L'ACTIVITÉ DE JUGEMENT EN MATHÉMATIQUES

I. — *Concept et Jugement.*

Le cas des mathématiques est un de ceux qui obligent de prendre parti. Or il semble même que pour nombre d'esprits le parti soit tout pris : ils naissent pour ou contre, encore que cette tendance demeure très souvent à l'état implicite, manifestée seulement par certaines sympathies ou antipathies aussi irréductibles qu'apparemment inexplicables. Platon a eu l'intuition du nombre. Aristote ne put y accéder, et toutes ses critiques, minutieuses, rationnelles et systématiques se déroulent à l'extérieur d'un monde qu'elles voudraient enserrer mais qui leur échappe irrémédiablement.

Notre but n'est pas d'insister sur cette antinomie, mais de marquer simplement, par contraste, que si Aristote n'a pas partagé sur ce point particulier la puissance à la fois pénétrante et réalisatrice de son maître, il s'est fait et a laissé de la science une idée que la critique ultérieure a pu trouver trop haute, que l'effort accumulé n'a pu réaliser, mais qu'une réflexion plus informée continue de consacrer comme l'idéal, et qu'un labeur indéfini cherche toujours à rejoindre. La science trouve son expression adéquate dans un jugement nécessaire. L'esprit réaliste d'Aristote faisant d'ailleurs dépendre immédiatement l'activité de jugement d'une affirmation d'existence, on aperçoit de suite que la notion aristotélicienne de science ne pouvait s'appliquer premièrement et immédiatement au cas mathématique. Le nombre, principe des mathématiques, demeurait en marge de la perception de l'existence concrète qui de près ou de loin commande le jugement. Le signe en est qu'Aristote n'a pu interpréter le réalisme du nombre platonicien qu'en l'assimilant au réalisme du jugement : identification ou disjonction radicale; on conçoit dès lors la critique. La mathématique se trouvait désaxée, commandée qu'elle était par deux éléments qui demeuraient en droit à des niveaux ontologiques distincts. Comment le nombre, pur abstrait, peut-il supporter le coefficient minimum d'existence impliqué par le caractère nécessaire du jugement? Faut-il résorber dans la pure idéalité du nombre l'affirmation d'existence qu'enferme le jugement, ou bien réifier le nombre en identifiant, pour le moins, son être à celui du jugement? N'y aurait-il pas enfin à ce dilemme qu'Aristote a laissé comme insoluble, une solution plus nuancée qu'une unification toujours arbitraire?

Le développement des mathématiques pures, de celles qui considèrent spontanément le nombre nombré comme un intrus — ou même une impureté — et qui, d'autre part prétendent bien atteindre la nécessité absolue, ne pouvait qu'accuser le dilemme. Était-il dès lors possible de conserver comme valide en mathématiques la théorie aristotélicienne du jugement? Devait-on l'abandonner complètement, tout de même qu'on abandonne une théorie inhospitalière à un nouveau cas, et reconstruire une autre théorie adaptée aux mathématiques, mais qui ne pourrait pas ne pas régenter indirectement tout le réel; ou bien pouvait-on, en restituant aux entités mathématiques toute l'ampleur de leur possibilité de réalisation, conserver la structure du jugement et par là même une notion de la science susceptible de valoir analogiquement et pour les mathématiques et pour les autres sciences? On voit qu'à tout le moins, la question se posait. Elle s'est posée : tel nous paraît être, du point de vue qui nous occupe, le sens de l'effort si original de M. Brunschvicg. Nous aurons donc à examiner la solution proposée par l'illustre maître, mais nous voudrions tenter ici de reprendre à la base ce point très précis du problème : l'analyse de l'activité de jugement en mathématique conduit-elle à infirmer la théorie classique, et plus précisément l'objet mathématique offre-t-il encore matière suffisante à la distinction du concept et du jugement, ou du moins à une hiérarchie qui autorise à conserver inchangée la structure de celui-ci? La puissance d'affirmation ou de négation dont l'esprit fait preuve dans le jugement n'est-elle pas assez forte pour dominer les cas dans lesquels elle s'exerce, et ne conserve-t-elle pas la même allure en dépit des modifications que lui impose son objet : la perspective idéaliste ne pourrait évidemment qu'affermir cette conclusion, supposé qu'elle soit vraie.

Nous partirons donc de l'observation : nous voulons dire de l'examen de quelques jugements et nous nous efforcerons de grouper les cas qui par leur similitude mettent en évidence une sorte de convergence interne, et semblent être la manifestation progressive d'un même élément. Celui-ci, mis en évidence par l'écart même qu'il subit d'un cas à l'autre, saisi en quelque sorte par sa différentielle, il restera à le préciser. De plus nous nous adresserons de préférence aux jugements les plus abstraits. D'une part en effet ils sont plus homogènes au domaine mathématique intrinsèquement envisagé, ils engagent par leur nature même une question de droit, ce qui compensera pour partie l'infirmité congénitale de toute démarche inductive; d'autre part, écarter la possibilité de toute représentation imaginative contraint de demeurer au niveau maximum d'intelligibilité qu'autorise le cas mathématique. Il reste que les choix que nous avons à faire demeurent arbitraires, non seulement « extensive » en ce sens qu'une même propriété du jugement eût apparu avec une égale transparence sur des exemples semblables — et ceci importe peu — mais encore en ceci que d'autres cas pourraient indiquer éventuellement d'autres notes propres au jugement mathématique. Procédant à une critique de la théorie du jugement, nous accepterons, au moins à titre d'indication, les grandes divisions qu'elle implique : et nous utiliserons la distinction des modes comme premier principe de classification. Le seul fait qu'elle puisse s'appliquer au cas mathématique, et que, comme on le verra, elle ne demeure pas un cadre vide, est assez symptomatique. Tous les jugements mathématiques sont nécessaires, tel du moins paraît être l'accord commun à leur égard. Et il est bien clair que dans l'ensemble des jugements, ils jouissent en effet d'une nécessité distinctive. Est-ce à dire que cette nécessité soit rigoureusement univoque, et qu'une analyse plus attentive n'y puisse distinguer des nuances assez semblables à celles qu'offre l'activité de jugement prise en toute son ampleur, c'est précisément ce qu'il faut examiner.

Or il apparaît immédiatement que les énoncés mathématiques sont souvent assez loin de la simplicité idéale à laquelle on veut parfois les réduire. L'exemple de Kant : $7 + 5 = 12$ a trouvé sous la plume des philosophes une fortune non moins étendue que la somme des angles d'un triangle : un exemple en vaut un autre et nous n'insinuons pas ici l'ombre d'une critique : mais un exemple ne doit pas rendre oublieux du reste, même lorsqu'il porte sur les principes tout premiers, parce qu'il est toujours difficile et hasardeux de spéculer sur les principes sans accepter le contrôle de leurs conséquences. De cette proposition : « Toute fonction continue dans un intervalle fermé y touche son maximum » à cette autre « Le trinôme du second degré passe par un maximum ou un minimum », il y a le même écart que de l'universel au singulier : et la perception du nécessaire qu'éprouve l'esprit dans l'un et l'autre cas est très loin d'être la même. Et des deux propositions qui précèdent à cet autre groupe : « La constante d'Euler peut être un nombre algébrique » ou encore « Les zéros de la fonction ζ (s) peuvent être sur la droite $x = (1/2)$ » ou enfin « Il est possible que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, » il y a le même écart que de l'existant au possible. Il conviendra donc d'examiner chacun des trois cas pour lui-même : il n'est pas à priori évident que le comportement des éléments du jugement demeure identique, ni même que ceux-ci se distinguent toujours clairement du jugement lui-même.

* * *

Nous commencerons par le jugement que nous appellerons nécessaire et nous nous arrêterons à l'exemple indiqué. « Toute fonction continue dans un intervalle fermé y touche son maximum » (1). Il pourrait paraître qu'il y a entre tous les termes de ce jugement une parfaite homogénéité du point de vue de l'être. La notion de maximum n'est pas en effet surajoutée à celle de fonction, et il paraît difficile de déceler une priorité même logique en faveur de l'un des deux termes. Non seulement fonction et maximum étant pris dans leur acception la plus abstraite se trouvent, négativement en quelque sorte, affectés du même coefficient ontologique — et nous sous-entendrons toujours ce point dans ce qui suivra — mais à l'intérieur du domaine mathématique on n'aperçoit pas à priori l'analogue du condition-

(1) Nous considérerons l'expression « fonction continue dans un intervalle fermé » comme formant un tout. En sorte que le souci de donner un énoncé correct n'entraîne pas d'analyses inutiles pour notre objet.

nement réciproque dont s'accompagne normalement le passage de la substance à la qualité, ou en termes logiques du sujet au prédicat. Il est de la natuıe même d'une fonction de prendre une valeur plus grande que toutes les autres, et en retour la notion de maximum implique nécessairement celle de variation. Celle-ci, à son tour, trouve dans le cas des fonctions sa manifestation la plus directe. La propriété pour une fonction d'avoir un maximum est si immédiate et la notion de maximum paraît si peu séparable de celle de fonction que l'affirmation : « Toute fonction a un maximum » semble bien capable d'absorber dans un unique fait tout ce que pouvait avoir d'original les deux notions composantes. Ainsi le jugement $7 + 5 = 12$ se résout pour l'esprit en un fait si simple qu'il n'y a plus place pour les deux concepts $7 + 5$ ou 12, lesquels se diluent dans l'unique affirmation qui constitue le jugement. L'existence — de quelque qualité générique qu'elle soit d'ailleurs — se distribue donc en ces jugements nécessaires de manière uniforme, et la théorie classique qui repose métaphysiquement sur une différentiation existentielle se trouve inapplicable.

Il n'y a là cependant qu'une vue assez superficielle. La rigoureuse convertibilité du jugement $7 + 5 = 12$ n'appartient pas au jugement qui nous occupe. De quelque façon qu'on applique les règles de la conversion, on n'aboutit pas à une proposition vraie. Il serait faux par exemple d'affirmer que toute fonction qui touche un maximum soit continue. Mais il y a plus : les deux notions de fonction et de maximum peuvent et doivent se définir indépendamment l'une de l'autre. Nous disons qu'elles le doivent parce que précisément, il y a un théorème qui indique le mode de leur compénétration, et qu'un théorème ne se réduit pas à l'attribution de la définition au défini. Il est d'ailleurs bien clair que tel est le cas et que le théorème énoncé est un théorème authentique ne se réduisant à une tautologie que pour le regard inexpérimenté. Les deux notions de correspondance et de plus grande limite sont, formellement entendues, parfaitement distinctes. De la perception confuse de « valeur la plus grande » à la définition précise du maximum, il y a tout un travail de minutieuse analyse qui a pour singulière conséquence de rétablir dans le cas mathématique, une diversité que le sens commun trop frustre éliminerait, et qui se trouve néanmoins très harmonique à la notion que le même sens commun se fait du jugement. La notion d'ensemble serait peut-être un ancêtre commun aux deux notions envisagées, mais elle subit deux explicitations radicalement différentes : soit qu'on l'analyse par comparaison et comme de l'extérieur, soit qu'on en étudie la structure intime; cette opposition de points de vue est un fondement suffisant de l'activité indiquée : aussi bien il est légitime de considérer les éléments conceptuels qui interviennent dans le jugement, ayant déjà subi l'élaboration qui les a spécifiés. Nous avons simplement ici occasion d'appliquer l'une de nos remarques liminaires : pour avoir des points de contact, les deux domaines du représentable et de l'intelligible n'en sont pas moins distincts : autre chose est d'avoir du complexe : *fonction-maximum* une image dite intuitive sous la forme familière d'une courbe — nous voulons dire d'un trait continu — autre chose d'en donner une définition précise : l'apparente clarté est ici une fallacieuse simplification.

Confirmation est donnée de l'indépendance des deux notions : fonction et maximum, du fait qu'on les rencontre dissociées et incapables de se prêter à cette espèce de composition nouvelle qu'on appelle un jugement. La notion de correspondance n'est pas bannie de l'*analysis situs*, il n'en résulte aucunement que les fonctions qu'on rencontre dans ce domaine des mathématiques possèdent maximum ou minimum. Le calcul des variations offre un cas réciproque : fonction y devient en quelque sorte attribut; ou, si l'on veut, figure au titre de variable dans une autre fonction. La notion de maximum n'est plus du tout liée à la fonction attribut comme dans notre exemple : celle-ci y intervient par l'ensemble de ses valeurs, non plus comme champ possible d'analyse. On voit donc que le jugement : « Toute fonction continue dans un intervalle fermé y touche son maximum » n'est pas plus susceptible d'une conversion sémantique que d'une conversion grammaticale. Et la raison en est que sujet et prédicat se trouvent constitués indépendamment du jugement. Nous exprimons cette antériorité logique qui s'impose comme un fait en disant précisément que sujet et prédicat — fonction et maximum — sont deux concepts correspondant respectivement — au niveau des entités mathématiques — à deux réalités indépendantes et douées d'un être propre.

Il y a plus. Fonction et maximum n'interviennent pas et ne peuvent intervenir dans le jugement d'une manière quelconque, générique. Si fonction ne dit pas de soi maximum, il est bien clair que dans notre énoncé, on ne peut viser que celles des fonctions susceptibles de posséder un maximum, ou encore on envisage la notion de fonction en tant qu'elle est susceptible d'interférer avec celle de maximum. En retour, la fonction envisagée — et précisée une première fois du fait qu'elle intervient dans le jugement, une seconde fois, du fait qu'on s'arrête à telle fonction et non à telle autre — aura par sa nature une répercussion sur la façon même de définir le maximum. Cette définition demeurera formellement indépendante, et nous n'apportons pas de restriction à ce qui précède, mais il n'est pas possible d'attribuer n'importe quelle sorte de maximum à n'importe quelle sorte de fonction. C'est-à-dire que les deux concepts primitifs subissent, l'un par l'autre, et du simple fait de l'énoncé du jugement, une orientation réciproque. Il en est un peu comme de deux circonférences : on peut les envisager chacune pour soi; mais si on étudie leur contact, il y a du même coup sur chacune d'elles un point distingué qui précisément est le point de contact. Il est tout à la fois un point comme tous les autres et le seul point qui intéresse. Et il est à priori inutile de tenter de réduire l'un à l'autre ces deux rôles du même élément, nous dirons volontiers ces deux fonctions, qui dérivent de points de vue opposés. Ainsi chaque concept jouant dans le jugement un rôle distingué — nous voulons dire distingué entre tous ceux qu'il est capable de jouer — il est très naturel de lui attribuer en fonction du jugement, non pas une réalité nouvelle, mais à tout le moins une détermination qui est un droit nouveau à l'existence. Existence ici idéale, redisons-le, mais qui peut difficilement être niée, par là même que l'expérience contraint d'y reconnaître des degrés.

Mais, objectera-t-on, il va sans dire que si on met en relation deux structures, elles sont définies comme formellement distinctes. Dans le cas contraire, elles ne pourraient — eu égard à la simplicité de la notion de structure — que coïncider. Les nuances qu'il est aisé de déceler dans ce cas conservent-elles un sens lorsque l'un au moins des termes du jugement devient une pure qualité ou lorsque le jugement consiste en la simple affirmation d'existence ? On peut rattacher la structure qu'implique la notion de maximum à une synthèse différente de celle que traduit son attribution à « fonction » et obtenir ainsi une définition indépendante. On pressent immédiatement que ce recours deviendra impossible pour les propositions aussi nombreuses qu'importantes qui commencent par « Il existe ». Et dans l'entre deux, il y a tous les cas où la définition de la propriété attribuée implique le sujet.

Commençons par ces derniers, et soit par exemple « Toute fonction continue est intégrable ». Nous pourrions ici procéder à la même série de remarques, et faire de la non convertibilité de cette proposition l'indice d'un ordre à la fois logique et ontologique entre les éléments qui la constituent. Examinons donc la difficulté à un stade plus accusé en prenant cet autre énoncé qui précise le précédent : « Toute fonction dont les points de discontinuité forment un ensemble de mesure nulle est intégrable ». Il y a ici convertibilité. Discontinuité et intégrabilité impliquent d'autre part, dans leur définition, la notion de fonction. Le jugement ne consiste donc plus dans l'interférence de deux structures, mais en celle de deux propriétés, de deux qualités qui appartiennent à des titres divers à cette même notion de fonction. Il n'en est pas moins vrai que la discontinuité a une définition ponctuelle — ou mieux de type infinitésimal — l'intégrabilité une définition d'intervalle — disons globale pour ne pas exclure certains cas. Que l'une et l'autre définition s'appuient sur la notion de correspondance ne saurait atténuer la précédente opposition qui est de type formel. Il y a bien encore indépendance logique. Et il y a également détermination réciproque. Discontinuité n'intervient dans l'énoncé précédent qu'en subissant l'attraction du point de vue totalitaire qui dit intégration : le mot « mesure » que doit conserver l'énoncé en est le signe irrécusable. Les discontinuités n'interviennent que par leur ensemble et plus précisément par la mesure de celui-ci, c'est-à-dire à un état en quelque sorte intégré (1). Il semble donc difficile de s'écarter de l'ordonnance générale qu'avait décelée la première de nos analyses. Bien plus,

(1) Il y aurait ici beaucoup d'autres précisions intéressantes à signaler, touchant la compénétration du continu et du discontinu à la faveur de l'ordre, mais ceci est en marge de notre propos.

la convertibilité qui est en mathématiques le signe distinctif du « définitif » sanctionne en quelque sorte l'ordonnance en question en laissant rejaillir sur elle quelque chose de la nécessité qu'elle renferme.

Comme jugement purement existentiel, et sans quitter la catégorie de ceux que nous appelons nécessaires, arrêtons-nous à celui-ci : « Il existe [sous certaines conditions qu'il est inutile que nous transcrivions ici] une fonction effectuant la représentation conforme de deux aires planes l'une sur l'autre ». Il est clair, dans ce cas, que la possibilité même d'une distinction formelle entre le sujet et le prédicat disparait, attendu que l'existence échappe à toute définition. On pourraît faire une double instance : l'existence elle-même pourrait être envisagée comme répondant à un concept distinct se prêtant d'ailleurs parfaitement à une enquête semblable aux deux précédentes; d'autre part, si l'existence des entités mathématiques ne se confond pas avec les formes qui la manifestent, ces dernières qui sont d'ailleurs susceptibles de définition précise ne pourraient-elles pas être envisagées comme constituant un substitut de l'existence : en un mot, un concept ou un ensemble de concepts ne pourraient-ils pas remplacer « Il existe » et jouer dans notre jugement le même rôle que maximum ou intégrabilité dans les deux précédents ?

Ce serait, croyons-nous, forcer, par esprit de système ce qu'apporte l'observation : des discussions restent ouvertes sur la nature de l'« existence mathématique » et du point de vue philosophique que nous adoptons ici, nous ne pouvons les interpréter que de l'irréductibilité radicale de l'existence à toute définition du type formel (1). La fonction effectuant la représentation conforme existera : pour certains si on en donne l'expression, pour d'autres si on indique un moyen d'obtenir cette expression, nous ne voulons pas ici entrer dans ce débat. Tous sont d'accord — et c'est ce que nous retenons — pour accorder au mot « existe » une signification et une portée qui sont de soi étrangères à la notion de représentation conforme : les signes adoptés pour manifester l' « exister » peuvent varier, et même assez notablement, ils demeureront irréductibles à la propriété « correspondance

(1) Ce que nous ne soutiendrions en aucune façon d'un point de vue technique.

bi-univoque conservant les angles» qui définit «représentation conforme ». Considérée soit en elle-même soit dans ses traces en quelque sorte matérielles, l'existence entre en composition avec une notion qui lui est logiquement antérieure, et cette composition est tout l'objet du jugement. Le concept « représentation conforme » a bien une certaine existence, il n'est pas devant l'esprit un pur néant, mais il est, dans le jugement, polarisé dans le sens d'une existence nouvelle. La détermination réciproque dont nous parlions ne demeure pas entièrement semblable à ce qu'elle était. Son contour paraît se dissiper, mais en retour, au lieu d'être un droit nouveau à l'existence, elle est cette nouvelle modalité d'existence elle-même.

Et ceci nous amène à conclure que dans cette première catégorie de jugement les distinctions formelles qui apparaissaient de prime abord comme constitutives des divers éléments recouvrent au vrai une distinction qui pénètre plus avant dans la nature du jugement : chacun des concepts subissant une détermination nouvelle, mais se trouvant aussi en une sorte d'état progressif vis-à-vis de l'existence, ceci d'ailleurs impliquant ou suppléant cela.

Notons enfin que les remarques précédentes dépassent les exemples qui les ont rendues sensibles. La vraie convertibilité dans le premier cas, la nature en une façon indéfinissable et indécise de l'existence dans le troisième ne font pas acception des cas particuliers : or ces deux points constituent des motifs de preuve ou bien essentiels ou bien suffisants. Quant au second cas, il convient tout d'abord de noter qu'il est tout à fait exceptionnel. Le type idéal de la démonstration est sans doute de procéder par équivalence et d'arriver par conséquent à des conditions nécessaires et suffisantes. Tel est bien le jugement $7 + 5 = 12$. Mais il n'est besoin ni d'une très longue expérience ni d'un recours aux démonstrations transcendantes pour constater que cet idéal est assez loin de la réalité, pour éprouver d'autre part l'extrême difficulté qu'il y a à obtenir, un problème étant posé, soit l'ensemble de *toutes* les solutions qui y satisfont, soit même les conditions à la fois nécessaires et suffisantes auxquelles ces solutions doivent satisfaire. Nous ne voulons pas ici allonger la liste des exemples, mais les quatre notions : dérivation, intégration et leurs deux réciproques offrent un cas assez typique (1). Il restera, dans ces cas d'équivalence que le jugement mathématique ne se réduit jamais au principe d'identité et que la séparabilité des éléments qu'il intègre est toujours au moins égale à cette même séparabilité dans le cas du jugement $7 + 5 = 12$ sur lequel nous reviendrons un peu plus loin. Nous sommes donc, après observation, autorisés à conclure que cette première catégorie de jugements mathématiques se plie assez bien à la conception aristotélicienne du jugement pourvu qu'on étende aux mathématiques elles-mêmes le terme « existence » qui est fait d'ailleurs pour déborder la réalité concrète, pourvu d'autre part qu'on ne traduise pas, par un concordisme trop simple, la définition en substantification, et les entités mathématiques en substances : elles peuvent être relation sans perdre leur réalité, laquelle est, — à son plan, et malgré l'apparente contradiction des termes — transcendantale.

* * *

Les jugements mathématiques sont tous en droit nécessaires appuyés qu'ils sont sur une démonstration qui seule les rend valides. Cependant les jugements nécessaires dont nous avons indiqué des exemples ont en quelque sorte des harmoniques qui les manifestent et permettent de les découvrir; qui, en retour, tirent leur propre nécessité des propositions qui marquent, dans l'ordre nécessaire, un maximum. Nous prendrions comme exemples de ces harmoniques inférieurs en relation avec les jugements déjà cités : « Le trinôme du second degré passe par un maximum ou un minimum »; « La fonction exponentielle est fonction dérivée et intégrable »; « La fonction $Z = z^4$, effectue la représentation conforme du premier cadrant sur le cercle armé d'une coupure ». Ces cas ne nous apportent, semble-t-il, rien de nouveau. On pourrait appliquer, à chacun d'eux respectivement, une analyse semblable à celle qui dans le cas homologue a déjà établi l'existence

(1) Examiner de ce point de vue les *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* de M. LEBESGUE. Des quatre problèmes qui peuvent se poser et qui paraissent cependant assez voisins, le seul qui ait reçu une solution adéquate est celui que nous avons pris comme second exemple.

du sujet et du prédicat. Aussi bien n'avons-nous pas fait état dans ce qui précède de la quantité des différents termes. L'activité de jugement demeure toujours en son fonds identique à elle-même, quel que soit le degré de généralité ou d'abstraction où elle s'exerce. Les entités mathématiques paraissent bien d'ailleurs échapper à la distinction : singulier universel, puisqu'elles jouissent comme concepts du premier de ces caractères, et du second comme abstraites.

Mais précisément la distinction doit être prise non par comparaison avec l'extra-mathématique mais bien en l'intérieur même du domaine mathématique. Elle recouvre alors toute sa force. Les commençants le savent bien qui entendent mieux les exemples que les énoncés généraux. N'y aurait-il pas là un signe indiquant en faveur de tout jugement particulier une simplicité plus grande, disons une sorte de connivence avec le désir de l'esprit en ses premières démarches ? Or, de cette proposition « toute fonction... a un maximum » à cette autre « le trinôme du second degré a un maximum » — et on ferait une remarque analogue pour les autres cas — toute la différence est en ceci : la distribution d'existence qui ne fait pas acception des termes dans le premier cas les distingue dans le second. Uniformément abstraite dans le premier cas — par quoi nous n'entendons nullement signifier irréelle — elle est dans le second plus concrète en faveur de l'un des termes — par quoi nous n'entendons pas non plus signifier plus réelle. — Il en résulte que, du point de vue de l'existence, le premier jugement n'est affecté d'aucun sens privilégié : il est en quelque sorte isotrope. Le second, au contraire, a un sens déterminé lequel va de « trinôme » à « maximum », il est, si l'on veut, polarisé. Et si le jugement particulier semble plus facile à formuler, c'est sans doute parce qu'il est plus immédiatement traduisible en symboles plus concrets, mais c'est surtout en vertu de sa dissymétrie, laquelle impose un ordre de succession logique que l'esprit est ainsi dispensé de choisir.

Qu'on ne voie pas là une subtilité abstraite : l'une des difficultés que rencontre l'élaboration d'une démonstration, c'est de fixer le point de départ, lequel peut demeurer parfaitement arbitraire dans tous les cas où on aboutit à une équivalence. Par exemple convient-il de démontrer que si une fonction est intégrable, l'ensemble de ses points de discontinuité a une mesure nulle, ou bien de démontrer la réciproque ? L'habileté de certaines démonstrations est de prendre appui simultanément sur les deux notions qu'elles s'efforcent de lier, par une sorte de balancement continu; elles sont particulièrement difficiles parce que précisément chacune de leurs étapes est un point de départ nouveau, exigeant un nouveau choix que rien ne paraît impliquer. Dans notre terminologie, ces sortes de démonstrations sont entièrement construites de jugements non polarisés. Ces distinctions qui s'estompent, le résultat une fois acquis, ont au cours de la recherche une importance capitale.

Or, ce que la recherche accuse est déjà vrai de la simple compréhension d'une proposition. Pour comprendre « toute fonction ...a un maximum » il faut commencer par distinguer les termes du jugement, tandis que ce travail préliminaire est sinon tout fait, du moins fort ébauché dans l'énoncé : « Le trinôme du second degré a un maximum », où l'un des termes se présente comme distingué sous le rapport de l'existence. La conséquence, en ce qui concerne notre enquête, paraît assez claire : s'il existe effectivement des jugements polarisés et d'autres qui ne le sont pas et si cette distinction se traduit en faits observables, il faut conclure que son principe n'est pas moins réel que ses conséquences. Il faut donc conclure que c'est pour le jugement une propriété intrinsèque que la différenciation existentielle des éléments qu'il intègre : là où elle n'est qu'implicite, l'esprit doit par un travail supplémentaire l'extraire de l'énoncé du jugement pour donner à celui-ci la plenitude de son intelligibilité.

A cette première contribution, les jugements de notre seconde catégorie en ajoutent une autre. Il est tout d'abord des cas où l'attribution est non plus l'attribution d'une propriété, mais une pure attribution d'existence. Ainsi par exemple : $1/2 + 1/4 + \ldots = 1$. Un tel jugement demeure polarisé et souligne la possibilité d'une antériorité et d'une indépendance logiques dans l'ordre exclusivement existentiel. Le point d'appui implicite est constitué ici par la somme d'un nombre fini de termes du premier membre, à laquelle correspond un premier type d'existence. La preuve en est que si ce point d'appui vient à manquer —

qu'on songe à la formation des transfinis ordinaux au moyen du second principe de Cantor — l'affirmation continue dans le jugement s'atténue singulièrement. Les deux termes du jugement se distinguent ici exclusivement par la qualité d'existence qui leur convient respectivement. On pourrait substituer au premier membre toute autre suite convenablement choisie, sans modifier essentiellement la structure d'un pareil énoncé. L'essentiel tient dans les points. Nous aurons à examiner ultérieurement en quoi consiste ce jugement, c'est-à-dire ce que signifie ici le signe égal; retenons que l'attribution d'existence, du fait même qu'elle vise une entité singulière, implique une dualité de modes qui semble dépasser radicalement toutes les distinctions de type formel. L'existence singulière qui sert d'appui au jugement aboutit à une autre existence, singulière cependant elle aussi; on ne saurait les identifier rigoureusement sans réduire un pareil jugement à une pure tautologie.

Il y a plus : le rôle privilégié de l'aspect existentiel que nous avons vu se manifester par l'enchaînement des jugements nécessaires trouve ici confirmation par une sorte de réciprocité. Revenons à nos deux exemples : « Il existe une fonction effectuant la représentation conforme de deux aires planes l'une sur l'autre »; « La fonction $Z = z^4$ effectue la représentation conforme du premier cadrant sur le cercle armé d'un coupure ». Le second jugement propose la représentation conforme comme une simple propriété de la fonction $Z = z^4$ qui, elle, joue le rôle de donnée immédiate, et de ce point de vue rien ne distingue ce troisième cas des deux premiers. Mais on notera — sans qu'il convienne d'entrer dans plus de détail — que le second jugement explicite les conditions que nous avons sous-entendues dans le premier, et auxquelles doivent satisfaire deux aires planes pour être effectivement représentables l'une sur l'autre : il ne s'agit pas d'un cercle quelconque, mais d'un cercle auquel on impose certaines conditions topologiques. Or ces conditions ne sont pas ici imposées à priori : elles dérivent de l'existence et de la nature de la fonction dont on part. Il en résulte que la notion « représentation conforme de deux aires planes... » qui dans le premier de nos deux jugements pouvait sembler n'être qu'une pure définition à priori, se trouve implicitement commandée par tout un ensemble de jugements de seconde catégorie harmoniques au jugement nécessaire. Les conditions que, dans ce dernier énoncé, on doit imposer aux aires tiennent compte des conditions auxquelles on constate satisfaire les cas de représentation conforme dérivant de fonctions connues. Et si les jugements nécessaires se résolvent en définitive en une attraction vers l'existence subie par un concept logiquement antérieur, c'est que ce concept possède déjà, de par les jugements harmoniques de la seconde catégorie, un ordre à l'existence; si on accepte ce langage, ce sont les jugements polarisés qui donnent en quelque sorte le branle à toute la dynamique du jugement. Nous entendons bien que celle-ci aboutit à un équilibre, mais la façon même dont il se réalise nous laisse entendre qu'il n'est stable que dans l'existence et qu'il aura à harmoniser des éléments réellement différentiés, nous voulons dire susceptibles d'être différentiés dans l'ordre de l'existence.

* * *

Nous n'avons pas épuisé tous les types de jugements auxquels donne lieu le champ ou plus exactement l'activité mathématique. La présomption de nécessité que l'on accorde assez spontanément aux énoncés mathématiques ne doit pas arrêter notre enquête. Il y a tout d'abord des jugements d'impossibilité, lesquels ne constituent qu'une forme négative de jugements nécessaires. Il y a des théorèmes de non existence qui limitent et précisent des théorèmes d'existence. Ainsi par exemple : une équation aux dérivées partielles régulière n'admet pas d'autre intégrale que l'intégrale régulière [toutes les conditions habituelles étant précisées]. La forme négative de l'énoncé est la simple marque de la nature de la démonstration qui l'établit, et qui part de la solution dont on a déjà démontré l'existence, pour établir qu'il n'y en a pas d'autre. Mais si l'impossible partage avec le nécessaire de n'avoir pas de degré, le non impossible n'a aucune raison de se réduire même en mathématiques à une catégorie univoque. La preuve en sera faite par simple examen des faits puisqu'il s'agit d'une preuve négative. Rappelons les exemples déjà cités. « Il est possible que la constante d'Euler soit un nombre algébrique »; « Il est possible que les zéros de la fonction $\zeta(s)$ soient situés sur la droite $x = 1/2$ »; « Il est possible que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ».

Le mot possible n'a pas pour le mathématicien, le même contenu dans ces trois cas. Dans le premier, il s'agit d'une non impossibilité, absence de contradiction formelle dans l'énoncé, sans qu'une inférence fondée autorise à décider pour ou contre. Dans les deux derniers cas, il y a présomption en faveur de l'affirmative, mais pour des raisons fort diverses et de complexité croissante. L'enfant qui, recherchant un lieu géométrique, constate que tous les points s'alignent, conclura assez spontanément : le lieu est une droite; et ce serait, non sans quelques transpositions nécessaires l'analogue de notre second jugement de possibilité : nous ne l'avons cité que pour indiquer que de tels cas se présentent réellement. Jusqu'à quel point la démarche de l'enfant est-elle légitime : doit-on tenir pour rien un ensemble concordant d'expériences qui, si elles n'ont jamais qu'un rôle matériel, mettent sur le chemin du vrai ? Il est bien clair qu'on ne passera jamais empiriquement du « Cela est possible» au « Cela est » et que seule cette dernière assertion confère l'être mathématique à la proposition correspondante, mais si l'on réduit tous les jugements à leur contenu exclusivement objectif sans tenir compte de la manifestation de ce dernier à l'esprit qui affirme, c'en est fait du possible dans le très grand nombre des cas où il ne constitue qu'une évaluation approximative d'un état objectivement et actuellement déterminé. Le possible mathématique ne semble pas se distinguer, sinon par son objet, du possible habituellement reçu : il est à la fois une accumulation de probabilités et plus que cette accumulation : son état de convergence. Et l'on pourrait même pour cette sorte de possible du moins, voir dans le cas mathématique le type idéal auquel tout autre doit être réduit. Le calcul des probabilités n'a pas d'autre inspiration : les mathématiques l'imposent sans pouvoir l'accepter pour elles-mêmes au titre de critère définitif, et c'est précisément l'indice de leur suprématie.

Notre troisième jugement donne lieu lui-même à deux étapes. « Il est possible que $\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}$ » et : « Il est possible que $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ ». La première proposition peut être démontrée à condition d'admettre l'axiome du choix. La seconde qui constitue l'hypothèse du continu n'a pas encore été, à notre connaissance, l'objet d'une démonstration indiscutée.

Or, si la distribution des zéros de $\zeta(s)$ est l'objet d'une induction qui supplée provisoirement une démonstration véritable, et véritablement possible, nous avons ici des démonstrations qui procèdent bien comme font et doivent faire les démonstrations mais qui impliquent une hypothèse d'un type nouveau. Elle est pour les uns nécessaire, pour d'autres possible, mais pour ces derniers, il s'agit non plus d'une possibilité, simple attente d'un jugement nécessaire qui sanctionnera, mais d'une possibilité objective. L'axiome du choix est beaucoup plus qu'une non absurdité, un laisser passer accordé à l'esprit; l'élégance qu'il introduit est un bon critère en sa faveur dans tous les cas où il permet de retrouver des résultats connus. S'il permet une meilleure économie c'est qu'il va très probablement assez avant dans la nature des choses et qu'il en exprime une aptitude refusant peut être toute explicitation mais qui n'en est pas moins réelle. Il y aurait là, en mathématiques, l'analogue d'un jugement de possibilité, possibilité exprimant ici un être en tendance échappant par quelque côté à la nécessité absolue. Il n'y a là qu'un rapprochement auquel il faut se garder d'attribuer trop d'importance. Il reste que l'axiome du choix et les jugements qui en dépendent, plus généralement tous ceux qui concernent le transfini devraient être exclus des mathématiques si on y admettait pour règle unique une nécessité univoque. Cet ostracisme paraît tout à fait illégitime.

On voit donc que le possible trouve en mathématiques matière à application, et que la richesse des nuances qu'il y reçoit soutient parfaitement la comparaison avec l'ampleur du possible concret. D'autre part, s'il peut paraître malaisé de déterminer avec précision la portée des jugements de possibilité — et sur ce point la technique doit conserver un rôle prépondérant — il est en retour assez évident que les concepts composants y sont indépendants et jouissent, en regard du jugement, d'une antériorité non seulement logiquement très réelle, mais psychologiquement certaine. La notion de nombre algébrique et la constante d'Euler sont parfaitement définies, et nul mathématicien ne songe à douter de leur réalité. Celle-ci ne leur échoit évidemment pas d'une proposition qui demeure une simple non-impossibilité. Il est inutile d'insister sur ce point. Marquons plutôt que si le jugement n'arrive pas à se constituer c'est que les deux concepts intégrants demeurent disjoints et que, dans l'ordre de l'existence, ils se trouvent séparés au lieu d'être simplement différentiés. Pour reprendre notre comparaison, on n'apprécie le contact de deux courbes que par une différentiation, perceptible au seul voisinage du point de contact. Considérées ailleurs, elles apparaissent seulement comme distinctes. Les jugements possibles sont ceux pour lesquels la zone d'interférence des deux concepts demeure voilée. Ce cas ne fait donc que souligner négativement le rôle primordial joué par le concept au sein de l'activité de jugement. Les essences mathématiques sont très loin d'avoir en regard de l'existence un comportement uniforme et le jugement ne fait qu'épouser les modalités de celui-ci. Mais du jugement nécessaire au jugement possible, de l'attribution d'une qualité à celle de la pure existence, c'est toujours le même processus : le jugement repose sur l'attraction vers un nouveau mode d'existence de deux, ou même d'un seul concept, qui lui sont logiquement antérieurs. Ces concepts donnent d'ailleurs la mesure de leur réalité par la sorte de différentiation qu'ils s'imposent réciproquement dans l'ordre de l'existence.

* * *

On pensera peut-être que nous n'avons fait systématiquement appel qu'à des jugements fort élaborés et que la distinction que nous avons cru observer se résorbe à mesure qu'on remonte vers les énoncés qui sont au principe des mathématiques ou même au principe des diverses théories. Les jugements que nous avons cités en exemple prennent appui sur des concepts. Mais, « fonction » et « maximum » par exemple sont-ils des concepts simples primitifs, ou au contraire ne sont-ils pas, surtout avec le sens qui leur est attribué dans l'énoncé : « Toute fonction... touche son maximum », l'aboutissant de deux théories : ne dérivent-ils pas de jugements qui servent précisément à les définir et dont ils ne peuvent par conséquent se distinguer réellement ? Et si cette coïncidence ne se produit pas à la première étape, n'est-il pas possible, en remontant de jugement en concept et de concept en jugement, d'arriver à un « premier » qui, de par sa notion même, exclura toute antériorité ou postérité logique, et qui sera l'identification pure et simple du concept et du jugement ? Or — raisonnons toujours sur le même exemple — la définition rigoureuse du maximum repose en définitive sur le principe des suites. Nous ne pensons pas utile de reproduire les intermédiaires, d'ailleurs classiques. Est-il donc vrai que dans cet énoncé: « Le terme général d'une suite naissante bornée supérieurement tend vers une limite », toute distinction disparaisse ? Nous assistons au contraire à une transformation inverse : la notion de maximum qui paraissait claire et dont la définition semblait aisée, intuitive, exige pour être précisée la définition de « croissance », et de « limite », qui sont elles-mêmes complexes. Le jugement : *a* est plus grand que *b*, peut évidemment s'entendre comme pure relation, mais il faut alors concevoir cette relation comme aboutissant effectivement à deux termes qu'on oppose : plus grand n'est pas une notion simple et implique premièrement « différent de » : qu'est-ce à dire sinon que *a* est conçu comme logiquement distinct de *b*, et que *a* et *b* réapparaissent comme s'opposant dans l'intériorité de la relation où on pensait les résorber ? Quant à la notion de limite : ou bien on doit pour la définir compliquer de l'idée de variation celle de plus grand et plus petit; ou bien on doit la faire équivaloir à l'intuition du continu et l'on est ramené à un jugement de pure existence : « Le continu existe ». Du point de vue qui nous occupe, ces jugements : « la limite existe »; « le continu existe » présentent la même structure que celui que nous avons analysé : « Il existe une fonction effectuant la représentation conforme ». La seule différence est qu'on ne pourra pas démontrer, c'est-à-dire rattacher à une proposition logiquement antérieure, mais là encore le mot continu sera caractérisé par une propriété distinctive et conçue dans le jugement comme distincte de l'existence qu'elle se voit attribuer.

Il est donc bien vrai que le pouvoir séparateur de l'analyse se trouve limité, en ce sens qu'elle rencontre à son principe même des éléments qui lui demeurent irréductibles : mais cette irréductibilité n'est pas synonyme de « simplicité ». L'irrationnel que rencontre l'analyse c'est précisément une complexité qu'il serait de sa nature d'analyser à nouveau, une affirmation d'existence qui est, même en mathématiques, un fait un, mais non pas simple : il implique en son unité non pas l'opposition du même et de l'autre, mais du même au même : du continu divisible au continu existant, de la possibilité du terme à l'existence du terme. Refuser cette distinction équivaudrait à mettre en doute le fondement de l'analyse.

La dualité qui nous a paru être impliquée dans les jugements les plus élaborés et que nous traduisions par la réalité du concept n'est donc que la conséquence normale de la structure toute semblable des jugements premiers. La dialectique platonicienne du même et de l'autre rendrait ici assez bien compte des choses. Comment le divers pourrait-il naître de l'identique : s'il n'y avait pas, à la base même de l'activité mathématique, un certain écart et partant une certaine dualité, comment d'une part le progrès serait-il possible qui s'inscrit précisément entre l'existence possible et l'existence réelle, qui réduit dans des cas indéfiniment renouvelés un écart qui demeure toujours en son fonds identique, inscrit qu'il est en la nature des choses; comment d'autre part constaterait-on dans les énoncés mathématiques une dualité dont aucune différentiation progressive ne pouvait rendre compte ? L'enchaînement des propositions ne fait qu'accumuler sur elle-même une distinction initiale : elle la rend plus sensible sans en modifier la nature.

Si nous parlions d'énoncés géométriques, nous trouverions une complexité au moins égale, il est inutile d'y insister. Mais l'analyse comporte une branche au moins, plus abstraite que la théorie des fonctions : les premières propositions de l'arithmétique ne jouissent-elles pas de l'idéale simplicité qui a paru fuir notre analyse ? Le jugement $7 + 5 = 12$ prend-il appui sur des concepts distincts, et sinon comment ne se réduit-il pas à une pure tautologie ? Il convient tout d'abord de remarquer qu'il serait tout à fait arbitraire de vouloir réduire l'arithmétique aux seuls jugements de cette catégorie : supposant cependant qu'il en soit ainsi, nous remarquerons en second lieu que de tels jugements ne sont pas simples : nous nous contenterons, pour toute preuve à ce sujet, de renvoyer le lecteur à la démonstration qu'en a proposée Poincaré (1) qui raisonne d'ailleurs dans

(1) *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1894, pp. 371-384.

le cas général a = b + c et tire de là argument en faveur d'une théorie de la récurrence. Sans qu'il soit besoin d'aller jusqu'à la notion de récurrence, il paraît pour le moins que le jugement indiqué — comme tous ses homologues — est un véritable raisonnement qui implique dualité et pluralité non seulement de concepts, mais de jugements élémentaires.

On objectera que la conception de Poincaré ne s'impose pas et qu'on peut rendre compte du jugement précédent sans concevoir distinctement, nous voulons dire comme réellement distincts, les éléments 12 et (7 + 5). Il suffit de concevoir la collection : « douze » comme la répétition d'unités indistinctes. Elle pourra être envisagée par l'esprit sous deux aspects, mais ceci entraîne-t-il que l'idée de douze se trouve impliquée, dans ce jugement, comme logiquement antérieure et logiquement distincte de l'idée de cette collection qui s'identifie au « 7 + 5 » ? Douze est-il autre chose que la conscience prise par l'esprit de la répétition d'un même acte : passage d'un terme à un suivant ? Et « 7 + 5 » est une autre classification du même ensemble de passages. Mais, se placer à ce point de vue de la genèse du nombre, c'est rejoindre Poincaré, sauf à recouvrir des confusions souvent propres au langage philosophique ce que l'illustre savant a parfaitement tiré au clair. Et considérer la collection *douze* comme réalisée, c'est nécessairement lui prêter une forme, une idéalité qui pourra se traduire ultérieurement en propriétés de divisibilité par exemple, en possibilité de construction du nombre par des groupes d'opérations spécifiquement distincts, c'est faire du « douze » quelque chose qui est plus que la collection d'unités indistinctes et qui par là n'est pas le « 7 + 5 ».

Quelqu'interprétation qu'on adopte, on retrouve une dualité réelle. Mais l'analyse de Poincaré renferme une utile leçon, qu'il convient de ne pas laisser passer. Il est clair que le syllogisme est un instrument assez lourd : nul ne songera à exprimer en syllogismes une démonstration mathématique : ce serait souvent l'allonger sans aucun profit : il suffit que le syllogisme y règne à l'état implicite. Mais quand il s'agit d'analyses délicates dans lesquelles une clarté apparente est généralement source d'erreur, le syllogisme semble reprendre ses droits. Les mathématiques, faisant retour sur leurs propres principes pour les critiquer, font spontanément appel au type de démarche intellectuelle dont Aristote faisait la condition de la vraie science. Nouvel indice qui nous paraît marquer la parfaite compatibilité, disons mieux l'harmonie, de la théorie aristotélicienne du jugement et du raisonnement, avec ce qu'impose l'observation du développement des mathématiques.

Il n'y a là rien qui doive surprendre si on tient compte de l'intuition qui commande la technique d'Aristote. La science pour lui n'est pas le démontré, mais le nécessaire, encore que la démonstration soit l'unique procédé capable d'apprécier s'il y a nécessité ou non. Les mathématiques d'autre part ne sont pas tant sous le signe de l'identique que sous celui du nécessaire : l'identité qui y devient égalité est un procédé de démonstration; le résultat démontré implique toujours simultanément une diversité et une équivalence qui ne se rejoignent que dans la nécessité. L'achèvement d'une théorie, et son harmonie intime se marque par des conditions nécessaires et suffisantes : le nécessaire n'est pas en mathématiques une contrainte subie, il est la nature même des choses. Il est dès lors normal que la science aristotélicienne et la mathématique se rencontrant par leur sommet, elles ne diffèrent qu'assez peu dans leur exercice : elles font l'une et l'autre abstraction de leur objet en ce sens qu'elles visent à en éliminer tout ce qui est incompatible avec cette qualité pure qu'est le nécessaire; et de par cette indifférence, elles se saisissent de leur objet par une démarche qui, en droit comme en fait, révèle une même structure. L'unité de cette démarche ne fait d'ailleurs que manifester l'unité même de l'esprit, et on pourrait facilement marquer d'autres points de contact de cette double analogie; les qualifications réciproques des trois types de jugements, les principes de différentiation des concepts intégrants, d'une part, les conditions normales du progrès de la pensée d'autre part iraient, croyons-nous, à confirmer encore l'harmonie des deux perspectives. Mais il sera plus profitable de diriger et de concentrer notre enquête sur la nature du jugement plutôt que de l'étendre à de nouveaux éléments. Nous avons observé que les jugements mathématiques s'appuient sur des concepts qui s'en distinguent réellement. Le jugement lui-même n'est-il qu'une juxtaposition et en quoi consiste le lien qu'il impose; est-il union et par quelle qualification réciproque; est-il unité et par quelle nécessité interne? Comment d'autre part cette idéale nécessité rejoint-elle cette réalité que les termes du jugement revendiquaient par leur différentiation, c'est ce qu'il faudra examiner.

* * *

A la question que nous posions au début, il faut donc répondre en donnant la préséance au jugement. Aristote a pénétré la méthode des mathématiques sans avoir l'intuition de leur objet. La notion de la science s'applique à cette première des sciences plus profondément, plus réellement qu'il ne l'a sans doute cru. Son intuition a porté sur d'autres domaines que les mathématiques, elle se trouve confirmée en tout ce qu'elle a de positif par le développement réel des mathématiques elles-mêmes. Sa critique le condamnerait en établissant qu'il a manqué du sens qui lui eût permis de demeurer dans l'au-delà du réalisme, un peu étrange en ces matières, qu'il s'attache à combattre. Les mathématiques n'ont pas à renier la science d'Aristote, mais à lui rappeler qu'en droit, elles ne sont pas de ce monde. Orienter, rectifier au contact de l'expérience mathématique le contenu du concept, mais conserver la structure du jugement. Rétablir par cette modification initiale la possibilité d'existence homogène à quoi sont liés et la science et le nécessaire, telle nous paraît être la réponse à l'aporie initiale.

Nous ne pouvons achever cette première partie de notre enquête, si brève soit-elle, sans consacrer quelques remarques à la si importante contribution de M. Brunschvicg. Nous nous sommes placés à un point de vue très particulier, mais les affinités de M. Brunschvicg pour la pensée mathématique ne sont un secret pour personne. S'il s'est fait le philosophe des mathématiques, il semble que le cas mathématique des notions soit toujours implicitement présent au philosophe, où qu'il dirige son regard. « Le pur mathématique est trop abstrait, le pur fait trop pauvre pour être adéquat à l'être réel (1) » : c'est donc

(1) *La modalité du jugement*, p. 237.

bien que le pur mathématique contient éminemment toute l'intelligibilité du réel, et « ...la véritable civilisation consiste [d'un côté] à étendre à l'univers tout entier le mode d'explication dont l'analyse mathématique offre le type le plus pur... » (1). On voit la portée de telles prémisses qui paraissent être pour M. Brunschvicg encore plus vraies implicitement qu'explicitement, en ce sens qu'elles ne comportent plus à l'état implicite les restrictions dont un aveu sait toujours s'entourer.

Nous n'avons pas ici à discuter cette thèse qui ne nous intéresse qu'indirectement, et qui appellerait sans doute infirmation ou confirmation, plutôt que discussion, parce qu'elle constitue un postulat et non une conclusion. Marquons simplement deux points. Personne ne mettra en doute que de toutes les activités intellectuelles, c'est la mathématique qui exprime le mieux la nature de l'esprit, et ce que nous appelons, du point de vue où nous nous plaçons, le « postulat de M. Brunschvicg », n'est pas autre chose que l'affirmation de la valeur absolue de l'esprit.

Il en résulte bien que le cas mathématique constitue une expérience très privilégiée pour qui entreprend de déterminer le type naturel, spontané des démarches intellectuelles: elles doivent s'épanouir en ce domaine sans aucune contrainte et s'informer par elles-mêmes, ou plutôt dessiner par leur ordonnance la forme même de l'esprit. Il est donc bien vrai que le pur mathématique contient éminemment toute l'intelligibilité du réel, supposée implicitement l'équation : intelligibilité = déploiement de l'intelligence. Qui veut se borner à étudier le déploiement de l'intelligence — nous voulons dire l'ensemble des procédés qu'elle institue et l'acte qu'elle exerce pour comprendre — lira l'équation à l'envers. Elle devient exacte « ex positione » et nous l'acceptons en ce sens. Il résulte simplement de là que toute description analytique des procédés intellectuels qui se révèlerait inhospitalière au cas mathématique aurait contre elle une objection décisive. Notons encore que s'il est le plus près de l'esprit, le cas mathématique est par là même le plus abstrait — ce que, rappelons-le, nous n'opposons pas à réel; il réduit ***a priori*** la diversité des manifestations de l'être en leur imposant uniformément une homogénéité, qui procède de l'esprit. Il est donc certain que s'il y a une

(1) *Ibid.*, p. 243.

correction à effectuer pour passer du cas mathématique aux autres cas, elle ne peut aller qu'à accuser davantage la diversité qu'aura pu révéler l'analyse de l'activité mathématique, non à l'estomper : si on ignore l'erreur d'expérience on en connaît le signe *a priori*.

D'autre part, il résulte de la position même prise par M. Brunschvicg que l'activité mathématique doit être pour l'intelligence terre d'élection : et la conception que M. Brunschvicg se fait du dynamisme de l'intelligence doit trouver dans le cas mathématique la meilleure des confirmations, ou la seule s'il n'y en avait qu'une. Plus on affirme la valeur absolue de la pensée, et plus la structure de ses démarches devient autonome, inconditionnelle, indépendante de l'objet qu'elle subit. Elle devient en droit invariante, et c'est en mathématique que cette invariance se trouve en quelque sorte consacrée, parfaitement homogène à la stabilité de l'objet. Il semble bien d'ailleurs que les vigoureuses analyses qui ouvrent *La modalité du jugement* fassent au régime mathématique du jugement une part singulièrement privilégiée. C'est en effet par analogie avec une conception originale du jugement $7 + 5 = 12$ qu'on peut lever la contradiction qu'implique la théorie classique. Il serait sans doute exagéré de dire que si M. Brunschvicg dilue complètement le concept et le résorbe dans le jugement, c'est *à cause* du cas mathématique : il paraît néanmoins assez clair que ce cas a été au principe de son inspiration : il semble qu'on traduirait assez bien la situation respective des deux éléments en la comparant à une fonction. Tout de même qu'une variable n'a, comme variable, ni définition ni réalité en dehors de la fonction où elle figure comme argument, ainsi le concept n'est rien que dans et par le jugement : il ne lui est antérieur ni réellement ni logiquement, puisqu'en dehors du jugement il n'y a plus rien.

Nous n'avons pas à examiner les tenants et aboutissants de cette thèse au point de vue de l'épistémologie générale. Nous voulions simplement marquer l'importance du lien qu'elle nous paraît avoir avec l'activité de jugement en mathématiques. La question qui se pose est dès lors la suivante : l'observation concrète de cette activité conduit-elle à une théorie du jugement qui puisse se réclamer d'Aristote ou bien confirme-t-elle les vues de M. Brunschvicg; l'interprétation de ce dernier est-elle oui ou non, dans le cas mathématique, conforme à une expérience, dont nous l'avons vu, on ne saurait minimiser l'importance? Or nous croyons que pris dans son ensemble, le résultat de cette expérience est négatif. Les cas les plus simples susceptibles de constituer une confirmation représentent un état embryonnaire qu'il serait bien téméraire d'extrapoler universellement; ces cas répugnent d'ailleurs à une unicité d'interprétation qui seule pourrait être décisive.

Nous reconnaissons volontiers qu'il n'y a pas une très grande hardiesse à ne pas souscrire aux théories d'ailleurs magistralement construites de M. Brunschvicg. Il est désespérément facile de se trouver contre lui des alliés, parce qu'il n'en a guère avec lui. Les bilans qu'il établit des contributions de la mathématique à la philosophie se terminent généralement par un procès. Nous ne voyons pas de mathématicien philosophe, nous voulons dire de mathématicien présentant des réflexions sur sa science, qui ait trouvé grâce devant M. Brunschvicg. Il faut reconnaître que ce solipsisme ne doit pas être très rassurant pour qui fait de l'adhésion de l'unanimité des esprits une condition *sine qua non* de réalité (1). Nous le disons d'ailleurs à l'honneur de M. Brunschvicg, n'attribuant pas au critère qu'il propose une valeur absolue. Nous ne croyons cependant pas que ce critère soit dénué de toute valeur; il inviterait à conclure que les spéculations de M. Brunschvicg sont sans relation immédiate à la nature des mathématiques. Jugement certainement trop sévère mais non pas sans vérité : l'érudition prodigieuse et soigneusement critiquée de M. Brunschvicg — au moins en ce qui concerne les mathématiques — laisse un peu l'impression d'une exégèse scrupuleuse qui ne rencontre l'inspiration que par d'heureux hasards. On peut comprendre l'inspiration en la rationalisant. Autre chose est de la vivre. Il semble que les enquêtes de M. Brunschvicg pèchent par excès de raison. Comment peut-on, ayant cherché un problème de géométrie, avancer qu'on ne saurait penser « somme des angles d'un triangle » sans

(1) « ...spéculations philosophiques qui n'ont pas de relation immédiate à la nature de l'homme puisque l'unanimité des esprits n'y adhère pas ». *La Modalité du jugement*, p. 209.

penser « deux droits » ? (1). La psychologie de la recherche est féconde en oppositions qui ont leur répercussion dans la façon même de comprendre une proposition établie. L'étudiant qui aura travaillé de longues heures pour établir que « somme des angles d'un triangle = deux droits » sera tout à fait convaincu qu'on peut penser indépendamment l'un de l'autre les deux termes. Ceci s'accuse encore dans le cas où on ignore la qualité de la proposition à démontrer. M. Brunschvicg procède avec une sérénité abstraite qui est généralement signe d'irréalisme.

N'y aurait-il pas là la rançon d'une systématisation excessive ? L'érudition de M. Brunschvicg est toujours une thèse qui se construit plus encore qu'une information : il est des chapitres des *Étapes de la Philosophie mathématique* dont on prévoit à coup sûr les conclusions, pour peu que l'on tienne compte du zèle inlassable avec lequel M. Brunschvicg a entrepris de poursuivre le substantialisme jusqu'en ses derniers retranchements. Une attitude systématiquement négative n'est jamais enrichissement et le préjugé antisubstantialiste interdit à l'auteur de *La modalité du jugement* de pénétrer la théorie substantialiste du jugement. Le cas mathématique ne fait pas exception; mais il est sans doute plus typique et par sa nature et parce que M. Brunschvicg semble s'en réclamer davantage. Il paraît bien schématique, même en mathématiques, ailleurs *a fortiori*, de critiquer la théorie des modes sans dire un mot de la « supposition » et de réduire en fait le possible à n'être qu'une catégorie univoque d'où seul émergera le jugement privilégié $7 + 5 = 12$. Si M. Brunschvicg n'est pleinement d'accord avec aucun mathématicien, quel mathématicien sera d'accord avec lui ? Les mathématiques sont une magnifique affirmation de l'esprit, et de sa liberté créatrice, mais ceux qui, par un effort soutenu d'abstraction, ont été le plus avant dans ce domaine réservé du nécessaire ont dit aussi qu'ils découvraient plus qu'ils ne créaient : telle est l'impression qu'un Charles Hermite communiquait à ses auditeurs. La vraie grandeur des mathématiques n'est pas l'ordonnance systématique des constructions rationnelles, mais l'humble soumission à la vérité nécessaire.

Le Saulchoir, juin 1935.

L. G. DES LAURIERS, O. P.

(1) *Modalité*, p. 81.