assegna il 1235 come primo anno della permanenza del Santo a Napoli. P. WALZ (*Delineatio vitae S. Thomae de Aquino*, Romae, Angelico, 1927, p. 16) dice « anno 1236, vel. 1239 ».

(4) Spiega, per esempio, il nome « Elemento » III *Met.*, l. 8, n. 424; V *Met.*, l. 4, n. 601. Cita il I libro in III *de An.*, l. 1, n. 577; il III libro in II *De Cael.* l. 26, n. 6; il VI libro *De mem.* l. 7, n. 392; il X libro in *An. Post.*, I, l. 4, n. 13.

(5) *De Pot.* q. 3, a. 16 sed contra 4; *I Sent.*, d. 24, q. 1, ob. 2; *De Trin.*, q. 1, a. 4 ad 2; q. 4, a. 1, arg. 1.

(6) Scrisse incidentalmente questo schema per spiegare una difficoltà che offre il testo aristotelico, *An. Post.*, A 1, 71 a 15, dove τρίγωνον appare come predicato.

(7) In *An. Post.*, A 1, 71 a 15 l. 2, n. 5.

(8) Si veda ad esempio HOELDER, *Die mathematische Methode*, Berlin, Sprianger, 1924, p. 10.

I. - PRIMO STADIO: I PRESUPPOSTI DELLA MATEMATICA

« Nel primo stadio — dice San Tommaso — si suppongono i primi elementi nell'ordine della quantità ».

Come giustificare tale « supposizione »?

I. - Le prime nozioni matematiche.

Come le altre nostre cognizioni, hanno origine nella conoscenza sensitiva (1).

L'unità ed il numero, l'estensione e la figura sono percepite da diversi sensi, onde da Aristotele e San Tommaso sono chiamati « sensibili comuni » (2).

Dai sensi si passa all'immaginazione, nella quale, secondo San Tommaso, si fonda la conoscenza matematica (3).

Viene poi l'operazione intellettiva dell'« astrazione », che San Tommaso spiega principalmente in due occasioni: ampiamente nel commento al libro di Boezio sulla Trinità e più succintamente nel secondo libro dei Fisici (4).

Ho studiato particolarmente il primo testo, nel codice autografo del Santo conservato nella Biblioteca Apostolica Vaticana, notando incidentalmente alcuni errori delle edizioni correnti (5). Eccone il sunto:

« Quasi tutte le cose che conosciamo sono composte: o come parti con il tutto o come forma con la materia.

Or, se uno di questi componenti non dipende dagli altri, questo può essere pensato dall'intelletto in modo da intendersi senza gli altri, come una lettera può capirsi senza pensare ad una sillaba e un animale può essere compreso senza pensare al piede; ma non viceversa.

L'atto di comprendere una cosa, senza pensare ad altra con la quale è unita, si chiama « astrazione ».

Doppia è l'« astrazione »: l'una astrae la forma dalla materia, l'altra astrae le parti dal tutto.

La forma può essere astratta dalla materia, soltanto quando la sua essenza non richieda tale materia.

Gli accidenti con la sostanza stanno fra loro come la forma con la materia e ciascun accidente è così legato alla materia da non poter essere separato.

Gli accidenti però sopravvengono alla sostanza in un certo ordine; perchè prima viene la quantità, poi la qualità, le passioni, ecc.

Onde si segue che la quantità possa intendersi, senza pensare alle qualità sensibili (materia sensibile).

(1) *De An.* Γ 8, 432 a 7, l. 13, n. 791; *Met. A* 1, 981 a 3, l. 1, n. 18; *Phys.* H 3, 247 b 20, l. 6, n. 5; *An. Post.* A 18, 81 b 3, l. 30, n. 5.

(2) *De An.* B. 6, 418 a 8.14, l. 13, n. 383.386; Γ 1, 425 a 15.27, l. 1, n. 577. 580; *De sen.* 4, 442 b 5, l. 11, n. 156.

(3) « In mathematicis oportet cognitionem secundum iudicium terminari ad imaginationem »: In *Boet. de Trin.*, q. 6, a. 2.

(4) In *Boet.* de *Trin.*, q. 5, a. 3; 2 *Phys.*, l. 3, n. 5.

(5) Tutte le edizioni, anche quella di P. A. Uccelli che intentava esser critica, hanno *Metaphysicae* invece di *Mathematicae*, come esige il contesto. Il codice autografo (Vat. lat. 9850 f. 97b 1-10) dice chiaramente *Mathematicae*, abbreviando soltanto la fine della parola. Due altri codici (Vat. lat. 808 e Urb. lat. 127) usano due abbreviature diverse. Il codice Ottob. lat. 198 usa la stessa abbreviatura per *Mathematicae* e *Metaphysicae*. Il Borg. lat. 15 all'opposto delle edizioni, dice le due volte *Mathematicae*. Recentemente ha editato il testo secondo l'autografo P. Wyser, Fribourg-Louvain, 1948.

Di questo si occupa la matematica, che considera soltanto la quantità e ciò che segue la quantità, come la figura ed altre cose simili ».

Poco si occupano generalmente i matematici di questa analisi noetica delle nozioni matematiche, lasciando generalmente tale compito ai psicologi e filosofi. Qualcuno però ne ha trattato ampiamente in apposita monografia.

Se compariamo quello che dice a proposito un matematico del nostro secolo, con quello che scrisse incidentalmente un teologo del secolo XIII, troveremo certamente molte deficienze. Niente dice San Tommaso, per esempio, sulla invenzione di nuove idee matematiche, su certa felice ispirazione che hanno goduto i più grandi matematici, ecc.

Se compariamo però soltanto il punto concreto svolto da San Tommaso, dobbiamo confessare che sia nell'origine sensibile come nel processo intellettivo, è molto più preciso di Aurelio Voss (1).

Quello che dice San Tommaso, esigerebbe ancora molti ritocchi e complementi, per potersi presentare ai nostri tempi, come un'analisi noetica completa delle prime nozioni matematiche.

II. - Le prime nozioni aritmetiche.

Sono l'unità e il numero.

« Uno » è quasi equivoco (2); contiene però sempre una idea fondamentale; l'indivisibilità (3).

Due specie di unità distingue accuratamente San Tommaso: l'unità trascendentale e l'unità predicamentale (4).

Come tutti i medievali, sottolinea l'indivisibilità dell'unità, sì da dire che « la metà » non ha senso, se non la si riferisce a « due » (5); ma ammette anche la relatività di tale indivisibilità, così da poter formare una gerarchia di unità, o, come diciamo oggi, unità di diversi ordini (6).

Due definizioni di numero si trovano in San Tommaso. Una analitica: « multitudo mensurabilis per unum » (7); l'altra sintetica: « aggregatio unitatum » (8). La prima definizione corrisponde soltanto al numero predicamentale; la seconda invece si può applicare a tutte e due le specie di numeri e ci appare evidente la loro distinzione:

se si aggiungono unità predicamentali, abbiamo il numero predicamentale;

se si aggiungono unità trascendentali, abbiamo il numero trascendentale (9).

(1) A. Voss, *Ueber die mathematische Erkenntnis. Die Kultur der Gegenwart: die mathematische Wissenschaften*, 3, Leipzig. Teubner, 1914.

(2) *Phys.*, A 2, 185 b 6; B 2, 227 b 3; H 4, 248 b 19; *De An.*, B 1, 412 b 18; *Met.*, △ 10, 1018 a 35; I 1, 1052 a 15. « Forte potest dici quod ipsum unum est aequivocum » in 7 *Phys.*, l. 7, n. 9.

(3) « Ratio unitatis in impartibilitate consistit ». *De div. nom.* c. 1. l. 2. Cf. *Met.* △ 6, 1016 b 4, l. 8, n. 866; I 1. 1052 a 34, l. 1, n. 1932; *I Sent.*, d. 24, q. 1, a. 1, a. 3 c. et ad 3, a. 4 ad 3; *S. Th.*, I q. 6, a. 3 ad 1; q. 11 a. 1 c; q. 30 a. 3 c.

(4) « Unum quod convertitur cum ente » e « Unum quod est principium numeri ». Cf. *Met.*, B 5, 1001 b 25 l. 12, n. 501; △ 2, 1003 b 32, l. 2, n. 557; △ 6, 1016 b 32, l. 8, n. 875; I 2, 1054 a 15, l. 3, n. 1981; *I Sent.*, d. 24, q. 1, a. 1 ad 1, a. 2, a. 3 ad 4; *De Pot.*, q. 3, a. 16 ad 3; q. 9, a. 7 ad 2; *S. Th.*, I q. 11, a. 1 ad 1, a. 2, a. 3 ad 2; q. 30, a. 3.

(5) *Phys.*, Γ 3, 202 a 19, l. 4, n. 11.

(6) *Phys.*, △ 12, 220 b 20, l. 19, n. 6; I Sent. d. 24, q. 1, a. 3 ad 4; *S. Th.*, I q. 11, a. 2 ad 1.

(7) *Phys.*, Γ 5, 204 b 8, l. 8, n. 4; *Met.*, I 6, 1057 a 3, l. 8, n. 2090.

(8) *Met.*, △ 27, 1024 a 14, l. 21, nn. 1113.1114; *S. Th.*, I q. 5, a. 5.

(9) San Tommaso usa diverse espressioni per indicare questa differenza: Cf. *Phys.*, 3, l. 8, n. 4; *Met.*, 5, n. 1061; 8, n. 2090; *I Sent.*, d. 24, q. 1, a. 3 ad 4, ad 5; *De Pot.*, q. 9, a. 7; *S. Th.*, I q. 30, a. 3; q. 50, a. 3 ad 1.

La distinzione tra numero predicamentale e trascendentale non consiste, come delle volte si crede, nella determinazione del numero. L'essere o non essere determinato distingue la moltitudine (« quasi-genus ») dal numero (« quasi-species ») (1).

Un'altra distinzione molto importante per il matematico è quella di « numerus numerans » e « numerus numeratus », ossia numero astratto e concreto, o, più tecnicamente, distinguiamo la serie dei numeri naturali e i diversi insiemi numerati (2).

Ho avuto la soddisfazione di constatare che un errore di molti manuali scolastici che copiano Giovanni di San Tommaso (3) non è dottrina dell'Angelico Dottore. Molte volte si dice che l'oggetto dell'aritmetica sia il numero predicamentale. È un errore che non si spiega: o ignoravano l'aritmetica o non erano logici con le loro divisioni; perchè è chiaro che le aritmetiche — sopra tutto quelle di tipo pitagorico, ad esempio Nicomaco e Boezio — studiano le proprietà del numero come tale e non del numero applicato alle cose.

III. - Le prime nozioni geometriche.

« In geometria intenditur quasi finis cognitio magnitudinis, quae est subjectum geometriae », disse San Tommaso (4).

L'estenso, oggetto della geometria, è il « continuo » (5). « Continua a continendo dicitur: quando igitur multae partes continentur in uno, et quasi simul se tenent, tunc est continuum » (6).

Aristotele dà tre definizioni di « continuo ». La prima non ha applicazione al continuo matematico (7). La seconda — dice San Tommaso — è materiale e sarà studiata parlando dell'infinito (8). La terza, formale, distingue il continuo dagli altri generi di estenso (9).

Si distinguono tre note: 1) l'estensione, comune a tutti tre i generi; 2) la mancanza di interruzione, comune al continuo e al contiguo; 3) l'unità intrinseca, propria del continuo (10).

Come la prima e terza nota comprendono generalmente la seconda, il continuo può essere definito: « l'esteso intrinsecamento uno » (11).

San Tommaso, seguendo i matematici del suo tempo, distingue tre specie

(1) *Met.*, I 6, 1056 b 30, l. 8, n. 2090. Cf. D. Mercier, *L'unité et le nombre d'après St. Thomas d'Aquin*, in: « Rev. Neoscholastique », 8 (1901) 258-275.

(2) « Numerus dicitur dupliciter: uno modo id quod numeratur actu, vel quod est numerabile, ...; qui dicitur numerus numeratus, quia est numerus applicatus rebus numeratis. Alio modo dicitur numerus quo numeramus, idest ipse numerus absolute acceptus, ut duo, tria, quatuor ». *Phys.*, △ 11, 219 b 16, l. 17, n. 11.

(3) Ioannes a S. Thoma, *Logica*, P. II, q. 16, a. 2, ed. Reiser, vol. p. 555, a 45.

(4) *An. Post.*, A 28, 87 a 38, l. 41, n. 7.

(5) *An. Post.*, B 8, 93 b 26, l. 8, n. 4; *Met.*, A 9, 991 b 27, l. 16, n. 249; 2, 1003 b 32, l. 2, n. 560; E 1, 1025 b 8, l. 1, n. 1147.

(6) *Phys.*, E 3, 227 a 10, l. 5, n. 8.

(7) *Met.*, △ 6, 1016 a 15; *Phys.* A 2, 185 b 10; Z 1, 231 a 22.

(8) *De Cael.* A 1, 268 a 6, l. 2, n. 2.

(9) W. D. Ross, *Aristotle's Metaphysics*, Oxford, 1924, II, p. 345 presenta queste tre specie come in un albero porfiriano.

(10) *Phys.*, Z 1, 231 a 22.

(11) Dico generalmente perchè si può forse ammettere la possibilità di un essere intrinsecamente uno con le sue parti separate. Vedi P. Hoenen, *Cosmologia*, Roma, P. U. Gregoriana, 1949, n. 11.

di continui, — le tre dimensioni, longitudine, latitudine, altezza, — che sono come la misura interna delle cose (1).

Il problema del numero delle dimensioni non esiste per San Tommaso: dice che il matematico prova che non ci sono che tre dimensioni (2).

Di ciascuno di questi tre continui, troviamo tre descrizioni distinte (3).

Il primo gruppo è il più filosofico. Descrive secondo la possibilità della divisione. « *Linea* est quod est divisibile secundum unam dimensionem tantum. *Superficies* vero secundum duas. *Corpus* autem est omnibus modis divisibile secundum quantitatem, scilicet secundum tres dimensiones. Et hae descriptiones convertuntur. Nam omne quod duabus dimensionibus dividitur est superficies. Et sic de aliis » (4).

Il secondo gruppo usa la dimensione propria di ciascun continuo. « Longitudo finita dicitur *linea*. Latitudo finita *superficies*. Profunditas finita *corpus* » (5).

Il terzo gruppo i limiti di ciascun continuo. « *Lineae* finitae termini sunt duo puncta; *superficiei* plures (saltem tres) lineae; *corporis* plures (saltem quatuor) superficies » (6).

Tratta anche delle mutue relazioni tra corpo e superficie, superficie e linea, linea e punti. Alcune frasi, a prima vista platoniche, nel contesto possono intendersi bene (7).

IV. - Compariamo le nozioni aritmetiche con quelle geometriche.

Prima di tutto, l'unità e il punto.

Tre definizioni di punto si trovano in San Tommaso. 1) Quella di Euclide: « Punctus est cujus pars non est » e spiega la sua forma negativa, perchè la simplicità del punto non può esser compresa dal nostro intelletto (8). 2) Più spesso ricorrono definizioni del punto, come limite della linea (9). 3) La terza definizione ci porta subito a considerare le relazioni tra la unità e il punto.

Aristotele aveva definito il punto: « ciò che è completamente indivisibile ed ha una posizione » (10). Una riga prima aveva detto: « l'unità è ciò che è completamente indivisibile senza posizione » (11). Era quindi naturale una mutua sostituzione: « il punto è l'unità con posizione » e « l'unità il punto senza posizione » (12). O meglio, una come specificazione di una idea comune: « ciò che è completamente indivisibile è punto od unità: con posizione è punto, senza posizione è unità » (13).

(1) *Phys.*, Γ 3, 202 b 20, l. 5, n. 15; Δ 2, 209 b 6, l. 3, n. 4; *Met.* A 10, 993 a 15, l. 17, n. 264; Δ 13, 1020 a 13, l. 15, n. 978; Δ 16, 1021 b 30, l. 18, n. 1042.
(2) *De Cael.* A 1, 268 a 15, l. 2, n 7.
(3) Descrizioni le chiama San Tommaso: *Met.*, Δ 6, 1016 b 25, l. 8, n. 874.
(4) *Met.*, Δ 6, 1016 b 25, l. 8, n. 874.
(5) *Met.*, Δ 13, 1020 a 13, l. 15, n. 978.
(6) *Phys.*, Δ 10, 218 a 22, l. 15, n. 6.
(7) *Met.*, Δ 25, 1023 b 17, l. 21, n. 1095; Δ 28, 1024 b 10, l. 22, n. 1125.
(8) *S. Th.*, I q. 10, a. 1 ad 1. Cf. *Met.*, Δ 6, 1017 a 1, l. 7, n. 865.
(9) *An. Post.*, B 12, 95 a 28, l. 10, n. 7; *Phys.*, Z 6, 236 b 33, l. 8, n. 4; *De Gen.*, A 2, 316 a 24, l. 4, n. 4; 317 a 2, l. 5, n. 6.
(10) *Met.*, Δ 6, 1016 b 25, l. 8, n. 874.
(11) Cf. *Met.*, M. 8, 1084 b 26.
(12) *De An.*, A 4, 409 a 6, l. 11, n. 169.
(13) *Met.*, Δ 6, 1016 a 29, l. 8, n. 874. Cf. *An. Post.* A 32, 88 a 33, l. 43, n. 5.

Poi il numero e il continuo (1).

« Il numero si conosce per la negazione (o divisione) del continuo. Il numero delle cose sensibili è causato dalla divisione del continuo; onde le proprietà del numero si conoscono per le proprietà del continuo. Perchè il continuo è divisibile in infinito, il numero può crescere in infinito » (2). Quattro frasi che meravigliosamente compendiano le mutue relazioni tra il numero e il continuo.

Una delle proprietà comuni al continuo e al numero è la proporzionalità, osservata già da Aristotele, esposta da Euclide e studiata anche da San Tommaso (43).

Finalmente, l'aritmetica e la geometria.

Due scienze diverse: una non definisce niente dell'altra (4), ma la geometria usa i principî dell'aritmetica (4), onde l'aritmetica è anteriore alla geometria (6), aritmetica è più certa della geometria (7). Così pensavano anche i matematici del secolo XIII (8).

V. - L'INFINITO.

Una proprietà comune al numero e al continuo è stata appena accennata al paragrafo precedente: l'infinito. Nozione fondamentale, ma difficile.

Molte volte se ne occupò San Tommaso (9). Il luogo classico però si trova nel Commentario al terzo libro dei fisici di Aristotele.

Dopo un proemio (l. 6), espone le ragioni in favore dell'infinito (l. 7, 1-6). Precisa poi il senso della questione (l. 7, 7-9) e comincia a proporre le ragioni contrarie, prima contro l'infinito separato (l. 8, 1-4) poi contro l'infinito nelle cose, argomenti logici e argomenti naturali: considerando un numero infinito di elementi (l. 8, 5-9) o semplicemente (l. 9). Risolve quindi le due questioni: an sit (l. 10) et quid sit (ll. 11-12) e risponde alle difficoltà proposte (l. 13).

« Proprie dicitur infinitum... quod est natum transiri, quasi de genere transibilium existens, quod tamen non habet transitum ad finem; ut si esset aliqua linea non habens terminum, vel quaecumque alia quantitas » (10).

« Infinitum dicitur vel per appositionem, ut in numeris; aut secundum divisionem, sicut in magnitudinibus; aut utroque modo, sicut in tempore » (11).

Le ragioni logiche contro l'infinito sono soltanto probabili, dice San

(1) Cf. E. BODEWIG, *Zahl und Kontinuum in der Philosophie des hl. Thomas*, in: « Divus Thomas », Frib. 13 (1935) 55-77; 187-207.

(2) *De An.*, Γ 1, 425 a 19, l. 1, n. 578.

(3) ARISTOTELE, *An. Post.*, A 5, 74 a 8; B. 17, 99 a 6; *Met.*, E 2, 1026 a 27; M. 1, 1077 b 17. EUCLIDE nel libro V studia le proporzioni tra le linee e nei libri VII e IX le proporzioni tra i numeri. SAN TOMMASO, *An. Post.*, A 5, 74 a 8, l. 12, n. 8; B 17, 99 a 6, l. 19 n. 3; *Met.*, A 2, 983 a 16, l. 13, n. 67.

(4) *An. Post.*, A 7, 75 a 39, l. 15, n. 2.

(5) *De Cael.*, A 2, 268 b 18, l. 3, n. 6.

(6) *Met.*, A 1, 982 a 26, l. 2, n. 47; Γ 2, 1004 a 6, l. 2, n. 563.

(7) *An. Post.*, A 27, 87 a 36, l. 41, n. 4.

(8) Per esempio, BOETII, *Arithmetica*, P. L. 63, 1082.

(9) *De Cael.*, A 7; *Met.*, K 10; *S. Th.*, I q. 7, aa. 1-4; q. 14, a. 12; q. 53, a. 2; III q. 10, a. 3. Cf. G. LANGEBERG, *Des hl. Thomas Lehre von dem Unendlichen und die neuere Mathematik.*, in: «Phil. Jahrb.», 30(1917) 79-97; 172-191. C. ISENKRAHE, *Die Lehre des hl. Thomas von dem Unendlichen, ihre Auslegung durch Prof.* LANGENBERG *und ihr Verhältnis zur neuzeitlichen Mathematik.*, Bonn, 1920.

(10) L. 7, n. 9.

(11) L. 7, n. 9.

Tommaso (1); le ragioni fisiche non interessano il matematico, ma obbligano il filosofo a concludere che attualmente non esiste l'infinito (2).

Se però non esiste in nessun modo l'infinito, « multa impossibilia accidunt », dice San Tommaso, cioè il continuo non sarebbe sempre divisibile, il numero non potrebbe aumentare sempre (3).

« Quia igitur, secundum determinata, neutrum videtur contingere, neque scilicet quod infinitum sit actu, neque quod simpliciter non sit; necesse est dicere quod quodammodo est, quadammodo non est » (4).

« Infinitum est tamquam in potentia ens » (5).

Questa potenza però è una potenza speciale. Non è come il bronzo che diventa statua, ma come il giorno, le cui parti esistono soltanto successivamente (6).

Basta questa potenza per tutte le dimostrazioni matematiche. « Non enim indigent ad suam demonstrationem infinito in actu, neque eo utuntur: sed solum indigent quod sit aliqua linea finita tanta quanta est eis necessaria, ut ex ea possint subtrahere quod volunt. Et ad hoc sufficit quod aliqua maxima magnitudo sit; quia alicui maximae magnitudini competit, quod possit dividi secundum quantmcumque proportionem respectu alterius magnitudinis datae » (7).

Due specie di infinito si trovano nella matematica: nel continuo e nel numero. Uno dipende dall'altro. Quanto più si divide, più parti ne vengono fuori; quindi, come si ammette la divisione in infinito, così si deve ammettere l'aumento in infinito. Il primo soggetto per tanto dell'infinito è il continuo (8).

Bisogna capir bene questa divisione in infinito. Deve essere fatta secondo la stessa proporzione non secondo la stessa quantità (9). Gli Scolastici parlano generalmente soltanto di metà e di terzi, ma vale lo stesso per qualunque serie proporzionale (10). Se prendiamo la metà di una linea, poi la metà della metà, e così di seguito, possiamo procedere in infinito (11), cioè lo possiamo sempre fare.

È famosa l'affermazione di Dirichlet (12), secondo la quale, gli « insiemi » infiniti sono tutti coordinabili, cioè uguali. San Tommaso assegna una gradazione di infiniti, quando dice: « Species numerorum parium sunt infinitae et similiter species numerorum imparium; et tamen numeri pares et impares sunt plures quam pares » (13).

Salva questa differenza e ammessa anche la divisibilità dell'unità all'infinito, la dottrina di San Tommaso può esser presentata con decoro ai matematici del secolo XX.

(1) L. 8, n. 4.
(2) *S. Th.*, I q. 7, aa. 3-4.
(3) L. 10, n. 2.
(4) L. 10, n. 2.
(5) L. 10, n. 3.
(6) L. 10, n. 4.
(7) L. 12, n. 9.
(8) L. 12, n. 10.
(9) L. 10, n. 9.
(10) Cf. P. Hoenen, *Cosmologia*, Romae, P. U. Greg., 1949, p. 24.
(11) Cf. H. Dingler, *Zum Problem des Regressus in infinitum*. Philosophia Perennis, II, pp. 569-586.
(12) Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Braunschweig, Vieweg, 1894.
(13) *S. Th.*, III q. 10, a. 3 ad 3.

Una famosa conferenza di Hilbert, in onore di Weierstrass, sull'infinito, presenta molti punti di contatto con la dottrina tomista qui riassunta (1).

VI. - Gli assiomi e i postulati.

Per concludere il primo stadio, bisogna considerare gli assiomi e i postulati.

Euclide nei suoi elementi consacrò questa distinzione, che già Aristotele aveva approfondito nel loro fondamento filosofico.

Una prima differenza è questa: gli assiomi sono sempre evidenti per sè stessi, i postulati alcune volte non lo sono, cosicchè gli assiomi si suppongono, in quanto non hanno bisogno di dimostrazione, ma i postulati si suppongono senza dimostrazione, anche quando non sono evidenti (2).

Un'altra differenza asegnano Aristotele e San Tommaso. Gli assiomi sono comuni, i postulati propri (3).

Gli assiomi sono usatissimi in matematica (4), donde proviene la certezza assoluta di questa scienza.

Sull'origine di tali assiomi matematici dice San Tommaso che li abbiamo per induzione « ex particularibus immaginariis » (5).

I postulati di una scienza possono essere conclusioni di un'altra scienza (6).

I postulati possono presentarsi senza affermazione o negazione — sono le definizioni — oppure essere affermati o negati, come postulati strettamente detti (7).

Mancano completamente in San Tommaso le investigazioni sulla sufficienza ed indipendenza degli assiomi, che tanto preoccupano i moderni; sono invece magnificamente esposte la distinzione tra assiomi e postulati e l'origine noetica degli assiomi

II. - SECONDO STADIO: LE COSTRUZIONI DELLA MATEMATICA

Il secondo stadio stabilito da San Tommaso nella sua concezione filosofica della matematica è la caratteristica di questa scienza. « Primis notionibus suppositis — dice — per demonstrationem quaeruntur quaedam alia ».

Tale è il lavoro del matematico. Il filosofo deve soltanto analizzare le nuove nozioni, vigilare il rigore delle dimostrazioni costruttive ed ammirare la logicità delle cose nelle applicazioni della matematica alla conoscenza del mondo reale.

VII. - Le definizioni.

Le definizioni di Euclide possono essere classificate in tre gruppi: *a*) alcune descrivono più o meno esattamente le prime nozioni, come punto, linea, su-

(1) D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, ed. 7, Leipzig, Teubner, 1930. Anhang VIII, pp. 262-288.
(2) *An. Post.*, A 10, 76 b 23-27, l. 19, nn. 2-3.
(3) *An. Post.*, A 32, 88 b 27-29, l. 43, n. 13.
(4) *Met.*, Γ 3, 1005 a 20, l. 5, n. 588, 592.
(5) *An. Post.*, A 18, 81 b 3, l. 30, n. 5; *Eth. Nic.*, A 7, 1078 b 1, l. 11, n. 137. Cf. P. Hoenen, *De origine primorum principiorum scientiae*, in « Gregorianum », 14 (1933) 153-184.
(6) *An. Post.*, A 2, 72 a 14, l. 5, n. 7.
(7) *An. Post.*, A 2, 72 a 18, l. 5, n. 8.

perficie. *b*) Altre definiscono nozioni nuove derivate dalle primitive, come le nozioni di angolo, di figura, di circolo, di parallela, ecc. *c*) Altre, finalmente, sono mere spiegazioni di parole. Acuto, per esempio, vuol dire, minor di un retto; triangolo si chiama la figura di tre lati.

Aristotele pure, con piccole varianti, ne aveva così diviso le definizioni (1).

In questo stadio debbono considerarsi le definizioni del secondo e terzo gruppo.

Pur non avendo forma di definizioni nominali, le definizioni del secondo gruppo debbono considerarsi come tali, servendo per investigare se esistono o meno le nozioni corrispondenti, come osservano Aristotele e San Tommaso (2).

Queste definizioni sono il fondamento delle dimostrazioni, chiamandosi anche per questo postulati (3). Si distinguono dalle definizioni naturali, nelle quali si comprende pure la materia (4), dando origine alle dimostrazioni formali della matematica (5), sia che si consideri la definizione del soggetto o la definizione delle proprietà (6).

Nelle definizioni matematiche il soggetto proprio fa le veci del genere (7).

Tra i moderni si distinguono perfettamente queste definizioni, come elaborazioni dell'umana intelligenza secondo determinate regole (8).

VIII. - I TEOREMI COSTRUTTIVI.

I Matematici non si contentano di definire nuove nozioni, ma ne dimostrano rigorosamente l'esistenza. Si veda la I proposizione di Euclide (9).

Cosa deve fare il filosofo della matematica davanti a tali teoremi costruttivi ovvero « operativi », come li chiama San Tommaso (10).

Prima deve esaminare il processo della dimostrazione e poi analizzare il risultato.

Le dimostrazioni sono rigorose e ben fondate. La dimostrazione, ad esempio, dell'esistenza del quadrato si fonda in cinque proposizioni dimostrate, in due assiomi fondamentali e nel famoso postulato quinto. Esiste, quindi, il quadrato.

Cos'è quest'esistenza? Aristotele trattò la questione nel libro M dei metafisici (11) che San Tommaso non arrivò a commentare, benchè ne conoscesse la dottrina (12).

(1) *An. Post.*, B 10, 94 a 11, l. 8, n. 10.
(2) *An. Post.*, A 1, 71 a 13, l. 2, n. 5; B 7, 92 b 15, 19, l. 6, nn. 4, 5.
(3) *De int.*, I, 16 a 1, l. 1, n. 4.
(4) *De An.*, A 1, 103 b 17, l. 2, n. 29; *De ente et es.*, cap. 2.
(5) *Phys.*, B 7, 198 a 17, l. 10, n. 14.
(6) *An. Post.*, B 1, 90 a 23, l. 1, n. 9.
(7) *Met.*, Δ 28, 1024 a 36, l. 22, n. 1121.
(8) Cf. W. DUBISLAV, *Die Definition*, Leipzig, Meiner, 1931 e più ampiamente: *Zur Lehre von den sog. schöpferischen Definitionen*, « Phil. Jahrb. », 41 (1928), 467-479; 42 (1929) 42-53. C. I. LEWIS, *A Survey of symbolic Logic*, Berkeley, 1918.
(9) Ed. HEIBERG, p. 10.
(10) *An. Post.*, A 1, 71 a 15, l. 2, n. 5.
(11) *Met.*, M. 1, 1076 a 32-37.
(12) *Met.*, B 9, 998 a 20, l. 7, n. 422; E 1, 1026 a 15, l. 1, n. 1162; Z 1, 1028 b 32, l. 1, n. 1269; H 1, 1042 a 25, l. 1, n. 1685; K 1, 1059 b 10, l. 1, n. 2162.

La dottrina aristotelico-tomista si può riassumere in tre proposizioni (1):

Le nozioni matematiche non esistono attualmente dentro le cose sensibili.

Le nozioni matematiche non esistono separatamente, come voleva Platone.

Le nozioni matematiche esistono solo potenzialmente nelle cose sensibili e attualmente per un atto dell'intelligenza che considera una proprietà delle cose sensibili, senza considerare le altre.

Questa dottrina si deve applicare non soltanto alle nozioni astratte dalle cose sensibili, ma anche alle nozioni derivate (2).

L'esistenza matematica, quindi, consiste in una possibilità percepita. La non-esistenza matematica, invece, consiste in una impossibilità percepita.

Esiste il continuo di tre dimensioni, perchè possiamo astrarre questa possibilità dai corpi fisici.

Esiste il triangolo equilatero, perchè dimostriamo la sua possibilità.

Non esiste il triangolo equilatero rettangolo, perchè intuiamo la sua impossibilità.

La matematica, come le altre scienze particolari, considera un aspetto particolare dell'essere (3), l'essere quanto (4).

Così concepiscono anche l'esistenza matematica alcuni investigatori moderni, soprattutto della scuola fenomenologica (5).

IX. - La matematica applicata.

Tale concezione dell'esistenza matematica spiega soddisfacentemente un problema che assilla tanti moderni: l'applicazione della matematica alla conoscenza del mondo reale (6).

Già Aristotele riconosceva scienze intere che applicavano i principî astratti della matematica al mondo sensibile. San Tommaso le chiamò « scientiae mediae » (7). Sono la prospettiva come applicazione della geometria, la musica (8) come applicazione dell'aritmetica e l'astrologia (9) come applicazione di tutte e due (10).

Distinguevano quindi tra matematica pura e matematica applicata (11).

Usavano anche essi le formole matematiche per spiegare le questioni fisiche (12) e misuravano anche la qualità (13).

(1) Così la presentano W. D. Ross, *Aristotle's Metaphysics*, Oxford, 1924, II, p. 418; H. Bonitz, *Aristotelis Metaphysica*, Bonnae, 1849, II, p. 528.

(2) *Met.*, Θ 9, 1051 a 21-24, l. 10, n. 1888. Cf. W. D. Ross, *Aristotle's Metaphysics*, Oxford, 1924, II, p. 269.

(3) *Met*, Γ 1, 1003 a 21, l. 1, n. 530;

(4) *Met.*, Γ 1, 1003 a 25, l. 1, n. 532.

(5) Cf. O. Becker, *Die mathematische Existenz*,, in: « Jahrb. f. Phil. u. phän. Forschung », 8 (1927), p. 469. L. B. Guerard des Lauriers, *Analyse de l'être mathematique*, in: « Rev. des Sc. Phil. et Theol. », 22 (1923), p. 634.

(6) Si veda, per esempio, il capitolo *Mathematik und Wirklichkeitserkenntnis* della *Philosophie der Mathematik in der Gegenwart* di W. Dubislav, Berlin, Junker, 1932.

(7) *Phys.*, B 2, a 7, l. 3, n. 8.

(8) Per rendersi conto della differenza della « musica » di quel tempo, basta sfogliare le pagine dei cinque libri *De Musica* di Boecio (P. L. 63). Soltanto i capitoli 14-17 del libro IV si rassomigliano un poco alla nostra musica teorica. G. Amelli pubblicò una dissertazione su *San Tommaso e la musica* con un opuscolo falsamente attribuito al Santo (*Divi Thomae Aquinatis de Arte Musica*, Mediolani, 1880).

(9) Altre volte la chiama « astronomia », il nome usato attualmente. *Phys.*, B 7, 198 a 29-31, l. 11, n. 3.

(10) *Phys*, B 2, 194 a 7, l. 3, n. 8.

(11) *Met.*, A. 8, 989 b 32, l. 13, n. 202.

(12) *Phys.*, Δ 11, 219 b 15, l. 18, n. 4.

(13) *Met.*, I 1, 1052 b 26, l. 2, n. 1491-1492; *Eth. Nic.*, B 5, 1106 a 26, l. 6. n. 310.

Queste scienze sono più fisiche che matematiche (1) e sono quasi contrarie alle scienze matematiche (2) e non possono avere lo stesso grado di certezza (3).

Tutti i fisici moderni usano costantemente la matematica come uno strumento di lavoro con un esito meraviglioso (4). Per molti di essi risulta un problema insolubile questo passaggio dall'astratto al concreto, che nella filosofia aristotelico-tomista ottiene una spiegazione sufficiente con l'astrazione matematica.

« Si scientiae mediae abstracta applicant ad materiam sensibilem, manifestum est quod mathematicae e converso ea quae sunt in materia sensibili abstrahunt » (4).

III. - TERZO STADIO: LE DEDUZIONI DELLA MATEMATICA

L'ultimo stadio è comune a tutte le scienze, ma con una distinzione abstrahunt » (5).

X. - Le dimostrazioni matematiche.

Sono come il modello di tutte le dimostrazioni (6).

Contribuiscono a questa perfezione: *a*) gli assiomi chiarissimi, *b*) i termini precisi, *c*) i metodi rigorosi.

Gli assiomi della matematica sono notissimi oggettivamente e soggettivamente. Basta conoscere il senso delle parole per capirli pienamente. Tutte le dimostrazioni matematiche, in ultima analisi, si riducono ai primi principi (7).

Le parole usate in matematica hanno sempre un senso preciso. Soltanto la causa formale interviene nelle dimostrazioni matematiche. Qualche volta ed in qualche senso può intervenire la causa materiale (8), mai interviene la causa finale, nè la causa efficiente (9). Sono sempre definizioni chiarissime i principi che applicano al caso gli assiomi generali, onde le dimostrazioni matematiche sono necessarie di necessità assoluta (10).

Ultima causa della perfezione dei ragionamenti matematici è il loro metodo rigoroso. Usano soltanto la prima figura sillogistica nelle due forme generali (11).

Tanto sono precise le dimostrazioni matematiche, che una scuola moderna considera la matematica come un ramo della Logica (12). Altre

(1) *Phys.*, B 2, 194 a 7, l. 3, n. 18.
(2) *Phys.*, B 2, 194 a 9, l. 3, n. 8.
(3) *An. Post.*, A 27, 87 a 33, l. 41, n. 3.
(4) Cf. Q. Foz Gazzulla, *La Fìsica en vìsperas de mitad de siglo*, Arbor 14 (1949), 1-26.
(5) *Phys.*, B 2, 194 a 9, l. 3, n. 8.
(6) Cf. J. Salamucha, *Pojecie dedukcjie u Arystotlesa i sw. Tomasza z Akwinu*, Warsawa, 1930.
(7) *Eth. Nic.*, Γ 5, 1112 b 21, l. 8, n. 476.
(8) *An. Post.*, A 4, 73 a 28, l. 9, n. 5.
(9) *Met.*, B 2, 996 a 26, l. 4, n. 373; 996 a 28, l. 4, n. 375.
(10) *Phys.*, B 9, 200 a 15, l. 15, n. 5.
(11) *An. Post.*, A 14, 79 a 18, l. 26, n. 2.
(12) Cf. R. Carnap, *Die Mathematik als Zweig der Logik*, «Blät. f. deutsche Phil.», 4 (1930) 298-310. Whitehead-Russell, *Principia Mathematica*, Cambridge, 1925.

scuole, senza arrivare a tale aberrazione, cercano di perfezionare vieppiù i metodi logici per apprezzare i dettagli delle dimostrazioni matematiche (1).

XI. - La certezza matematica.

Le prime nozioni matematiche così ben comprese (2), gli assiomi chiarissimi (3) e le rigorose dimostrazioni producono nell'anima una certezza assoluta (4).

San Tommaso compara questa certezza con quella prodotta dalle scienze fisiche e metafisiche, dandole la preferenza, perchè da una parte le matematiche astraggono dalla materia che impedisce tale certezza nella fisica, e dall'altra non eccedono le forze del nostro intelletto, il quale resta spesso abbagliato dagli splendori dell'ente metafisico (5).

La matematica, quindi, offre un'assoluta certezza (6): questo spiega, aggiunge finalmente San Tommaso, che ci siano degli entusiasti della matematica, che si dilettino in tale scienza, perchè quanto più si dilettano più comprendono, e quanto più comprendono più si dilettano (7).

Tali encomi sono stati ripetuti da tutti i grandi pensatori antichi e moderni.

Montucla nella sua *Histoire des mathématiques* (8) ne raccoglie alcuni in un capitolo intitolato: « Eloges qu'elles (les mathématiques) ont reçu dans tous les temps des meilleurs esprits et des pholosophes les plus illustres ». E poteva anche includervi alcune delle sentenze di San Tommaso, esposte in quest'articolo.

* * *

San Tommaso non elaborò una filosofia della matematica. Vide però la necessità di una « metamatematica » — come direbbe Hilbert — e le assegnò un posto di onore nella Filosofia (9). Fece ancora di più. Delineò uno schizzo, che abbiamo cercato di completare con altri testi tomisti sparsi nelle sue opere. Rimane, quindi, ancora un grande campo di investigazione (10) per noi Scolastici. Secondo le linee direttive del Santo Dottore dobbiamo costrurre una completa filosofia della matematica moderna.

(1) D. Hilbert-W. Ackermann, *Grunzüge der theoretischen Logik*, Berlin, Springer, 1928.

(2) *An. Post.*, A 31, 87 b 38, l. 42. n. 8.

(3) *De An.*, B 2, 413 a 12, l. 3, n. 245.

(4) *An. Post.*, A 1, 71 a 3, l. 1, n. 10.

(5) *Met.*, *a* 3, 995 a 15, l. 5, n. 336.

(6) *Eth. Nic.*, A 1, 1094 b 26, l. 3, n. 36.

(7) *Eth. Nic.*, I 5, 1175 a 33, l. 7, n. 2043.

(8) Vol. I, Paris, 1878, p. 18.

(9) *Met.*, K 1, 1059 b 15, l. 1, n. 2165.

(10) Così lo chiamò P. Hoenen, *A field of research for Scholasticism*, « The modern Schoolman » 12 (Nov. 1934), 15-18. Poi ha presentato il frutto delle sue ricerche in Gregorianum: *De Philosophia scholastica cognitionis geometricae*, 19 (1938), 498-514. *De problemate necessitatis geometricae*, 20 (1939), 19-54. *De problemate exactitudinis geometricae*, 20 (1939), 321-350; 24 (1943), 171-234.