ANALYSE DE L'ÊTRE MATHÉMATIQUE
Author(s): L.-B. Guérard des Lauriers
Source: *Revue des Sciences philosophiques et théologiques*, Vol. 22, No. 3 (1933), pp. 385-431
Published by: Librairie Philosophique J. Vrin
Stable URL: https://www.jstor.org/stable/44412602

ANALYSE DE L'ÊTRE MATHÉMATIQUE

La philosophie a regard sur tout l'être, disons mieux, sur tout ce qui est. Elle observe, coordonne, organise, déduit et reconstruit ; elle rapproche plusieurs saisies partielles de la même vérité et les met en lumière l'une par l'autre; elle ramène à l'unité d'un même principe caché tout un groupe de phénomènes entrechoqués, à moins qu'elle ne nous montre en toute chose, dans l'unité du même mystère, l'unité transcendante d'une réalité qui s'impose, la permanente identité d'un problème si attaché à ce que nous sommes qu'il se retrouve à peine changé, au terme de chacune de nos légitimes curiosités, si universel et si compréhensif qu'il semble bien n'être que l'objective irradiation et la trace en nos esprits d'une subsistante nécessité.

Une philosophie serait donc incomplète et insuffisante qui se priverait d'une enquête dans le champ mathématique et ne s'efforcerait pas d'assigner à cet aspect de la réalité la place qui lui revient sur la carte de l'être. Et la mathématique serait partiellement inféconde qui, négligeant de se pousser au delà de ses propres principes vers une réalité plus ample, demeurerait close sur elle-même, ne manifesterait pas le reflet de l'intelligibilité plus haute inscrite en sa structure, se refuserait à être image particulièrement adéquate de la réalité, ajustée à souhait au besoin de l'esprit. C'est le premier point de vue, celui de l'expansion philosophique, qu'a adopté M. Le Masson (1) dans son effort si intéressant. Nous voudrions nous placer ici au second, atteignant par une recherche plus positive la même zône conceptuelle.

Qu'on nous permette tout d'abord de préciser une question de méthode, particulièrement importante dès là qu'il s'agit du contact de deux disciplines déjà constituées et qui paraissent ne se rencontrer que pour diverger tout aussitôt. L'analyse de la réalité mathématique, qu'il s'agisse d'une analyse faite du point de vue de l'être ou d'une réflexion plus mathématique doit avoir un point de départ aussi précis que possible : une désignation non équi-

(1) R. Le Masson. *Philosophie des nombres*. Paris, Desclée, De Brouwer, 1932.

voque, une description de cette réalité sont choses fort souhaitables. La question se pose donc dès l'abord : utilisera-t-on les résultats de la philosophie, résultats déjà acquis au cours d'investigations portant sur d'autres domaines, mais qui par leur nature même ne sont étrangères à aucun, ou bien essayera-t-on de saisir dans son élaboration vivante le développement homogène de la science mathématique ? Méthode à priori ou méthode analytique : c'est bien d'une appréciation de la valeur ontologique des mathématiques qu'il s'agit et c'est bien procéder à priori que de partir pour le faire d'une notion de l'être construite indépendamment de ce à quoi on la veut appliquer. On est de la sorte assuré de ne pas rompre l'unité d'un système déjà constitué et même d'en conserver toute l'armature logique qui plie devant soi une matière nouvelle. Il ne faut pas méconnaître l'intérêt d'une telle méthode, plus satisfaisante pour l'esprit par sa rigueur au moins apparente, plus didactique, plus géométrique au sens de Pascal. Poser une définition philosophique du nombre — nous laisserons en général de côté la géométrie pour nous borner aux branches plus abstraites qui font mieux ressortir la difficulté — et rechercher comment elle se vérifie dans les divers cas que propose la mathématique, accepter les uns, rejeter les autres, authentiquer tel type de raisonnement, prophétiser la stérilité de tel autre même au plan mathématique, telle serait bien l'économie idéale d'une science achevée, disons mieux d'une synthèse qui connote l'achèvement de toute science, et qui pourrait avec certitude redescendre de l'essence invisible aux propriétés manifestes.

Il est clair que ces conditions sont irréelles et qu'à employer cette méthode on risque de conclure, avec une rigueur d'ailleurs impeccable, mais sans atteindre la réalité elle-même. En l'espèce, est-on assuré de toucher la réalité mathématique telle qu'elle a cours pour les mathématiciens et non pas seulement un revers conceptuel dont la relation à cette réalité réclamerait un minutieux examen, celui-là même qui au fond est en question ? Pourra-t-on au nom de cette définition posée à priori déclarer que certains nombres sont de faux nombres et d'autres de vrais nombres et introduire au sein de la réalité homogène qu'on envisage des divisions extrinsèques, pour le moins fort arbitraires ? Est-il assuré qu'une autre définition plus compréhensive n'eût pas transmuer en vrais nombres quelques faux nombres tout en continuant à respecter le rôle formellement mathématique de chacun d'entre eux ? Est-il assuré d'autre part que les nombres baptisés vrais possèdent toute la valeur ontologique qu'on réclame à bon droit pour leur répondant métaphysique? Et quel moyen de combler ces lacunes si nous conservons cette même méthode exclusivement déductive ? Il faudrait qu'il y eût une nature du nombre et que nous fussions assurés de pouvoir l'atteindre : or ce sont là deux suppositions aussi gratuites l'une que l'autre. D'autre part ce procédé ne va pas sans une contradiction interne : car le point de départ auquel on accorde une valeur absolue n'est absolu que dans la mesure où il dépasse l'expérience sur laquelle d'ailleurs il s'appuie. Faut-il expliciter les conséquences, il sera fort opportun de tenir compte des conditions de son élaboration, lesquelles tracent une sorte de contour approximatif de la zône d'influence où il commande des conclusions certaines. L'énoncé d'un principe ne spécifie pas nécessairement, même d'une façon implicite, les conditions de son application, et la métaphysique le sait bien qui part de l'expérience, vérifie ses conclusions, trouve au contact de la vie un constant enrichissement, ne construit que pour mieux voir, et demeure plus soucieuse de fidélité que d'hégémonie. Nest-ce donc pas disqualifier sans raison la réalité mathématique que de prétendre lui appliquer une méthode qui serait en tout autre cas une méthode mauvaise et vouée à l'insuccès ? Pourquoi substituer à ses classifications propres, à ses méthodes originales, des schémas plus généraux nécessairement susceptibles de plusieurs interprétations, quitte à vider ceux-ci de leur contenu réel, en tentant de les préciser.

Ne vaudrait-il pas mieux chercher à discerner en ce nouveau domaine des nuances que l'expérience antérieure n'avait pas manifestées, et qui feront la synthèse plus adéquate à la vérité totale ? N'est-il pas plus cohérent de poursuivre, là comme ailleurs, l'analyse qui remonte des propriétés à l'être, ou si l'on veut des accidents à la substance ? La démarche se placera à un autre plan, plan déjà abstrait, mais où se retrouvent toutes nos distinctions familières. Car il n'y a pas de réalité qui soit morte, il y a une vie des nombres et des symboles qui est l'harmonie indéfinie de leur ordre; cette vie qui s'exprime et se perçoit en de multiples propriétés se distingue de l'être mathématique que nous ne saisissons pas mieux que la réalité physique au travers d'expériences sensibles, comme si l'analogie du même procédé nous conduisait au même mystère. On pourrait d'ailleurs conserver un contact plus étroit avec ce qu'on a coutume d'appeler le monde réel, car il est bien rare que les propriétés mathématiques ne soient pas l'expression, au moins approximative, de relations pesées et mesurées, et de multiples vérifications autorisent les plus larges interpolations. Mais est-il nécessaire de renouveler dans chaque cas l'étape préliminaire que constitue ce passage ? N'est-il pas plus simple et en même temps plus adéquat à notre recherche qui concerne l'être mathématique lui-même de considérer d'abord celui-ci tel qu'il se présente; d'examiner si ses propriétés, sa structure ne font pas nécessairement de lui une partie intégrante de la réalité totale, quelles que puissent être d'ailleurs ses multiples origines. Nous retenons qu'il y aura là autant de questions à examiner, et que ce serait retomber dans les difficultés que nous signalions que de prétendre appliquer sans précautions à un domaine qui leur est de soi extrinsèque les conclusions nécessaires de l'ordre mathématique, mais qu'en même temps il n'y a pas de cloison étanche qui interdise tout contact, et que nous pouvons nous attendre à retrouver comme à l'octave, plus subtiles et plus dépouillées, mais au fond elles-mêmes, l'harmonie et les tonalités dont le monde sensible est une première image. En laissant provisoirement de côté ces possibilités, nous ne pouvons d'ailleurs que gagner en précision, puisque nous nous adressons à une science aussi maîtresse de son objet qu'il est possible de le souhaiter et dont les conclusions quasi expérimentales touchant ce même objet ont une certitude absolue. C'est dans ce sens que nous voudrions présenter quelques réflexions. Nous ne nous placerons pas tout d'abord dans ce qu'on pourrait appeler les marches de la réalité mathématique. Ni les fondements métaphysiques dont elle demeure formellement distincte, ni les applications qui la dégradent en l'utilisant ne nous serviront de point de départ, mais bien la réalité mathématique telle qu'elle est. Nous avons cru utile de préciser notre point de vue, nous ne voulons pas dire qu'il soit le seul, et nous croyons en particulier que celui de M. Le Masson a son grand intérêt; il suffit de demeurer fidèle à la méthode qu'il commande comme nous l'indiquerons plus loin : choisir entre les êtres mathématiques ceux qui peuvent être susceptibles d'une information ontologique privilégiée n'est pas précisément faire une philosophie de la mathématique mais demeure légitime et fructueux. Et il est bien clair, pour qui croit à la valeur de nos enquêtes intellectuelles, que les deux points de vue ne peuvent que se recouper.

Les principes fondamentaux de l'être mathématique.

Nous tenterons d'abord une réduction de la réalité mathématique à un nombre minimum de notions simples. Commençons par les nombres : entiers, fractionnaires, irrationnels, complexes, transfinis, pour ne retenir que l'essentiel. Y-a-t-il entre ces espèces de nombres des réductions possibles ou constituent-ils autant de types distincts ? C'est ce qu'une analyse mathématique nous indiquera. Ce qui du point de vue mathématique caractérise un nombre, c'est sa relation à lui-même et à d'autres nombres, c'est un certain groupe d'opérations dont il est la mesure nécessaire. Au principe de toutes ces opérations se trouve la constatation d'une égalité ou d'une inégalité, les deux aspects ne peuvent se séparer. Mais il faut bien noter que la notion du même et de l'autre n'intervient pas ici d'une façon immédiate et simple. Elle constitue seulement le noyau irréductible de la notion plus complexe de correspondance. Une correspondance est une répétition d'identités simples, élémentaires, et si répétition inclut diversité, il ne s'agit pas encore d'une diversité ni nombrée ni ordonnée, en sorte que c'est par la correspondance que se définissent l'égalité et l'inégalité, c'est-à-dire le nombre tel qu'il est en lui-même et le nombre par rapport aux autres nombres. Quoiqu'il en soit des autres propriétés du nombre cardinal sur lesquelles nous reviendrons, c'est donc la notion de correspondance qui est son constitutif essentiel. Notons d'ailleurs que les propriétés classiques des premières opérations arithmétiques — communativité de la multiplication par exemple — ne font pas appel à un autre principe. Leur démonstration montre nettement que les correspondances utilisées à ce stade sont aussi peu que possible des *lois* de correspondance. Elles abstraient de l'ordre et saisissent en bloc le nombre qu'elles analysent.

Les nombres fractionnaires n'introduisent rien de nouveau. Il y a bien, objectera-t-on la division du continu et c'est probablement de cette façon qu'ils se sont imposés à l'attention. Mais nous nous occupons ici de l'ordre des notions telles qu'elles nous sont acquises. La division du continu ne peut-être de ce point de vue qu'une représentation. L'égalité des nombres fractionnaires avec les entiers ou de ces nombres entre eux, les opérations élémentaires sur ces nombres se ramènent aux mêmes processus que les égalités ou opérations sur les entiers. La notion de correspondance joue deux fois et comme à deux échelons : on doit considérer ici des correspondances de correspondances. Les nombres fractionnaires, de par leur définition, ne sont rien autre que les symboles condensés d'un certain nombre de correspondances, l'expression de certaines opérations élémentaires déjà connues à effectuer.

Le nombre irrationnel introduit une notion nouvelle, il est d'ailleurs à remarquer qu'on ne le définit pas positivement mais par exclusion. Il n'est aucun des nombres qu'on a déjà définis. La définition du nombre irrationnel repose bien encore sur les seules notions d'identité et de correspondance, mais tandis que le nombre entier et le nombre fractionnaire donnaient lieu à des systèmes de correspondance parfaitement achevés et déterminés en eux-mêmes, le nombre irrationnel connote un système de correspondances indéfini et qui ne peut s'achever. On montre d'ailleurs à priori que de tels systèmes existent, mais il reste que l'esprit fait un saut en appréhendant sous un mode déterminé un être que les procédés jusqu'alors définis faisaient irrémédiablement indéterminé. On pourrait encore dire que le fait nouveau, c'est l'identité du nombre irrationnel avec lui-même. En fait, dans toutes les opérations qui utilisent les nombres irrationnels ceux-ci peuvent être remplacés par des suites de nombres rationnels, mais à la condition de se borner à une approximation, à de l'indéfini. Veut-on obtenir un résultat déterminé, il faudra toujours effectuer le même passage d'un ensemble indéfini à un terme nouveau, disons un passage à la limite en réservant les différents sens de cette expression.

Les nombres complexes, les paramètres quaternioniens sont susceptibles d'interprétations plus étendues que les nombres rationnels, interprétations qui rendent plus intuitive leur signification, mais en eux-mêmes, ils ne sont que des symboles plus perfectionnés d'opérations toujours les mêmes effectuées sur des êtres mathématiques toujours les mêmes eux aussi. Ils ont donné naissance à des procédés de calcul originaux, qui se justifient par leur harmonie interne, mais qui ne définissent pas d'autres nombres. La divergence apparente des travaux de l'école française et de l'école allemande touchant la théorie des fonctions analytiques ne fait d'ailleurs que confirmer ce point de vue. Il revient fondamentalement au même de penser « fonction de variable complexe » ou « système de fonctions de variables réelles ». Une différence de présentation met en relief le parallélisme des résultats.

Quant au transfini cardinal, il semble bien lui aussi n'être qu'une combinaison réductible aux trois notions d'entier, de correspondance et de limite. Sa genèse mathématique est bien l'aboutissant d'un passage à la limite au sens le plus général que nous indiquions : passer d'un ensemble de correspondances qui ne s'achève pas et qui jouisse de cette propriété qu'il est tout à la fois impossible de définir une correspondance qui y soit la dernière et de démontrer l'impossibilité d'en établir une nouvelle, passer donc d'un tel ensemble à un terme achevé qui ne soit rien de ce qui l'approche, et qui soit lui-même, sous un mode qui d'ailleurs échappe. Le transfini ne se distingue pas essentiellement à ce point de vue de l'irrationnel.

Sans nous attarder au nombre, venons au développement mathématique lui-même. Nous ne prétendons pas faire une enquête exhaustive — pourrait-on d'ailleurs épuiser le possible ? — mais simplement vérifier dans le domaine toujours plus secourable de l'application ce que nous a suggéré l'examen des principes. La théorie des fonctions par exemple a analysé en toute façon la notion de variation. Le champ de variation tout d'abord appelle quelques remarques. Il n'est pas douteux que son origine soit le continu, mais nous devons nous demander si on peut le construire autrement. Mises à part les fonctions d'ensemble qui ne constituent qu'un cas particulier, il est bien clair qu'aucun ensemble quelle qu'en soit la puissance, ne répond à la propriété essentielle qu'on requiert d'un champ de variation continu : ne jamais inclure un couple de valeurs sans inclure en même temps toutes les valeurs intermédiaires. Les relations de grandeur ou les relations d'ordre qui leur sont associées permettent bien de distinguer ces termes mais elles ne les créent pas. Il y a là une sorte de théorème d'existence implicitement admis et qui est au point de départ de la théorie des fonctions. Il est bien vrai que dans nombre de cas on peut, sans modifier le caractère des résultats, subtituer au champ de variation continu un champ discontinu ne comprenant par exemple que des valeurs rationnelles, mais il n'est pas évident que cette substitution soit toujours légitime et la détermination d'une fonction sur la frontière de son domaine d'existence paraît bien montrer le contraire. Cette notion constitutive du champ de variation se retrouve d'ailleurs tout au long de la théorie. La mesure de la variation n'est au fond que la description précise des rapports de deux variations concomitantes. La première étape en ce sens est la définition de la continuité. Or si on insiste à bon droit sur l'insuffisance de la notion intuitive de continu, une fonction pouvant n'être pas continue qui la vérifie — ou si l'on veut l'ensemble des fonctions qui ne peuvent prendre deux valeurs sans prendre toutes les valeurs intermédiaires, se divisant en classes fort différentes — il faut retenir que la définition précise de la continuité inclut la notion intuitive. Une telle définition est une correspondance d'inégalités, mais l'élément essentiel qui intervient ici et qui caractérise la nature de la continuité qu'on définit, c'est la distribution de ces inégalités, distribution qui ne fait que reproduire le champ fonctionnel ou pour le moins s'insère dans ce champ dont par suite elle subit la loi. Les inégalités qui définissent la continuité ponctuelle ou la continuité d'intervalle doivent valoir l'une comme l'autre dans toute l'extension d'un champ fonctionnel déterminé. Que si chaque inégalité ne fait intervenir que les deux notions déjà rencontrées de nombre et de correspondance, il reste que l'ensemble de ces inégalités — et c'est lui qui importe — est nouveau et ne nous paraît pas de prime abord se réduire ni au nombre cardinal ni à la correspondance ni à la limite. Le développement de la théorie des fonctions n'a d'ailleurs fait que mettre en lumière la portée de ces notions toutes premières, et les progrès de la théorie des ensembles se sont trouvés liés partiellement au rôle qu'ils jouent relativement à la distribution des singularités. Un ensemble peut-être considéré comme une simple multiplicité de termes que leur loi de formation permet d'identifier, nous voulons dire d'individualiser : un certain ordre peut s'y attacher, qui peut aussi être abstrait. Dès là au contraire qu'un ensemble intervient, soit à titre de champ fonctionnel, soit comme ensemble de singularités, l'ordre qu'il portait comme inscrit et résorbé en soi devient capital. Il est beaucoup plus important à ce point de vue de savoir d'un ensemble s'il est ouvert ou fermé, que d'en connaître la puissance; et la mesure qui procède à la fois de la puissance et de la distribution est la forme privilégiée sous laquelle la théorie des fonctions emprunte à la théorie des ensembles.

Ceci d'ailleurs nous ramène à notre point de départ, mais nous y fait discerner un élément nouveau : l'ordre. Disons plus exactement que l'ordre s'impose cette fois essentiellement, tandis que dans la définition des opérations sur les entiers par exemple, il pouvait bien intervenir, mais à titre d'intermédiaire commode. Nous aurons d'ailleurs l'occasion de préciser ce rôle. Notons plutôt que fonctions et ensembles n'ont pas le monopole de l'ordre, et que la théorie des nombres nous propose cette même notion quoique par des conséquences plus complexes. Le passage du nombre entier au nombre rationnel, du rationel à l'irrationnel, passage qui instaure, disions-nous, un algorithme plus perfectionné, mais ne crée pas d'être nouveau, sinon à la limite, est le propre de la théorie des nombres. Et on ne voit guère comment mieux caractériser des complexités successives qui naissent et se distinguent les unes des autres que par la notion d'ordre : chaque ordre étant comme enfermé en soi, capable en soi de précisions et d'achèvement indéfinis, qui n'auront pas nécessairement leur correspondance dans les autres ordres. Et il est fort possible qu'un développement ultérieur de la mathématique mette en lumière des aspects que nous ne saisissons encore que confusément dans leur principe. On ne peut pas dire que l'ordre constitue une idée neuve — la définition aristotélicienne de la quantité suffirait à le prouver — mais la mathématique ne l'a retrouvée pour son compte qu'il y a fort peu de temps et se trouve loin d'en avoir épuisé les conséquences. C'est cependant à la lumière du peu qu'elle a fait qu'on saisit le mieux la portée de la définition abstraite.

Retenons de ces brefs rappels que la réalité mathématique semble, aussi bien dans ses principes que dans ses conclusions, se ramener aux notions fondamentales de nombre cardinal, d'ordre, de limite, de continu. Nous entendons limite au sens le plus large d'achèvement d'un ensemble d'êtres de soi indéfini, et continu au sens déjà abstrait, savoir ce dont on peut extraire un terme quelconque, intermédiaire entre deux termes donnés. Il est d'ailleurs inutile de retenir l'idée de correspondance si on retient celle d'ordre qui en marque une précision. Il se pourrait d'ailleurs que ces notions, glanées à la faveur de la seule expérience mathématique, se ramènent à d'autres encore plus simples, et c'est ce qu'il nous faut examiner. Notons auparavant qu'il n'est pas de réalité mathématique qui puisse ne faire intervenir qu'un seul de ces principes. La marche que nous avons suivie pour les déterminer ne peut laisser de doute que pour le nombre entier, mais le nombre pur que l'on dépouille de toute propriété en l'isolant des notions qui le fécondent, ce nombre mathématiquement abstrait n'est plus un être mathématique réel : c'est une entité hybride et un fantôme de nombre, un être intermédiaire entre deux domaines réels et qui n'a ni la valeur ontologique d'une substance, ni l'objectivité d'une nécessité. Rappelons que nous nous sommes placés à un point de vue un peu différent

Examinons donc toujours en nous aidant d'exemples, quels rapports soutiennent entre eux ce que nous pourrions appeler les principes premiers de la réalité mathématique. Et d'abord cardinal et ordinal, et qu'ils sont irréductibles et inséparables. La question a été fréquemment discutée de savoir si on devait ne voir dans les entiers qu'un ordre ou au contraire qu'une multiplicité : nominalisme ou réalisme, à tout le moins prolongement au cas de la philosophie des nombres de ces deux mêmes attitudes. N'y aurait-il pas là une question mal posée. Il est bien clair que le cardinal est susceptible d'une définition autonome, au moins s'il s'agit du cardinal fini. Toute la question est en effet de distinguer entre eux les divers cardinaux, c'est-à-dire de fixer, étant donnés deux cardinaux, quelle relation chacun d'entre eux soutient avec une partie — un « segment » — de l'autre. Constater une suite de coïncidences y suffit et la détermination intrinsèque que possède chaque nombre permet d'affirmer qu'on sera conduit au même résultat quel que soit l'ordre de ces comparaisons. En un mot, dès là qu'on admet l'existence, entre deux cardinaux déterminés d'un rapport déterminé, il est possible de dire quel est ce rapport sans utiliser la notion d'ordre. L'ordre s'il intervient ne sert qu'à faciliter une estimation dont le résultat est d'un autre type. Notons de plus que les difficultés nouvelles que posent les cardinaux transfinis viennent précisément de ce que le caractère déterminé de la relation n'est à leur égard ni évident ni démontré dans tous les cas. Il est très vrai que notionnellement, abstraitement le cardinal transfini demeure distinct de l'ordinal, mais l'observation de la réalité concrète ne nous permet plus de l'affirmer, et on voit moins bien en quelle mesure le cardinal transfini est une une réalité mathématique authentique.

L'ordre d'ailleurs n'est pas un nombre : qu'on y voit le sens d'une relation, ou même un reflet de la causalité dans le cas par exemple d'une loi de formation récurrente, l'ordre ne se laisse pas davantage superposer à lui-même qu'il ne se laisse distinguer en parties homogènes et si l'on ne peut dire qu'il existe de l'ordre pur, on peut du moins noter des cas où l'ordre domine tellement le nombre qu'il ne peut évidemment en dériver. Faut-il rappeler l'analysis-situs : le rôle fondamental qu'elle joue en analyse, et d'autre part l'irréductibilité qu'elle manifeste à l'égard de toute transcription numérique. Le nombre qu'on rencontre là, — le nombre de Betti — n'est plus le nombre cardinal homogène, c'est un nombre qui ne peut être que discontinu en son essence, et qui n'a de sens qu'en dépendance d'un ordre. Les groupes discontinus appellent des remarques semblables et le transfini ne serait pas le champ le moins fertile. Il semble que dans la notion de série fondamentale introduite par Cantor, l'idée de grandeur disparaisse et qu'elle ne soit qu'une trace laissée par l'ordre dans les éléments qu'il unifie. Nous constatons donc une irréductibilité absolue; le nombre cardinal paraît en un sens plus abstrait que l'ordinal, et Cantor a pu systématiser ce point de vue, mais cette circonstance ne suffit pas pour faire de l'ordre — mathématique s'entend — une quasi espèce du nombre; les opérations sur le nombre connotent essentiellement une homogénéité qui n'appartient pas à l'ordre et c'est cette homogénéité qui fonde partiellement la notion de correspondance grâce à laquelle nous avons pu donner du cardinal une définition autonome. Mais pourrions-nous inversant l'ordre de Cantor et faisant abstraction de cette homogénéité voir au contraire dans le cardinal une simple expression de l'ordre : chaque nombre étant réduit, selon l'expression de Russel, à n'être que « le successeur » de celui qui le précède. On verra mieux la difficulté d'une pareille position si l'on accumule en quelque sorte sur elle-même, et si on envisage non plus un nombre cardinal mais un ensemble de tels nombres. Il faudrait dire alors, comme M. Borel l'a remarqué pour un autre objet, que la suite des nombres entiers ne renferme rien autre que ceci « après chaque entier, il en vient un autre ». Et ceci revient à considérer toute suite, même finie, comme indéfinie en ce sens qu'elle n'est qu'une collection successive ne présentant aucune unité propre, transcendante à cette succession. Au sens très large que nous avons donné à ce mot, cela revient à refuser l'application de la notion de limite à ce cas très simple, alors qu'on l'accepte dans le cas des irrationnels, voire du transfini. Quant à refuser tous les cas, autant vaut réduire la réalité mathématique au seul nombre entier fini et Kronecker, qui y était enclin, a manié néammoins avec beaucoup d'habileté des symboles différents sans se poser à leur sujet aucune question. On ne démontre pas que l'être existe ; on y découvre une harmonie qui le fait s'imposer avec plus de force. Ajoutons, concernant notre difficulté, que réduire le cardinal à un ordre, ce serait nier complétement la notion de classe, ce que n'autorise pas une métaphysique réaliste : en quoi nous ne voyons pas un argument « ex propriis », mais au moins un recoupement qu'il est bon de noter. Retenons surtout que même au point de vue formellement mathématique le cardinal et l'ordinal sont irréductibles et que le caractère déterminé qui leur est commun et qui fait le nombre, ayant en chacun d'eux partie liée avec des propriétés opposées, on ne peut non plus penser à un nombre en soi, qui ne serait ni cardinal ni ordinal.

Voyons maintenant comment ces deux entités distinctes concourent intimement à la composition de la réalité mathématique. Quelques exemples : une fonction périodique et une fonction à point essentiel reprennent l'une et l'autre une infinité de fois la même valeur; ce qui les distingue et ce qui distingue leurs expressions analytiques, c'est la distribution de ces valeurs, ou d'un point de vue plus abstrait la diversité irréductible de deux couples d'ordres, puisque le système des valeurs de la variable intervient comme ordre type. On ne peut isoler l'ordinal du cardinal : c'est bien de valeurs qu'il s'agit, mais de valeurs organisées au sens le plus fort du mot. On sait d'ailleurs que pour une même fonction, la détermination de la valeur en un point et la détermination des singularités sont si intimement liées qu'on ne peut se placer exclusivement à l'un ou à l'autre point de vue et que la difficulté essentielle du problème est de pressentir les phases de la méthode alternée qui seule convient. Faut-il encore rappeler qu'on est fort mal renseigné sur la nature des difficultés que présente la résolution d'une équation, fort mal renseigné sur la nature de ses racines quand on ne connaît que le nombre de celles-ci; tout repose en effet sur les permutations qu'elles subissent entre elles. Là encore la quantité est tout à la fois homogène et organisée et ne retenir que l'un de ces aspects c'est détruire la réalité mathématique. Notons enfin qu'au cours d'une même démonstration, il n'est pas rare de voir un même symbole jouer alternativement les deux rôles, et c'est au fond sur cette dualité de fonctions d'un même élément indivisible que repose par exemple la démonstration du théorème de Cantor : tout ensemble parfait linéaire à la puissance du continu.

Mais cette interférence des deux notions n'est pas seulement une constatation dont on pourrait multiplier les exemples, elle résulte de leur structure et se montre nécessairement à leur origine. Les relations « plus grand » ou « plus petit » qui relèvent formellement du cardinal deviennent le fondement de relations d'ordre, dès là qu'elles se transcrivent en avant et après. Il est clair que le continu n'est pas étranger à ce passage, mais il reste légitime d'y voir un un passage et la meilleure preuve en serait qu'un même ensemble de grandeurs peut donner naissance à divers ordres. Les exemples rappelés plus haut l'indiquent assez, mais grandeur croissante et grandeur décroissante donnent le cas le plus simple. Si dès le principe les deux notions se compénètrent en telle façon que chacune conserve son originalité, c'est bien encore ce qui a lieu lorsque le cardinal, au lieu d'être le point de départ d'un ordre, en est l'aboutissant. Si la suite des entiers n'est pas seulement un ordre, il reste que nous l'obtenons tout d'abord comme ordonnée. D'une façon plus générale la méthode de récurrence dont les résultats ne sont pas nécessairement du type ordinal repose essentiellement sur un ordre, en sorte qu'il existe une récurrence transfinie comme il existe une récurrence finie, suivant au type d'ordre qui sert de base. Mais il y a des cas où l'interférence est plus profonde encore en restant toujours dans les opérations les plus simples : nous les signalons en dernier lieu, parce que leur portée n'éclate que dans leurs conséquences. Rien de plus simple semble-t-il que les relations de grandeur, et il peut paraître évident que la comparaison sous ce rapport de deux êtres mathématiques parfaitement définis conduit nécessairement à un résultat déterminé. Le cas des ensembles qui ne sont pas bien ordonnés nous détrompe. Il peut paraître encore évident que la somme de quantités déterminées est, elle aussi, déterminée. Les séries simplement convergentes donnent la preuve élémentaire du contraire. Enfin nombre de paradoxes de la théorie des ensembles tiennent à l'emploi d'une définition non prédicative, c'est-à-dire d'une définition qui fait intervenir les propriétés des êtres non encore définis, à titre de constitutifs essentiels dans la définition de l'être déjà défini. — Ou, si l'on préfère, qui emploient des termes dont la « supposition » se modifie à mesure qu'on les applique à des nouvelles classes d'êtres. On ne peut cependant pas nier que dans ces différents cas l'abstraction de l'ordre soit légitime : il paraît bien demeurer en dehors de l'ordre une certaine réalité qui n'est pas l'ordre et qui relève du cardinal. Mais des ordres différents en modifient si profondément les propriétés qu'on ne peut conclure, en toute sécurité mathématique, à l'existence de cette réalité. L'ordre n'est pas tout, mais qu'il s'agisse de collections finies ou infinies, il joue un rôle plus ou moins important, dont il est impossible de faire complètement abstraction. C'est-à-dire que la réalité mathématique se présente dans ses principes les plus abstraits comme une composition de quantité et d'ordre. Le mot composition est d'ailleurs bien impropre, car tout être mathématique est ordre et quantité, l'un et l'autre indivisiblement ; il faudrait dire quantité ordonnée et ordre s'inscrivant en quantité ; composition de notions qui se résout en une simplicité propre aux êtres mathématiques. On observera d'ailleurs que ceux-ci sont définis à une correspondance près, ou si l'on veut qu'ils sont purement de l'ordre des essences et que précisément cette même propriété appartient au même titre à l'une et l'autre notion de cardinal et d'ordinal ;

en quoi il n'y a pas une explication de leur composition, mais du moins un indice de son caractère.

L'influence de l'ordre nous est apparue surtout dans les considérations touchant l'infini, c'est-à-dire dans un cas limite et c'est la notion de limite qu'il nous faut maintenant étudier; nous avons cru y découvrir un élément nouveau, l'observation du moins nous la présente comme telle; il convient de préciser cette intuition première, de rechercher quelle est la nature de cet élément, de le ramener lui-même éventuellement à d'autres plus simples, d'examiner enfin quels rapports il soutient avec ceux de nos principes déjà acquis. La difficulté est en effet que des notions qui se présentent comme successives peuvent n'être pas réellement différentes; la diversité possible de systématisation d'une même vérité mathématique en offrirait de nombreux exemples. Pour plus de précision nous traiterons successivement de la limite finie puis transfinie. Nous ne parlerons pas de limite infinie et il convient d'écarter à ce propos une équivoque. Nous ne voulons pas parler ici de la quantité qui tend vers une limite finie ou qui augmente indéfiniment; les deux cas d'ailleurs reviennent au même, on ne sort pas, à la vérité, du fini; en ce sens qu'entre la quantité qu'on considère effectivement, que les définitions antérieures autorisent à considérer, et la quantité qui lui sert de référence et de mesure, il ne s'introduit qu'une multiplicité finie. C'est la limite elle-même, conjointement à tout l'ensemble, qui constitue le fait nouveau, c'est ce fait que de préférence nous désignerons sous le nom de limite finie ou transfinie selon que le terme est borné ou non. Cette distinction n'est pas une subtilité; il est bien quelquefois indifférent de raisonner sur une suite considérée comme actualisée ou sur cette même suite saisie dans son devenir, c'est-à-dire en termes finis, mais on sait aussi que nombre de raisonnements ne peuvent être effectués que grâce à cette réduction au fini. En outre il reste une différence de notion, capitale du point de vue qui nous occupe, différence à la confirmation de laquelle le maniement technique apporte une précieuse contribution. La limite n'est pas réductible à des opérations élémentaires sur des cardinaux, pas même à une répétiton de ces opérations, aussi loin qu'on la prolonge; dès là que la suite ne se termine pas, on n'obtient pas la limite au sens que nous avons précisé, et tous les procédés de définition — définition descriptive pourrait-on dire — ont ce commun caractère qu'on ne peut fixer une dernière opération; en d'autres termes, ils indiquent des procédés de récurrence plus ou moins complexes, toujours indéfinis par leur nature. Que ces procédés soient réductibles aux opérations sur les cardinaux, cela est bien clair ; que dans nombre de cas l'utilisation pratique de la limite ne fasse appel qu'à ces opérations, oui encore; mais la limite ne se laisse jamais saisir au moyen des opérations qui servent à la désigner. L'ordre intervient lui aussi dans cette désignation soit qu'il se réduise à une pure nécessité de classification, soit qu'il modifie essentiellement la nature de l'ensemble considéré. Mais si l'on se borne à l'ordre qu'inclut la définition, cet ordre reste un ordre ouvert, nécessairement inachevé et, de par sa construction même, susceptible d'être complété. La limite requiert donc bien un ensemble d'opérations, elle implique un ordre mais elle dit autre chose qui ne peut être qu'un terme irréductible, soit qu'on l'envisage du point de vue cardinal, soit qu'on y voit précisément l'achèvement de l'ordre.

Deux remarques à ce sujet. Cette assimilation cardinale, si on peut ainsi parler, est naturellement suggérée par la comparaison entre eux de divers termes — nous voulons dire de symboles différents jouant vis à vis du même ensemble ou d'ensembles différents le même rôle de terme, constituant avec lui une même limite. — On ne peut évidemment comparer ces termes que par leur définition descriptive, et si on établit de cette façon qu'ils diffèrent infiniment peu, on conclut en vertu de leur caractère déterminé qu'ils sont identiques. En fonction de cette identité on les considère comme abstraits de l'ensemble auquel ils sont normalement associés, et la seule réalité qu'ils puissent conserver dans ces conditions est bien du type cardinal. Nous retrouvons donc une confirmation négative de ce que nous avions déjà deviné en écartant les pseudo-limites : la limite est caractérisée en sa teneur originale, non par la nature du terme qui peut être atteint diversement, mais bien par la conjonction du terme et d'un ensemble, sans lui inachevé. Simple nuance d'ailleurs, et après avoir insisté en débutant sur le processus inclus dans la limite, il était juste d'analyser de plus près le terme de ce processus : limite-processus et limite-terme ne faisant naturellement qu'un. Notons d'autre part que si l'ordre ne rend pas compte de la limite, il nous conduit cependant plus près que ne ferait le cardinal. L'homogénéité que nous avons reconnue au cardinal lui interdit tout dépassement essentiel. L'ordre comme tel n'est borné par rien et tous les ordres distincts sont pareillement distincts entre eux; ils sont semblables de par les éléments qui les supportent, non pas comme ordres. La discontinuité est ici absolue, et de ce point de vue d'ailleurs très négatif, un ordre nouveau, cela ne fait qu'un ordre de plus ; les ordres différents qui interviennent dans la désignation de la limite sont distincts de cette façon ; et l'ordre nouveau qui les dépasse s'en distingue aussi pareillement. En bref, la discontinuité propre à l'ordre se comporte d'une façon homogène en regard de l'existence ou de la non existence de la limite.

La question demeure néammoins de l'existence de cet ordre nouveau, existence indémontrable, puisqu'irréductible comme nous venons d'y insister aux nombres qui servent à la décrire. L'intuition qui révèle cette existence nouvelle n'est pas mystérieuse ; si du moins on la considère comme donnée, c'est l'intuition du continu. Elle est bien dans le prolongement de l'ordre, en ce sens que le continu est conçu comme le support de tout ordre, qu'il inclut le terme qui concerne la limite, comme il inclut tout autre terme et qu'en une façon il est un temps logique antérieur à l'ordre. Nous verrons plus loin comment cette notion peut s'élaborer, ce qu'il importe de retenir ici c'est que le continu n'intervient pas d'une façon extrinsèque. Il est bien clair que les êtres géométriques se réduisent en définitive à des relations de grandeur, de mesure ou d'ordre qui ont une réalité abstraite, indépendamment de la modalité géométrique, spatiale, qui les rend plus accessibles. On peut ici faire abstraction du continu ; on conserve cependant une réalité mathématique, celle-là même que les êtres géométriques renferment de plus réel. Aussi n'avons nous pas mis en avant cet argument, quand nous avons parlé du champ de variation d'une fonction. Par l'intermédiaire de la limite, et d'abord de la limite finie, le continu intervient subrepticement dans tout être mathématique, à moins qu'on ne veuille se borner au seul nombre entier fini. Et il ne s'agit plus d'une propriété surajoutée, mais d'un constitutif essentiel. Il est inutile de revenir ici sur les antinomies maintes fois signalées entre le continu et le discontinu. Notions irréductibles et toujours jointes, qui composent entre elles un peu comme le cardinal et l'ordinal. Le continu d'ailleurs est intervenu à deux reprises : à propos du champ de variation d'une fonction, et à propos de la limite ; de notre point de vue abstrait nous pouvons ne retenir que la limite, à titre de notion fondamentale. Le continu en constituera simplement un fondement implicite. Nécessité postulée par l'existence d'un terme intermédiaire comme tel, ou, si l'on veut, de tout intermédiaire; il se confond bien avec la notion de champ de variation. Ceci précise d'ailleurs la véritable nature du continu en question : c'est une nécessité pure, quelles que soient d'ailleurs les images qui sont au point de départ de sa genèse psychologique. Nécessité qui n'est pas l'ordre encore qu'indivisible comme lui, qui n'est pas la limite encore qu'elle en soit le fondement, et qui permet le passage de l'un à l'autre quoique distincte par essence de l'un et de l'autre.

La limite transfinie nous conduit à des résultats semblables; elle se définit ou plutôt se désigne, elle aussi, au moyen d'une suite indéfinie et ordonnée ; qu'elle ne se réduise ni aux termes de cette suite ni à leur ordre, les raisons indiquées pour la limite finie le montrent semblablement. Il y a toujours le même saut de l'indéfini au défini, quelle que soit d'ailleurs la nature propre du défini. Mais le cas transfini rend plus sensible un caractère que l'analyse seule avait pu découvrir dans la limite finie. L'intuition du continu nous est devenue si familière qu'il faut presque un effort pour voir dans la limite finie quelque chose de nouveau et que l'originalité du procédé frappe davantage que son résultat. Notre pouvoir d'actualisation ne s'étend pas aussi facilement à l'infini et la limite transfinie, le nombre transfini cardinal ou ordinal, retient plus l'attention que la succession indéfinie d'opérations qui le décrivent : c'est cependant une pareille succession qui était la dominante psychologique dans le cas de la limite finie. Il n'y a évidemment là qu'une considération assez subjective ; elle met du moins en relief la distinction de la limite transfinie et du cardinal ou de l'ordinal. Nous voulons dire que si la limite finie trouve un fondement et un correspondant dans le continu, la limite transfinie ne peut se concevoir que comme n'étant rien de ce qui sert à la définir, c'est-à-dire sous un mode purement négatif. Si grand que soit le nombre entier N, il en existe un plus grand; si rapidement que croissent les fonctions f_n d'une suite donnée, il existe une fonction qui croît plus rapidement que toute fonction de la suite. Les conséquences du point de vue de la limite transfinie seraient : la puissance de l'ensemble des nombres entiers, dans la *mesure ou cet ensemble existe*, ne peut être un nombre entier; la puissance de l'ensemble des suites croissantes, *dans la mesure où cet ensemble existe*, ne peut être infini, dénombrable. Il faut donc admettre l'existence de la limite comme un fait nouveau : après quoi les démonstrations nous fixent, mais négativement seulement, sur la nature de cette limite. Le parallélisme avec la limite finie est complet : la seule différence est que dans le cas transfini, nous cherchons en vain un support de la réalité nouvelle; le continu ne sert ici de rien; il devient comme indéfini avec le transfini, or c'est précisément un terme défini que nous cherchons à appréhender.

Un autre aspect de cette différence, c'est que l'opposition apparaît plus nette, dans le cas transfini, entre le processus limite et la limite elle-même. Nous n'arrivons à définir de nouveaux transfinis que parce que nous considérons à priori comme distinctes la suite ordonnée et la réalité de type cardinal qui lui est liée. Transposition du cas fini, cela est bien évident, mais nous n'insistons pas pour le moment sur cet aspect plus psychologique de la question. Et nous n'avons indiqué cette nuance que pour souligner qu'elle ne doit pas donner le change en faisant conclure à une opposition irréelle entre les deux cas. La limite transfinie reste d'un maniement plus délicat parce qu'elle n'a pas de représentation claire — du moins à notre sens — mais cela ne suffit en aucune façon à infirmer sa réalité. La limite transfinie se présente normalement au cours du développement mathématique et bénéficie de la note propre de réalité à laquelle nous verrons que ce développement a droit. Elle est la conjonction originale d'un terme et d'une suite réductible au cardinal et à l'ordinal et, comme la limite finie, elle est notionnellement plus voisine de l'ordre, dont il faut voir une confirmation nouvelle en ceci que les cardinaux transfinis successifs sont définis au moyen des ordinaux. Terminons ces considérations sur la limite en indiquant une image qui met bien en relief son caractère. Nous voulons dire les fractions continues. On sait le rôle qu'elles jouent dans les démonstrations sur la puissance des ensembles, mais il y a plus. Chacun des nombres qui figurent dans une fraction continue ne possède sa fonction opératoire qu'en liaison avec tous les termes qui le suivent. Dans une progression il y a bien une infinité de termes, mais chacun d'entre eux est actualisé pour son compte ; on peut commencer une opération, de sommation par exemple, au premier terme. Ici au contraire, c'est par le dernier élément qu'il faudrait commencer, s'il y en avait un. Le reculer indéfiniment, c'est rendre l'opération impossible si on demeure dans le même ordre, encore qu'on puisse l'effectuer avec un degré d'approximation arbitraire. C'est très exactement le type de détermination de la limite, qu'elle soit finie ou transfinie.

Nous sommes donc autorisés à retenir comme constitutifs essentiels de la réalité mathématique : le cardinal, l'ordinal, la limite, celle-ci impliquant le continu comme l'indivisible nécessité d'un support. Ces principes, irréductibles entre eux, sont cependant logiquement ordonnés ; nous ne pouvons évidemment pas accorder la priorité à la limite qui met en œuvre et le cardinal et l'ordinal, mais la question se pose touchant ces deux premiers éléments. Rappelons que nous nous plaçons jusqu'ici à un point de vue exclusivement mathématique et que d'autre part notre tentative d'enquête directe concernant une priorité du cardinal ou de l'ordinal n'a pas abouti. Il ne nous reste que d'examiner laquelle de ces notions possède le plus d'intelligibilité mathématique, ou laquelle, jouant un rôle plus fondamental, se retrouve par là même en plus de branches de la science. Les quelques exemples que nous avons cités nous inclinent à accorder le primat à l'ordre ; il est inutile de chercher à rendre complète une liste que les enquêtes les plus modernes allongent chaque jour. Rappelons seulement que la méthode de récurrence — qui n'est réductible au syllogisme que dans le cas fini, ou infini au sens précisé plus haut — relève essentiellement de l'ordre, chaque terme ne pouvant être défini qu'après ceux qui le précèdent. Argument subjectif sans doute, mais qui peut être éclairant et qui nous fait rejoindre une considération plus imporante. La priorité de l'ordre serait en effet établie d'une façon décisive si nous constations qu'il joue le rôle essentiel, non seulement vis-à-vis de tels ou tels êtres mathématiques, mais vis à vis de la limite qui est l'un de nos trois principes constitutifs. Or c'est bien ce qui a lieu. Non seulement la récurrence intervient dans la désignation de la limite, non seulement dans un grand nombre d'applications on peut remplacer la limite par une suite finie et ordonnée, mais le continu qui a partie liée avec la limite est beaucoup plus près de l'ordinal que du cardinal; il ne remplit son rôle de support d'un ordre, il n'est cette nécessité requise à la limite, il n'est intermédiaire de l'un à l'autre que parce qu'il participe leur type commun beaucoup plus que celui du nombre. C'est ce qu'indique, comme chacun sait, l'étude relative des divers continus envisagés dans leur représentation géométrique, ou réduits à de purs champs abstraits. Sans plaider aucune cause nous ne pouvons pas ne pas remarquer que de bons auteurs ont défini la quantité « ordre des parties dans le tout », il est intéressant de constater que l'effort d'une technique pour faire retour à ses principes se trouve corroboré par une vue extérieure moins authentiquement démonstrative, mais dont la valeur d'intuition ne saurait être négligée.

Ainsi donc, toute réalité mathématique est construite de trois notions : l'ordinal, le cardinal, la limite. Et ces trois notions ont un ordre, non plus l'ordre auquel pouvait faire songer le continu mais un ordre plus dépouillé, dernière expression de l'essence. Qu'on ne songe d'ailleurs pas davantage à une juxtaposition, et à une quantification de ces éléments dans la construction d'un même être qui est tout entier ordre, tout entier nombre, tout entier détermination en lui-même, quoiqu'il puisse transparaître en sa définition, et qui est tout cela indivisiblement, réellement dans toute la mesure où lui-même est réel. Au demeurant, c'est une précise simplicité qui enveloppe l'infinie richesse de ces distinctions, et c'est pourquoi nous n'inclinons pas à déterminer la situation ontologique des réalités mathématique par une voie exclusivement analytique, qui assignerait à chaque type mathématique un répondant extérieur et une base ferme. On ne peut évidemment sans aphorisme parler de vie mathématique, nous écartons toujours autant que possible le point de vue psychologique, mais il paraît bien qu'il y a dans la structure des êtres qu'elle anime une unité qu'on ne peut briser ; on a bien des morceaux, on n'a plus la véritable réalité mathématique dynamique.

Avant de poursuivre notre enquête à un plan plus philosophique notons que le nombre entier cardinal — et c'est ce qui donne, pensons-nous, à la tentative de M. Le Masson sa pleine valeur — le nombre le plus familier renferme en soi et récapitule le triple caractère de la réalité mathématique. Il ne s'agit évidemment pas de retrouver ces caractères identiquement les mêmes, les irréductibilités que nous avons constatées, le disent assez. Mais il semble bien que le nombre cardinal, dans ses propriétés les plus simples dévoile déjà pour peu qu'on les connaisse, les mêmes notions. Cela est d'ailleurs deux fois normal, puisqu'il s'agit de propriétés mathématiques subissant par conséquent la loi commune, et, qui plus est, de propriétés de l'un des principes. Le nombre cardinal, tout d'abord, vérifie la notion de nombre dont il est comme le prototype; il est détermination globale et multiplicité terminée, achevée, détermination que sa distinction d'avec les autres cardinaux rend sensible, mais qui lui est bien intrinsèque et qui donne de ce point de vue une image anticipée de l'achèvement qui caractérise la limite ; disons même que c'est le parallélisme des deux cas qui a introduit la limite dans le domaine mathématique, et, dans la mesure même où nous considérons ce domaine non plus comme l'objet direct de notre analyse, mais comme le point de départ d'une enquête plus large, il paraît bien légitime d'assouplir les notions que nous avons rencontrées, de les rendre moins étroitement dépendantes, quoique non séparées du fait mathématique. Et cette détermination, cette terminaison n'apparaît que comme une propriété, car elle entraîne le plus et le moins, lesquels peuvent être attribués au nombre, au contraire de ce qui a lieu pour des éléments constitutifs. On peut encore remarquer que plus et moins impliquent une composition numérique qu'il serait contradictoire de faire intervenir à titre d'éléments du nombre lui-même. On s'exprimera donc plus justement en disant du nombre qu'il est un degré déterminé de composition, ou, d'une façon imagée, une condensation originale du même et du divers.

La détermination est un attribut essentiel, mais n'est qu'un attribut. Et il en est un autre : l'ordre. Le procédé le plus normal de genèse des nombres met en évidence leur relation à l'unité : c'est bien déjà une manière d'ordre, et ce fait a, pendant très longtemps, si vivement frappé l'attention que le zéro n'a acquis qu'assez tard droit de cité en mathématique, à quoi d'ailleurs il peut y avoir d'autres causes sur lesquelles nous reviendrons. — Mais les propriétés élémentaires d'un nombre relativement à la division fournissent autant d'ordres qui pourraient pareillement être utilisés. L'ensemble de ces groupements qui demeure par essence une propriété confère au nombre une qualité, non pas sans doute une qualité au sens métaphysique, mais une qualité au plan du nombre, quelque chose qui tout à la fois laisse le nombre plus indépendant et le pénètre plus intimement ; cette qualité c'est l'expression intelligible de la pure idéalité de ces systèmes assemblés, tout ce qui, en un mot, dans le nombre, est bien du nombre, mais sans être quantité, et qui est trop simple pour se prêter à une définition nouvelle. Le nombre nous apparaîtrait donc comme une multiplicité potentielle d'ordres, tombant sous le même degré de composition. Mais ces ordres divers auxquels se prête le nombre ne sont rendus possibles que par une autre propriété que nous avons déjà signalée incidemment et qui paraît si évidente qu'on n'y prête à peine attention : l'homogénéité. Les éléments du nombre, à tout le moins ceux qui interviennent dans un même ordre sont interchangeables et le nombre n'autorise simultanément une pluralité d'ordres que parce que cette propriété s'étend en fait à tous ses éléments. Comment enfin concevra-t-on cette homogénéité sinon sous la figure d'un continu, d'un support qui subit une division homogène, ce qui nous amène à compléter notre définition du nombre : multiplicité potentielle d'ordres dont les éléments homogènes tombent sous un même degré de composition. Nous y retrouvons, quoique distribués autrement les caractères de la limite et de l'ordre, et c'est ce qui nous autorisera dans les pages qui vont suivre, à considérer le nombre cardinal comme le type et le principe au sens le plus fort de la réalité mathématique. Sauf mention expresse, c'est en ce sens général que nous l'entendrons : il est toujours plus aisé de se référer à un objet précis, mais il va sans dire que notre analyse portera sur tous les éléments constitutifs de la réalité mathématique. Ils trouvent dans le cardinal fini une réalisation privilégiée, mais notons qu'on pourrait à cette même fin, utiliser également le cardinal transfini, et par conséquent le cardinal comme tel. Nous trouverions encore dans ce nombre et la détermination et l'homogénéité —

qu'intègre sa définition même — et d'autre part une multiplicité d'ordres que décèle l'arithmétique des cardinaux transfinis. Toutes propriétés qui ne doivent pas étonner, puisqu'on ne les obtient en toute sécurité que comme extrapolation des propriétés correspondantes des cardinaux finis. Ce passage ne va d'ailleurs pas sans modifications notables, mais qui demeurent étrangères au point de vue qui vient de nous occuper. Le réel mathématique ainsi ramené à ses principes, aussi bien à l'abstrait qu'au concret, procédons à une seconde enquête, moins exclusivement technique, touchant la valeur et la portée de ces principes.

Nécessité d'un fondement réel.

Ce que nous avons appelé sans autre précision réalité mathématique n'est-il un fait objectif que pour une enquête psychologique dont le donné est moins le résultat mathématique considéré en lui-même et comme séparément, que ce même résultat en étroite liaison avec l'ensemble des démarches intellectuelles qui le commandent, — ces démarches elles-mêmes étant envisagées non comme des méthodes dont on ne saisit la portée que dans leurs résultats, mais comme les mouvements aux mille nuances d'un esprit qui cherche et contemple le vrai. Les relations mathématiques n'ont-elles de réalité que dans l'esprit du mathématicien, ne possèdent-elles qu'un être pensé, n'ont-elles pour critère existentiel que l'unanimité ou même simplement la pluralité de suffrages qui constituent le niveau mathématique moyen ? Reflèteraient-elles, à leur plan un aspect de la contingence universelle, serait-ce même l'échelonnement nécessaire de cette contingence qui les intégrerait dans une réalité plus ample, et ne paraîtraient-elles jouir d'une nécessité privilégiée que parce qu'elles ne font qu'exprimer d'une façon particulièrement adéquate, dans des résultats particulièrement simples, les lois de l'esprit humain ? Ou bien le développement mathématique n'est-il que la dégradation, la première saisie plus facile et plus assurée, mais inachevée et approximative d'une réalité objective qui, mieux pénétrée, exclurait toute contingence en réduisant à des découvertes les apparences de choix, à des inclusions simples le détour des démonstrations ? Et, s'il en est ainsi, à quelle sorte de réalité faut-il songer, dès là que la continuité dans le degré de nécessité ne paraît plus pouvoir nous aider, et que nous ne touchons ces êtres que par une abstraction superposée, disons abstraction au second degré, parce qu'elle porte sur des éléments qui déjà sont abstraits ? Fidèles à notre méthode, nous nous tiendrons aussi près qu'il est possible du fait mathématique, ce qui ne pourrait d'ailleurs infléchir notre résultat que dans la première des deux directions, disons pour faire bref de l'empirisme pur. Or, s'il est vrai que toute l'essence de la réalité mathématique c'est d'être l'expression d'une loi de l'esprit, une construction mettant sans doute en œuvre des éléments qui ne sont pas sans rapport avec le reste du monde réel mais qui comme construction, n'est que l'empreinte d'une loi de la pensée, nous devons constater un parallélisme constant entre les tendances de l'esprit et la structure des objets qui marqueraient le terme de son activité. Il faudrait même dire non pas parallélisme mais identité, puisqu'on pose des principes que rien ne distingue l'un de l'autre, et que d'autre part l'accord de plusieurs pensées ne confère pas nécessairement à leur commune expression d'objectivité supplémentaire.

Quelle est donc la loi de l'esprit, et nous nous bornerons encore ici au domaine mathématique. Si l'opposition que nous voulons mettre en évidence entre la tendance dominante de l'élaboration intellectuelle et la structure de l'être mathématique s'estompait, le contact aurait lieu premièrement au sein de la recherche mathématique. Or, cette tendance en mathématique, paraît bien être une tendance vers l'unité. Observons tout d'abord une loi générale d'économie ; les démonstrations ont une vie dont on ne peut jamais dire si elle est achevée. Et cette vie c'est une constante simplification : économie des hypothèses, économie des subdivisions logiques, économie des calculs, en un mot loi du moindre effort, qui mérite sans doute d'être retenue, mais qui ne traduit cependant pas encore le fond des choses. Cette première mise au point effectuée, diverses démonstrations d'une même proposition coûtent sensiblement le même labeur mais elles se distinguent, et se supplantent successivement, en vertu d'une autre économie, économie organique pourrait-on dire : il ne s'agit plus d'accourcir ou de simplifier matériellement, mais de faire appel à un moindre nombre de notions, lesquelles doivent être par conséquent plus explicatives, plus près des principes, ou à l'opposé plus évoluées et constituant l'armature d'une synthèse plus vaste qui a valeur démonstrative et qui s'impose parce qu'elle est une explicitation plus universelle sinon exhaustive des principes eux-mêmes. En sorte que chaque étape de la vie d'une démonstration manifeste un progrès de l'unité, quelqu'en soit le pôle d'organisation. Des liens cachés apparaissent qu'une analyse, suffisante pour le cas, mais également bornée à ce cas, n'avait pas montrés. La théorie des fonctions analytiques ne donne pas de règles de convergence des séries, mais elle rattache cette dernière question à une autre plus générale, elle en supprime du moins les apparentes anomalies. Ce même phénomène s'étend à la science dans son ensemble. Réduction de la géométrie à l'algèbre, géométrisation de l'analyse, géométrie algébrique et théorie des fonctions, théorie des idéaux et théorie des fonctions ; il n'est pas de branche qui, passée la toute première phase de son développement, ne trouve le meilleur de sa fécondité dans l'application de ses propres résultats à des domaines qu'on croyait lui être étrangers. C'est-à-dire que la diversité est toujours instable et qu'elle ne fait que concourir à une unité plus compréhensive. Mais les grandes rencontres auxquelles nous venons de faire allusion sont le fruit de trop de labeur pour être bien fréquentes, et l'on trouvera de cette unité un signe plus sensible. Nous voulons dire que les résultats sont exposés à se perdre qui ne s'insèrent pas à la place qui les attendait, il y a un ordre qu'ils concourent à faire découvrir mais qui est à son tour la condition sine qua non de leur conservation. En sorte que non seulement le progrès de la science s'exprime par ces synthèses toujours plus vastes, mais la possibilité de progrès paraît bien être marquée à chaque instant par la puissance actuelle à synthétiser. La multiplicité d'éléments ainsi réabsorbés montre la place laissée vide et indique les hypothèses à priori qui ouvrent les pistes fructueuses. La science est une, non seulement en son terme, mais encore dans son devenir. L'esprit qui sait, comme l'esprit qui cherche, goûte là une intime évidence qui est le reflet conscient de sa propre activité.

Cette tendance cependant, si elle est dominante, n'est pas la seule, et il le faut bien puisque l'unification se poursuit, enrichissante dans la mesure où elle aboutit, possible autant qu'une diversité renaissante en prévient l'achèvement. Toute la question de cette unification tient donc en une double condition : l'existence d'un point d'application, l'activité réductrice de l'esprit, activité qui aboutirait d'ailleurs toujours si l'esprit ne rencontrait d'autre nécessité que celle de sa propre loi. Nous reviendrons sur ce point; écartons une autre difficulté : ramener le multiple à l'un ne va pas sans la démarche inverse; et pourrait-on dire que la science progresse véritablement si ces unifications et élargissements progressifs la simplifiaient jusqu'à ne retenir aucun résultat particulier, si cette tendance à l'unification ne s'accompagnait d'une vue assez nette des résultats qui en sont le point de départ? Peut-on dire dès lors que la réduction à l'un soit bien la dominante, n'y a-t-il pas en fait une composition irréductible et complexe de deux attitudes? Notons qu'il est bien possible en effet de passer insensiblement d'une vue à l'autre : de tel résultat à la proposition qui l'explique ou d'une loi générale à ses applications. Mais il y a un sens privilégié, et le signe en est qu'on ne retient de ces résultats particuliers que ceux-là seuls dont on présume que leur contribution au développement de l'unité n'est pas encore entièrement explicité. On considère certaines fonctions en ce qui concerne les singularités; une telle préoccupation serait dénuée d'intérêt touchant l'intégration, cas assez préviligié dans lequel on a des théorèmes valant pour des classes de fonctions. La généralisation est ici une sorte d'unité en étendue, et si l'esprit est toujours en quête de réussites à ce point de vue, c'est précisément parce qu'il éprouve le besoin d'un repos qui ne peut être que dans l'unité. Le cas particulier comme tel s'il est actuellement retenu est voué à être abandonné, il est toujours sujet à caution. En sorte que si on peut parler d'un dynamisme univoque, et d'ailleurs comment l'oser en un domaine aussi divers et aussi riche, il reste cependant globalement, que c'est vers plus d'unité, par des généralisations toujours plus organisées, que s'achemine la pensée mathématique. Sans sortir de notre domaine, nous pouvons conclure que l'esprit en mathématique se repose dans l'un, et que laissé à lui même, ne subissant pas d'autre nécessité que celle de sa propre loi, il doit normalement atteindre le point de son repos. Cette tendance caractéristique d'ailleurs ne saurait faire acception de la nature des oppositions qui peuvent la tenir en échec. C'est bien sur toute diversité qu'elle s'exerce et entend s'exercer. En fait les branches moins avancées sont celles pour lesquelles la réduction reste à faire, mais le cas paraît contradictoire d'un problème qu'on envisagerait comme définitivement résolu et qui laisserait place à une analyse quelle qu'elle fût. Aussi bien, puisqu'il s'agit de saisir une loi de l'esprit, nous devons au moins lui reconnaître cette forme d'existence que possèdent les lois et qui a nom : uniformité.

Or si nous revenons à la réalité mathématique telle qu'elle se présente au terme de la première partie de notre enquête, nous y constatons une irréductible dichotomie. Là aussi nous avons tenté — nous tenant il est vrai plus près des principes — de réduire à l'unité le minimum de notions, composantes de l'être mathématique. Mais cette réduction n'a pas abouti, sinon à nous montrer une composition si intime que des éléments inséparables en altèrent à peine la simplicité. La science, nous le notions il y a un instant, s'efforce vers une synthèse qui s'approfondit sans cesse, l'esprit n'est pas assujetti en ses démarches à suivre toujours le même sens logique. La science est plus ou moins construite et n'est jamais achevée, l'esprit tend à se fixer sans jamais y atteindre, tout cela n'est précisément que la conséquence normale et le signe de la dualité de principe que nous avons observée. L'intelligence de ces signes peut être plus délicate dans la complexité vivante de la recherche, mais l'analyse objective nous prévient de toute erreur d'interprétation. Insistons un peu. Il y a bien des synthèses qui se font, qui constituent les étapes et les progrès que le mathématicien constate, mais, à l'arrière-plan de celles-ci et comme en dessous, d'autres synthèses ne se font pas; non certes qu'on ne les tente pas, mais les éléments en renaissent toujours. Chaque progrès de l'analyse du continu a mieux montré comment il est irréductible au discontinu, mais n'a pas fait faire un pas à une réduction hypothétique ; un problème se précise qui demeure identique en son fond et qui semble devoir le demeurer. Il n'y a pas tellement loin du paradoxe de la diagonale du carré à la définition du nombre $\sqrt{2}$ par une conure. De même du nombre et de l'ordre : pcints de vue d'abord à peine distingués et dont a pu penser qu'ils se prêteraient aux ıigueurs d'une classification logique. Il n'en est rien, et celle des deux définitions mathématiquement entendue qu'on veut supposer dérivée se réintroduit généralement dans la définition supposée axiomatique. Pas d'autres moyens de nommer un ordre abstrait que de faire appel à des nombres; qu'il s'agisse d'unité, de liaison, de relation ou de toute autre réalité, voire de tout autre signe; il faudrait toujours passer au nombre pour introduire une sorte de coupure, une singularité qui caractérise l'ordre et qui le distingue de tout genre homogène. On pourra bien, comme le fait M. Gonseth, définir à partir de l'ordre élémentaire que représente la suite des nombres, des ordres plus complexes. On peut même définir une axiomatique de l'ordre et une axiomatique du nombre; ces démarches qui du point de vue de M. G. sont légitimes et fort intéressantes ne font que confirmer l'impossibilité de définir l'ordre indépendamment. D'autre part le nombre ne devient mathématiquement fécond que s'il est un élément d'une suite nombrée, ou s'il est le symbole résumé d'une telle suite. En sorte qu'il paraît bien s'agir non d'une diversité dynamique, pure relation à une unité qui le devrait absorber complètement, mais d'une diversité statique qui peut être une autrement, c'est-à-dire au delà de la mathématique, mais qu'aucun progrès ne fera plus une au plan où elle est diversité. La simple observation du développement mathématique indique donc, dans deux phénomènes d'espèce différente, deux compositions qui ne peuvent être de même espèce; l'une transitoire, désaxée par chaque fait nouveau, matière de l'unité type qui est l'idéal achevé de la science, l'autre permanente ou mieux sans cesse renaissante, car elle subit bien la répercussion de cet entraînement général de la science, elle s'exprime autrement mais elle demeure essentiellement inchangée, et de ce point de vue très précis l'analyse mathématique doit se borner à un econstatation privée d'efficacité.

Notons d'ailleurs que si la mathématique ne peut guère donner de renseignements sur le pourquoi et la nature de cette composition, l'observation de cette composition et de ses caractères est un fait mathématique. Non sans doute un fait comme les autres : mais il est l'aboutissant, plus précisément l'un des aboutissants de certains ensembles convergents de faits immédiatement mathématiques. Ce qui le distingue, c'est d'être un fait conclu, non un fait démontré. Du point de vue mathématique, c'est un fait empirique : on ne démontre pas que les antinomies continu-discontinu, ordre-nombre, soient insolubles; mais la façon dont se présentent toutes les enquêtes orientées vers ce but, la nature de leur résultat font de l'irréductibilité un fait qu'on regarderait comme certain en toute autre discipline et que la seule rigueur mathématique contraint de n'envisager que comme très probable. Mais cette nuance suffit, il y a une double nécessité que l'esprit distingue à la façon même dont il la subit. Il y a la diversité qui s'impose nécessairement comme la condition du progrès, mais que le raisonnement mathématique maîtrise parfaitement; du point de vue psychologique qui pourrait faire difficulté, c'est une nécessité dont l'esprit se sert et qu'il soumet à sa loi d'esprit : loi d'unification et de synthèse partout constatée soit qu'elle touche son but, soit qu'elle demeure une tendance. Et il y a la composition irréductible qui peut être le fondement de la première, mais dont l'activité mathématique ne peut rendre raison adéquatement, nécessité que l'esprit exploite, mais que toujours il subit. Nécessité empirique, hors de l'intelligibilité mathématique et qui par là même ne peut être le fruit de la pure pensée s'exerçant en ce domaine. Et c'est une première partie de la réponse à la question que nous posions : l'économie interne de la réalité mathématique rend impossible de ne voir en elle qu'une pure création. Elle conserve toujours par un mécanisme qui reste à préciser la trace d'une inaliénable diversité, opposition fondamentale aux lois de l'esprit mathématique ramassées en leur tendance dominante à l'unification. Nous ne faisons qu'aboutir dans un cas fort circonscrit à une conclusion qui dépasserait notre enquête. Il n'est pas possible si loin qu'on pousse l'analyse, de morceler l'objet de la connaissance en éléments qu'elle puisse expliquer. Le cas mathématique lui-même malgré la simplicité des notions, malgré leur perméabilité particulièrement grande à l'investigation, n'autorise pas cette arbitraire reconstruction si elle se prétend exclusive. Il ne paraît pas y avoir d'éléments mathématiques, nous voulons dire d'êtres intervenant effectivement en mathématique si réduits qu'on les suppose, qui ne recouvrent, en leur simplicité même une composition dont la nature est extra-mathématique. En d'autres termes, l'être mathématique fait appel par ses principes — et par tout ce qu'il est puisque tout au cours de son développement il leur demeure parfaitement homogène — à autre chose qui n'est pas lui et qui n'est pas l'esprit, quelque chose auquel il tire cette réalité intermédiaire si particulière qui le caractérise, dont l'activité d'esprit n'est qu'une composante fort inadéquate. Il nous faut préciser quel est ce quelque chose avant d'analyser enfin la nature des rapports de l'être mathématique et de ses fondements, c'est-à-dire la note constitutive propre de cet être.

Nature du fondement réel.

Le problème véritable ce serait donc d'assigner un fondement suffisant à cette composition une : ordre, nombre, limite que nous avons identifiée comme constituant l'essence de tout être mathématique et il faudrait ne pas séparer ces trois éléments, sous peine de détruire l'objet que l'on observe, de le réduire à un schéma qui n'est pas la réalité. Mais si la chose était possible, elle deviendrait inutile : une intuition également simple supprimerait la question posée. En fait, c'est surtout d'une diversité qu'il nous faut rendre compte ; et sans éliminer radicalement ceux des éléments dont nous ne traiterons pas explicitement, sacrifiant ainsi à l'unité, nous ne devons pas craindre d'examiner chacun d'eux séparément et de le mettre en relation avec les entités qui paraissent le plus propres à l'expliquer sans insister sur les conditions d'existence de ces dernières; il y aurait là une question ultérieure. L'unité d'ailleurs, nous l'avons vu, est une caractéristique trop profonde de l'activité intellectuelle mathématique pour qu'elle nous mette en peine. Qu'elle soulève d'autres problèmes, cela est clair; nous nous bornons à notre objet. Nous pouvons cependant pressentir une diversité dans les fondements mêmes que nous recherchons. Si le cardinal, l'ordinal et la limite composent, et si à la rigueur il était possible de voir dans l'activité créatrice de l'esprit la cause de cette composition, il reste que de soi ils sont essentiellement distincts. Cette distinction se trouve mise en évidence par un procédé qui conquiert peu à peu le domaine de toutes les sciences et dont le nom seul est nouveau : procédé différentiel qui tente de saisir les notions aux points particulièrement sensibles qu'elles présentent en leurs variations. Le nombre cardinal, composition homogène peut de ce chef varier en demeurant lui-même — nous voulons dire non pas en demeurant tel nombre, mais en demeurant nombre — et ce qui caractérise cette variation, c'est le terme même en lequel elle consiste; l'ordre, lui, se signale comme étant rebelle à tout traitement différentiel. Quant à la limite, la notion nouvelle qu'elle implique, c'est, nous l'avons vu, le continu; et le continu c'est une indétermination absolue et pour ainsi dire la différentielle à l'état pur. En sorte que les différences propres de nos trois notions fondamentales se révèlent non pas seulement distinctes, mais opposées. Si donc nous recherchons dans des entités réelles leur correspondant et leur origine, nous ne devrons pas nous étonner si nous trouvons celles-ci réellement distinctes, cette séparation ne constituant qu'une sécurité de plus à l'endroit du pouvoir unificateur de l'esprit. Enfin nous devrions normalement commencer notre enquête par l'ordre, mais la priorité que nous lui avons reconnue est une priorité mathématique, le point de vue nouveau que nous adoptons invertit cette préséance; point de vue constructif sous la lumière duquel le premier n'est pas ce qui joue organiquement le rôle le plus important, mais bien ce dont dépend la construction de tout le reste. C'est donc le cardinal qui l'emporte ici et, voyant en lui le degré de composition auquel conduit normalement la notion de correspondance, nous examinerons corrélativement la multitude transcendantale, sans d'ailleurs la restreindre systématiquement à ne rendre raison que du nombre cardinal. Une induction assez simple nous fait bien pressentir qu'elle en est plus voisine que des deux autres notions fondements, mais nous en tirerons le plus qu'il sera possible pour notre l'objet.

Rappelons d'abord que la multiplicité se présente comme résultat premier de l'expérience et comme dualistique de l'unité; premier terme abstrait sans doute, mais tellement inséré en toutes nos perceptions que sa genèse a fort exercé la sagacité des psychologues et l'ingéniosité des philosophes. On a parlé de « conduites de la multiplicité », c'est-à-dire de réactions propres à la multiplicité et qu'elle provoque comme telle, alors que ses éléments intervenant isolément eussent provoqué des conduites différentes, voire opposées. Maine de Biran a indiqué en une fine analyse comment la perception de l'unité se trouvait liée à l'impression ou au souvenir d'une impression indivisible de résistance, et nous aurions dans l'effort élémentaire comme le répondant objectif de l'unité; la psychologie peut s'inspirer de vues métaphysiques plus profondes, mais ces pertinentes remarques soulignent du moins le caractère extrêmement concret et réaliste au sens le moins apprêté, de cette notion de multitude. Aussi se retrouve-t-elle partout, elle vient qualifier toutes nos perceptions sensibles, elle est la plus universelle et par là la plus abstraite des notions claires, et la plus transcendante en un sens et semble ainsi toucher sans effort aux deux pôles du réel. Voyons donc d'un peu plus près de quoi elle est faite, et si dans sa notion même elle n'inclut pas une composition qui n'est pas exactement celle qui lui tient lieu de représentation. La multitude comme telle — et nous pensons plus spécialement à celle qu'en langage technique on appelle transcendantale — se résout en une diversité formelle, mais nous disons bien se résout. C'est cette spécification différente des termes qui la composent qui fait qu'elle est multitude et c'est cette sorte de diversité qui fait que nous la connaissons comme multitude; il est bien certain qu'objectivement il n'y a rien autre que ces groupes différents et invariables de propriétés ou essences. Mais peut-on même dire différentes sans déjà introduire une comparaison. Comparaison qui, prenant un point d'appui objectif, s'achève à son plan et aboutit à une multiplicité pensée qui n'est pas que pensée, mais qui est comme une propriété que développe dans l'esprit la multitude objective, — à défaut de termes meilleurs —. Et c'est bien une propriété réelle de la multitude, comme c'est une propriété qui naît en l'esprit : méconnaître la multiplicité pensée, c'est supprimer la relation, et partant l'un des deux termes. Or il paraît bien que la multiplicité, terme dernier du travail de l'esprit — ou, si l'on veut, multiplicité pensée —, n'est du tout identique à ce par quoi nous saisissons qu'il y a multitude objective. Il y a là, pour autant qu'on puisse les distinguer de façon aussi tranchée, deux étapes, deux phases d'un même déploiement, qui se comportent assez différemment vis à vis de l'abstraction; et c'est ce qui nous intéresse précisément. Faisons-nous abstraction de la diversité formelle — ou d'essence (1) — il est bien clair qu'il n'y aura plus de multitude objective, et donc métaphysiquement, plus de multiplicité du tout; le

(1) Nous ne nous attachons pas à une signification trop stricte, laquelle n'est rigoureusement vraie en chaque cas, qu'au terme d'une étude dont elle est comme le mémorial. Et cette étude ici dépasserait notre objet. Nous voulons dire que la diversité est à prendre du côté de la forme sans exclure pour autant une composante matérielle éventuelle.

contraire serait contradictoire à s'en tenir à la notion de multitude transcendantale. Faisons-nous au contraire abstraction du travail ultérieur de l'esprit, la multitude transcendantale se trouve privée de son prolongement et cesse de nous intéresser puisqu'elle n'est plus le fondement de la multiplicité, dont nous cherchons la cause. Ces abstractions, différentes dans leur résultat, ont-elles un ordre, ou peut-on les effectuer à volonté. On ne voit pas évidemment que l'élaboration intellectuelle puisse se passer d'un point de départ dont nous avons dit reconnaître la nécessité. Mais l'abstraction n'est pas une suppression pure et simple : vivre dans l'abstrait n'est pas négliger le reste, mais quelquefois le traiter par prétérition. Et nous n'avons nullement constaté que la réalité mathématique réclamât actuellement—c'est-à-dire dans l'actualité de son développement — l'explication complète des répercussions des difficultés qu'elle pose. Ce qu'elle réclame actuellement en tant que mathématique, c'est le fondement suffisant, quelqu'abstrait d'ailleurs qu'il soit, d'une composition dont elle-même ne rend pas compte, et plus précisément le fondement suffisant de chacun des éléments de cette composition. Or la notion de multiplicité au point le plus abstrait de son élaboration, y suffit. La multitude transcendantale ne touche les principes de l'être mathématique que par cette multiplicité pensée, et il est légitime en ce sens de faire abstraction de la multitude objective pour ne fixer que la multiplicité pensée. Tout de de même que dans un mouvement on peut ne considérer que le terme; encore que sa fonction de terme soit inséparable du mouvement rien n'empêche cependant de le considérer comme simplement atteint. L'analyse d'une succession, même intellectuelle, donnerait lieu à mille distinctions semblables : envisager par exemple les termes comme les éléments descriptifs d'un dynamisme, ou bien voir en certains d'entre eux, d'ailleurs privilégiés, la concrétisation d'une finalité imposée au mouvement, sont des points de vue assez différents. Images encore fort inadéquates d'une richesse de nuances, que la commodité contraint de baptiser globalement abstraction. Disons pour fixer les idées que la multiplicité pensée est un terme atteint, que comme atteint il est abstrait de la multitude objective et que sa constitution en fait l'explication suffisante du nombre cardinal, multiplicité ordonnée. La métaphysique classique offrirait d'autres comparaisons, auxquelles nous n'entendons d'ailleurs attribuer aucune valeur probante. Les êtres individués par la matière demeurent individués s'il leur arrive de subsister sans matière, il y a là quelque chose d'analogue : la *notion* de multiplicité, extraite de la multitude, demeure une multiplicité abstraction faite de cette dernière, et il se peut que des multiplicités d'essence fort diverse au regard métaphysique, conduisent effectivement à la même multiplicité, comme des mouvements disparates peuvent aboutir au même temps, comme il est possible d'admettre que l'âme possède exclusivement par elle-même ses propriétés individuelles, où qu'elle les reçoit par le corps. Divergences sans importance en regard du résultat, et du point de vue formellement mathématique, c'est le résultat qui importe. Nous aurons à donner quelques précisions sur l'enchaînement lui-même. Il est difficile de le faire d'une façon générale, et c'est dans chaque cas particulier qu'il conviendra de fixer quel est l'équivalent de ce que nous appelons ici génériquement multitude transcendantale. Nous verrons d'ailleurs que, même ainsi circonscrit, le problème est loin d'être simple. On peut ranger sous une même étiquette des cas différents, mais il faut n'être pas dupe de ce procédé commode.

Il est bien vrai qu'une pareille élaboration accorde à l'esprit un rôle indispensable d'intermédiaire entre les fondements des notions mathématiques, et la mathématique elle même, peut-être même un rôle créateur. Mais répétons que l'analyse de la réalité mathématique ne nous a pas montré que l'esprit ne jouât en cette affaire aucun rôle. Nous savions seulement qu'il n'a certainement pas un rôle exclusif. Nous voyons maintenant qu'il est possible de lui accorder un pouvoir assez étendu, lequel s'harmonise d'ailleurs bien avec ce que nous savons déjà de son influence décisive sur la nature des progrès de la science. Il y a là une première induction qu'il conviendra de préciser. Ainsi le multiple qui relève directement de l'expérience, la multitude transcendantale objective, la multiplicité pensée sont comme trois aspects d'une même réalité; chacun peut être envisagé pour lui-même encore qu'il ne soit pas sans relation immédiate avec les autres. Ces relations, qui commandent des processus intellectuels divers, permettent effectivement d'entrevoir en la multitude transcendantale, qui de ces trois aspects à davantage figure métaphysique, le principe possible de diversité que nous recherchons. Mais avant d'examiner dans quelle mesure elle est aussi un principe suffisant, notons encore un caractère qui distingue la multitude objective de la multiplicité pensée, et qui n'est d'ailleurs que la conséquence de l'abstraction particulière qui fait passer de l'une à l'autre. La multiplicité pensée, avons nous dit ne retient pas la diversité d'essence qui est le propre de la multitude objective. Devient-elle dans les termes qui la composent homogène ou hétérogène? On doit répondre qu'elle fait abstraction de ce caractère comme elle fait abstraction, selon la pertinente remarque de M. Le Masson du caractère fini ou infini. On pourrait l'appeler une multiplicité logique qui ne présuppose rien des éléments qui la construisent. Ce rien est difficile à définir, cela va de soi; il y faudrait trop d'éliminations dont nous ne pouvons marquer que les principes. Touchant l'homogénéité, on peut concevoir cette multiplicité sur le type d'un genre ou le type d'un ensemble de relations formellement diverses; le processus que nous suivons à partir de la multitude objective ne précise rien à ce sujet.

La multitude étant ainsi caractérisée autant qu'il est possible, mettons en regard les différentes composantes de l'être mathématique. Il en est une qui, à priori, ne peut trouver dans la multitude aucun appui à savoir la limite dans la mesure où elle demeure en la stricte dépendance du continu. Indétermination pure, support de tout ordre, le continu que la limite contraint de conclure, s'oppose radicalement à la multitude transcendantale en quelque point de son élaboration qu'on la saisisse. Ordre ontologiquement déterminé, ou discontinuité abstraite, elle implique toujours entre ces éléments l'exclusion d'intermédiaire, et c'est par là qu'elle se caractérise comme multiplicité. Si donc on la considère comme déterminée, elle jouera un rôle privilégié vis à vis de certains ordres. Sinon, il reste qu'elle se trouve déterminée par l'ordre qu'elle supporte et qu'elle n'en peut supporter plusieurs simultanément. Il est bien vrai que le continu est ordonné, encore faut-il l'entendre : nous avons rappelé qu'on n'arrive jamais à une identification, c'est-à-dire à une reconstruction complète. Notons encore que cet ordre du continu demeure un ordre quelconque; c'est-à-dire qu'on peut fixer autant de lois limites que l'on veut de ces constructions du continu. On dirait assez justement que le continu apparait bien comme un ordre, mais c'est n'importe quel ordre, un « ordre indéterminé ». Les précisions de l'analyse n'apportent ici rien de nouveau. Support de tout ordre, ou limite d'un ordre arbitrairement choisi, il n'y a pas au regard de la détermination que dit la multitude transcendantale de différence essentielle. En bref, l'opposition que nous signalions notionnellement entre le continu et le cardinal se retrouve ici, mais accrue : le caractère disjonctif se trouvant réalisé dans la multitude transcendantale sans l'homogénéité compensatrice qu'il trouvait dans le cardinal.

Et ceci nous amène à examiner si la multitude transcendantale est un fondement suffisant du cardinal. Le cardinal est premièrement multiplicité homogène; c'est à ce titre qu'il intervient dans notre analyse et nous pouvons laisser provisoirement de côté les propriétés d'ordre qu'il implique et que nous examinerons pour elles-mêmes dans un instant, La multiplicité pensée dit bien multiplicité, mais elle ne possède pas l'homogénéité requise; et il paraît impossible de tirer cette homogénéité de la multitude transcendantale parce qu'objectivement elle signifie tout l'inverse. La multiplicité pensée paraît donc n'être qu'une étape entre la multitude objective et le cardinal. L'ultime passage suppose un peu plus que l'abstraction de non considération : il faut bien créer cette homogénéité, la mettre là où elle n'est pas. Que l'esprit y suffise, cela paraît évident et nous ne devons pas craindre de le faire intervenir surtout s'il faut unifier; c'est sa loi propre, la pression de sa nature, et d'autre part la diversité que peut retenir la multiplicité pensée ne s'oppose nullement à l'homogénéité plus abstraite encore qui appartient à tous les concepts. A procéder de la sorte nous faisons bien de la multitude transcendantale un fondement du cardinal; elle le met dans la concrète réalité sans le déraciner de son domaine propre. Mais nous faisons intervenir un principe nouveau, qui ne s'insère pas normalement dans notre analyse parce qu'elle devrait en rendre compte et qu'elle ne le peut pas. Cette homogénéité mathématique du nombre et l'unification qu'elle implique nous pouvons bien les rattacher à la loi d'unité que nous avons constatée, mais c'est précisément cette constatation, imposée par l'expérience mathématique qu'il faut maintenant justifier. Il ne paraît d'ailleurs pas possible de faire appel à une loi psychologique plus générale de la connaissance, car cette loi de l'homogéniété des objets en tant qu'abstraits, trouve justement dans le nombre la plus adéquate de ses réalisations : c'est ce que nous notions au début de ce paragraphe touchant les notions dualistiques d'unité et de multiplicité. La réaction première et spontannée de l'esprit qui veut connaître, c'est de nombrer le réel. En sorte que de la multiplicité transcendantale au cardinal s'intercale une même élaboration au cours de laquelle l'activité de l'esprit, d'abord abstractive, devient progressivement créatrice. Ce que nous avons appelé multiplicité pensée est une ligne de démarcation approximative, au delà de laquelle on doit en bonne méthode faire appel à un principe nouveau. On peut donc voir à la rigueur dans la multitude transcendantale le fondement du cardinal et nous sommes très favorables sur ce point particulier à l'orientation générale du travail de M. Le Masson. Un autre mode d'exposition aurait, fort probablement, atténué certaines vigueurs d'expression qui, pour nous comme pour M. Maritain, accordent d'emblée, au nombre cardinal une portée ontologique qu'il n'a pas et laissent nécessairement inexpliquée une de ses propriétés essentielles; mais c'est bien à la multitude transcendantale qu'il convient de s'adresser si l'on veut donner à l'être formellement mathématique toute sa valeur réelle.

Ajoutons en conséquence qu'on ne voit pas comment séparer la définition du cardinal de la définition de l'égalité des cardinaux. Le cardinal, rendu homogène comme il convient, demeure ce qu'il est, quelle que soit la multitude objective, pourvu que la multiplicité pensée soit la même; la substitution qui permet de vérifier cette identité est donc partie intégrante de la définition; or c'est par cette même substitution qu'on définit l'égalité. On ne voit d'ailleurs pas comment se distingueraient deux cardinaux égaux sinon par leur répondant objectif; et nous avons dit pourquoi nous ne pensons pas qu'on puisse identifier le cardinal, même avec la multiplicité pensée. A fortiori est-il seulement une propriété deux fois abstraite de la multitude objective. Nous reviendrons sur une définition plus précise. Corrélativement nous devons marquer que la notion d'inégalité se trouve elle aussi impliquée dans la définition, non pas au sens de plus grand ou plus petit, mais au sens : ceci n'est pas cela. C'est toujours la même correspondance qui conduit à ce résultat;

elle inclut en elle même, au même titre, l'égalité et l'inégalité; l'identité du nombre avec lui-même ou sa distinction d'avec tout autre nombre. Le second aspect indique d'une façon plus sensible de quelle nature de disparité il s'agit et rappelle son origine éloignée : l'opposition qualitative propre à la multitude transcendantale. Cette opposition se traduit ici en pure diversité, abstraction faite du plus et du moins, c'est-à-dire de toute comparaison qui impliquerait elle-même le nombre ; la multitude transcendantale se retrouve donc, en ce qu'elle a d'essentiel, au terme même de l'élaboration du nombre : composante insuffisante, elle est bien composante intrinsèque, elle exerce une constante hégémonie sur les démarches de l'esprit également requises à la formation du nombre, elle est le lien objectif et sous-jacent de l'unité de la genèse du nombre.

Et ceci nous conduit à examiner, toujours en regard de la multitude transcendantale, le troisième de nos principes : l'ordre. La multitude transcendantale n'est multitude qu'en étant ordre. On pourrait discuter une question de priorité logique : reconstruisons-nous l'ordre, sur la diversité, ou ne percevons-nous la diversité que dans l'ordre, mais il importe peu ici. Objectivement il paraît bien que l'ordre soit la première des propriétés d'un ensemble d'êtres, comme ensemble. Cet ordre est fait de la distinction de leurs natures, c'est par lui que nous atteignons la diversité qui est une notion plus construite. Ordre qui englobe tout ordre, comme la multitude transcendantale renferme éminemment toute multitude, et de la même façon. Nous abrégeons donc l'analyse tout en la faisant commencer plus près de la multitude objective pour laquelle l'ordre n'est pas comme pour la multiplicité pure une propriété abstraite, mais la propriété réelle, condition sine qua non de sa réalisation. Ceci atténue d'ailleurs en ce qui concerne la limite, la principale des difficultés que nous avions rencontrées dans l'élaboration du cardinal : nécessité d'abstraire le constitutif de la multitude objective en retenant cependant une multiplicité pure. L'ordre mathématique, et celui qui intervient en particulier dans la limite, ne connote plus la même homogénéité que le cardinal. Il s'en accommode, mais il ne l'implique pas nécessairement, et le moindre signe en serait qu'il y a des relations d'ordre entre des êtres mathématiques différents par nature. L'ordre n'est pas non plus, obligatoirement, simple succession ; on l'évoquerait mieux en disant type d'ordre. Les divers types étant entre eux irréductibles, sans que l'adjonction d'un terme puisse résoudre leur discontinuité, on peut réellement à leur propos parler du même et de l'autre. Or la multitude transcendantale jouit bien de ces propriétés : chaque multitude a, comme telle, sa spécificité qu'on peut précisément caractériser par son ordre, et cet ordre c'est le revers pensé d'oppositions qualitatives ou de relations réelles. Nous pourrions dire encore qu'il y a un ordre objectif et un ordre pensé, mais qui sont beaucoup plus près l'un de l'autre que n'étaient multitude objective et multiplicité pensée. L'ordre pensé peut retenir tout ce qui constitue l'ordre objectif : il y a là une simple transposition au plan notionnel dont l'abstraction classique suffit à rendre compte. Il n'y a pas identité pour autant : l'ordre mathématique fait abstraction lui aussi de ce par quoi l'ordre pensé est tel ordre. Mais il ne demande rien d'autre que cette non considération. De l'ordre pensé au type d'ordre mathématique il n'y a pas appel à un élément nouveau qui jouerait un rôle équivalent à celui de l'homogénéité. On ne passe pas de l'ordre de causalité au pur ordre de succession sans une série d'abstractions progressives, mais l'activité de l'esprit n'y est pas créatrice au même titre que dans le cas du nombre. La pure succession elle-même qui pourrait faire difficulté rentre en fait dans un type d'ordre et si elle se trouve plus complètement expliquée par l'adjonction d'un autre principe, l'ordre attaché à la multitude transcendantale lui est néanmoins un fondement suffisant. En fait redisons-le, tout ce que nous distinguons intervient globalement, et si le cardinal appelle un autre fondement que la multitude transcendantale, l'ordre mathématique recevra normalement de cet élément nouveau l'homogénéité avec laquelle il se présente habituellement. Mais de notre point de vue analytique, nous devons retenir que la multitude transcendantale ne rend aucunement compte du continu; que le cardinal inclut tout à la fois en sa notion, et cette multitude dont il est le prolongement, et un principe d'homogénéité dont la multitude transcendantale ne rend pas compte.

Il nous faut donc poursuivre une analyse semblable à celle qui précède, mais en prenant un autre pôle d'explication. Il nous reste à rendre compte, d'une part de l'homogénéité du nombre cardinal et de l'homogénéité analogue qu'on retrouve dans l'ordre de pure succession, d'autre part du continu. Nous avons déjà signalé qu'on pouvait songer à la loi même de l'esprit et nous sommes moins en peine d'expliquer une uniformité qu'une diversité. Il y a une qualité commune à toutes les données psychologiques considérées à un degré suffisant d'élaboration ; les perceptions à mesure qu'elles s'intellectualisent se rapprochent et tendent à se confondre en une continuité homogène qui présente d'évidentes ressemblances avec celle qu'on rencontre en mathématique. Les phases alternées de l'activité de conscience présentent aussi des zônes de raccord, entièrement indéterminées et qui pourraient servir de type à la réalisation imaginative du continu mathématique. On parlerait d'étendue et de point, de champ et de terme, plutôt que de durée et d'instant ; ici et là il y aurait bien le même support suffisant d'une possibilité indéfinie d'insertion. Mais en admettant qu'il faille remonter jusqu'à cette unité psychologique — dont on a soulevé le problème en maintes directions, —cela suffira-t-il? En admettant que la continuité psychologique ne soit pas dans le cas des mathématiciens tributaire en quelque façon de ses reflets mathématiques, il resterait à en rendre raison. Ces deux aspects de la continuité ne seraient-ils que les transcriptions de la même notion, adaptées à des modes divers d'unité ? Si le fait mathématique et le fait psychologique se distinguent ultérieurement par leurs conséquences, il paraît bien difficile de séparer dans l'esprit du mathématicien une frange plus mathématique et une origine plus psychologique du même concept de continuité, difficile par conséquent d'établir la relation de priorité que nous recherchons. En sorte que l'analyse de l'activité mentale serait ici peu secourable : il serait d'une part illégitime d'y tracer des contours et des ordres bien nets, il resterait d'autre part à assigner au principe choisi un fondement qui fût en harmonie avec l'objectivité de la multitude transcendantale, Il paraît dès lors naturel de mettre les notions d'homogénéité et de continuité en relation avec le continu physique. Il est bien probable qu'il n'y a ici, de l'abstrait au concret, du continu mathématique au continu physique, que la différence d'aspects plus ou moins objectivés dont les caractères semblables révèlent au moins la genèse commune. Le continu physique, la continuité que nous voyons dans les choses, ne s'impose pas avec la même évidence que la multiplicité. Supprimées les disparités qualitatives, intelligibles en elles-mêmes, il reste bien le support d'une négation, mais force est de reconnaître qu'il n'y a là qu'un terme conclu, et les explications métaphysiques ou psychologiques auxquelles a donné lieu l'antinomie continu-discontinu n'ont fait éclater aucune évidence. L'analyse ne peut pas toucher le continu, précisément parce qu'il lui offre un terrain sans cesse nouveau; en fait, nous ignorons tout, expérimentalement, de la continuité et de la discontinuité de la matière. Nous serions incomplets en négligeant la recherche philosophique; mais remarquons que l'enquête métaphysique peut partir indifféremment d'une expérience mathématique ou d'une expérience physique, et qu'il y a un parallélisme rigoureux du point de la vue de construction des notions. La continuité requise au champ fonctionnel est une nécessité conclue, comme le substrat de la divisibilité est une nécessité conclue. Et de même que la description mathématique n'atteint jamais toutes les valeurs, mais simplement un nombre de valeurs arbitrairement grand, on sait la distinction devenue classique du dénombrable et de l'effectivement énumérable, qui ne fait qu'exprimer cette nuance en termes plus techniques —, de même aussi, l'analyse physique tend à réaliser le «aussi loin qu'on voudra» quant à la divisibilité de la matière, et même en admettant qu'elle ne rencontre pas d'obstacle infranchissable, elle s'interdit d'adopter la formule plus audacieuse de « division indéfinie ». Dans l'un et l'autre cas, c'est une même expérience directe du terme atteint qui autorise à poser le terme intermédiaire, et c'est une même étape que franchit l'esprit en posant effectivement cette notion d'intermédiaire comme telle, la notion de « tout terme ». Et si, comme nous n'avons cessé de faire, nous considérons le fait mathématique comme donné, les deux cas ne peuvent se justifier que simultanément. Le continu physique ne serait-il donc lui aussi qu'une description que nous faisons de la réalité en y réintroduisant précisément le continu mathématique, et ne serait-il pas dès lors chimérique de vouloir rendre compte du second par le premier. Une différence essentielle demeure cependant, que l'on peut bien négliger quant à la construction purement logique, mais qui intéresse notre enquête, laquelle vise non seulement à affermir, à leur plan, les procédés et les constructions axiomatiques, mais encore à leur assigner un fondement objectif. La conclusion touchant le continu physique, partant d'une constatation plus riche de réalité va aussi plus avant dans l'être. Elle commande par là la conclusion effectuée au plan mathématique et lui vaut même le bénéfice d'une nécessité plus contraignante.

Nous n'entendons pas d'ailleurs établir ici l'objectivité de ce continu physique et c'est peut-être le point où nous touchons le mieux l'impuissance de la mathématique à construire à elle seule ses propres principes ; nous marquons surtout que ce rapprochement n'est pas une simple transcription verbale, et que malgré le parallélisme logique très réel dans l'ordre de la genèse, le continu mathématique n'est pas le continu physique et qu'il lui emprunte. Remarquons cependant que l'ordre de l'abstraction, en tant qu'il marque un ordre d'intelligibilité, ici se renverse. Tandis que la multiplicité n'était saisie que dans la multitude réellement diverse qualitativement, c'est le continu physique qui intellectuellement n'est perçu que dans le continu mathématique. Ce qu'expliquent à la fois la construction simultanée logiquement suffisante de l'un et l'autre continu, et l'absence d'expérience physique directe. Le processus logique est alors premier du point de vue de la représentation. Remarquons encore que l'intermédiaire véritable entre le continu physique, induction de l'expérimentation globale, et le continu mathématique, exigé par le développement de l'analyse, serait la définition métaphysique du continu. Rigueur et réalité se rencontrent ici et deviennent susceptibles d'une réimposition permutée, le « divisible comme tel » n'est épuisé par aucune division et inclut de cette façon tout terme : il se confond avec le continu mathématique et se trouve seul capable de lui offrir un fondement exonéré des tares de l'expérience sensible. Notre enquête plus positive s'interdit d'insister sur ce point de vue.

Le continu physique rend donc compte de notre notion mathématique du continu; bien plus, il ne le ferait pas mieux s'il n'avait été construit que pour cela, et nous avons pressenti comme suffisamment délicate la tâche de les distinguer pour qu'il soit inutile d'insister beaucoup sur leur étroite liaison. Et du même coup nous avons, dans l'homogénéité de ce même continu, ce que requiert la construction du cardinal ou de l'ordre de pure succession, et qui pouvait nous faire encore défaut. Cette construction demeure cependant le fait d'une activité originale de l'esprit, car les notions de nombre, d'ordre, de continu, ne se trouvent pas associées entre elles dans l'observation comme elles se trouvent l'être dans les principes mathématiques, l'analyse de la définition de la limite en fournit l'exemple le plus net. Le continu achève donc de façon suffisante l'ensemble des fondements requis, mais nous devons nous poser à son sujet la question à laquelle nous avons répondu négativement pour la multitude transcendantale. Le continu peut-il être à lui seul le fondement suffisant de l'ensemble des principes mathématiques et rendre compte du cardinal et de l'ordre comme il rend compte du continu mathématique. La différence propre du nombre cardinal est, avons-nous dit, le terme. Le continu ne présente de terme que divisé, mais il n'est par essence que du divisible et cesse d'être du continu aussitôt que des éléments privilégiés affectent son indétermination pure. Il y a plus : cette opération de division ne suffirait pas encore à elle seule à donner naissance au cardinal. Si celui-ci a pour différence le terme, il est lui-même collection. Or on ne construit une collection que par comparaison; et s'il est nécessaire de recourir à la division pour introduire au sein du continu une diversité que ne lui donne pas sa multiplicité spécifique, il n'est pas moins requis quant à la construction du cardinal d'introduire également une unité formellement distincte de celle que possède le continu. Car le continu et le cardinal sont un et multiple, mais chacun à sa façon et il est tout à fait illégitime d'invoquer la divisibilité à titre d'intermédiaire. D'une part, comme désignation du continu, elle doit demeurer en puissance à l'endroit de tout terme, elle élimine à priori toute idée de mesure; d'autre part, appliquée au cardinal, elle est l'expression d'une composition discontinue et parfaitement déterminée de ce nombre. Ce qui revient à dire que la différence de nature entre le continu et le cardinal se retrouve entière entre les modes de divisibilité qui peut les affecter ; la divisibilité ne constituant donc en aucune façon ni une propriété commune, ni un point de passage. Le continu physique pourra bien donner au nombre cardinal une portée plus concrète, et permettre des conceptions plus riches, mais la reconstruction du nombre à partir du continu nécessite, à un double échelon, l'empreinte de notions qui relèvent formellement de la multitude transcendantale, on doit donc conclure que le continu ne rend nullement compte du nombre cardinal. Quant à l'ordre, le continu ne l'explique pas non plus. On peut noter que la réalisation mathématique de l'ordre aussi bien que sa saisie, se traduit le plus généralement en nombres, et que ces nombres ont une origine cardinale dont le continu ne répond pas. D'autre part, nous avons déjà signalé que la notion de continu ordonné ne doit pas faire illusion; le continu n'est pas un ordre, mais il est tout ordre ; ce qui est d'une façon une négation de l'ordre. Chacun des ordres inséré dans le continu résulte d'ailleurs d'une analyse qui met au œuvre un appareil mathématique déjà constitué : en sorte qu'on ne trouve dans le continu, au moins de cette façon, que l'ordre que l'on y met. Et plus profondément la raison est la même que pour le cardinal. Le continu physique ne peut pas dire ordre sans cesser d'être ce qu'il est; l'ordre quel qu'il soit y introduirait un principe de diversité qui détruirait sa pure indétermination. Si donc nous avons fait quelques réserves concernant la capacité de la multitude transcendantale à être fondement exclusif de la réalité mathématique nous pouvons être beaucoup plus affirmatifs quant au continu : suffisant dans un cas il ne peut pas même donner dans les deux autres des inductions comparables à celles qu'autorisait la multitude transcendantale en regard du continu mathématique. Et ceci nous amène à conclure non seulement en récapitulant les notions capables de constituer le fondement suffisant de la réalité mathématique, mais en précisant encore l'ordre relatif qu'elles ont l'une à l'autre ; tant il est vrai que toujours c'est la pénétrante hégémonie de l'ordre que l'analyse est contrainte de rencontrer.

Il est bien clair que nous devons retenir et la multitude transcendantale et le continu, puisque chacun d'eux pris isolément s'est révélé insuffisant. Nous voudrions insister sur deux points. La dissociation à laquelle nous avons soumis l'être mathématique nous en a fourni les principes, et ce sont ces principes dont nous avons recherché une explication. Mais nous ne nous sommes pas pour autant éloignés de la réalité ; nous avons signalé en effet la nature particulière de la composition qu'on rencontre en mathématique. Sauf peut-être le nombre entier, entendu au sens le plus strict, et non en un rôle de principe, il n'est pas d'être mathématique réel qui ne renferme en soi cette composition. Les éléments de celle-ci nous ont apparu plus nettement par la comparaison des différentes orientations de la science, et si l'un ou l'autre domine ici ou là, il reste qu'ils sont tous omniprésents. En sorte que notre analyse n'est pas seulement applicable à un être mathématique abstrait — au second degré s'entend —, et comme reconstruit à partir de l'être réel, mais à l'être réel lui-même. C'est bien chaque être mathématique qui implique la dualité irréductible que nous avons observée, et c'est donc chaque être qui requiert un fondement un et multiple, correspondant à sa structure. C'est-à-dire qu'il n'y a pas de fait mathématique issu du continu ou issu de la multitude transcendantale; toute réalité ne peut dériver que simultanément de l'un et de l'autre. Observons d'ailleurs que continu et multitude se trouvent associés non pas conceptuellement, mais réellement; cette union est un des aspects du mystère de l'être, et l'unité que possède l'être mathématique en sa composition se présente comme le reflet de l'unité transcendantale que nous décrivons en termes disparates sans l'épuiser. C'est parce qu'il procède simultanément de principes réellement unis, qu'il est lui-même un, mais il faut en un sens renverser cette induction. Non qu'il s'agisse d'aller jusqu'à conclure l'unité de l'être réel (1) de celle de l'être mathématique, il suffit d'observer que l'analyse de l'être mathématique nous conduit nécessairement à cette unité réelle et fait appel en quelque sorte à des principes à la fois divers et un.

En d'autres termes la question de la qualification ontologique (2) de l'être mathématique, c'est-à-dire de sa place dans les catégories de l'être, ne peut être pour le mathématicien qui part de son expérience ni une question à priori ni une question à posteriori. Cette question est posée par l'être mathématique lui-même, par son rythme intemporel qui le réfère à autre chose; elle n'est pas pour autant entièrement

(1) Nous n'opposons être réel et être mathématique que pour la commodité du langage; nous ne nions pas notre point de départ qui a consisté à observer le fait mathématique, à lui accorder une réalité conforme à cette observation.

(2) Nous entendons par là non plus l'expérience mathématique en son objectivité technique mais le résultat de la comparaison de l'être mathématique avec les autres catégories de l'être.

résolue, et nous aurons à préciser plusieurs relations fort importantes, mais ce que nous pouvons conclure, c'est que nous n'aurons pas à nous mettre en peine de relier le fait mathématique à la réalité totale, à l'être. Qu'on le veuille ou non cette liaison existe objectivement, et nous pouvons même dire dès maintenant qu'elle s'enracine intimement dans l'être mathématique dont elle épouse adéquatement la structure.

Nous avons conclu en cette composition mathématique à une priorité de l'ordre, plus pénétrant et plus proche des diverses notions : il est évident que nous aboutirons à la même conclusion, en faveur de la multitude transcendantale si nous l'envisageons concurremment avec le continu, au titre spécial de fondement. La multitude transcendantale rend compte de l'ordre, et cela nous suffirait, mais notons qu'elle joue dans la constitution du cardinal le rôle principal tandis que le continu n'intervient que par le moindre des éléments de la limite. Il fait image dans plus de cas : on y trouve ce qu'on y apporte et un peu plus, mais ce plus est peu. D'autre part si nous jetons un furtif regard sur cette réalité dont nous voulons rapprocher l'être mathématique, nous constatons bien que la multitude transcendantale et le continu y ont, non plus comme fondements mathématiques mais comme composantes réelles de l'être réel, un ordre, et que cet ordre n'est pas différent de celui que nous venons de dire. Il suffirait de nommer leurs associés métaphysiques pour retrouver une thèse classique, et nous n'y insistons pas. Il reste que la réalité mathématique se porte vers la réalité totale non pas seulement de par la complexité de sa structure, mais que l'ordre qui régit cette complexité est lui aussi l'image de l'ordre réel. Disons plus : dans toute la mesure où la réalité mathématique ne se suffit pas, son ordre intime devient, beaucoup plus que l'image, le prolongement, la réalisation sous un mode particulier de l'ordre universel. Et ceci parce que continu et multitude soutiennent la même relation, soit comme fondements, soit comme modes de l'être. Nous reviendrons sur cette harmonie. Retenons que la réalité mathématique fait appel à l'être, et que la réalité mathématique ordonnée fait appel, selon un ordre, à l'être ordonné.

(A suivre.)

Le Saulchoir. L.-B. Guérard des Lauriers, o. p.