DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES RELATIFS AUX ACTIONS ÉLECTRODYNAMIQUES;

PAR M. J. BERTRAND.

(FIN.)

La démonstration des théorèmes précédents n'emprunte à l'expérience qu'une seule proposition :

L'action d'un conducteur fermé est toujours normale à l'élément attiré.

Mais, pour aller plus loin et déterminer la for[illegible] la fonction indéterminée $\varphi(r)$, qui figure encore dans nos [illegible], il faut recourir de nouveau à l'étude des faits. Une seule expérience suffira. Nous admettrons le théorème suivant :

THÉORÈME IX. — *Le système nommé par Ampère* solénoïde *et composé d'un nombre infini de courants fermés, infiniment petits, dont les plans sont distribués perpendiculairement à une même courbe et à distance égale les uns des autres, éprouve, de la part d'un courant fermé quelconque, des actions indépendantes de la forme du solénoïde et équivalan[illegible] dépendant seulement de la position des extrémités.*

Ce théorème est le résultat de l'expérience; il équivaut à cet autre fait, plus facile à vérifier : *Un solénoïde fermé n'exerce aucune action sur un conducteur fermé et n'en éprouve aucune de sa part.*

Le potentiel, relatif à l'action d'un contour fermé sur un solénoïde composé d'éléments dont la surface est $d\omega$, est la somme des valeurs de l'expression

$$\text{(19)} \qquad G\, d\omega \cos(N, G),$$

pour tous les éléments de surface $d\omega$ qui composent le solénoïde. Soit ds l'élément de la courbe normalement à laquelle sont distribués les courants de surface $d\omega$; on peut regarder le nombre des surfaces $d\omega$ correspondantes comme proportionnel à ds, et le potentiel est représenté par

$$\text{(20)} \qquad k\, d\omega \int G\, ds \cos(N, G),$$

k désignant une constante. Mais G étant une force dont P, Q, R sont les composantes, et (N, G) l'angle de la direction de cette force avec la tangente à la courbe dont ds est l'élément, l'intégrale (20) peut être représentée par

$$k\, d\omega \int (P\, dx + Q\, dy + R\, dz),$$

et le théorème IX peut s'énoncer en disant :

L'expression

$$P\, dx + Q\, dy + R\, dz$$

est une différentielle exacte, quel que soit le contour fermé attirant auquel se rapportent les expressions P, Q, R.

Théorème X. — *La fonction $\varphi(r)$, qui figure dans l'expression de l'action exercée entre deux éléments de courant* (Théorème II), *est de la forme $\frac{A}{r}$, A désignant une constante.*

Reprenons les formules trouvées pour exprimer les fonctions P, Q, R (théorème V); on a, en posant $\frac{\varphi(r)}{2r^2} = \psi(r)$,

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} P = \int \psi(r)\,[(y - y')\, dz - (z - z')\, dy], \\ Q = \int \psi(r)\,[(z - z')\, dx - (x - x')\, dz], \\ R = \int \psi(r)\,[(x - x')\, dy - (y - y')\, dx], \end{cases}$$

x', y', z' désignant les coordonnées de l'élément attiré ; la somme

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

d'après le théorème IX, doit être une différentielle exacte ; on a par conséquent

$$\frac{dP}{dy'} = \frac{dQ}{dx'}.$$

En substituant dans cette équation à P et à Q leurs valeurs (10), on a

$$\begin{aligned} 0 = &\int dz \left\{ \frac{\psi'(r)}{r} [(y - y')^2 + (x - x')^2] + 2\psi(r) \right\} \\ &- \int dy \frac{\psi'(r)}{r} (y - y')(z - z') - \int dx \frac{\psi'(r)}{r} (x - x')(z - z'). \end{aligned}$$

Pour que cette intégrale soit nulle toutes les fois que la sommation se rapporte aux projections dx, dy, dz des éléments d'une courbe fermée, il faut que l'expression intégrée soit une différentielle exacte, et, pour cela, que la dérivée par rapport à x du coefficient de dz soit égale à la dérivée par rapport à z du coefficient de dx. En écrivant qu'il en est ainsi, et supprimant les termes et les facteurs communs, on trouve

$$\psi''(r) + \frac{4\psi'(r)}{r} = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\psi(r) = \frac{A}{r^3} + B,$$

et, par conséquent,

$$\varphi(r) = \frac{2A}{r} + 2Br^2,$$

et, comme $\varphi(r)$ est nul quand r devient infini, B est nécessairement égal à zéro, et l'on a

$$\varphi(r) = \frac{2A}{r}.$$

L'attraction $ii'\,ds\,ds'\,T$ de deux éléments est, par conséquent,

$$2A\,ii'\,ds\,ds' \left(\frac{1}{r} \frac{d^2 r}{ds\,ds'} - \frac{1}{2r^2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \right) = \frac{4A\,ii'}{\sqrt{r}} \frac{d^2 \sqrt{r}}{ds\,ds'} ds\,ds'.$$

Théorème XI. — *L'intégrale*

$$V = \int (P\,dx' + Q\,dy' + R\,dz'),$$

dont l'existence est démontrée par le théorème IX, représente l'angle sous lequel le contour attirant est vu du point dont les coordonnées sont x', y', z', c'est-à-dire la portion de sphère de rayon unité décrite du point (x', y', z') comme centre et interceptée dans le cône dont ce point est le sommet et la base le contour attirant.

Si nous remplaçons P, Q, R par leurs valeurs (10), en substituant, en outre, à la fonction $\varphi(r)$ sa valeur $\frac{2A}{r}$, on aura

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} V = {} & A\int dx' \int \frac{(y-y')\,dz - (z-z')\,dy}{r^3} \\ & + A\int dy' \int \frac{(z-z')\,dx - (x-x')\,dz}{r^3} \\ & + A\int dz' \int \frac{(x-x')\,dy - (y-y')\,dx}{r^3}. \end{aligned}\right.$$

Les intégrales qui multiplient dx', dy', dz' étant prises pour le contour fermé que nous nommons *contour attirant* et dont l'élément a pour projection dx, dy, dz, l'expressions (21), on le vérifie aisément, équivaut aux trois intégrales égales

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} V & = A\int \frac{(z-z'[(x-x')\,dy - (y-y')\,dx]}{[(x-x')^2 + (y-y')^2]\,r} \\ & = A\int \frac{(x-x')[(y-y')\,dz - (z-z')\,dy]}{[(y-y')^2 + (z-z')^2]\,r} \\ & = A\int \frac{(y-y')[(z-z')\,dx - (x-x')\,dz]}{[z-z')^2 + (x-x')^2]\,r}. \end{aligned}\right.$$

En prenant la dérivée de la première de ces intégrales par rapport à z', celle de la seconde par rapport à x', celle de la troisième par rapport à y', on obtient les expressions de P, Q, R, qui, dans le second membre de l'équation (21), multiplient dx', dy', dz'.

Pour démontrer que ces trois intégrales sont égales entre elles et représentent par conséquent la fonction V, dont les dérivées partielles sont P, Q, R, il suffit de montrer que l'une d'elles est l'expression de l'angle sous lequel le courant attirant est vu du point (x', y', z'); d'après la symétrie des formules, la conclusion s'appliquera aux deux autres.

Or, en plaçant l'origine des coordonnées au point (x', y', z'), et prenant les coordonnées polaires habituelles r, θ, ψ, on a

$$(x - x')\,dy - (y - y')\,dx = r^2 \sin^2\theta\, d\psi,$$
$$z - z' = r \cos\theta,$$
$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = r^2 \sin^2\theta,$$

et l'intégrale devient

$$\int \cos\theta\, d\psi.$$

Étendue à un contour fermé, elle équivaut à l'intégrale double

$$\int\int \sin\theta\, d\theta\, d\psi,$$

prise dans l'intérieur du cône ayant l'origine pour sommet et le contour pour base, et qui représente évidemment l'*angle* de ce cône, c'est-à-dire la surface interceptée par lui sur une sphère de rayon égal à l'unité ayant son sommet pour centre.

THÉORÈME XII. — *Lorsque le circuit attiré et le circuit attirant sont l'un et l'autre des circuits plans infiniment petits, de surfaces ω et ω' et d'intensités i et i', on peut représenter leur action en substituant à ω deux masses fictives μ, $-\mu$, placées de part et d'autre sur la normale à ω, à une distance infiniment petite ε, telle que l'on ait $\mu\varepsilon = \omega i$, et à ω' deux masses μ' et $-\mu'$ définies de la même manière; les actions du système de masses μ, $-\mu$ sur le système μ', $-\mu'$, en supposant les actions attractives élémentaires proportionnelles aux masses et en raison inverse du carré de la distance, pourront remplacer l'action du courant ω sur le courant ω'.*

Soit V l'angle sous lequel la surface ω est vue d'un point de ω', et G la force dont les composantes sont les dérivées de V : le potentiel de l'action de ω sur ω' est représenté par $G\,d\omega \cos(N, G)$; c'est la composante de la force G suivant la normale N à l'élément $d\omega'$, égale par conséquent à $\omega \dfrac{dV}{dn}$.

L'angle V, d'ailleurs, est représenté par

$$V = \frac{\omega \cos i}{r^2},$$

en nommant r la distance $\omega\omega'$ et i l'angle de cette droite r avec la normale à ω; on a évidemment

$$V = \frac{\omega \cos i}{r^2} = \omega \frac{d\frac{1}{r}}{dn},$$

dn désignant l'élément infiniment petit de la normale à ω, et, par conséquent,

$$\omega' \frac{dV}{dn'} = \omega\omega' \frac{d^2\frac{1}{r}}{dn\, dn'}.$$

Or, en considérant les molécules attirantes μ, $-\mu$, μ', $-\mu'$, définies dans l'énoncé, le potentiel de μ sur μ' est $\frac{\mu\mu'}{r}$, le potentiel de μ et $-\mu$ réunis, sur μ', est

$$\mu\mu' \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \varepsilon,$$

et le potentiel sur μ' et $-\mu'$ réunis est évidemment

$$\mu\mu' \varepsilon\varepsilon' \frac{d^2\frac{1}{r}}{dn\, dn'} = ii'\omega\omega' \frac{d^2\frac{1}{r}}{dn\, dn'}.$$

On peut énoncer le théorème précédent en disant que l'action de deux courants infiniment petits l'un sur l'autre peut être remplacée par celle de deux molécules magnétiques dirigées normalement au plan de chaque courant et dont le moment est proportionnel au produit de la surface entourée par le courant par son intensité.

Théorème XIII. — *L'action de deux courants fermés l'un sur l'autre, quelles que soient leurs dimensions, peut être remplacée par celle de deux surfaces magnétiques définies de la manière suivante : concevons pour chaque courant une surface de forme arbitraire à laquelle il sert de contour et décomposons cette surface en* *éléments infiniment petits supposés entourés chacun d'un courant de même intensité; remplaçons chaque élément par la molécule magnétique définie dans la démonstration du théorème précédent : l'action des deux courants pourra être remplacée par celle de ces systèmes de molécules.*

Il est évident, en effet, qu'un courant fermé quelconque étant considéré comme le contour d'une surface, et cette surface décomposée d'une manière arbitraire en un nombre quelconque de portions finies ou infiniment petites, on peut remplacer le courant considéré par un système de courants dirigés dans le même sens autour des contours de chaque surface partielle. Chacune des lignes de séparation se trouve ainsi parcourue, en effet, par deux courants contraires dont les effets se détruisent, et l'effet total est dû seulement à l'action du courant primitif.

D'après cette remarque, les deux courants fermés peuvent être remplacés par deux systèmes de courants infiniment petits fermés, et chacun de ceux-ci, d'après le théorème précédent, par une molécule magnétique.

Théorème XIV. — *Le potentiel relatif à l'action de deux circuits fermés l'un sur l'autre, dont l'expression a été donnée théorème VIII, peut s'exprimer également par une intégrale double*

$$\frac{1}{2}\int\int \frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\,ds\,ds' \tag{23}$$

étendue à tous les éléments ds, ds' des deux courants, et dans laquelle θ, θ' et r ont la même signification que dans le théorème II.

Reprenons la formule

$$ii'\,ds\,ds'\,\mathrm{T} = ii'\,ds\,ds'\left(\frac{1}{r}\frac{d^2r}{ds\,ds'} - \frac{1}{2r^2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right).$$

Si les deux éléments ds et ds' se déplacent, leur distance devient $r + \delta r$: le travail de leur action mutuelle est

$$ii'\,ds\,ds'\,\mathrm{T}\,\delta r = ii'\,ds\,ds'\,\delta r\left(\frac{1}{r}\frac{d^2r}{ds\,ds'} - \frac{1}{2r^2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right),$$

et le travail total, dû à l'action mutuelle des deux courants fermés qui se déplacent infiniment peu, est exprimé par l'intégrale double

$$ii'\int\int \delta r\left(\frac{1}{r}\frac{d^2 r}{ds\,ds'} - \frac{1}{2r^2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right) ds\,ds'.$$

On peut l'écrire de la manière suivante :

$$\frac{1}{2}ii'\int\int \delta r \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{ds'}\right) ds\,ds' + \frac{1}{2}ii'\int\int \delta r \frac{d}{ds'}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\right) ds\,ds'$$
$$+ \frac{1}{2}ii'\int\int \frac{\delta r}{r^2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\, ds\,ds'.$$

En intégrant par parties les deux premiers termes et remarquant que les termes intégrés sont nuls, puisque les contours sont fermés, cette expression devient

$$-\frac{1}{2}ii'\int\int \frac{1}{r}\frac{dr}{ds'}\frac{d}{ds}(\delta r)\, ds\,ds' - \frac{1}{2}ii'\int\int \frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d}{ds'}(\delta r)\, ds\,ds'$$
$$-\frac{1}{2}ii'\,\delta\int\int \frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\, ds\,ds',$$

c'est-à-dire, en remarquant que $\frac{d}{ds}\delta r = \delta\frac{dr}{ds}$, $\frac{d}{ds'}\delta r = \delta\frac{dr}{ds'}$,

$$-\frac{1}{2}ii'\,\delta\int\int \frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\, ds\,ds',$$

ou enfin

$$\frac{1}{2}\delta .\, ii'\int\int \frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\, ds\,ds'.$$

Le travail élémentaire est donc égal à la variation de l'intégrale (23), qui, par conséquent, représente le potentiel.

Nous terminerons cette étude par la solution d'un problème qui paraît indispensable pour rectifier un énoncé donné par Ampère au début de ses travaux et reproduit depuis dans tous les Traités et dans tous les Cours de Physique, quoiqu'il se trouve en contradiction évidente avec la théorie adoptée.

Problème. — *Un élément de courant ds étant donné, trouver la position que doit occuper un élément ds' pour n'exercer sur lui aucune action?*

En donnant aux lettres θ, θ' et ε la même signification que dans les formules démontrées (théorème II), l'équation qui exprime la condition demandée est

$$3\cos\theta\cos\theta' = \cos\varepsilon.$$

Supposons l'élément attiré ds placé à l'origine des coordonnées et dirigé suivant l'axe des X; x', y', z' étant les coordonnées de ds', on a

$$\cos\theta = \frac{x'}{r},$$

$$\cos\theta' = \frac{dr}{ds},$$

$$\cos\varepsilon = \frac{dx'}{ds'},$$

et l'équation devient

$$\frac{3x'}{r}\frac{dr}{ds'} = 2\frac{dx'}{ds'},$$

dont l'intégrale est

(24) $$x'^2 = A r^3,$$

équation d'une surface de révolution, dont l'axe est l'axe des X, et dont la courbe méridienne est aisée à construire. Quelles que soient la forme et la position d'un courant enroulé sur une telle surface, l'action exercée sur l'élément ds placé à son sommet sera nulle. La présence de la constante arbitraire A dans l'équation (24) permet de faire passer la surface par un point quelconque de l'espace, et, par conséquent, il existe en chaque point une infinité de directions dans lesquelles on peut placer un élément ds' de manière à annuler son action sur un élément ds. Ces directions sont dans un même plan, le plan tangent à la surface (20); l'action sera maxima pour un élément normal à cette surface, et pour un élément quelconque elle est proportionnelle; on s'en assure aisément, au cosinus de l'angle formé avec cette normale.

On voit combien on serait induit en erreur par la règle qui [illegible] dique comme attractives les actions exercées entre deux élém[illegible] qui marchent tous deux vers le sommet de l'angle formé par leur direction, et comme répulsive l'action exercée par l'élément d'un courant qui marche vers ce sommet sur celle d'un courant qui s'en éloigne. Une telle action peut être null[illegible]sive dans les deux cas.