samer vor sich, so dafs sich der Widerstand des Drahtes asymptotisch dem Werthe zu nähern scheint, den er vor der Erwärmung hatte. Bei einem Drahte, der bis 80° erhitzt war, waren noch 6 Wochen nach der Erwärmung Aenderungen in dem Widerstande merklich.

Die Möglichkeit, den Alkalimetallen und Erdmetallen die Form von Drähten zu geben, macht es leicht noch eine andere Eigenschaft derselben als die Leitungsfähigkeit für Elektricität zu bestimmen, nämlich ihre Stellung in der thermoelektrischen Spannungsreihe. Hr. Dr. Matthiessen ist gegenwärtig mit Versuchen hierüber beschäftigt; ich werde mir später erlauben, die Resultate derselben mitzutheilen.

II. *Ueber die Bewegung der Elektricität in Drähten; von G. Kirchhoff.*

Ich habe versucht eine allgemeine Theorie der Bewegung der Elektricität in einem unendlich dünnen Drahte aufzustellen, indem ich gewisse Thatsachen, welche bei constanten elektrischen Strömen, und Strömen, deren Intensität sich nur langsam ändert, stattfinden, als allgemein geltend angenommen habe. Ich erlaube mir hier diese Theorie zu entwickeln, und ihre Anwendung auf einige einfache Fälle auseinander zu setzen.

Ich denke mir einen homogenen und überall gleich dicken Draht von kreisförmigem Querschnitt; auf der Mittellinie dieses Drahtes nehme ich einen festen und einen veränderlichen Punkt an; das Stück der Mittellinie zwischen beiden nenne ich s; durch den veränderlichen Punkt lege ich einen Querschnitt und bezeichne die Polarcoordinaten eines Punktes dieses Querschnitts in Beziehung auf ein Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt ist, durch ϱ und ψ. Ich will die elektromotorische Kraft berechnen, welche die beiden Elektricitäten in der Nähe des durch s, ϱ und ψ bestimmten Punktes nach der Längsrichtung des Drahtes zu trennen strebt. Diese Kraft rührt her zum Theil von vorhandener freier Elektricität, zum Theil von der Induction, die in Folge der Aenderungen der Stromstärke in allen Theilen des Drahtes stattfindet. In Beziehung auf den ersten Theil kann man von dem Coulomb'schen elektrostatischen Gesetze Gebrauch machen. Es bezeichne V die Potentialfunction der freien Elektricität in Bezug auf den betrachteten Punkt, also die Summe der einzelnen freien Elektricitätsmengen, eine jede dividirt durch ihre Entfernung von dem Punkte. Die Elektricitätsmengen sollen hierbei nach mechanischem Maafse gemessen seyn, d. h. Einheit der Elektricitätsmenge soll diejenige seyn, die auf eine gleiche Menge in der Einheit der Entfernung wirkend, die Einheit der Kraft ausübt. Ueberhaupt sollen alle Gröfsen, die in der Betrachtung vorkommen werden, Stromstärken, Widerstände u. s. w. nach mechanischem Maafse gemessen gedacht werden in der Weise, wie es Weber mehrfach in seinen elektrodynamischen Maafsbestimmungen angegeben hat. Es ist dann $-\frac{\partial V}{\partial s}$ die Kraft, mit der die freie Elektricität die Einheit positiver Elektricität in dem betrachteten Punkte nach der Richtung zu bewegen sucht, in der s wächst. Eben so grofs ist die Kraft, die auf die negative Elektricität in entgegengesetzter Richtung wirkt. Daher ist $-2\frac{\partial V}{\partial s}$ die auf die Einheit der Elektricitätsmenge bezogene, in dem betrachteten Punkte wirksame elektromotorische Kraft, die von der freien Elektricität herrührt.

Bei der Entwickelung des Werthes von V werde ich annehmen, dafs keine andere freie Elektricität auf den Draht wirkt als diejenige, die in ihm selbst sich befindet. Die Menge freier Elektricität, die zur Zeit t in dem Elemente des Drahtes enthalten ist, das dem Elemente der Mittellinie ds entspricht, werde ich durch $e\,ds$ bezeichnen;

es soll ds' ein zweites Element der Mittellinie seyn, und $e'ds'$ die Elektricitätsmenge, die in dem diesem entsprechenden Drahtelemente vorhanden ist. Ich denke mir ein Stück des Drahtes, dessen Mittelpunkt in ds liegt, und dessen Länge 2ε ist, wo ε eine Gröfse bedeuten soll, die als unendlich klein gegen die Länge des ganzen Drahtes, aber zugleich als unendlich grofs gegen den Radius seines Querschnittes betrachtet werden darf. Sobald das Drahtelement, in dem die Elektricitätsmenge $e'ds'$ sich befindet, aufserhalb dieses Stückes liegt, kann man bei der Berechnung von V seine Elektricität in der Linie ds' concentrirt, und den Punkt, auf den sich V bezieht, in der Linie ds liegend denken; es ist deshalb der Theil von V, der von dem ganzen Drahte mit Ausschlufs des gedachten Stückes herrührt,

$$=\int\frac{e'ds'}{r}$$

wo r die Entfernung der Elemente ds und ds' bedeutet, und wo die Integration über die ganze Mittellinie mit Ausschlufs des Stückes von der Länge 2ε auszudehnen ist. Was den von dem abgesonderten Stücke herrührenden Theil von V anbetrifft, so kann man diesen nur berechnen, wenn man die Vertheilung der freien Elektricität innerhalb eines Querschnitts kennt. Ich werde annehmen, dafs hier, wie bei einem constanten Strome und bei dem elektrischen Gleichgewicht, sich freie Elektricität nur an der Oberfläche befindet, und überdiefs, dafs ihre Dichtigkeit in allen Punkten der Peripherie eines Querschnitts dieselbe ist. Bezeichnet α den Radius des Querschnitts, so ist hiernach die Dichtigkeit der freien Elektricität in irgend einem Punkte der Oberfläche des gedachten Drahtstückes $=\frac{e}{2\pi\alpha}$; es ist daher, da man dasselbe seiner unendlich kleinen Länge wegen als gerade annehmen darf, der von ihm herrührende Theil von V

$$=\frac{e}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\int_{0}^{2\pi}\frac{dx'\,d\psi'}{\sqrt{x'^2+\alpha^2+\varrho^2-2\alpha\varrho\cos(\psi'-\psi)}}.$$

Es ist hier x' für $s'-s$ geschrieben, und ψ' bedeutet den Winkel zwischen dem nach einem Elemente der Drahtoberfläche gezogenen Radius und der Linie, von welcher aus der Winkel ψ gezählt wird. Führt man die Integration nach x' aus, und benutzt, dafs s gegen α und gegen ϱ unendlich grofs ist, so findet man diesen Ausdruck

$$=\frac{e}{\pi}\int_0^{2\pi} d\psi'\left(\lg 2s-\lg\sqrt{\alpha^2+\varrho^2-2\alpha\varrho\cos(\psi'-\psi)}\right).$$

d. h.

$$=2e\left(\lg 2s-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi'\lg\sqrt{\alpha^2+\varrho^2-2\alpha\varrho\cos(\psi'-\psi)}\right)$$

Setzt man

$$\int_0^{2\pi} d\psi'\lg\sqrt{\alpha^2+\varrho^2-2\alpha\varrho\cos(\psi'-\psi)}=U,$$

so mufs die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial U}{\partial\varrho}+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\psi^2}=0$$

erfüllt werden, weil die mit $d\psi'$ unter dem Integralzeichen multiplicirte Gröfse für jeden Werth von ψ' dieser Gleichung genügt; man sieht aber leicht, indem man als Veränderliche, nach der zu integriren ist, an Stelle von ψ' $\psi'-\psi$ einführt, dafs U von ψ unabhängig ist; es mufs also

$$\frac{d^2 U}{d\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{dU}{d\varrho}=0$$

seyn; hieraus folgt aber

$$U=C_1\lg\varrho+C_2,$$

wo C_1 und C_2 zwei unbekannte Constanten bedeuten. Diese lassen sich leicht bestimmen, indem man ϱ unendlich klein gegen α annimmt; die Ausführung der Integration in dem Ausdrucke von U giebt dann

$$U=2\pi\lg\alpha,$$

woraus folgt, dafs $C_1=0$ ist, und U für alle vorkommenden Werthe von ϱ diesen constanten Werth hat. Es ist mithin der Theil von V, der von dem Drahtstücke 2ε herrührt,

$$= 2e \lg \frac{2\varepsilon}{\alpha},$$

und also

$$V = 2e \lg \frac{2\varepsilon}{\alpha} + \int \frac{e' ds'}{r} \qquad (1),$$

wobei die Integration über den ganzen Draht mit Ausnahme des Stückes 2ε auszudehnen ist.

Es handelt sich nun darum den Ausdruck zu bilden für die elektromotorische Kraft, die in dem betrachteten Punkte inducirt wird durch die Aenderungen der Stromintensität in allen Theilen des Drahtes.

Wenn in einem Leiterelemente, dessen Länge l' ist, die Stromintensität, die durch i' bezeichnet werden soll, sich ändert, so wird dadurch in einem zweiten Leiterelemente eine elektromotorische Kraft inducirt, die bezogen auf die Einheit der Elektricitätsmenge, nach Weber [1]),

$$= -\frac{8}{c^2} \frac{\partial i'}{\partial t} \frac{l'}{r} \cos\theta . \cos\theta'$$

ist, wo θ und θ' die Winkel bezeichnen, die die beiden Elemente bilden mit der von dem ersten nach dem zweiten gezogenen Linie, r die Länge dieser Linie und c die constante Geschwindigkeit, mit der zwei Elektricitätstheile gegen einander bewegt werden müssen, damit sie keine Kraft auf einander ausüben.

Für alle Theile des Drahtes mit Ausnahme des schon vorher betrachteten Stückes von der Länge 2ε kann man die elektrischen Ströme in der Mittellinie concentrirt sich denken; der Theil der gesuchten inducirten elektromotorischen Kraft, der von dem Drahte mit Ausschlufs des genannten Stückes herrührt, ist daher

$$-\frac{8}{c^2} \int \frac{\partial i'}{\partial t} \frac{ds'}{r} \cos\theta . \cos\theta'$$

wo i' die Intensität des Stromes bedeutet, der durch den Querschnitt des Drahtes an dem Orte von ds' fliefst, θ und θ'

1) Elektrodynamische Maafsbestimmungen 1846 S. 354 und 1856 S. 268.

die Winkel, die die Elemente ds und ds' mit der Linie bilden, die von diesem nach jenem gezogen ist, r die Länge dieser Linie, und wo die Integration über den ganzen Draht mit Ausschlufs des bezeichneten Stückes zuszudehnen ist.

In diesem Stücke darf man die Ströme nicht mehr in einer Linie concentrirt sich denken, dafür darf man sie aber als gerade und parallel mit ds betrachten. Durch den Anfangspunkt von ds' denke man sich einen Querschnitt des Drahtes gelegt, und bezeichne durch ϱ', ψ' die Polarcoordinaten eines Punktes desselben in Beziehung auf ein Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt ist, und dessen Axe parallel der Linie ist, von der aus der Winkel ψ gerechnet wird; bedeutet dann J' die Stromdichtigkeit in dem durch ϱ' und ψ' bestimmten Punkte, so erhält man für den Theil der inducirten elektromotorischen Kraft, der von dem Drahtstücke 2ε herrührt, den Ausdruck:

$$-\frac{8}{c^2}\int_0^\alpha\int_0^{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{\partial J'}{\partial t}\cdot\frac{\varrho' d\varrho' d\psi' x'^2 dx'}{\left(x'^2+\varrho^2+\varrho'^2-2\varrho\varrho'\cos(\psi'-\psi)\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Da man J' als unabhängig von x' ansehen kann, so läfst sich die Integration nach x' leicht ausführen; benutzt man dabei, dafs ε unendlich grofs ist gegen alle Werthe von ϱ und ϱ', so findet man:

$$-\frac{16}{c^2}\int_0^\alpha\int_0^{2\pi}\frac{\partial J'}{\partial t}\varrho' d\varrho' d\psi'\left[\lg 2\varepsilon-1-\lg\sqrt{\varrho^2+\varrho'^2-2\varrho\varrho'\cos(\psi'-\psi)}\right].$$

Da aber

$$\int_0^\alpha\int_0^{2\pi} J'\varrho' d\varrho' d\psi' = i$$

ist, so ist dieser Ausdruck

$$= -\frac{16}{c^2}\Big[(\lg 2\varepsilon-1)\frac{\partial i}{\partial t}$$

$$-\int_0^\alpha\int_0^{2\pi}\frac{\partial J'}{\partial t}\varrho' d\varrho' d\psi' \lg\sqrt{\varrho^2+\varrho'^2-2\varrho\varrho'\cos(\psi'-\psi)}\Big].$$

Es wird daher die ganze inducirte elektromotorische Kraft

$$= -\frac{8}{c^2}\frac{\partial W}{\partial t},$$

wenn man setzt:

$$W = \int i' \frac{ds'}{r} \cos\theta \cos\theta' + 2i(\lg 2\varepsilon - 1)$$

$$-2\int_0^\alpha \int_0^{2\pi} J' \varrho' d\varrho' d\psi' \lg \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos(\psi' - \psi)}.$$

Bei einem stationären elektrischen Strome ist die Stromdichtigkeit gleich dem Producte aus der, auf die Einheit der Elektricitätsmenge bezogenen, elektromotorischen Kraft in die Leitungsfähigkeit; ich mache die Annahme, dafs dasselbe auch stattfindet, wenn der Strom kein stationärer ist. Diese Annahme wird erfüllt seyn, wenn die auf die Elektricitätstheilchen wirkenden Kräfte, welche den Widerstand ausmachen, so mächtig sind, dafs die Zeit, während welcher ein Elektricitätstheilchen noch in Bewegung bleibt nach dem Aufhören von beschleunigenden Kräften in Folge der Trägheit, als unendlich klein angesehen werden darf selbst gegen die kleinen Zeiträume, welche bei einem nicht stationären elektrischen Strome in Betracht kommen. Nach dieser Annahme hat man, wenn k die Leitungsfähigkeit des Drahtes, J die Stromdichtigkeit in dem durch die Werthe von s, ϱ und ψ bestimmten Punkte zur Zeit t bedeutet, die Gleichung:

$$J = -2k\left(\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial W}{\partial t}\right).$$

Aus diesem Ausdruck der Stromdichtigkeit J leite ich einen Ausdruck für die Stromstärke i ab, indem ich jenen mit $\varrho d\varrho d\psi$ multiplicire und in Bezug auf ϱ von 0 bis α, in Bezug auf ψ von 0 bis 2π integrire; da V von ϱ und ψ unabhängig ist, so erhalte ich, wenn ich

$$w = \frac{1}{\pi\alpha^2}\int_0^\alpha \int_0^{2\pi} W \varrho \, d\varrho \, d\psi$$

setze:

$$i = -2\pi k \alpha^2 \left(\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}\right) \quad (2).$$

Dabei wird:

$$w = \int i' \frac{ds'}{r} \cos\theta \cos\theta' + 2i(\lg 2r - 1)$$

$$-\frac{2}{\pi\alpha^2}\int_0^\alpha\int_0^{2\pi}\int_0^\alpha\int_0^{2\pi} J'\varrho' d\varrho' d\psi' \varrho d\varrho d\psi \lg \sqrt{\varrho^2+\varrho'^2-2\varrho\varrho'\cos(\psi'-\psi)}.$$

Das Integral:

$$\int_0^{2\pi} d\psi \lg \sqrt{\varrho^2+\varrho'^2-2\varrho\varrho'\cos(\psi'-\psi)}$$

ist von derselben Form als das oben betrachtete und mit U bezeichnete: aus den dort angeführten Schlüssen folgt, dafs dasselbe $= 2\pi \lg \varrho'$ ist, wenn $\varrho' > \varrho$, und $= 2\pi \lg \varrho$, wenn $\varrho' < \varrho$. Mit $\varrho d\varrho$ multiplicirt und von 0 bis α integrirt giebt daher diesen Ausdruck:

$$\pi\alpha^2\left(\lg\alpha - \frac{\alpha^2-\varrho'^2}{2\alpha^2}\right).$$

Das dritte Glied in dem Ausdruck von w wird also, da

$$\int_0^\alpha\int_0^{2\pi} J'\varrho' d\varrho' d\psi' = i$$

gesetzt werden darf:

$$= -2i\lg\alpha + \int_0^\alpha\int_0^{2\pi} \frac{\alpha^2-\varrho'^2}{\alpha^2} J'\varrho' d\varrho' d\psi';$$

es ergiebt sich also:

$$w = \int i' \frac{ds'}{r} \cos\theta \cos\theta' + 2i\left(\lg\frac{2\varepsilon}{\alpha} - 1\right)$$

$$+ \int_0^\alpha\int_0^{2\pi} \frac{\alpha^2-\varrho'^2}{\alpha^2} J'\varrho' d\varrho' d\psi'.$$

Das übrig gebliebene Doppelintegral kann nicht auf eine einfache Form zugeführt werden, da J' eine unbekannte Funktion von ϱ' ist; sein Werth aber kann vernachlässigt werden gegen das Glied $2i\left(\lg\frac{2\varepsilon}{\alpha} - 1\right)$, und für dieses darf man setzen $2i\lg\frac{2\varepsilon}{\alpha}$, wenn nur die Dicke des

Drahtes klein genug ist gegen die Dimensionen der Figur, welche seine Mittellinie bildet; denn man wird dann ε so wählen können, dafs $\lg \frac{2\varepsilon}{\alpha}$ eine unendlich grofse Zahl, und ε doch noch unendlich klein gegen die Dimensionen der genannten Figur ist. Unter dieser Voraussetzung wird also:

$$w = 2i \lg \frac{2\varepsilon}{\alpha} + \int i' \frac{ds'}{r} \cos\theta \cos\theta', \quad (3)$$

wo die Integration über den ganzen Draht mit Ausschlufs des Stückes von der Länge 2ε auszudehnen ist.

Zu den Gleichungen 1, 2 und 3 zwischen den 4 Gröfsen i, e, V, w läfst sich noch eine vierte hinzufügen.

Durch den Anfangspunkt und den Endpunkt von ds denke man sich zwei Querschnitte gelegt; in den ersten tritt in der Zeit ds in das von beiden begränzte Drahtelement die Menge positiver Elektricität idt; durch den zweiten tritt in derselben Zeit aus dem Drahtelemente die Menge positiver Elektricität $\left(i + \frac{\partial i}{\partial s} ds\right) dt$; das Drahtelement verliert also in der Zeir dt an positiver Elektricität $\frac{\partial i}{\partial} ds\, dt$; die negative Elektricitat strömt in gleichen Mengen durch beide Querschnitte in entgegengesetzter Richtung; das Drahtelement gewinnt also in der Zeit dt an negativer Elektricität so viel, als es an positiver verliert; seine freie Elektricität, d. h. der Unterschied seiner positiven und seiner negativen, verringert sich also in dem Zeitelemente um $2 \frac{\partial i}{\partial s} ds\, dt$; diese freie Elektricität ist aber eds, und daher ist

$$2 \frac{\partial i}{\partial s} = - \frac{\partial e}{\partial t} \text{ [1]}. \quad (4).$$

1) Der Ableitung dieser Gleichung liegt die Vorstellung zu Grunde, dafs auch bei dem nicht stationären Strome durch jeden Querschnitt des Leiters gleichzeitig gleiche Mengen der beiden Elektricitäten in entgegengesetzter Richtung sich bewegen. Wollte man diese Vorstellung nicht festhalten, so würde aber die Gleichung doch noch gelten; man müfste dann

Die in den vier, mit Zahlen bezeichneten Gleichungen enthaltene Theorie will ich jetzt weiter entwickeln unter der Voraussetzung, dafs die Gestalt der Mittellinie des Drahtes der Art ist, dafs nie die Entfernung zweier Punkte derselben, zwischen denen ein endliches Stück des Drahtes liegt, unendlich klein ist. Es wird durch diese Voraussetzung der Fall ausgeschlossen, dafs Inductionsrollen sich in der Leitung befinden. Durch dieselbe vereinfachen sich wesentlich die Gleichungen 1 und 3.

Bezeichnet A den Ort des Elementes ds und bezeichnen B und C zwei Punkte, die auf den beiden Seiten in endlicher Entfernung von A auf dem Drahte liegen, so ist das Integral

$$\int \frac{e' ds'}{r},$$

ausgedehnt über den ganzen Draht mit Ausschlufs des Stückes BAC eine endliche Gröfse, also unendlich klein gegen $2e \lg \frac{2\varepsilon}{\alpha}$; es darf deshalb in der Gleichung 1 dieses Integral nur ausgedehnt werden über das Stück BAC mit Ausschlufs des Theiles 2ε. Bezeichnet man daher durch σ den Bogen zwischen A und einem variablen Punkte des Drahtes, so darf das genannte Integral gesetzt werden:

$$= \int_{\varepsilon}^{AB} \frac{e' d\sigma}{r} + \int_{\varepsilon}^{AC} \frac{e' d\sigma}{r}.$$

Die Gröfse $\frac{e'}{r}$ ist eine Function von σ, die sich dem Werthe $\frac{e}{\sigma}$ nähert, wenn σ sich der 0 nähert; die Integrale

$$\int^{AB} \left(\frac{e'}{r} - \frac{e}{\sigma}\right) d\sigma \text{ und} \int_{\varepsilon}^{AC} \left(\frac{e_{,}}{r} - \frac{e}{\sigma}\right) d\sigma$$

haben daher endliche Werthe, denn die zu integrirende Function wird nie unendlich grofs; man darf deshalb für das in der Gleichung 1 vorkommende Integral auch setzen:

nur die Stromintensität definiren als das arithmetische Mittel aus den Mengen beider Elektricitäten, welche in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Leiters in entgegengesetzter Richtung gehen.

$$\int\limits_{\epsilon}^{AB}\frac{e\,d\sigma}{\sigma}+\int\limits_{\epsilon}^{AC}\frac{e\,d\sigma}{\sigma}$$

d. h. $$e\lg\frac{AB}{\epsilon}+e\lg\frac{AC}{\epsilon}.$$

Die Wahl der Längen AB und AC ist willkührlich, nur müssen dieselben endlich seyn gegen die Länge des Drahtes; man wird für beide die Hälfte dieser Länge setzen dürfen; bezeichnet man die ganze Länge durch l, so wird also die Gleichung 1:

$$V=2e\lg\frac{2\epsilon}{\alpha}+2e\lg\frac{l}{2\epsilon},$$

d. h.

$$V=2e\lg\frac{l}{\alpha}.$$

Durch Betrachtungen ganz derselben Art sieht man ein, dafs die Gleichung 3 eine ähnliche Form erhält; so wird:

$$w=2i\lg\frac{l}{\alpha}.$$

Diese Werthe von V und w sind in Gleichung 2 zu substituiren; thut man dieses, setzt der Kürze wegen

$$\lg\frac{l}{\alpha}=\gamma$$

und bezeichnet den Widerstand des ganzen Drahtes, d. h. die Gröfse

$$\frac{l}{k\pi\alpha^2}$$

durch r, so erhält man:

$$i=-4\gamma\frac{l}{r}\left(\frac{\partial e}{\partial s}+\frac{4}{c^2}\frac{\partial i}{\partial t}\right).$$

Aus dieser Gleichung, in Verbindung mit der Gleichung 4, nämlich

$$2\frac{\partial i}{\partial s}=-\frac{\partial e}{\partial t},$$

sind i und e als Functionen von s und t zu bestimmen.

Eine particuläre Lösung dieser Differentialgleichungen findet man, indem man

$$e = X \sin n s$$
$$i = Y \cos n s$$

setzt, wo n eine willkührliche Constante bezeichnet, und X und Y unbekannte Functionen von t bedeuten. Die Gleichungen werden hierdurch:

$$Y = -4\gamma \frac{l}{r}\left(nX + \frac{4}{c^2}\frac{dY}{dt}\right)$$
$$2nY = \frac{dX}{dt}.$$

Durch Elimination von Y ergiebt sich hieraus:

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{c^2 r}{16\gamma l}\frac{dX}{dt} + \frac{c^2 n^2}{2} X = 0.$$

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung ist:

$$X = C_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 t},$$

wo C_1 und C_2 zwei willkührliche Constanten bedeuten, e die Basis der natürlichen Logarithmen ist, und λ_1 und λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung sind:

$$\lambda^2 - \frac{c^2 r}{16\gamma l}\lambda + \frac{c^2 n^2}{2} = 0.$$

Die Werthe von λ_1 und λ_2 sind demzufolge:

$$\frac{c^2 r}{32\gamma l}\left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{32\gamma}{c r \sqrt{2}} n l\right)^2}\right].$$

Um ein Urtheil darüber zu gewinnen, ob diese Wurzeln reell oder imaginär sind, soll ein specieller Fall betrachtet werden. Es sey der Draht der Jacobi'sche Widerstandsetalon, dessen Widerstand Weber gemessen hat. Dieser Draht ist ein Kupferdraht von $7^m,620$ Länge und $0^{mm},333$ Radius. Der Werth von γ ist hiernach sehr nahe $= 10$. Den Widerstand desselben nach elektromagnetischem Maafse hat Weber[1])

$$= 598 . 10^7$$

gefunden bei Zugrundelegung von Millimeter und Sekunde als Einheiten der Länge und der Zeit. Um den Widerstand nach mechanischem Maafse, also den Werth von r,

1) Elektrodynamische Maafsbestimmungen 1850, S. 252.

zu finden, hat man diesen Werth mit $\frac{8}{c^2}$ zu multipliciren. Da nun, bei Benutzung derselben Einheiten [1]),

$$c = 4{,}39 \,.\, 10^{11}$$

ist, so ergiebt sich

$$r = 2{,}482 \,.\, 10^{-13}.$$

Es folgt hieraus

$$\frac{32\gamma}{rc\sqrt{2}} = 2070.$$

Die Gröfse n, welche noch unbestimmt galassen ist, soll später so gewählt werden, dafs nl ein Vielfaches von π ist. Es wird dann das negative Glied unter dem Wurzelzeichen in den Ausdrücken von λ_1 und λ_2 so grofs seyn gegen 1, dafs es als unendlich grofs wird betrachtet werden dürfen. Dieser Umstand bringt eine bedeutende Vereinfachung der Aufgabe hervor. Es soll im Folgenden nur der Fall untersucht werden, dafs derselbe Umstand stattfindet, d. h., dafs

$$\frac{32\gamma}{rc\sqrt{2}}$$

als unendlich grofs gegen 1 angesehen werden kann; es wird diese Voraussetzung um so näher erfüllt seyn, je kleiner der Widerstand des Drahtes bei gleichbleibendem Verhältnifs zwischen Länge und Radius ist; es wird aber dieser Widerstand noch beträchtlich gröfser als der des Jacobi'schen Drahtes seyn dürfen, ohne dafs die Resultate, zu denen wir gelangen werden, aufhören werden Gültigkeit zu besitzen.

Unter den gemachten Voraussetzungen werden die Werthe von λ_1 und λ_2

$$h \pm \frac{cn}{\sqrt{2}}\sqrt{-1},$$

wo der Kürze wegen

$$\frac{c^2 r}{32\gamma l} = h$$

1) Elektrodynamische Maafsbestimmungen (Weber und Kohlrausch) 1856, S. 264.

gesetzt ist. Durch Einführung neuer Constanten an Stelle von C_1 und C_2 kann man dann den Ausdruck von X auf die Form bringen:

$$X = e^{-ht}\left(A\cos\frac{cnt}{\sqrt{2}} + B\sin\frac{cnt}{\sqrt{2}}\right).$$

Dabei ergiebt sich

$$Y = -\frac{e^{-ht}}{2}\left\{\left(\frac{h}{n}A - \frac{c}{\sqrt{2}}B\right)\cos\frac{cnt}{\sqrt{2}} + \left(\frac{c}{\sqrt{2}}A + \frac{h}{n}B\right)\sin\frac{cnt}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Ich werdè voraussetzen, dafs für $t = 0$, $i = 0$, also auch $Y = 0$ ist; diese Bedingung giebt:

$$B = \frac{A}{\frac{nc}{h\sqrt{2}}};$$

die Gröfse n soll, wie oben schon bemerkt wurde, einem Vielfachen von $\frac{\pi}{l}$ gleichgesetzt werden; es wird deshalb der Nenner des Ausdrucks von B gleich einem Vielfachen von

$$\pi \cdot \frac{c}{hl\sqrt{2}}$$

seyn; die hier mit π multiplicirte Gröfse ist aber

$$= \frac{32\gamma}{rc\sqrt{2}},$$

d. h. gerade die, von der vorausgesetzt wurde, dafs sie unendlich grofs wäre; es wird deshalb B unendlich klein gegen A seyn, und man wird setzen können:

$$X = A \cdot e^{-ht} \cdot \cos\frac{cnt}{\sqrt{2}}$$

$$Y = -\frac{c}{2\sqrt{2}} A\, e^{-ht} \sin\frac{cnt}{\sqrt{2}}.$$

Multiplicirt man diese Ausdrücke resp. mit $\sin ns$ und $\cos ns$ und setzt die Producte den Gröfsen e und i gleich, so erhält man eine particuläre Lösung der für e und i geltenden Differentialgleichungen. Diese Lösung läfst sich dadurch verallgemeinern, dafs man in ihr zu s eine willkührliche Constante addirt: dadurch erhält man:

$$e = \mathrm{e}^{-ht} \cos \frac{cnt}{\sqrt{2}} (A \sin ns + A' \cos ns)$$

$$i = -\frac{c}{2\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-ht} \sin \frac{cnt}{\sqrt{2}} (A \cos ns - A' \sin ns).$$

Eine particuläre Lösung von anderer Form, die ebenfalls der Bedingung genügt, dafs für $t = 0$ i verschwindet, ist:

$$e = a + bs$$

$$i = -\frac{c^2}{8h} b (1 - \mathrm{e}^{-2ht}),$$

wo a und b zwei willkührliche Constanten bezeichnen. Dafs den beiden Differentialgleichungen hierdurch genügt wird, davon überzeugt man sich leicht, wenn man benutzt, dafs die eine durch die Einführung der Gröfse h die Gestalt erhält:

$$2hi = -\left(\frac{c^2}{4}\frac{\partial e}{\partial s} + \frac{\partial i}{\partial t}\right).$$

Man erhält eine Lösung, die man den anderweitigen Bedingungen der Aufgabe anpassen kann, wenn man e und i gleich Summen von particulären Lösungen der angegebenen Formen setzt.

Es soll nun der Fall näher betrachtet werden, dafs der Draht ein in sich zurückkehrender ist. In diesem Falle müssen e und i gleiche Werthe erhalten für $s = 0$ und für $s = l$, und zwar mufs dieses stattfinden, welches auch der Anfangspunkt von s seyn möge; das erfordert, dafs e und i Functionen von s sind, die periodisch sind um l; hierzu ist nöthig, dafs

$$b = 0 \text{ und } n = m\frac{2\pi}{l}$$

ist, wo m eine ganze Zahl bedeutet. Man hat daher für e und i die folgenden Ausdrücke:

$$e = e^{-kt} \sum_{1}^{\infty} A_m \cos m \frac{2\pi}{l} \frac{c}{\sqrt{2}} t \,.\, \sin m \frac{2\pi}{l} s$$

$$+ a + e^{-kt} \sum_{1}^{\infty} A'_m \cos m \frac{2\pi}{l} \frac{c}{\sqrt{2}} t \,.\, \cos m \frac{2\pi}{l} s$$

$$= - \frac{c}{2\sqrt{2}} e^{-kt} \sum_{1}^{\infty} A_m \sin m \frac{2\pi}{l} \frac{c}{\sqrt{2}} t \,.\, \cos m \frac{2\pi}{l} s$$

$$+ \frac{c}{2\sqrt{2}} e^{-kt} \sum_{1}^{\infty} A'_m \sin m \frac{2\pi}{l} \frac{c}{\sqrt{2}} t \,.\, \sin m \frac{2\pi}{l} s$$

Die Constanten a, A, A' lassen sich nach dem Fourier'schen Satze bestimmen, wenn für $t = 0$ e als Function von s gegeben ist. Die Lösung läfst sich aber noch auf eine andere Form bringen, welche deutlicher das Characteristische derselben zeigt.

Es sey für $t = 0$

$$e = f(s);$$

die Ausdrücke unter den Summenzeichen in e und i forme man um nach den Gleichungen

$$\begin{aligned} \cos x \sin y &= \tfrac{1}{2} \sin(y + x) + \tfrac{1}{2} \sin(y - x) \\ \cos x \cos y &= \tfrac{1}{2} \cos(y + x) + \tfrac{1}{2} \cos(y - x) \\ \sin x \sin y &= -\tfrac{1}{2} \cos(y + x) + \tfrac{1}{2} \cos(y - x); \end{aligned}$$

wenn man dann erwägt, dafs die Function f nothwendig um l periodisch ist, so sieht man ein, dafs die Ausdrücke von n und i folgendermafsen sich schreiben lassen:

$$e = a + \tfrac{1}{2} e^{-kt} \left[f\left(s + \frac{c}{\sqrt{2}} t\right) + f\left(s - \frac{c}{\sqrt{2}} t\right) - 2a \right]$$

$$= - \frac{c}{4\sqrt{2}} e^{-kt} \left[f\left(s + \frac{c}{\sqrt{2}} t\right) - f\left(s - \frac{c}{\sqrt{2}} t\right) \right].$$

Die Gröfse a ist dabei bestimmt durch die Gleichung:

$$a = \frac{1}{l} \int_0^l f(s)\, ds;$$

d. h. la ist die Menge freier Elektricität, die der ganze Draht enthält.

Der Ausdruck von e zeigt eine sehr merkwürdige Analogie zwischen der Fortpflanzung der Elektricität in dem Drahte und der Fortpflanzung einer Welle in einer gespannten Saite oder einem longitudinal schwingenden elastischen Stabe. Wenn $a = 0$, d. h. die Gesammtmenge der freien Elektricität gleich 0 ist, so zerfällt, wie ich mich ausdrücken will, die Elektricität in zwei Wellen von gleicher Stärke, die in entgegengesetzten Richtungen mit der Geschwindigkeit $\frac{c}{\sqrt{2}}$ durch den Draht laufen. Dabei nimmt die Dichtigkeit der Elektricität überall proportional mit e^{-ht} ab. Diese Abnahme ist aber im Vergleich mit der Geschwindigkeit der Wellen eine sehr langsame. Die Zeit nämlich, welche eine jede von beiden Wellen zu einem Umlaufe gebraucht, ist $= \frac{l\sqrt{2}}{c}$, und daher das Verhältnifs der Dichtigkeiten der Elektricität an einem Punkte vor nnd nach einem Umlaufe das von

$$1 : e^{-\frac{hl\sqrt{2}}{c}};$$

dieses Verhältnifs ist aber unendlich wenig von 1 verschieden, da der Exponent von e der gemachten Voraussetzung gemäfs unendlich klein ist. Im Vergleich mit Geschwindigkeiten, welche unserer Anschauung zugänglich sind, wird freilich die Abnahme der elektrischen Dichtigkeit immer eine sehr schnelle seyn. Wäre der Draht der Jacobi'sche Widerstands-Etalon, so wäre $\frac{1}{h}$ sehr nahe gleich dem 2000sten Theile einer Sekunde; es würde mithin in diesem kurzen Zeitraume die elektrische Dichtigkeit in dem Verhältnifs von e : 1, d. h. von 2,7 : 1 abnehmen.

Wenn a nicht gleich 0 ist, oder die mittlere Dichtigkeit der Elektricität nicht gleich 0 ist, so ändert sich, wie der Ausdruck von e zeigt, der Ueberschufs der Dichtigkeit über die mittlere Dichtigkeit gerade so, als ob die letztere gleich 0 wäre.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer elektrischen

Welle hat sich hier $=\frac{c}{\sqrt{2}}$ ergeben, also als unabhängig sowohl von dem Querschnitt, als von der Leitungsfähigkeit des Drahtes, als endlich von der Dichtigkeit der Elektricität; ihr Werth ist der von 41950 Meilen in einer Sekunde, also sehr nahe gleich der Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume.

Wenn der Draht nicht ein in sich zurückkehrender ist, so darf die Gröfse b nicht gleich 0 seyn, und die Gröfsen n können andere Werthe als in dem betrachteten Falle haben; dafür sind für die Enden des Drahtes gewisse Gleichungen zu erfüllen, je nach den Bedingungen, denen die Enden unterworfen sind. Ist ein Ende isolirt, so mufs an diesem immer $i=0$ seyn; ist dasselbe mit der Erde in vollkommne Verbindung gesetzt, so mufs hier das Potential V, also auch e für alle Werthe von t verschwinden. Es hat keine Schwierigkeit, die Ausdrücke für e und i zu bilden für die Fälle, dafs beide Enden isolirt, beide mit der Erde verbunden sind, oder das eine isolirt, das andere mit der Erde in Verbindung gesetzt ist. Es zeigt sich dabei, dafs an einem Ende immer eine Reflexion der Welle, die es trifft, stattfindet; ist das Ende zur Erde abgeleitet, so ist mit der Reflexion eine Umkehrung der Welle verbunden, d. h. es geht negative Elektricität von demselben aus, wenn es von positiver getroffen wurde; an einem isolirten Ende findet die Reflexion ohne Umkehrung statt. Es entspricht also in gewisser Hinsicht das abgeleitete Ende dem festen Ende eines longitudinal schwingenden Stabes, das isolirte dem freien Ende des Stabes.

Es soll näher ein anderer hierher gehöriger Fall betrachtet werden. Es soll nämlich untersucht werden, wie sich die Elektricität in dem Schliefsungsdrahte einer galvanischen Kette bewegt, bevor der Strom ein stationärer geworden ist. Ich werde dabei voraussetzen, dafs der Widerstand der Kette unendlich klein gegen den des Schliefsungsdrahtes, und dafs der eine Pol derselben vollkommen zur Erde abgeleitet ist. Mit diesem soll der Anfang des Drahtes verbunden seyn mit dem andern das Ende desselben zur Zeit $t = 0$ in Verbindung gesetzt werden. Man wird dann annehmen dürfen, dafs im Anfange des Drahtes, oder für $s = 0$, das Potential immer gleich 0 ist, und im Ende, oder für $s = l$, immer einen constanten, von der elektromotorischen Kraft der Kette abhängigen Werth hat. Dieser Werth mufs, wenn K die elektromotorische Kraft bedeutet, $\frac{1}{4\gamma} K$ seyn. Die Bedingungen, denen die Ausdrücke von e und i genügen müssen, sind daher die folgenden;

Es mufs für

$$\begin{array}{ll} s = 0 & e = 0 \\ s = l & e = \frac{1}{4\gamma} K \\ t = 0 & e = 0 \end{array}$$

seyn.

Der ersten Bedingung wegen müssen die Gröfsen $A' = 0$ seyn, und es mufs auch $a = 0$ seyn. Da für $s = l$ e unabhängig von t seyn soll, so müssen die Gröfsen n der Bedingung genügen

$$\sin n l = 0,$$

d. h. es mufs

$$n = m \frac{\pi}{l}$$

seyn, wo m eine ganze Zahl bedeutet. Damit überdiefs e für $s = l$ den angegebenen Werth annehme, mufs

$$b = \frac{1}{4\gamma l} K$$

gemacht werden.

Setzt man der Kürze wegen

$$\frac{\pi}{l} \frac{c}{\sqrt{2}} t = \tau$$

und

$$\frac{\pi}{l} s = \varphi,$$

so hat man hiernach für e die Gleichung:

$$e = \frac{K}{4\gamma l} s + e^{-ht} \sum_{1}^{\infty}{}_m A_m \cos m\tau \sin m\varphi.$$

Die Constanten A bestimmen sich durch die letzte Bedingung; nach dieser mufs für alle Werthe von φ zwischen 0 und π

$$\frac{K}{4\gamma\pi}\varphi = -\sum_{1}^{\infty}{}_{m} A_m \sin m\varphi$$

seyn; aber nach dem Fourier'schen Satze gilt zwischen denselben Gränzen die Gleichung:

$$\varphi = -2\sum_{1}^{\infty}{}_{m} (-1)^m \frac{1}{m}\sin m\varphi;$$

man hat daher zu setzen:

$$A_m = (-1)^m \frac{K}{4\gamma\pi}\frac{1}{m}.$$

Man erhält dadurch:

$$e = \frac{K}{4\gamma}\left\{\frac{s}{l} + \frac{2}{\pi}e^{-ht}\sum_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{(-1)^m}{m}\cos m\tau \sin m\varphi\right\}.$$

Bildet man den entsprechenden Ausdruck von i und erinnert sich dabei an die Gleichung, durch welche h definirt worden ist, so findet man:

$$i = -\frac{K}{r}(1 - e^{-2ht}) - \frac{cK}{4\sqrt{2}\gamma\pi}e^{-ht}\sum_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{(-1)^m}{m}\sin m\tau \cos m\varphi.$$

Es soll nun die Bedeutung dieser Ausdrücke entwickelt werden; zunächst die des Ausdruckes von i. Es kommt dabei vornehmlich darauf an, den Werth der in demselben vorkommenden Summe zu finden. In derselben soll φ als eine Constante angesehen, und sie als eine Function von τ betrachtet werden. Diese Function ist periodisch um 2π; sie hat ferner entgegengesetzte Werthe für τ und $2\pi - \tau$; es genügt also die Werthe zu ermitteln, die sie durchläuft, wenn τ zwischen 0 und π liegt. Es ist

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{(-1)^m}{m}\sin m\tau\cos m\varphi = \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{(-1)^m}{m}\sin m(\tau + \varphi)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{(-1)^m}{m}\sin m(\tau - \varphi).$$

Es ist aber die Summe:

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^m}{m} \sin m x,$$

wenn x zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, $= -\frac{x}{2}$, und, weil sie periodisch um 2π ist, daher allgemein

$$= -\tfrac{1}{2}(x - 2p\pi),$$

wo p diejenige ganze Zahl bedeutet, für welche $x - 2p\pi$ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt. Bei den Gränzen, welche für τ angenommen sind, liegt $\tau - \varphi$ immer zwischen $-\pi$ und $+\pi$, da φ für alle Punkte des Drahtes einen Werth zwischen 0 und π hat. Es ist deshalb:

$$\sum \frac{(-1)^m}{m} . \sin m(\tau - \varphi) = -\frac{\tau - \varphi}{2}.$$

Was den Werth von $\tau + \varphi$ anbetrifft, so kann dieser kleiner oder gröfser als π seyn. Es wird

$$\sum \frac{(-1)}{m} \sin m(\tau + \psi) = -\frac{\tau + \varphi}{2}, \qquad \text{wenn } \varphi < \pi - \tau$$

$$= -\frac{\tau + \varphi}{2} + \pi \qquad \text{»} \quad \varphi > \pi - \tau.$$

Es folgt daraus:

$$\sum \frac{(-1)^m}{m} \cos m\tau \cos m\varphi = -\frac{\tau}{2}, \qquad \text{wenn } \varphi < \pi - \tau$$

$$= -\frac{\tau}{2} + \frac{\pi}{2} \qquad \varphi > \pi - \tau.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dafs τ zwischen 0 und π liegt liegt es zwischen π und 2π, so ergiebt sich dieselbe Summe

$$= \pi - \frac{\tau}{2}, \text{ wenn } \varphi < \tau - \pi$$

und

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\tau}{2}, \quad \text{»} \quad \varphi > \tau - \pi.$$

Um für gröfsere Werthe von τ die Summe zu finden, hat man sich daran zu erinnern, dafs dieselbe periodisch um 2π ist.

Es geht hieraus hervor, dafs es in jedem Augenblicke in dem Drahte einen Punkt giebt, in welchem die Stromintensität einen Sprung erleidet. Dieser Punkt liegt zur Zeit $t=0$ am Ende des Drahtes; schreitet von hier mit der Geschwindigkeit $\frac{c}{\sqrt{2}}$ gegen den Anfang vor; geht, sobald er diesen erreicht hat, mit derselben Geschwindigkeit gegen das Ende hin, kehrt hier wieder um, und durchläuft so fortwährend die Länge des Drahtes mit derselben Geschwindigkeit hin und hergehend. In jedem von den beiden Theilen, in welche der Draht in einem Augenblicke durch diesen Punkt getheilt wird, findet dabei in diesem Augenblicke überall dieselbe Stromintensität statt, so dafs wenn s und i zu rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes gemacht werden, eine Linie entsteht von der Form der Fig. 12 Taf. II gezeichneten. Die Stromintensität ist vor dem Punkte, in dem der Sprung stattfindet, abgesehen vom Vorzeichen, immer die kleinere, hinter ihm die gröfsere, die Worte *vor* und *hinter* dabei im Sinne der Bewegung des Punktes gebraucht; die Fig. 12 Taf. II gilt daher nur für einen Augenblick, in dem dieser Punkt vom Ende des Drahtes nach dem Anfange läuft; auf einen Augenblick, in dem das Entgegengesetzte stattfindet, bezieht sich Fig. 13 Taf. II. Die Gröfse des Sprunges ist

$$= \frac{cK}{8\sqrt{2}\gamma}\, e^{-ht}$$

oder wenn man durch J den Werth bezeichnet, dem i bei wachsender Zeit sich mehr und mehr nähert, d. h. den Werth von $\frac{K}{r}$,

$$= J \cdot \frac{cr}{8\sqrt{2}\gamma}\, e^{-ht}.$$

Diese Gröfse hat ihren gröfsten Werth für $t=0$; aber auch dieser ist in Folge einer Voraussetzung, die gemacht ist, unendlich klein gegen J. Etwas kürzer läfst sich der Ausdruck für die Gröfse des Sprunges schreiben, wenn man die Zeit einführt, die der Punkt, an dem er stattfindet, oder eine elektrische Welle gebraucht, um sich durch die Länge des Drahtes fortzupflanzen. Bezeichnet man diese Zeit durch T, d. h. setzt man

$$T = \frac{l\sqrt{2}}{c},$$

so findet man leicht, dafs jener Ausdruck

$$= J \,.\, 2hTe^{-ht}$$

ist. Bei wachsender Zeit nimmt die Gröfse des Sprunges ab, aber so langsam, dafs während der Zeit T nur eine unendlich kleine Abnahme stattfindet.

Um den Vorgang vollständig zu übersehen, ist es jetzt nur noch nöthig, die Aenderungen der Stromstärke am Anfange des Drahtes zu untersuchen. Es sey diese, also der Werth von i für $s=0$, i_0; dann findet man bei Benutzung der neu eingeführten Zeichen J und T:

$$i_0 = J(1 - e^{-2ht}) + \frac{J4hT}{\pi} e^{-ht} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin m\tau.$$

Setzt man für die Summe ihren Werth, und bedenkt, dafs

$$\frac{\tau}{\pi} = \frac{t}{T}$$

ist, so ergiebt sich:

$$i_0 = J(1 - e^{-2ht}) + J2he^{-ht}(2pT - t),$$

wo p diejenige ganze Zahl bedeutet, für welche

$$\frac{t - 2pT}{T}$$

ein ächter, positiver oder negativer Bruch ist. Es läfst sich p auch definiren als die gröfste ganze Zahl, die in dem Bruche

$$\frac{t + T}{2T}$$

enthalten ist.

Für Werthe von t, für welche die Zahl p keine sehr grofse ist, läfst der Ausdruck von i_0 noch eine wesentliche Vereinfachung zu. Es ist nämlich für solche die Gröfse ht unendlich klein, und man kann bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung die Gleichung für i_0 schreiben:

$$i_0 = J \,.\, 2ht + J2h(2pT - t)$$

d. h. $$i_0 = pJ4hT.$$

Dieser Ausdruck zeigt, dafs die Stromintensität am Anfange des Drahtes 0 ist bis zur Zeit $t=T$; hier und in den Zeitpunkten $t=3T$, $t=5T$ u. s. f. ändert .ch dieselbe sprungweise, und zwar ist der Sprung doppelt so grofs, als in andern Punkten des Drahtes. In den Zwischenzeiten ist sie constant.

In ähnlicher Weise läfst sich der Ausdruck von e discutiren. Es ist

$$\sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m}{m} \cos m\tau \sin m\varphi = \tfrac{1}{2} \sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m}{m} \sin m(\tau+\varphi)$$

$$-\tfrac{1}{2} \sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)}{m} \sin m(\tau-\varphi)$$

oder, sobald τ zwischen 0 und π liegt:

$$= -\frac{\varphi}{2}, \qquad \text{wenn } \varphi < \pi - \tau$$

$$= -\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}, \text{ wenn } \varphi > \pi - \tau;$$

liegt τ zwischen π und 2π, so ist dieselbe Summe:

$$= -\frac{\varphi}{2}, \qquad \text{wenn } \varphi < \tau - \pi$$

$$= -\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}, \text{ wenn } \varphi > \tau - \pi.$$

Die zweite Thatsache folgt aus der ersten, wenn man erwägt, dafs die Summe gleiche Werthe hat für τ und $2\pi-\tau$. Man findet für gröfsere Werthe von τ den Werth der Summe, wenn man bedenkt, dafs sie um 2π periodisch ist.

Es ergiebt sich hieraus, dafs in jedem Augenblicke an einem Punkte des Drahtes auch e einen Sprung erleidet; dieser Punkt fällt immer mit demjenigen zusammen, in welchem der Sprung von i stattfindet. Gröfser ist e immer auf der Seite dieses Punktes, auf der das Ende des Drahtes liegt, kleiner auf der Seite des Anfangs. Die Gröfse des Sprunges ist

$$= \frac{K}{4\gamma} e^{-\lambda t},$$

oder, wenn man durch E den constanten Werth von e am Ende des Drahtes bezeichnet:

$$= E\,e^{-ht}$$

Auf der Seite des Punktes, in dem der Sprung stattfindet, auf welcher der Anfang des Drahtes liegt, ist

$$e = E \cdot \frac{s}{l}(1 - e^{-ht}),$$

und auf der Seite des Endes

$$e = E\left\{\frac{s}{l}(1 - e^{-ht}) + e^{-ht}\right\}.$$

Macht man e und s zu rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes, so entsteht daher für einen gewissen Werth von t eine Linie von der Form Fig. 15 Taf. II; wenn t ein mäfsiges Vielfaches von T nicht überschreitet, so hat die Linie die Gestalt von Fig. 14 Taf. II; sie nähert sich der geraden Linie Fig. 16 Taf. II, je weiter t wächst [1]).

III. *Ueber einige Methoden zur Bestimmung der bei der Diffusion einer Salzlösung in das reine Lösungsmittel auftretenden Constante; von Th. Simmler [2]) und H. Wild.*

(Vortrag, gehalten in der Naturforschenden Gesellschaft zu Zürich den 15. Dec. 1856 von H. Wild.)

In diesen Annalen Bd. 94, S. 59 hat Hr. Prof. Fick die Diffusion einer Salzlösung in das reine Lösungsmittel untersucht und darin durch Vergleichung der Verbreitung eines Salzes in seinem Lösungsmittel mit dem Strom des Elektricitäts- oder Wärmefluidums in seinen Leitern zuerst den Grund zu einer theoretischen Behandlung dieser Erscheinung gelegt. Indem er nämlich über den Diffusions-

1) Siehe die Note gegen Ende dieses Heftes. (P.)

2) Gegenwärtig Assistent am chemischen Laboratorium zu Breslau.