Eisenkern gewickelt ist, und in diesem Fall ist die auf den ersten Extrastrom ausgeübte Wirkung stärker als die auf den zweiten.

Leyden, den 1. October 1857.

(Wird fortgesetzt.)

II. *Ueber die Bewegung der Elektricität in Leitern; von G. Kirchhoff.*

In einer früheren Abhandlung [1]) habe ich eine Theorie der Bewegung der Elektricität in linearen Leitern aufgestellt; ich will jetzt zeigen, wie die dort durchgeführten Betrachtungen sich so verallgemeinern lassen, dafs sie auf Leiter jeder Gestalt anwendbar werden.

Ich bezeichne durch x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes des Leiters; den Strom, der zur Zeit t in diesem Punkte fliefst, zerlege ich nach den drei Coordinatenaxen und nenne u, v, w die Stromdichtigkeiten der Componenten; diese Stromdichtigkeiten werden gleich seyn müssen den Producten aus den Componenten der im Punkte (x, y, z) wirksamen, auf die Einheit der Elektricitätsmenge bezogenen, elektromotorischen Kraft in die Leitungsfähigkeit. Diese elektromotorische Kraft rührt her zum Theil von vorhandener freier Elektricität, zum Theil von der Induction, die in Folge der Aenderungen der Stromstärke in allen Theilen des Leiters statt findet. Bezeichnet Ω die Potentialfunction der freien Elektricität in Bezug auf den Punkt (x, y, z), so sind die Componenten des ersten Theiles der elektromotorischen Kraft

$$-2\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad -2\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad -2\frac{\partial \Omega}{\partial z}.$$

Um die Componenten des zweiten Theiles angeben zu können, bezeichne ich durch x', y', z' die Coordinaten eines

1) Diese Annalen Bd. 100, S. 193.

zweiten Punktes des Leiters, durch u', v', w' die Werthe von u, v, w für diesen Punkt, durch r die Entfernung der Punkte (x, y, z) und (x', y', z'), und setze:

$$U = \iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r^3}(x-x')[u'(x-x')+v'(y-y')+w'(z-z')]$$

$$V = \iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r^3}(y-y')[u'(x-x')+v'(y-y')+w'(z-z')]$$

$$W = \iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r^3}(z-z')[u'(x-x')+v'(y-y')+w'(z-z')],$$

wo die Integrationen über das ganze Volumen des Leiters ausgedehnt gedacht sind. Nach dem Weber'schen Gesetze der Induction sind dann die Componenten des zweiten Theiles der betrachteten elektromotorischen Kraft:

$$-\frac{8}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t},\quad -\frac{8}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t},\quad -\frac{8}{c^2}\frac{\partial W}{\partial t},$$

wo c diejenige constante Geschwindigkeit bezeichnet, mit der zwei Elektricitätstheile gegen einander bewegt werden müssen, damit sie keine Kraft auf einander ausüben. Ist daher k die Leitungsfähigkeit des Leiters so hat man:

$$u = -2k\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}\right) \tag{1}$$

$$v = -2k\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right) \tag{2}$$

$$w = -2k\left(\frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial W}{\partial t}\right). \tag{3}$$

Dafs die freie Elektricität auf die Oberfläche des Leiters beschränkt ist, wie beim Gleichgewicht oder bei constanten Strömen, darf man hier nicht annehmen; es wird sich in der That zeigen, dafs im Allgemeinen das Gegentheil stattfindet. Ich bezeichne durch ε die Dichtigkeit der freien Elektricität im Punkte (x, y, z), durch ε' die im Punkte (x', y', z'), durch e ihre Dichtigkeit in einem Elemente der Oberfläche dS und durch e' dieselbe für ein zweites Element der Oberfläche dS', dann ist:

$$\Omega = \int \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r}\varepsilon' + \int \frac{dS'}{r}e', \tag{4}$$

wo die erste Integration über das ganze Volumen, die zweite über die ganze Oberfläche des Leiters auszudehnen ist.

Zu diesen Gleichungen lassen sich noch zwei hinzufügen, die sich auf die mit der Zeit stattfindenden Aenderungen der Dichtigkeiten der freien Elektricität beziehen. Für jeden Punkt im Innern des Leiters ist nämlich:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}; \tag{5}$$

und bezeichnet man durch N die nach dem Innern des Leiters gerichtete Normale des Elementes dS seiner Oberfläche, so ist ferner für jeden Punkt dieser Oberfläche:

$$u\cos(N, x)+v\cos(N, y)+w\cos(N, z)=-\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial t}. \tag{6}$$

Aus den aufgestellten Gleichungen läfst sich eine merkwürdige Relation zwischen ε und Ω herleiten. Substituirt man nämlich die Werthe von u, v, w aus (1), (2), (3) in (5), und benutzt, dafs:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}=-4\pi\varepsilon$$

ist, so findet man:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}=-16k\left[\pi\varepsilon-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}\right)\right].$$

Da die Gleichung für U sich schreiben läfst:

$$U=-\int dx'dy'dz'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}[u'(x-x')+v'(y-y')+w'(z-z')],$$

so ist:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-\int dx'dy'dz'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}u'$$

$$-\int dx'dy'dz'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}[u'(x-x')+v'(y-y')+w'(z-z')].$$

Bildet man in ähnlicher Weise die Werthe von $\frac{\partial V}{\partial y}$ und $\frac{\partial W}{\partial z}$, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}$$

$$=-\int dx'dy'dz'\left(u'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+v'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+w'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right);$$

denn es ist:

$$\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}=0$$

für alle Punkte (x', y', z'), die nicht mit dem Punkte (x, y, z) zusammenfallen; und ausgedehnt über einen unendlich kleinen Raum, in dem der Punkt (x, y, z) liegt, sind die Integrale, welche die zweiten Theile von $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial W}{\partial z}$ bilden, unendlich klein. Von der Richtigkeit der letzten Behauptung überzeugt man sich leicht durch dasselbe Verfahren, durch welches Gaufs nachgewiesen hat, dafs zu dem Potentiale von Massen, die continuirlich einen Raum erfüllen, in Beziehung auf einen Punkt in diesem Raume die Massen, die dem Punkte unendlich nahe liegen, nur unendlich wenig beitragen [1]). Ersetzt man in dem Integrale, welches die rechte Seite der gefundenen Gleichung bildet, die nach x, y, z genommenen Differentialquotienten durch die negativen nach x', y', z' genommenen, zerlegt dasselbe in drei Theile und integrirt den ersten partiell nach x', den zweiten nach y', den dritten nach z', so erhält man:

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}$$

$$=-\int\frac{dS'}{r}[u'\cos(N',x)+v'\cos(N',y)+w\cos(N',z)]$$

$$-\int\frac{dx'dy'dz'}{r}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial w'}{\partial z'}\right);$$

wo N' die nach Innen gerichtete Normale des Oberflächenelementes dS' bezeichnet. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (6), (5) und (4) läfst sich diese Gleichung aber schreiben:

1) Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins; 1839 S. 7.

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial t}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}=-8k\left(2\pi\varepsilon-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2}\right). \tag{7}$$

Man ersieht aus dieser Gleichung sehr deutlich, dafs nur ausnahmsweise $\varepsilon=0$ seyn kann, dafs also im Allgemeinen auch im Innern des Leiters sich freie Elektricität befindet. Es ist wohl wahrscheinlich, dafs bei den sogenannten mechanischen Wirkungen des Entladungsstromes einer Leydner Flasche, z. B. dem Zerstäuben eines feinen Drahtes, diese im Innern befindliche freie Elektricität eine wesentliche Rolle spielt.

Ich will die hier entwickelte Theorie jetzt auf den Fall anwenden, den ich in der im Eingange angeführten Abhandlung betrachtet habe, auf den Fall nämlich, dafs der Leiter ein unendlich dünner Draht ist, in dessen Nähe keine andere elektrische Körper vorhanden sind. Ich will nachweisen, dafs diese allgemeinere Theorie dieselben Resultate liefert, die ich dort hergeleitet habe, aufserdem aber noch gewisse Fragen beantwortet, die dort unbeantwortet geblieben sind.

Ich werde die allgemeinen Gleichungen zunächst vereinfachen durch die Einführung der Voraussetzung, dafs der Leiter ein Cylinder von kreisförmigem Querschnitt ist, und dafs die Strömungen, sowie die Vertheilung der freien Elektricität, symmetrisch zur Axe sind. Ich nehme die Axe zur x Axe; für y und z führe ich neue Coordinaten ϱ und φ ein, so, dafs

$$y=\varrho\cos\varphi,\quad z=\varrho\sin\varphi$$

ist; entsprechend setze ich:

$$y'=\varrho'\cos\varphi',\quad z'=\varrho'\sin\varphi'.$$

Ich bezeichne ferner die Stromdichtigkeit der auf der Axe des Cylinders senkrechten Componente des Stromes — positiv gerechnet in der von der Axe fortgehenden Richtung — für den Punkt (x, ϱ, φ) durch σ und für den Punkt (x', ϱ', φ') durch σ'. Es ist dann:

$$v = \sigma \cos\varphi, \quad w = \sigma \sin\varphi,$$
$$v' = \sigma' \cos\varphi', \quad w' = \sigma' \sin\varphi'.$$

Man hat daher:

$$u = -2k\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}\right), \tag{8}$$

wo

$$U = \int \frac{dx'\,\varrho'\,d\varrho'\,d\varphi'}{r^3}(x-x')\left[u'(x-x') + \sigma'(\varrho\cos\varphi - \varphi' - \varrho')\right] \quad (9).$$

Vernachlässigt man die Wirkung der auf den Grundflächen des Cylinders befindlichen freien Elektricität, so läſst sich, wenn α den Radius des Cylinders bezeichnet, die Gleichung (4) schreiben:

$$\Omega = \int \frac{dx'\,\varrho'\,d\varrho'\,d\varphi'}{r}\,\varepsilon' + \alpha \int \frac{dx'\,d\varphi'}{r}\,e' \quad (10).$$

Die Gleichung (5) wird:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho\sigma}{\partial \varrho} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}; \tag{11}$$

und die Gleichung (6), die sich auf die Oberfläche bezieht:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial t}. \tag{12}$$

Die Ausdrücke von Ω und U nehmen eine wesentlich einfachere Gestalt an, wenn man die Voraussetzung einführt, daſs der Querschnitt des Cylinders unendlich klein ist, während seine Länge eine endliche ist. Ich nenne l diese Länge, den Anfangspunkt der Coordinaten lege ich in den Mittelpunkt des Cylinders, die Integrationen nach x' sind dann von $-\frac{l}{2}$ bis $+\frac{l}{2}$ auszudehnen. Der Kürze wegen setze ich

$$x' - x = \xi;$$

für dx' kann dann in den Integralen $d\xi$ geschrieben werden; die Integrationen nach ξ sind zwischen den Gränzen $-\frac{l}{2} - x$ und $\frac{l}{2} - x$ zu nehmen, von denen die erste stets negativ, die zweite stets positiv ist. Die in den Integralen vorkommende Gröſse r ist bestimmt durch die Gleichung

$$r^2 = \xi^2 + \beta^2,$$

wo

$$\beta^2 = \varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos(\varphi - \varphi').$$

Um mit der Umformung des zweiten Theiles von Ω zu beginnen, denke ich mir in dem Integrale

$$\int_{-\frac{l}{x}-2}^{\frac{l}{2}-x} \frac{d\xi\, e'}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}}$$

e' nach dem Taylor'schen Satze nach Potenzen von ξ entwickelt, also gesetzt:

$$e' = e + \frac{\partial e}{\partial x}\xi + \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}\frac{\xi^2}{1.2} + \ldots;$$

die einzelnen Theile, in welche das Integral sich dann zerlegen läfst, sind von der Form:

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\frac{\partial^n e}{\partial x^n}\int \frac{\xi^n d\xi}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}}.$$

Es ist aber:

$$\int \frac{\xi^n d\xi}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}} = \frac{1}{n}\xi^{n-1}\sqrt{\beta^2 + \xi^2} - \frac{n-1}{n}\beta^2 \int \frac{\xi^{n-2} d\xi}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}}$$

und

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}} = \lg(\xi + \sqrt{\beta^2 + \xi^2})$$

$$\int \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}} = \sqrt{\beta^2 + \xi^2}.$$

Wenn β unendlich klein ist, was stattfindet, wenn α unendlich klein ist, so wird hiernach der erste, und *nur* der erste, jener Theile unendlich grofs. Man darf daher alle folgenden Theile gegen den ersten vernachlässigen, also setzen:

$$\int \frac{e'\, d\xi}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}} = 2e \lg \frac{\sqrt{l^2 - 4x^2}}{\beta},$$

oder auch, indem man wieder Endliches gegen unendlich Grofses vernachlässigt:

$$= 2e \lg \frac{l}{\beta}.$$

Weiter ist nun:

$$\int_0^{2\pi} \lg\beta\, d\varphi' = 2\pi \lg\varrho', \text{ wenn } \varrho' > \varrho.$$

In dem zweiten Theile von Ω ist $\varrho' = \alpha$ zu setzen; es ist daher dieser zweite Theil, nämlich

$$\alpha \int \frac{dx'\, d\varphi'}{r}\, e',$$

$$= 4\pi\alpha e \lg \frac{l}{\alpha}.$$

Aehnliche Betrachtungen lassen sich in Beziehung auf den *ersten* Theil von Ω anstellen. Bezeichnet man den Werth, den ε in dem Punkte (x, ϱ', φ') hat, durch ε'_0, so findet man durch dieselben, dafs

$$\int \frac{\varepsilon'\, dx'}{r} = 2\varepsilon'_0 \lg \frac{l}{\beta}$$

gesetzt werden darf; weiter ist:

$$\int \lg\beta\, d\varphi' = 2\pi \lg\varrho', \text{ wenn } \varrho' > \varrho$$

und $$= 2\pi \lg\varrho, \text{ wenn } \varrho > \varrho':$$

für den einen, wie für den andern dieser beiden Ausdrücke kann man aber $2\pi \lg\alpha$ schreiben, wenn man Endliches gegen unendlich Grofses vernachlässigt; es wird deshalb

$$\int \frac{dx'\, \varrho'\, d\varrho'\, d\varphi'}{r}\, \varepsilon' = 4\pi \lg \frac{l}{\alpha} \int_0^{\alpha} \varrho'\, d\varrho'\, \varepsilon'_0 .$$

Setzt man

$$2\pi\alpha e + 2\pi \int_0^{\alpha} \varrho'\, d\varrho'\, \varepsilon'_0 = E,$$

d. h. bezeichnet man durch $E dx$ die Menge freier Elektricität, die in dem dem Elemente dx entsprechenden Theile des Drahtes enthalten ist [1]), so ergiebt sich also;

$$\Omega = 2E \lg \frac{l}{\alpha} \qquad (13).$$

1) Es ist E hier dieselbe Gröfse, die ich in der oben angeführten Abhandlung e genannt habe.

In derselben Weise läfst sich der Ausdruck von U in der Gleichung (9) behandeln. In demselben denke ich mir u' und σ' nach Potenzen von ξ entwickelt, und dabei die Werthe von u und σ für den Punkt (x, ϱ', φ') durch u'_0 und σ'_0 bezeichnet. In den Theilen, in welche der Ausdruck sich dann zerlegen läfst, kommen Integrale vor von der Form:

$$\int \frac{\xi^n d\xi}{(\beta_2 + \xi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Es ist:

$$\int \frac{\xi^n d\xi}{(\xi^2 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{n-2} \frac{\xi^{n-1}}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}} - \frac{n-1}{n-2} \beta^2 \int \frac{\xi^{n-2} d\xi}{(\beta^2 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\int \frac{\xi d\xi}{(\beta^2 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}}$$

$$\int \frac{\xi^2 d\xi}{(\beta^2 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\xi}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}} + \lg(\xi + \sqrt{\beta^2 + \xi^2}).$$

Von den Integralen der betrachteten Form, wenn sie genommen werden von einer negativen bis zu einer positiven endlichen Gränze, ist daher dasjenige, für welches $n = 2$ ist, und *nur* dieses unendlich grofs, falls β unendlich klein ist. Alle übrigen Integrale lassen sich daher gegen dieses vernachlässigen und in ihm kann der endliche Theil auch fortgelassen werden. Als Faktor kommt in demselben die Gröfse

$$u'_0 - \frac{\partial \sigma \sigma'}{\partial x} (\varrho \cos \varphi - \varphi' - \varrho')$$

vor; wegen der Kleinheit von ϱ und ϱ' kann aber hierfür u'_0 gesetzt werden. Hiernach erhält man durch eine Rechnung, die derjenigen gleich ist, welche oben in Bezug auf Ω angestellt ist:

$$U = 4\pi \log \frac{l}{\alpha} \int \varrho' d\varrho' u'_0.$$

Bezeichnet man die Elektricitätsmenge, welche in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Drahtes fliefst, also die Intensität des Stromes, durch i, so läfst sich diese Gleichung einfacher schreiben:

$$U = 2i \log \frac{l}{\alpha}.$$

Substituirt man diesen Werth von U und den Werth von Ω aus (13) in die Gleichung (8), so erhält man:

$$u = -4 \log \frac{l}{\alpha} k \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{4}{c^2} \frac{\partial i}{\partial t}\right).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist unabhängig von ϱ, es ist also auch u von ϱ unabhängig und daher

$$i = \pi \alpha^2 u;$$

mithin ist auch:

$$i = -4\pi\alpha^2 k \log \frac{l}{\alpha} \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{4}{c^2} \frac{\partial i}{\partial t}\right). \tag{14}$$

Eine zweite Gleichung zwischen den Gröſsen E und i erhält man aus den Gleichungen (11) und (12). Multiplicirt man nämlich die erste von diesen mit $\varrho \, d\varrho \, d\varphi$, integrirt sie über den Querschnitt des Drahtes und zieht von ihr die zweite ab, nachdem diese mit $2\pi\alpha$ multiplicirt ist, so erhält man:

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial t}. \tag{15}$$

Bei der Ableitung der Gleichungen (14) und (15) ist vorausgesetzt, daſs der Draht gerade ist. Da dieselben aber zeigen, daſs auf den elektrischen Zustand an einer Stelle des Drahtes die elektrischen Zustände aller Punkte, die in endlicher Entfernung von dieser liegen, von keinem Einfluſs sind, so werden sie auch gelten, wenn der Draht gekrümmt ist, sobald nur der Radius der Krümmung überall endlich ist und nicht Punkte unendlich nahe an einander liegen, zwischen denen ein endliches Stück des Drahtes sich befindet. Die Gleichungen (14) und (15) sind aber dieselben als diejenigen, zu denen ich für denselben Fall in der oben angeführten Abhandlung gekommen bin. Die hier entwickelte allgemeinere Theorie führt also zu denselben Resultaten, als die dort aus einander gesetzte; sie führt aber auch noch zu weiteren. Hat man nämlich aus (14) und (15) E bestimmt, dann aus (13) Ω, so kann man durch Integration von (7) ε, oder die Dichtigkeit der freien Elektricität im Innern des Drahtes, finden, sobald nur für den Anfangspunkt der Zeit ε gegeben ist. Ist der Anfangswerth von ε unabhängig von ϱ, so ist immer ε hiervon unabhängig, d. h. die Dichtigkeit der freien Elektricität in allen Punkten *eines* Querschnitts ist dieselbe; denn nach (13) ist Ω unabhängig von ϱ, und in der Gleichung (7) kommt ϱ nicht vor. Nach der Bestimmung von ε kann man weiter e finden; wenn der Anfangswerth von ε unabhängig von ϱ ist, was vorausgesetzt werden soll, so dient hierzu die Gleichung:

$$E = 2\pi a e + \pi a^2 \varepsilon.$$

Unter derselben Voraussetzung ist es endlich leicht aus e σ zu berechnen; es ist nämlich:

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{\varrho}{a} \frac{\partial e}{\partial t}.$$

Dafs diese Gleichung für $\varrho = a$ richtig ist, lehrt die Gleichung (12), und dafs σ proportional mit ϱ ist, die Gleichung (11); multiplicirt man nämlich diese mit $\varrho d\varrho$ und integrirt sie, indem man benutzt, dafs u und ε unabhängig von ϱ sind, so findet man aus ihr:

$$\sigma = -\frac{\varrho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right) + \frac{\text{Const.}}{\varrho}.$$

Die Constante der Integration mufs aber gleich 0 seyn, denn für $\varrho = 0$ darf σ nicht unendlich werden, sondern es mufs im Gegentheil verschwinden, weil in der Axe des Drahtes die Strömungen die Richtung der Axe haben müssen.

Ich habe die Lösung der Gleichungen (14) und (15) an dem mehrfach erwähnten Orte für einen Fall discutirt, dem man sich um so mehr nähert, je kleiner man den Widerstand des Drahtes macht, und habe nachgewiesen, dafs in diesem Falle sich die Elektricität in dem Drahte ähnlich fortpflanzt, wie eine Welle in einer gespannten Saite, und zwar mit der Geschwindigkeit, die das Licht im leeren Raume hat. Es ist von Interesse auch den entgegengesetzten Fall zu untersuchen, den nämlich, dem man sich um so mehr nähert, je gröfser der Widerstand des Drahtes wird. Ich will dieses hier thun unter der Voraussetzung, dafs die beiden Enden des Drahtes mit einander verbunden sind.

Ich bezeichne wieder, wie in der früheren Abhandlung, den Widerstand des Drahtes durch r, und setze

$$\log \frac{l}{\alpha} = \gamma;$$

dann ist die Lösung der Differentialgleichungen (14) und (15), welches auch der Werth von r seyn möge, die folgende:

$$E = \Sigma (C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}) \sin nx$$
$$+ (C_1' e^{-\lambda_1 t} + C_2' e^{-\lambda_2 t}) \cos nx,$$

$$i = \Sigma - \frac{1}{2n} (\lambda_1 C_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{-\lambda_2 t}) \cos nx$$
$$+ \frac{1}{2n} (\lambda_1 C_1' e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2' e^{-\lambda_2 t}) \sin nx:$$

wo n ein Vielfaches von $\frac{2\pi}{l}$ bezeichnet, λ_1 und λ_2 die Werthe:

$$\frac{c^2 r}{32 \gamma l} \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{32 \gamma}{c r \sqrt{2}} n l \right)^2} \right]$$

haben, C_1, C_2, C_1', C_2' willkührliche Constanten sind, und die Summation über alle Werthe von n auszudehnen ist. Die Constanten C bestimmen sich leicht, sobald für $t=0$ E und i gegeben sind; hat man nämlich die Functionen von x, in welche für $t=0$ E und i übergehen sollen, dargestellt in der Form:

$$\Sigma (E_n \sin nx + E'_n \cos nx)$$

und

$$\Sigma (- i_n \cos nx + i'_n \sin nx),$$

so hat man die Gleichungen:

$$E_n = C_1 + C_2$$

$$i_n = \frac{1}{2n} (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$$

und

$$E'_n = C_1' + c_2'$$
$$i'_n = \frac{1}{2n}(\lambda_1 C_1' + \lambda_2' C_2');$$

die Auflösungen dieser sind:

$$C_1 = \frac{\lambda_2 E_n - 2ni_n}{\lambda_2 - \lambda_1}$$
$$C_2' = \frac{-\lambda_1 E_n + 2ni_n}{\lambda_2 - \lambda_1}$$
$$C_1' = \frac{\lambda_2 E'_n - 2ni'_n}{\lambda_2 - \lambda_1}$$
$$C_2' = \frac{-\lambda_1 E'_n + 2ni'_n}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

In der früheren Abhandlung ist der Fall untersucht, dafs

$$\frac{32\gamma}{cr\sqrt{2}}$$

als unendlich grofs betrachtet werden kann; es soll nun angenommen werden, dafs diese Gröfse unendlich klein ist. Es sind dann die beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 reell; ist λ_2 die gröfsere von beiden, so ist bei Vernachlässigung von Gliedern niederer Ordnung:

$$\lambda_2 = \frac{c^2 r}{16\gamma l}, \quad \lambda_2 = \frac{8\gamma l}{r} n^2.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \left(\frac{16\gamma}{cr\sqrt{2}} n l\right)^2;$$

dieser Ausdruck ist unendlich klein, da nl ein Vielfaches von 2π also endlich ist. Die Ausdrücke der Gröfsen C lassen sich hiernach schreiben:

$$C_1 = E_n - \frac{2n}{\lambda_2} i_n, \quad C_1' = E_n' - \frac{2n}{\lambda_2} i_n',$$
$$C_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} E_n + \frac{2n}{\lambda_2} i_n, \quad C_2' = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} E_n' + \frac{2n}{\lambda_2} i_n'.$$

Der Coëfficient von $\sin nx$ in dem Ausdrucke von E wird daher:

$$E_n\left(e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1} e^{-\lambda_2 t}\right) - \frac{2n}{\lambda_2} i_n (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

oder

$$E_n e^{-\lambda_1 t} - \frac{2n}{\lambda_2} i_n (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_1 t}),$$

und der Coëfficient von $-\cos nx$ in dem Ausdrucke von i:

$$E_n \frac{\lambda_1}{2n} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})\, i_n \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right)$$

Man erhält hieraus die Coëfficienten von $\cos nx$ in E und von $\sin nx$ in i, wenn man für E_n und i_n setzt E_n' und i_n'. Schliefst man den Fall aus, dafs der Anfangswerth von i unendlich grofs ist gegen die Werthe, die i bei ungeändertem Anfangswerthe von E erhält, wenn der Anfangswerth von $i=0$ ist, so vereinfachen sich diese Ausdrücke. Es ist nämlich aus ihnen ersichtlich, dafs, wenn für $t=0$ $i=0$, d. h. wenn $i_n=0$ ist, i von der Ordnung von $E\frac{\lambda_1}{2n}$ ist; es ist also bei der ausgesprochenen Beschränkung i_n von der Ordnung $E_n \frac{\lambda_1}{2n}$, und es werden sich die Coëfficienten von $\sin nx$ in E und von $-\cos nx$ in i schreiben lassen:

$$E_n e^{-\lambda_1 t}$$

und

$$E_n \frac{\lambda_1}{2n} e^{-\lambda_1 t} + \left(i_n - E_n \frac{\lambda_1}{2n}\right) e^{-\lambda_2 t}.$$

Schliefst man ferner von der Betrachtung diejenigen Werthe von t aus, die so klein sind, dafs $\lambda_1 t$ unendlich klein ist, so ist $\lambda_2 t$ unendlich grofs, und daher der zweite Term in dem zweiten dieser Ausdrücke gegen den ersten zu vernachlässigen. Da dieselben Betrachtungen auch in Bezug auf die Coëfficienten von $\cos nx$ und von $\sin nx$ in den Ausdrücken von E und i gelten, so werden diese Ausdrücke, wenn man noch für λ_1 den oben aufgestellten Werth substituirt:

$$E = \Sigma(E_n \sin nx + E'_n \cos nx)\, e^{-\frac{8\gamma l}{r} n^2 t} \tag{16}$$

$$i = \frac{4\gamma l}{r} \Sigma n(-E_n \cos nx + E_n' \sin nx)\, e^{-\frac{8\gamma l}{r} n^2 t}. \tag{17}$$

Diese Ausdrücke sind unabhängig von c; es sind die Lösungen der Differentialgleichungen, die aus (14) und (15) entstehen, wenn man c unendlich grofs setzt, nämlich der Differentialgleichungen:

$$i = -\frac{4\gamma l}{r}\frac{\partial E}{\partial x}$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial t}.$$

Eliminirt man aus diesen i, so erhält man:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{8\gamma l}{r}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2},$$

welche Gleichung von derselben Form als diejenige ist, welche die Fortpflanzung der geleiteten Wärme bestimmt. In dem betrachteten Falle pflanzt sich also die Elektricität ähnlich wie die geleitete Wärme fort.

Dafs bei der über den Widerstand r gemachten Voraussetzung die Gleichungen (16) und (17) wirklich Lösungen der Gleichungen (14) und (15) sind, läfst sich auch leicht *a posteriori* nachweisen. Man überzeugt sich nämlich ohne Schwierigkeit, dafs bei jener Voraussetzung $\frac{4}{c_2}\frac{\partial t}{\partial i}$ unendlich klein gegen $\frac{\partial E}{\partial x}$ ist, wenn für i und E ihre Werthe aus (17) und (16) gesetzt werden.

In ganz ähnlicher Weise, wie der Fall, dafs der Draht ein in sich zurückkehrender ist, hier behandelt ist, läfst sich auch der Fall behandeln, dafs die Enden des Drahtes getrennt sind und in ihnen das Potential zwei constante Werthe hat. Man findet für diesen unter der Voraussetzung, dafs der Widerstand des Drahtes grofs genug ist, dieselbe Analogie zwischen der Fortpflanzung der Elektricität und der der geleiteten Wärme, die sich hier gezeigt hat.

Bei dem Jacobi'schen Widerstandsetalon, einem Kupferdrahte von $7^{m},62$ Länge und $0^{mm},333$ Radius ist, wie an dem mehrfach erwähnten Orte gezeigt ist,

$$\frac{32\gamma}{rc\sqrt{2}} = 2070;$$

bei einem Drahte von demselben Material, demselben Querschnitt und einer Länge von 1000 Kilometer ist dieselbe

Gröfse = 0,034; sie kann bei jenem näherungsweise als unendlich grofs, bei diesem als unendlich klein betrachtet werden; es pflanzt sich bei jenem die Elektricität ähnlich wie eine Welle in einer Saite, bei diesem wie die geleitete Wärme fort.

Thomson[1]) hat die Bewegung der Elektricität in einem unterseeischen Telegraphendrahte untersucht; er hat dabei die Annahme gemacht, ohne die Zulässigkeit derselben zu prüfen, dafs die Induction keinen merklichen Einflufs ausübt, und hat gezeigt, dafs dann die Elektricität sich wie die geleitete Wärme bewegt. Die hier durchgeführten Betrachtungen beweisen, dafs jene Annahme schon bei einem einfachen Drahte erfüllt ist, wenn die Länge desselben nur grofs genug ist; sie wird um so mehr richtig seyn bei einem unterseeischen Telegraphendrahte, bei dem die Bewegung der Elektricität in Folge der im Meereswasser stattfindenden Leitung erheblich verlangsamt wird.

1) *Phil. Mag. Ser. IV, Vol. II, p.* 157.