forma; e quindi la speranza che, imitando le medesime condizioni, si possa un giorno arrivare con mezzi meno dispendiosi a procurarsi un metodo di preparazione più conveniente. Così si avrà la possibilità di studiare l'acido libero, cosa che non mi è stato possibile raggiungere, prima per le difficoltà che s'incontrano a rendere libero l'acido, e secondo per difetto di materiale.

DI UNA MEMORIA DEL SIG. *HELMHOLTZ* SULLA TEORIA MATEMATICA DELL'ELETTRICITA' DINAMICA; PER L. DONATI.

È noto che *Ampère* partendo dalla determinazione sperimentale delle azioni reciproche di due circuiti chiusi percorsi da corrente elettrica, formulò una legge per le azioni reciproche di due elementi di corrente.

Questa legge era ipotetica, in quanto che essendo dato di sperimentare solamente sopra correnti chiuse, si può bensì determinare l'azione di una corrente chiusa sopra un'altra, ma non di due correnti aperte, e quindi di due elementi di corrente. — Il sig. *Grassmann* (1) mostrò difatti che nella formola di *Ampère* potevano essere introdotte anche altre forze senza alterare il risultato, quando la si adoperi per correnti chiuse. Il sig. *F. E. Neumann* diede poi la formola per l'induzione partendo dalla legge di *Lenz*, e supponendo che la legge dell'azione reciproca di due elementi di corrente fosse quella formulata da *Ampère*. — Poco dopo il sig. *W. Weber* nel suo lavoro « *Elektrodinamische Maassbestimmungen* » mediante alcune ipotesi, stabilì la sua

(1) *Neue Theorie der Elektrodinamik in Poggendorffs Annalen* LXIV. 1845.

formola sulle azioni elettriche a distanza, la quale riunisce sotto un solo punto di vista tutte le azioni elettrostatiche, elettrodinamiche ed induttive [1].

(1) La formula di *Ampère* dà la forza attrattiva e repulsiva tra due elementi filiformi di conduttore percorsi da una corrente. Da quest'azione *Weber* ha cercato risalire alle leggi dell'*azione elementare* reciproca delle masse elettriche in moto nell'interno dei conduttori, nel concetto che la corrente consista in un flusso di quantità eguali di elettricità positiva e negativa, che percorrano il conduttore in direzione opposta con egual velocità. Per mostrare come egli sia pervenuto a ciò trasformando la formula di *Ampère*, diamo qui un sunto dell'articolo 21 della sua opera succitata, nel quale si tratta appunto di questa trasformazione.

« Perchè l'*azione totale* espressa dalla formula di *Ampère* possa ri- « portarsi a *forze elettriche elementari*, è necessario poter decomporre « quella formula in più termini, corrispondenti alle azioni combinate due « a due delle masse elettriche positive e negative che si muovono nei due « elementi. Ciascuno di questi termini, dovendo rappresentare la *forza* « *elementare* esercitata tra le masse elettriche a cui si riferisce, dovrà di- « pendere soltanto dal modo di essere e dalle condizioni reciproche di que- « ste. Infine tutte queste *azioni elementari* dovranno essere contenute in « una medesima legge generale. Non v'è bisogno di stabilire preventiva- « mente nessuna ipotesi su questa legge, ma piuttosto essa deve derivarsi « dalla formula stessa di *Ampère* trasformata in modo da soddisfare alle « condizioni suddette.

« La formula di *Ampère* è:

$$-\frac{ij}{r^2} Ds.\, D\sigma \left\{ \cos(Ds, D\sigma) - \frac{3}{2} \cos(r, Ds) \cos(r, D\sigma) \right\}$$

« essa si può, come è noto, porre sotto la forma:

$$(1) \qquad -\frac{ij}{r^2} Ds.\, D\sigma \left(\frac{1}{2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} - r \frac{d^2r}{ds\, d\sigma} \right)$$

« Siano e, e' rispettivamente le quantità di elettricità positiva distribuite « sopra una lunghezza eguale ad 1 dei conduttori; $e.\, Ds$, $e'.\, D\sigma$ rappresen- « teranno le masse elettriche positive esistenti negli elementi Ds, $D\sigma$; ed « indicando con u, u' le velocità con cui si muovono le elettricità nei due « conduttori, si avrà;

$$i = a e u \qquad j = a e' u'$$

« essendo a una costante. Sostituendo nella (1), essa diviene:

$$(2) \qquad -\frac{e\, Ds.\, e'\, D\sigma}{r^2} a^2 u u' \left(\frac{1}{2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{d\sigma} - r \frac{d^2r}{ds\, d\sigma} \right).$$

Il sig. *C. Neumann* (figlio) stabilì una ipotesi sulle azioni elettriche a distanza, la quale per piccole velocità delle

« Ora si ha:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dr}{dt}=\dfrac{dr}{ds}\dfrac{ds}{dt}+\dfrac{dr}{d\sigma}\dfrac{d\sigma}{dt}=u\dfrac{dr}{ds}+u'\dfrac{dr}{d\sigma} \\ \dfrac{dr^2}{dt^2}=u^2\dfrac{dr^2}{ds^2}+2\,u\,u'\dfrac{dr}{ds}\dfrac{dr}{d\sigma}+u'^2\dfrac{dr^2}{d\sigma^2} \\ \dfrac{d^2r}{dt^2}=u^2\dfrac{d^2r}{ds^2}+2\,u\,u'\dfrac{d^2r}{ds\,d\sigma}+u'^2\dfrac{d^2r}{d\sigma^2} \end{cases}$$

« ricavando dalle due ultime di queste equazioni i valori di $u\,u'\dfrac{dr\;dr}{ds\;d\sigma}$ e di $u\,u'\dfrac{d^2r}{ds\,d\sigma}$, e sostituendoli nella (2), essa prende la forma:

$$(4)\ -\frac{e\,Ds.\,e'\,D\sigma}{r^2}\,a^2\left\{\left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{dt^2}-\frac{1}{2}\,r\,\frac{d^2r}{dt^2}\right)-u^2\left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{ds^2}-\frac{1}{2}\,r\,\frac{d^2r}{ds^2}\right)\right.$$
$$\left.-\,u'^2\left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{d\sigma^2}-\frac{1}{2}\,r\,\frac{d^2r}{d\sigma^2}\right)\right\}$$

« In questa trasformazione si è avuto riguardo solamente alle masse elettriche positive. Se si considerassero le negative, operando allo stesso modo, ed osservando che la loro distanza $r_1 = r$, e che per le equazioni (3) si ha anche: $\dfrac{dr_1^2}{dt^2}=\dfrac{dr^2}{dt^2}$; $\dfrac{d^2r_1}{dt^2}=\dfrac{d^2r}{dt^2}$, si giungerebbe ad un risultato identico.

« Però se si considerano le elettricità di nome contrario, cioè la positiva sul conduttore s e la negativa su σ, o viceversa; chiamando rispettivamente r_2, r_3 le distanze, e notando che $r_2 = r_3 = r$, e che per le (3) si ha $\dfrac{dr_2^2}{dt^2}=\dfrac{dr_3^2}{dt^2}$ diverso da $\dfrac{dr^2}{dt^2}$; e similmente $\dfrac{d^2r_2}{dt^2}=\dfrac{d^2r_3}{dt^2}$ diverso da $\dfrac{d^2r}{dt^2}$, si ottiene in ambi i casi:

$$(5)\quad e\,Ds.\,e'\,D\sigma\,a^2\left\{\frac{1}{r_2^2}\left(\frac{1}{4}\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{1}{2}\,r^2\,\frac{d^2r_2}{dt^2}\right)-\frac{u^2}{r^2}\left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{ds^2}-\frac{1}{2}\,r\,\frac{d^2r}{ds^2}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{u'^2}{r^2}\left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{d\sigma^2}-\frac{1}{2}\,r\,\frac{d^2r}{d\sigma^2}\right)\right\}.$$

« Tanto la formula (4) ottenuta considerando le masse elettriche di egual nome, quanto la (5) che si ha per quella di nome contrario, rappresentano la forza colla quale i due elementi agiscono uno sull'altro, e somasse elettriche [1] conduce alla legge di *Weber*, e quindi la legge che se ne trae per la induzione è la stessa, quando si trascurino le potenze superiori alla prima dell' intensità della corrente.

Un' altra legge dell' induzione è contenuta nei lavori del sig. *Maxwell* [2], la quale concorda colle precedenti per le correnti chiuse, ma non per le aperte.

Nel notevole lavoro del sig. *Helmholtz* [3], del quale si

« no identiche alla formola di *Ampère*. Lo stesso può dirsi della loro « semisomma:

$$-\frac{a^2}{2}\frac{e\,Ds.\ e'\,D\sigma}{r^2}\left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{dt^2}-\frac{1}{2}r\frac{d^2r}{dt^2}\right)+\frac{a^2}{2}\frac{e\,Ds.\ e'\,D\sigma}{r_2^2}\left(\frac{1}{4}\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{1}{2}r_2\frac{d^2r_2}{dt^2}\right)$$

« Questa è la trasformata della formola di *Ampère* che soddisfa alle condi- « zioni volute. Essa si può riguardare come risultante di 4 parti che pos- « sono venir considerate come forze elettriche elementari; cioè:

$$+\frac{e\,Ds.\ e'\,D\sigma}{r^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{a^2}{8}r\frac{d^2r}{dt^2}\right)\quad \text{azione di} + e\,Ds \text{ sopra} + e\,D\sigma$$

$$+\frac{e\,Ds.\ e'\,D\sigma}{r_{12}}\left(1-\frac{a}{16}\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{a^2}{8}r_1\frac{d^2r_1}{dt^2}\right)\quad « \quad - e\,Ds \text{ sopra} - e'\,D\sigma$$

$$-\frac{e\,Ds.\ e'\,D\sigma}{r_2^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{a_2}{8}r_2\frac{d^2r_2}{dt^2}\right)\quad « \quad + e\,Ds \text{ sopra} - e'\,D\sigma$$

$$-\frac{e\,Ds.\ e'\,D\sigma}{r_3^2}\left(1-\frac{a_2}{16}\frac{dr_3^2}{dt_2}+\frac{a^2}{8}r_3\frac{d^2r_3}{dt^2}\right)\quad « \quad - e\,Ds \text{ sopra} + e'\,D\sigma$$

« Indicando semplicemente con m, m' le masse, tutte queste espressioni « sono contenute nella formula generale:

$$\frac{mm'}{r^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{a}{8}r\frac{d^2r}{dt}\right)$$

« la quale adunque esprimerà la legge dell'azione elementare delle masse « elettriche in moto. »

(1) *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft d. Wiss. zu Gottingen.* 16 Juni 1868.

(2) London, *Philosophical Transactions*, 1865, par. I. pag. 459.

(3) *Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper.* Crelle's Journal, 72 Band.

darà qui un estratto, egli stabilisce pel potenziale, che dà l' azione reciproca di due elementi di corrente, la forma più generale che esso può avere, compatibile coi fenomeni conosciuti e col principio della conservazione della forza. Nella formola così ottenuta apparisce una costante indeterminata, alla quale dando valori convenienti si ottengono tutte le varie formole sovraccennate.

Nel primo paragrafo del suo lavoro l' Autore dopo premesse alcune considerazioni sull' induzione e sul significato fisico del potenziale, viene all' analisi seguente.

Indicando con Ds e $D\sigma$ gli elementi di lunghezza di due conduttori lineari, con $(Ds, D\sigma)$ l'angolo delle loro direzioni, con r la loro distanza, con i l' intensità della corrente in s, con j quella in σ, il potenziale dei due elementi di corrente uno sull'altro è secondo il sig. *F. E. Neumann* :

$$-A^2 i j \frac{\cos (Ds, D\sigma)}{r} Ds\, D\sigma$$

essendo A una costante la cui grandezza dipende dall' unità scelta per misurare la corrente (1).

Ricerchiamo dapprima quale sia la espressione più generale pel potenziale di due elementi di corrente, che per una corrente chiusa conduca allo stesso valore che dà la formola di *Neumann*. A tal fine servano le considerazioni seguenti:

Vada il conduttore s dal punto a al punto b, ed il conduttore σ dal punto c al punto d. Sia Q il vero valore del

(1) L' espressione di *Neumann* pel potenziale di due elementi di corrente, si deduce come è noto dalla formula di *Ampère* osservando che se con questa formola si calcola il lavoro elementare delle forze elettrodinamiche agenti fra due circuiti chiusi, quando si varii infinitamente poco la loro posizione relativa, questo lavoro che, come è noto è uguale alla variazione del potenziale, è dato dal differenziale dell' espressione:

$$-A^2 i j \int_s\int_\sigma \frac{\cos (Ds, D\sigma)}{r} Ds\, D\sigma$$

potenziale per questi due conduttori; e P il potenziale calcolato secondo la formola di *Neumann*. Invece del conduttore s se ne metta un altro s_1 coi medesimi estremi, e si faccia correre in esso una corrente da a in b colla stessa intensità i; e siano Q_1 e P_1 i valori corrispondenti di Q e P. Si lascino ora stare contemporaneamente i due conduttori s ed s_1, in guisa però che nell' ultimo l' intensità della corrente sia eguale a $-i$, e quindi il suo potenziale sopra σ sia $-Q_1$: s ed s_1 formeranno insieme un circuito chiuso percorso da una corrente d' intensità eguale ad i e il cui potenziale su σ è $Q - Q_1$. Ma questo è dato completamente anche dalla formola di *Neumann*; perciò sarà:

$$Q - Q_1 = P - P_1 .$$

Se si pone:

$$Q = P + F$$

si avrà quindi anche:

$$Q_1 = P_1 + F$$

e la quantità F sarà dunque indipendente dalla forma, lunghezza, posizione e direzione del conduttore s fra a e b, rimanendo invariabile la posizione dei suoi estremi.

Similmente si trova che F è pure indipendente dalla forma del conduttore σ, purchè rimangano fissi i suoi estremi c e d.

È chiaro pertanto che F è una grandezza che non dipende da altre variabili nello spazio, fuori che dalle coordinate dei punti a, b, c, d. Ora se in generale le azioni totali che due correnti esercitano una sull' altra possono essere considerate come le somme delle azioni simili di tutti i singoli elementi, i potenziali Q ed F debbono risultare dall'integrazione estesa a tutti gli elementi di s e di σ, e la funzione F che dipende solo dalle coordinate degli estremi deve avere la forma:

$$F = F_{b,d} - F_{a,d} - F_{b,c} + F_{a,c}$$

dove ciascuna delle funzioni del 2.° membro dipende soltanto dalla posizione dei punti designati dagl'indici.

La sola variabile nello spazio che sia pienamente determinata da due punti è la loro distanza; perciò $F_{b,d}$ ec. debbono essere funzioni delle distanze $r_{b,d}$ ec.; e non dipenderanno da altre variabili nello spazio, ma bensì dalla intensità della corrente.

Riduciamo ora i due conduttori s e σ a due elementi infinitesimi Ds, $D\sigma$; avremo indicando con F una funzione qualunque della distanza r dei due elementi e delle intensità i, j delle correnti:

$$F_{b,d} - F_{a,d} - F_{b,c} + F_{a,c} = \frac{d^2F}{ds\, d\sigma} Ds\, D\sigma.$$

Questa è pertanto la forma più generale della quantità che si può aggiungere all'espressione data da *Neumann* pel potenziale di due elementi di corrente, senza che venga alterata l'azione totale di una corrente chiusa sopra di un'altra comunque conformata.

In ciò che segue limiteremo la generalità della forma della funzione F colle due ipotesi seguenti, fondate sull'analogia delle azioni elettriche conosciute.

I. La funzione F sia direttamente proporzionale alle intensità i ed j.

II. La dipendenza dalla distanza sia qui la stessa che negli altri casi in cui le azioni elettriche emanano da una massa elementare tutto all'intorno di essa, cioè la funzione potenziale sia proporzionale ad $\frac{1}{r}$ e le forze ad $\frac{1}{r^2}$.

Dietro queste ipotesi, sarà:

$$\frac{d^2F}{ds\, d\sigma} = B i j \frac{d^2 r}{ds\, d\sigma}$$

essendo B una costante.

Indichiamo le coordinate di Ds, $D\sigma$ rispettivamente con x, y, z e ξ, η, ζ; le proiezioni dei due elementi sopra gli assi coordinati, rispettivamente con Dx, Dy, Dz e $D\xi$, $D\eta$, $D\zeta$; si avrà:

$$\frac{dr}{ds} Ds = \frac{x-\xi}{r} Dx + \frac{y-\eta}{r} Dy + \frac{z-\zeta}{r} Dz = \cos(r, Ds)\, Ds$$

$$\frac{dr}{d\sigma} D\sigma = -\cos(r, D\sigma)\, D\sigma$$

ove (r, Ds) ed $(r, D\sigma)$ indicano gli angoli che la direzione di r contata positivamente andando dal punto (ξ, η, ζ) al punto (x, y, z) fa rispettivamente colle direzioni degli elementi Ds e $D\sigma$.

Con una seconda differenziazione si ha:

$$\frac{d^2 r}{ds\, d\sigma} Ds\, D\sigma$$

$$= -\frac{1}{r}(Dx\, D\xi + Dy\, D\eta + Dz\, D\zeta) + \frac{1}{r} \cos(r, Ds) \cos(r, D\sigma) Ds\, D\sigma$$

ovvero:

$$\frac{d^2 r}{ds\, d\sigma} = \frac{1}{r} \left\{ \cos(r, Ds) \cos(r, D\sigma) - \cos(Ds, D\sigma) \right\}.$$

Onde risulta che il valore assunto per $\frac{d^2 F}{ds\, d\sigma}$ ha effettivamente lo stesso modo di dipendenza da r delle altre funzioni potenziali dell'elettricità. D'altra parte non vi è nessun'altra funzione di r, come è facile di vedere, che soddisfi alle due ipotesi stabilite oltre quella che si è assunta $F = B i j r$.

Quanto all'ipotesi che la funzione F sia direttamente proporzionale alle intensità i ed j, in ciò che segue si avranno equazioni in cui le intensità entrano solo linearmente; e quindi anche se F dipendesse dalle intensità in guisa da ammettere nel suo sviluppo potenze di i ed j superiori alla prima, le nostre equazioni varranno pur sempre per correnti di piccola intensità.

Lo stesso seguirebbe se, conforme ad un'ipotesi fatta dal sig. *W. Weber*, le azioni a distanza dipendessero non solo dall'intensità, ma anche dal prodotto della intensità e della densità dell'elettricità libera; ipotesi che del resto non si appoggia finora su nessuna prova di fatto. Infatti almeno nei casi che si tratteranno qui, per correnti di intensità piccolissima, la densità dell'elettricità libera nell'interno dei conduttori sarebbe pur piccolissima e del medesimo ordine, e quindi il loro prodotto sarebbe trascurabile. Dunque in ambi i casi non si verrebbe che a limitare l'uso delle nostre formole dipendentemente dall'intensità delle correnti, rimanendo esse applicabili per piccole intensità.

Per dare ora alla nostra espressione più generale del potenziale di due elementi di corrente la forma più conveniente, poniamo:

$$B = -\frac{1-k}{2} A^2$$

dove k è una nuova costante. Il potenziale di due elementi di corrente avrà allora la forma:

$$(1) \quad -\frac{1}{2} A^2 \frac{ij}{r} \left\{ (1+k) cos(Ds, D\sigma) + (1-k) cos(r, Ds) cos(r, D\sigma) \right\} Ds\, D\sigma$$

che si ottiene aggiungendo all'espressione del potenziale del *Neumann* la quantità ora calcolata per completarla.

È facile vedere come l'espressione (1) ottenuta dal sig. *Helmholtz* pel potenziale di due elementi di correnti, comprenda in sè le formole di *Neumann*, *Weber* ec., le quali si deducono da quella dando alla costante k valori convenienti.

Infatti la formola di *Neumann*:

$$-A^2 ij \frac{cos(Ds, D\sigma)}{r} Ds\, D\sigma$$

risulta subito dalla (1) ponendosi $k = 1$.

Quanto poi alla formola di *Weber*, si osservi che essa dà per la forza attrattiva di due masse m, m' di elettricità in moto:

$$-\frac{mm'}{r^2}\left\{1-\frac{a^2}{16}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{a^2}{8}r\frac{d^2r}{dt^2}\right\}=\frac{d\frac{mm'}{r}\left\{1-\frac{a^2}{16}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}}{dr}$$

onde si ha pel potenziale di m sopra m':

$$\frac{mm'}{r}\left\{1-\frac{a^2}{16}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}.$$

Ora secondo il concetto di *Weber* il potenziale di due elementi Ds e $D\sigma$ di corrente l'uno sull'altro risulta dalla somma di 4 parti, corrispondenti ai potenziali delle masse elettriche positive e negative che sono in ciascuno degli elementi combinate due a due. Se s'indicano con $\pm eDs$ e $\pm e'D\sigma$ quelle masse, e con $\pm v$ e $\pm v'$ le velocità rispettive, osservando che:

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt}+\frac{dr}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt}=\pm v\frac{dr}{ds}\pm v'\frac{dr}{d\sigma}$$

quelle 4 parti saranno:

$$\frac{eDs\,.\,e'D\sigma}{r}\left\{1-\frac{a^2}{16}\left(v\frac{dr}{ds}+v'\frac{dr}{d\sigma}\right)^2\right\} \quad \text{potenz. di } +eDs \text{ sopra } +e'D\sigma$$

$$-\frac{eDs\,.\,e'D\sigma}{r}\left\{1-\frac{a^2}{16}\left(v\frac{dr}{ds}-v'\frac{dr}{d\sigma}\right)^2\right\} \quad \text{»} \quad +eDs \text{ sopra } -e'D\sigma$$

$$-\frac{eDs\,.\,e'D\sigma}{r}\left\{1-\frac{a^2}{16}\left(-v\frac{dr}{ds}+v'\frac{dr}{d\sigma}\right)^2\right\} \quad \text{»} \quad -eDs \text{ sopra } +e'D\sigma$$

$$+\frac{eDs\,.\,e'D\sigma}{r}\left\{1-\frac{a^2}{16}\left(-v\frac{dr}{ds}-v'\frac{dr}{d\sigma}\right)^2\right\} \quad \text{»} \quad -eDs \text{ sopra } -e'D\sigma$$

Sommando, si ottiene:

$$-\frac{1}{2}a^2\frac{eDs.e'D\sigma}{r}v\,v'\frac{dr}{ds}\frac{dr}{d\sigma}$$

o anche, osservando che $\frac{dr}{ds}\frac{dr}{d\sigma} = - \cos(r, Ds)\cos(r, D\sigma)$, e che i prodotti ev, $e'v'$ rappresentano le intensità delle correnti, a meno di un fattore costante che dipende dall'unità di misura:

$$\frac{A^2 ij \,.\, Ds \,.\, D\sigma}{r} \cos(r, Ds)\cos(r, D\sigma)$$

che si deduce dalla (1) ponendovi $k = -1$.

Il potenziale di *Weber* corrisponde adunque al valore -1 della costante k. Ora siccome un'ulteriore analisi conduce il sig. *Helmholtz* a stabilire l'inammissibilità di valori negativi per k, ricercando l'intima ragione di ciò, nella prefazione al suo lavoro egli dimostra nel modo seguente che la legge di *Weber* contraddice al principio della conservazione della forza; in quanto che due particelle elettriche che si muovano secondo quella legge cominciando con velocità finita, possono a distanza finita l'una dall'altra acquistare infinita forza viva e fornire quindi un lavoro infinito.

Sia m la massa che si muove colla particella elettrica e; questa sia soggetta alla forza repulsiva della particella simile e', e il movimento si faccia nella direzione della congiungente r dei due elementi. Si avrà secondo la legge di *Weber*, ponendo $\frac{a^2}{16} = \frac{1}{c^2}$:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{ee'}{r^2}\left\{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right\}$$

moltiplicando per $\frac{dr}{dt}$ ed integrando:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = C - \frac{ee'}{r} + \frac{ee'}{rc^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

ovvero:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{C - \frac{ee'}{r}}{\frac{1}{2}mc^2 - \frac{ee'}{r}}$$

Se $\frac{ee'}{r} > \frac{1}{2} mc^2 > C$; $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ è positivo e maggiore di c^2, quindi $\left(\frac{dr}{dt}\right)$ reale. Se quest' ultima è anche positiva, r crescerà finchè $\frac{ee'}{r} = \frac{1}{2} mc^2$, ed allora $\left(\frac{dr}{dt}\right)$ diviene infinita. Lo stesso seguirebbe se in principio fosse $C > \frac{1}{2} mc^2 > \frac{ee'}{r}$; e $\frac{dr}{dt}$ fosse negativa (1).

Dopo avere nel *primo paragrafo* del suo lavoro determinata la forma più generale del potenziale di due elementi di correnti, il sig. *Helmholtz* prosegue nei suoi studii, ed analizza con grande acutezza i punti più importanti della teoria matematica dell' elettricità. — Però l'indole di questo giornale non ci consente di riportare per intero questo lavoro essenzialmente analitico. L' estratto che ne abbiamo dato crediamo che basti a dare un' idea della natura ed importanza di esso. Pel resto ci limitiamo a riportare qui ora in compendio il prospetto che ne dà l'Autore stesso nell' introduzione.

Nel *secondo paragrafo* si calcola il potenziale di un sistema di correnti distribuite con continuità nello spazio e si trasforma per dargli l' espressione più conveniente.

Nel *terzo paragrafo* si stabiliscono le equazioni del movimento dell' elettricità, che si riducono ad un sistema di equazioni differenziali, analoghe a quelle che si hanno pel movimento dei gas.

Nel *quarto paragrafo* segue la ricerca se le dette equazioni determinino pienamente e in un sol modo il corso del movimento. Ciò avviene quando la costante k non è negativa; ma per valori negativi di k si trova che il valore del lavoro rappresentato dal movimento elettrico può divenir ne-

(1) Il sig. *Weber* risponde a quest' obbiezione in una sua memoria la quale comparirà nel X. volume degli *Annali di Scienze fisiche-matematiche della R. Società Sassone* in Lipsia, e che noi rimettiamo al prossimo numero.

gativo, cioè minore che nello stato di quiete, ciò che caratterizza l'*instabilità dell' equilibrio* dell' elettricità in quiete. Ed infatti si dimostra con tutta generalità per conduttori di qualunque forma che quando la detta quantità di lavoro abbia una volta assunto un valore negativo, il movimento abbandonato a se stesso cresce continuamente, fino a diventare infinita la velocità e la densità dell' elettricità.

Si potrebbe ancora porre la questione se, nel caso che la costante k avesse veramente un valore negativo, i movimenti nel verso dell'equilibrio instabile potessero prodursi realmente colle azioni esterne che ci forniscono i mezzi sperimentali di cui possiamo disporre. Nel *quinto paragrafo* servendosi del caso di una sfera, si dimostra che ciò avrebbe luogo effettivamente. Onde risulta che : *l' ipotesi di un valore negativo per la costante* k, *come nella legge d' induzione di Weber, è inammissibile.*

Nel *sesto e settimo paragrafo* si esamina se e con quali esperienze ci possiamo attendere di ricavare qualche dato che serva alla determinazione della costante k, e si conclude che coi mezzi sperimentali che si hanno al presente, non si può verosimilmente arrivare ad ottenere alcuna indicazione in proposito.

Nell' *ottavo ed ultimo paragrafo* si prende a studiare la polarizzazione dielettrica dei mezzi isolatori. Secondo la teoria di *Faraday* alla quale *Maxwell* ha dato espressione matematica, le azioni elettriche non sono azioni a distanza, ma si trasmettono solo mediante una progressiva polarizzazione del mezzo. Da questa teoria risulta una notevole analogia fra il moto dell' elettricità nei mezzi isolatori e il moto dell' etere luminoso. — Ora si dimostra qui che questa analogia non dipende dall' ipotesi del *Maxwell*, ma si presenta anche quando si considerino le azioni elettriche, come azioni a distanza.