Die Principien der Elektrodynamik.*)

Von

Dr. Carl Neumann.

Die einzelnen Gebiete der Physikalischen Wissenschaft können füglich nach Beschaffenheit derjenigen Elementarkräfte, durch deren Annahme die betreffenden Erscheinungen ihre Erklärung finden, in *zwei* Gruppen gebracht werden. Auf die eine Seite sind alsdann zu stellen die *Mechanik des Himmels*, die *Elasticität*, die *Capillarität*, überhaupt diejenigen Gebiete, bei welchen jene Kräfte ihrer Richtung und Grösse nach völlig bestimmt sind durch die relative Lage der materiellen Theile; auf die andere Seite aber werden zu bringen sein die Untersuchungen über *Reibung*, über *Elektricität* und *Magnetismus*, vielleicht auch die *Optik*, überhaupt diejenigen Gebiete der Physik, in welchen die genannten Kräfte ausser von der relativen Lage noch abhängig sind von andern Umständen, z. B. von den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Wenn nun das *Gesetz* (*oder Princip*) *der Lebendigen Kraft* sämmtliche Naturerscheinungen beherrscht (und hiefür sprechen alle bisherigen Erfahrungen), so erscheint solches für die Gebiete erster Art als eine unmittelbare Folge der zu Grunde gelegten Vorstellungen, für die Gebiete zweiter Art hingegen als eine *Sache des Zufalls*. Denn die Elementarkräfte erster Art unterwerfen sich der Herrschaft jenes Gesetzes von selber, die der zweiten Art aber nicht.

„Es hat“ — sagt Fechner in seiner Psychophysik. 1860. Bd. I. Pag. 34. — „allen Anschein, dass sich diese (letztern) Elementarkräfte so combiniren, dass das Gesetz in allen Naturwirkungen seine Gültigkeit behält. Für die magnetischen und dafür substituirbaren elektrischen Strömungswirkungen leuchtet dies von selbst ein, insofern sie sich als Wirkungen von Centralkräften, die unabhängig von Geschwindigkeit und Beschleunigung sind, wirklich repräsentiren lassen. Ausserdem

*) Es folgt hier ein *wörtlicher* Abdruck derjenigen Schrift, welche bereits im Jahre 1868 gedruckt wurde als Gratulationsschrift der *Tübinger* Universität zum funfzigjährigen Jubiläum der *Bonner* Universität.

hat mir Prof. W. Weber auf mein Befragen mündlich mitgetheilt, dass er überhaupt in allen Fällen, auf die seine Untersuchung geführt, auch über die Grenzen jener Wirkungen hinaus, das Gesetz in Kraft gefunden, wenn schon seine volle Allgemeingültigkeit für das Bereich dieser Kräfte noch des strengen Beweises bedürfe."

Doch handelt es sich dabei eigentlich nicht um einen Beweis, sondern um eine Entdeckung. Denn jenes Gesetz repräsentirt eine Relation zwischen der Lebendigen Kraft und dem Potential, also eine Relation zwischen zwei Grössen, von denen die letztere, bekannt für die Elementarkräfte erster Art, *völlig unbekannt ist für diejenigen der zweiten Art*. Es handelt sich daher, was die letztern Kräfte anbelangt, nicht um den Beweis des Gesetzes, sondern um die *Entdeckung seines Inhalts*, um die Auffindung derjenigen Grösse, welche als das Potential jener Kräfte anzusehen wäre.

Als ich vor drei Jahren, angeregt durch die vorhin erwähnten Worte Fechner's, mit dieser Frage mich zu beschäftigen begann, und dabei namentlich auf *diejenige* Elementarkraft zweiter Art meine Aufmerksamkeit richtete, welche nach Weber zwischen je zwei elektrischen Theilchen anzunehmen ist, fand ich bald, dass als Potential einer solchen Kraft mit gewisser Berechtigung folgender Ausdruck angesehen werden könne:

$$W = \frac{mm_1}{r} + G\,\frac{mm_1}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

wo unter m, m_1 die Massen der beiden Theilchen, unter r ihre Entfernung, unter t der betrachtete Zeitaugenblick, und unter G eine Constante zu verstehen sind. Denn es zeigte sich, dass jene von Weber angenommene Kraft aus diesem Ausdruck durch *Variation* nach den Coordinaten in genau derselben Weise abgeleitet werden könne, in welcher eine Elementarkraft *erster* Art aus ihrem Potential erhalten wird durch eine nach den Coordinaten bewerkstelligte *Differentiation*.

Und gleichzeitig ergab sich, dass während der Bewegung der beiden Theilchen beständig eine sehr einfache Relation obwalte zwischen der Lebendigen Kraft und zwischen den beiden Bestandtheilen jenes als Potential adoptirten Ausdrucks W, nämlich folgende:

$$(\text{Leb. Kraft.}) + \frac{mm_1}{r} - G\,\frac{mm_1}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \text{Const.}$$

Kaum noch konnte es zweifelhaft sein, dass diese Relation das zu entdeckende Gesetz repräsentire für jene von Weber angenommene Kraft.

Auch hatte ich schon damals nach Maassgabe des Ausdruckes W das Potential gebildet für *zwei Elemente elektrischer Ströme*, und gefunden, dass aus dem so erhaltenen Potential sowohl die repulsive als auch die inductive Wirkung der beiden Elemente auf einander in sehr einfacher Weise sich ableiten liesse, dass nämlich die erstere aus jenem Potential deducirt werden könne durch Variation nach der Entfernung, die letztere durch Variation nach der Richtung des einen Elementes.

Befremdlich und in einigem Contrast zu dem bisher Ueblichen mag im ersten Augenblick erscheinen, dass Variationen an Stelle der Differentiationen treten sollen. Doch wird, wie ich sogleich bemerken will, dieser Contrast einigermassen gemildert, wenn man beachtet, dass Aehnliches auch schon im Bereich der Elementarkräfte *erster* Art zu Tage tritt, z. B. bei Untersuchungen über Elasticität. Sind nämlich u, v, w diejenigen Functionen der Coordinaten, durch welche die innern Verrückungen eines gegebenen elastischen Körpers repräsentirt werden, und ist Φ das Potential derjenigen Wirkung, welche sämmtliche Theilchen des Körpers auf irgend *eines* derselben ausüben, so ergiebt sich die auf letzteres einwirkende Kraft durch *Variation* von Φ nach u, v, w (wie solches ausführlich von mir entwickelt worden ist in einem Aufsatz über Elasticität, Borchardt's Journal, Bd. 57. Pag. 304).

Zur Wiederaufnahme und Weiterführung der in Rede stehenden Untersuchungen wurde ich vor einiger Zeit veranlasst durch einen in Poggendorff's Annalen (Bd. 131. Pag. 237) aus dem Nachlass Riemann's publicirten Aufsatz, in welchem der (allerdings wenig gelungene, vielleicht auch nur in Folge der gar zu knappen Darstellung nicht gehörig zu beurtheilende) Versuch gemacht ist, die repulsive Wirkung zweier Stromelemente auf einander durch Elementarkräfte *erster* Art zu erklären, unter der Voraussetzung, dass das Potential dieser Kräfte — ähnlich wie das Licht — mit einer gewissen constanten Geschwindigkeit durch den Raum sich fortpflanze. Zu meiner Ueberraschung fand ich, dass diese Annahme direct hinleite zu der von mir gemachten Conjectur, dass nämlich das gewöhnliche (der Newton'schen Gravitationskraft entsprechende) Potential $\frac{mm_1}{r}$ bei Voraussetzung einer solchen progressiven Fortpflanzung in eine Grösse sich verwandele, deren wirksamer Bestandtheil völlig identisch ist mit dem vorhin genannten Ausdruck W.

Schon im Mai d. J. habe ich der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften eine kurze Mittheilung mir zu machen erlaubt über die Ausgangspunkte und Ergebnisse der in Rede stehenden Untersuchungen (Nachrichten der Gesellschaft. 16. Juni 1868). Wenn ich nun hier diese Untersuchungen, oder wenigstens einen Theil derselben, in ausführlicher und möglichst sorgfältiger Weise darzulegen beabsichtige, so geschieht das nicht etwa, weil ich diese Untersuchungen bereits für völlig durchgreifend hielte, sondern vielmehr wegen der *ausserordentlichen Wichtigkeit des behandelten Gegenstandes*, und weil ich der Meinung bin, dass meine Untersuchungen für ein tieferes Eindringen in diesen Gegenstand nothwendig oder wenigstens nicht ohne Nutzen sein dürften.

§ 1.

Vorläufiger Ueberblick.

Grundlage der Untersuchung.

In der vorliegenden Untersuchung werde ich der Nomenclatur derjenigen Autoren mich anschliessen, welche unter Lebendiger Kraft die Summe der Massen verstehen, jede multiplicirt mit dem *halben* Quadrat ihrer Geschwindigkeit, und welche ferner unter Potential diejenige Function der Coordinaten verstehen, deren *negative* Differential-Coefficienten die Kräfte repräsentiren*). Bei Anwendung dieser Nomenclatur (welche namentlich zweckmässig erscheint mit Rücksicht auf die Mechanische Wärmetheorie) wird das *Princip der Lebendigen Kraft* die Form annehmen:

$$(\text{Leb. Kraft}) + (\text{Potential}) = \text{Const.}$$

Gleichzeitig wird alsdann ein anderes allgemeines Princip der Mechanik, das *Hamilton'sche Princip* seinen Ausdruck finden in der Formel:

$$\delta \int \Big((\text{Leb Kraft}) - (\text{Potential}) \Big)\, dt = 0,$$

wo die Integration sich hinerstreckt über einen beliebig zu wählenden Zeitraum, und wo δ die *innere Variation*, nämlich eine Variation bezeichnet, welche nicht die Grenzen, sondern nur das Innere jenes Zeitraumes betrifft.

Wenn ich nun bemerke, dass bei gegebenen Kräften das Potential bekannt ist, dass aber auch umgekehrt durch Angabe des Potentials die Kräfte bestimmt sind, und wenn ich demgemäss mir erlaube, das Potential als das Primäre, als den eigentlichen *Bewegungsantrieb* anzusehen, die Kräfte hingegen aufzufassen als das Secundäre, als die *Form*, in welcher jener Antrieb sich äussert, so liegt hierin keine reale, sondern höchstens eine formale Neuerung. Wesentlich neu hingegen (wenn auch verwandt mit der schon von Riemann gemachten

*) Bei dieser Definition werden Lebendige Kraft und Potential identisch mit denjenigen Grössen, welche die Engländer als *actuelle* und *potentielle Energie* bezeichnen. Auch wird gleichzeitig das Potential identisch mit derjenigen Grösse, welche von Helmholtz *Spannkraft* genannt ist.

Conjectur) ist die von mir gemachte Voraussetzung, *dass jener durch das Potential repräsentirte Bewegungsantrieb von einem Massenpunkt zum andern nicht momentan sondern progressiv übergehe, dass er im Raume sich fortpflanze mit einer gewissen allerdings äusserst grossen Geschwindigkeit.* Diese Geschwindigkeit wird als constant betrachtet, und mit c bezeichnet werden.

Die eben genannte Vorstellung und daneben die Annahme, *dass das Hamilton'sche Princip eine völlig unumschränkte Gültigkeit besitze,* bilden die Grundlage meiner Untersuchung; sie bilden diejenige Quelle, aus welcher die (von Ampère, Weber und meinem Vater entdeckten) Gesetze der elektrischen Erscheinungen von selber hervorgehen werden, ohne Zuziehung irgend welcher weiteren Voraussetzung.

Kaum zu bemerken wird es nöthig sein, dass die *gewöhnliche* Vorstellung einer momentanen Fortpflanzung des Potentiales in der *hier zu Grunde gelegten* Vorstellung einer progressiven Fortpflanzung als specieller Fall enthalten ist, dass nämlich diese in jene übergeht, sobald man die Constante $c = \infty$ setzt.

Weber's Gesetz.

Betrachtet man zuvörderst nur *zwei* Punkte m und m_1, welche sich bewegen unter ihrer gegenseitigen Einwirkung, so sind, ausgehend von der Vorstellung einer progressiven Fortpflanzung des Potentiales, für jeden gegebenen Zeitaugenblick t zwei verschiedene Potentiale zu unterscheiden, das emissive und das receptive.

Das *emissive Potential* ist dasjenige, welches von jedem der beiden Punkte *ausgesendet wird zur Zeit t,* und welches also erst ein wenig später den andern Punkt erreicht. Bezeichnet r die Entfernung der Punkte zur Zeit t, und ist ϖ das derselben Zeit entsprechende emissive Potential, so wird nach dem Newton'schen Gesetz: $\varpi = \frac{mm_1}{r}$, oder allgemeiner:

$$(1) \qquad \varpi = mm_1 \varphi,$$

wo $\varphi = \varphi(r)$ irgend welche gegebene Function von r vorstellt.

Das *receptive Potential* andererseits ist dasjenige, welches von jedem der beiden Punkte *empfangen wird zur Zeit t*, und welches also schon ein wenig früher von dem andern Punkte abgesendet wurde. Das der *gegebenen* Zeit zugehörige receptive Potential ist demnach identisch mit dem einer *früheren* Zeit entsprechenden emissiven Potential. Bezeichnet wiederum r die Entfernung zur Zeit t, und ω das derselben Zeit entsprechende receptive Potential, so ergiebt sich nach einiger Rechnung:

$$(2) \qquad \omega = w + \frac{dw}{dt},$$

wo

$$(3)\qquad \begin{aligned} w &= mm_1\left[\varphi + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right],\\ \mathfrak{w} &= mm_1\left[\chi + \frac{d\Phi}{dt}\right]. \end{aligned}$$

Hier ist φ die in dem emissiven Potential enthaltene Function; und gleichzeitig bezeichnen ψ, χ, Φ gewisse andere, ebenfalls nur von r abhängende Functionen, welche aus der gegebenen Function φ sich ableiten lassen durch ziemlich einfache Operationen. So ist z. B.

$$(4)\qquad \psi = \frac{1}{c}\int\sqrt{-r\frac{d\varphi}{dr}}\,dr,$$

Die Function φ ist, wie aus ihrer Bedeutung unmittelbar hervorgeht, unabhängig von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c; ψ, χ hingegen sind behaftet mit dem Factor $\frac{1}{c}$, und Φ mit dem Factor $\frac{1}{cc}$.

(5) *Zu bemerken ist noch, dass für den Fall des Newton'schen Emissionsgesetzes, nämlich für* $\varphi = \frac{1}{r}$ *die Function* ψ *den Werth annimmt:* $\psi = \frac{2\sqrt{r}}{c}$.

Von den beiden Bestandtheilen des receptiven Potentiales mag (zur Abkürzung und mit Rücksicht auf die Ergebnisse der weitern Untersuchung) der eine, nämlich w das *effective Potential*, der andere $\frac{d\mathfrak{w}}{dt}$ das *ineffective Potential* genannt werden.

Da nun das Hamilton'sche Princip als unumschränkt gültig angesehen wird, so muss im vorliegenden Fall die Bewegung der beiden Punkte m und m_1 in einer Weise stattfinden, welche charakterisirt wird durch die Formel:

$$\delta\int(\tau - \omega)\,dt = 0,$$

wo τ die lebendige Kraft der beiden Punkte und ω das schon genannte receptive Potential vorstellt.

Substituirt man für ω seinen Werth (2), so reducirt sich diese Formel auf:

$$\delta\int(\tau - w)\,dt = 0.$$

Hieraus ergeben sich, wenn man die Variation wirklich ausführt, die zur Bestimmung der Bewegung nothwendigen sechs Differentialgleichungen. Und diese Gleichungen geben Rechenschaft über die *Art und Weise*, in welcher der durch das Potential repräsentirte Bewegungsantrieb sich äussert, d. i. Rechenschaft über die *Kraft*, welche zwischen den beiden Punkten thätig ist. Das Resultat, zu welchem man in solcher Weise gelangt, ist folgendes:

I. *Zwischen den beiden Punkten ist während ihrer Bewegung eine Kraft R thätig, welche beständig zusammenfällt mit der Verbindungslinie r.*

II. *Betrachtet man diese Kraft R als eine repulsive, und ist w das (schon genannte) effective Potential der beiden Punkte aufeinander, so wird R jederzeit gleich sein dem negativen Variationscoefficienten von w nach r.* Hieraus folgt sofort:

$$(6) \qquad R = m m_1 \left[-\frac{d\varphi}{dr} + 2 \frac{d\psi}{dr} \frac{d^2\psi}{dt^2} \right],$$

eine Formel, welche für den in (5) erwähnten Specialfall $\varphi = \frac{1}{r}$, $\psi = \frac{2\sqrt{r}}{c}$ sich verwandelt in:

$$(6a) \qquad R = m m_1 \left[\frac{1}{r^2} + \frac{4}{cc\sqrt{r}} \frac{d^2 \sqrt{r}}{dt^2} \right].$$

Die Formel (6) stimmt genau überein mit demjenigen Gesetze, welches ich vor zehn Jahren meiner Untersuchung über die Magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes zu Grunde gelegt habe. Und die Formel (6a) ist (selbst bis auf die Buchstaben) *identisch mit dem Weber'schen Gesetz.*

Eine hier sich anschliessende allgemeinere Untersuchung führt zu folgenden weiteren Resultaten:

III. *Ist W das effective Potential eines beliebigen Punktsystemes, und sind x, y, z die Coordinaten desjenigen Punktes, welcher die Masse m besitzt, so werden die Componenten der auf m einwirkenden Kraft jederzeit gleich sein den negativen Variationscoefficienten von W nach x, y, z.*

IV. *Ist ferner P die Componente jener Kraft nach einer beliebig gegebenen Richtung p, so wird P jederzeit gleich dem negativen Variationscoefficienten von W nach p.*

Der hier mehrfach gebrauchte Ausdruck Variationscoefficient bedarf einer kurzen Erläuterung. Sind $u, v, \ldots w$ *unbestimmte* Functionen von irgend einer Grundvariablen (z. B. von der Zeit), oder auch *unbestimmte* Functionen von beliebig vielen Grundvariablen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$; und ist G ein *gegebener* aus den Variablen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, aus den Functionen $u, v, \ldots w$ und aus irgend welchen Ableitungen dieser Functionen nach jenen Variablen zusammengesetzter Ausdruck; so kann bekanntlich die durch eine Aenderung von $u, v, \ldots w$ entstehende *innere Variation*

$$\delta \int^{(n)} G \, d\alpha_1 \, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$$

immer in die Form versetzt werden:

$$\delta \int^{(n)} G\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \cdots d\alpha_n = \int^{(n)} (a\,\delta u + b\,\delta v + \cdots + c\,\delta w)\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \cdots d\alpha_n,$$

in welcher die Coefficienten $a, b, \ldots c$ nur von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, u, v, \ldots w$ abhängen, unabhängig aber sind von den Variationen $\delta u, \delta v, \ldots \delta w$. Diese Coefficienten $a, b, \ldots c$ sind es, welche ich die *Variationscoefficienten von G nach $u, v, \ldots w$* nenne.

Die Gesetze der Elektrischen Repulsion und Induction.

Da die zu Grunde gelegten Voraussetzungen hingeführt haben zu Weber's Universalgesetz, so werden sie selbstverständlich auch hinleiten müssen zu denjenigen bekannten Specialgesetzen, welche schon vor jenem Gesetz für die zwischen elektrischen Strömen sich zeigenden repulsiven und inductiven Wirkungen gefunden waren, und später erst durch das Weber'sche Gesetz zu einem einheitlichen Ganzen zusammengefasst wurden. Trotzdem habe ich diesen Gegenstand genauer untersucht, und habe dabei gefunden*), dass es für die Deduction der genannten Specialgesetze fast vollkommen gleichgültig ist, ob man ausgeht von der *dualistischen* oder von der *unitarischen* Vorstellung, dass nämlich eine Differenz in dieser Beziehung nur eintritt bei den Gesetzen der Induction, und auch hier nur in denjenigen (wohl noch immer nicht ausreichend untersuchten) Fällen, wo es sich um die Induction *nicht geschlossener* Ströme handelt.

Es sei ds das Element eines elektrischen Stromes, ferner seien $+ e ds$ und $- e ds$ die darin enthaltenen Quantitäten positiv und negativ elektrischen Fluidums, endlich seien $s' = \frac{\partial s}{\partial t}$ und S' die Geschwindigkeiten, welche jene Quantitäten besitzen nach *ein und derselben* Richtung s.

Setzt man $S' = - s'$, so bewegen sich beide Fluida mit gleicher Schnelligkeit nach entgegengesetzten Richtungen, in voller Uebereinstimmung mit der gewöhnlich zu Grunde gelegten dualistischen Vorstellung.

Setzt man hingegen $S' = 0$, so wird das negative Fluidum als fest verbunden aufgefasst mit der ponderablen Materie, oder wohl gar als identisch mit dieser Materie: so dass alsdann nur *ein* in Bewegung begriffenes Fluidum vorhanden ist. Diese letztere Vorstellung ist es, welche vorhin kurzweg als die unitarische bezeichnet wurde.

---

*) Was ich hier in Betreff der elektrischen Repulsion und Induction als Resultat meiner Untersuchungen angebe, wird in der gegenwärtigen Schrift nicht weiter entwickelt und begründet werden. Ich behalte mir solches vor für eine spätere Mittheilung.

Verfolgt man gleichzeitig *beide* Vorstellungen, und lässt man die im emissiven Potential enthaltene Function φ dabei unbestimmt, so gelangt man zu Resultaten, welche (wenn ds, eds, $s' = \frac{\partial s}{\partial t}$ die schon genannte Bedeutung behalten, und $d\sigma$, $\eta d\sigma$, $\sigma' = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$ analoge Bedeutung in Bezug auf irgend ein zweites Stromelement besitzen) in folgender Weise ausgesprochen werden können:

I. *Ist W das effective Potential der beiden Stromelemente aufeinander, und r ihre Entfernung, so wird jederzeit*

(7) $$W = \frac{(2n)^2\, ds\, d\sigma \,.\, es'\eta\sigma'}{2} \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}$$

sein, wo ψ die in (4) *angegebene Function repräsentirt, und wo n eine Zahl vorstellt, welche $= 2$ oder $= 1$ ist, jenachdem man der dualistischen oder der unitarischen Vorstellung sich anschliesst.*

Für den Specialfall $\varphi = \frac{1}{r}$ wird, wie in (5) erwähnt wurde, $\psi = \frac{2\sqrt{r}}{c}$. Für diesen Fall geht daher der Werth des Potentiales W über in:

(7a) $$W = \left(\frac{2n}{c}\right)^2 \frac{ds\, d\sigma \,.\, es'\eta\sigma'}{2r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial \sigma}.$$

II. *Die repulsive Kraft $\mathfrak{R}$, mit welcher die beiden Stromelemente aufeinander einwirken, ist jederzeit gleich dem negativen Variationscoefficienten des Potentiales W nach r.*

Hieraus folgt die Formel:

(8) $$\mathfrak{R} = (2n)^2\, ds\, d\sigma \cdot es'\eta\sigma' \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s\, \partial \sigma},$$

welche für $\varphi = \frac{1}{r}$, $\psi = \frac{2\sqrt{r}}{c}$ übergeht in:

(8a) $$\mathfrak{R} = \left(\frac{2n}{c}\right)^2 \frac{2\, ds\, d\sigma \cdot es'\eta\sigma'}{\sqrt{r}} \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s\, \partial \sigma}.$$

Diese letztere Formel aber ist *identisch mit der des Ampère'schen Gesetzes*, wie sich leicht ergiebt.

III. *Sind $d\sigma$ und ds zwei Elemente geschlossener Ströme, und bezeichnet $\mathfrak{E}$ die von $d\sigma$ auf ds in der Richtung s ausgeübte Elektromotorische Kraft, so wird $\mathfrak{E}$ jederzeit gleich sein dem negativen Variationscoefficienten von W nach s.*

Diese Regel, welche allgemein gültig ist (einerlei ob die Induction durch eine Aenderung der relativen Lage oder durch eine Aenderung der Stromstärke hervorgerufen wird) führt augenblicklich zu der Formel:

(9) $$\mathfrak{E} = \frac{d\overline{W}}{dt},$$

wenn man nämlich unter $\overline{W}$ den Werth des Potentiales W für $s'=1$ versteht. Und diese Formel repräsentirt unmittelbar das *von meinem Vater aufgestellte Inductionsgesetz*.

IV. Bis hierher findet also zwischen den Resultaten, die aus der dualistischen Vorstellung sich ergeben, und denen, die aus der unitarischen Vorstellung entspringen, vollständige Uebereinstimmung statt. Doch habe ich auch den Fall der Induction zwischen *nicht geschlossenen* Strömen genauer untersucht, und gefunden, dass in diesem Fall zwischen den Resultaten, zu welchen jene beiderlei Vorstellungen hinleiten, eine erhebliche *Differenz* stattfindet.

Das Princip der Lebendigen Kraft.

Es ist die Voraussetzung gemacht worden, dass das Hamilton'sche Princip eine völlig unumschränkte Gültigkeit besitze. Als unmittelbare Consequenz dieser Voraussetzung wird sich ergeben, dass das Princip der Lebendigen Kraft ebenfalls immer gültig ist, dass dasselbe jedoch seine gewöhnliche Form nicht immer bewahre.

Sind nur *zwei* Punkte gegeben m und m_1, und bezeichnet w das effective Potential der beiden Punkte aufeinander, so wird nach (3):

$$w = mm_1\left[\varphi + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right], \tag{10}$$

oder was dasselbe ist:

$$w = u + v, \tag{11}$$

wo u und v die Bedeutungen haben:

$$\begin{aligned} u &= mm_1\,\varphi, \\ v &= mm_1\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Aus der Bedeutung von φ und ψ (vergl. (1) und (4)) folgt sofort, dass u unabhängig ist von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c, dass hingegen v behaftet ist mit dem Factor $\frac{1}{cc}$. Andererseits erkennt man aus (12) augenblicklich, dass v verschwindet, sobald die beiden Punkte im Zustande der *Ruhe* erhalten werden, und dass also in diesem Fall das Potential w übergeht in u. Demgemäss werde ich mir erlauben u das *statische*, v aber das *motorische Potential* zu nennen. Beiläufig dürfte zu bemerken sein, dass das statische Potential immer gleichwerthig ist mit dem emissiven Potential, wie solches nicht nur aus den aufgestellten Formeln sich ergiebt, sondern auch direct hervorgeht aus der Definition dieser Potentiale.

Es handele sich nun um die Bewegung eines beliebigen Punktsystemes, und es sei W das effective Potential desselben. Der Werth von W mag in derselben Weise, wie der von w, in zwei Terme zerlegt werden:

$$W = U + V. \tag{13}$$

Alsdann wird der von c unabhängige Term U das statische, und der mit dem Factor $\frac{1}{cc}$ behaftete Term V das motorische Potential des Systemes repräsentiren. Bedient man sich dieser Bezeichnungen, so gilt, wie ich zeigen werde, für die Lebendige Kraft folgender Satz:

Bei der Bewegung eines beliebigen Punktsystemes wird die Lebendige Kraft, vermehrt um das statische und vermindert um das motorische Potential, beständig ein und denselben Werth behalten. Es wird also

$$T + U - V = \text{Const.} \tag{14}$$

sein, falls nämlich T die Lebendige Kraft des Systemes bezeichnet. Für den Fall der momentanen Fortpflanzung, d. i. für $c = \infty$ verschwindet der mit dem Factor $\frac{1}{cc}$ behaftete Ausdruck V; und es verwandelt sich demnach die Formel (14) für diesen Fall in die wohlbekannte Formel $T + U = \text{Const.}$

Was die Ausdrücke T, U, V anbelangt, mag schliesslich noch bemerkt werden, dass der erste nur von den Geschwindigkeiten der Punkte, der zweite nur von ihrer relativen Lage, der dritte aber gleichzeitig von den Geschwindigkeiten *und* von der relativen Lage abhängig ist.

§ 2.

Die Variationscoefficienten.

Vorläufige Bemerkung.

Sind f und φ Functionen der drei Variablen α, β, γ, so gelten die Gleichungen:

$$f\frac{\partial^3\varphi}{\partial\alpha\partial\beta\partial\gamma} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(f\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta\partial\gamma}\right) - \frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta\partial\gamma},$$

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta\partial\gamma} = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\right) - \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma} = \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}\varphi\right) - \frac{\partial^3 f}{\partial\alpha\partial\beta\partial\gamma}\varphi.$$

Werden diese Gleichungen der Reihe nach mit $(-1)^0$, $(-1)^1$, $(-1)^2$ multiplicirt, und sodann addirt, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3\varphi}{\partial\alpha\partial\beta\partial\gamma} = {} & \frac{\partial}{\partial\alpha}\left((-1)^0 f\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta\partial\gamma}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left((-1)^1\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\right) \\ & + \frac{\partial}{\partial\gamma}\left((-1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}\varphi\right) + (-1)^3\frac{\partial^3 f}{\partial\alpha\partial\beta\partial\gamma}\varphi.\end{aligned} \tag{1}$$

In analoger Weise wird sich, wenn f und φ Functionen von beliebig vielen, etwa von p Variablen $\alpha, \beta, \ldots \pi$ sind, eine Formel ergeben von folgender Gestalt:

$$(2)\qquad f\,\frac{\partial^p \varphi}{\partial\alpha\partial\beta\ldots\partial\pi} = \frac{\partial A}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \beta} + \cdots + \frac{\partial P}{\partial \pi} + (-1)^p\,\frac{\partial^p f}{\partial\alpha\partial\beta\ldots\partial\pi}\,\varphi.$$

Sind im Ganzen n Variable $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ vorhanden, von welchen f, φ abhängen, und versteht man unter $\alpha, \beta, \ldots \pi$ beliebig gewählte unter jenen n Variablen und jede der gewählten beliebig oft wiederholt, so wird die Formel (2) ebenfalls noch gültig sein. Wird unter so bewandten Umständen jene Formel mit $d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$ multiplicirt, und integrirt über ein beliebig gegebenes Gebiet, so folgt:

$$(3)\qquad \int^{(n)} f\,\frac{\partial^p \varphi}{\partial\alpha\partial\beta\ldots\partial\pi}\,d\alpha_1\,d\alpha_2\ldots d\alpha_n = \Sigma + (-1)^p \int^{(n)} \frac{\partial^p f}{\partial\alpha\partial\beta\ldots\partial\pi}\,\varphi\,d\alpha_1\,d\alpha_2\ldots d\alpha_n,$$

wo Σ eine Summe $(n-1)$facher Integrale vorstellt, welche sich erstrecken über die *Grenze* des gegebenen Integrationsgebietes, *und welche* (wie aus der Bedeutung von $A, B, \ldots P$ hervorgeht) *verschwinden, sobald die Function* φ *und sämmtliche Ableitungen derselben an jener Grenze Null sind.*

Definition der Variationscoefficienten.

Es sei u eine *unbestimmte* Function der Variablen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$; wiederum repräsentire $\alpha, \beta, \ldots \pi$ eine beliebige Auswahl dieser Variablen, jede gewählte beliebig oft wiederholt, und zur Abkürzung werde gesetzt:

$$(4)\qquad \frac{\partial^p u}{\partial\alpha\partial\beta\ldots\partial\pi} = u'.$$

Ferner sei

$$(5)\qquad G = G(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, u, u')$$

ein *gegebener* aus jenen Variablen, aus u und u' zusammengesetzter Ausdruck. Es soll die Variation untersucht werden, welche das über ein beliebig gegebenes Gebiet ausgedehnte Integral

$$(6)\qquad \int^{(n)} G\,d\alpha_1\,d\alpha_2\ldots d\alpha_n$$

erleidet durch eine Aenderung von u, unter der vereinfachenden Voraussetzung, dass die Function u und alle ihre Ableitungen an der *Grenze* des gegebenen Gebietes ungeändert erhalten werden. Oder, wie wir uns der Kürze willen in Zukunft ausdrücken werden, es soll untersucht werden die *innere Variation* jenes Integrales. Für diese ergiebt sich sofort:

$$(7)\qquad \delta \int^{(n)} G\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n = \int^{(n)} \delta G \cdot d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n,$$

$$= \int^{(n)} \left(\frac{\partial G}{\partial u}\, \delta u + \frac{\partial G}{\partial u'}\, \delta u' \right) d\alpha_1\, d\alpha_2 \cdots d\alpha_n.$$

Nun ist nach (4):

$$(8)\qquad \frac{\partial G}{\partial u'}\, \delta u' = \frac{\partial G}{\partial u'}\, \frac{\partial^p\, \delta u}{\partial\alpha\, \partial\beta \ldots \partial\pi},$$

also nach (3):

$$(9)\qquad \int^{(n)} \frac{\partial G}{\partial u'}\, \delta u'\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$$

$$= \Sigma + (-1)^p \int^{(n)} \frac{\partial^p}{\partial\alpha\, \partial\beta \ldots \partial\pi}\, \frac{\partial G}{\partial u'} \cdot \delta u\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \cdots d\alpha_n.$$

Der vorhin angemerkte Fall eines Verschwindens von Σ tritt hier ein. Denn die hier an Stelle von φ befindliche Function δu verschwindet nebst allen ihren Ableitungen an der *Grenze* des Integrationsgebietes, weil die auszuführende Variation eine *innere* sein soll. Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich, wenn der Werth (9) in (7) substituirt wird:

$$(10)\qquad \delta \int^{(n)} G\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \cdots d\alpha_n = \int^{(n)} a\, \delta u\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \cdots d\alpha_n,$$

wo a die Bedeutung hat:

$$(11\,\mathrm{a})\qquad a = \frac{\partial G}{\partial u} + (-1)^p\, \frac{\partial^p}{\partial\alpha\, \partial\beta \ldots \partial\pi}\, \frac{\partial G}{\partial u'},$$

d. i. die Bedeutung:

$$(11\,\mathrm{b})\qquad a = \frac{\partial G}{\partial u} + (-1)^p\, \frac{\partial^p}{\partial\alpha\, \partial\beta \ldots \partial\pi}\, \frac{\partial G}{\partial \dfrac{\partial^p u}{\partial\alpha\, \partial\beta \ldots \partial\pi}}.$$

Zur Abkürzung mag diese Grösse so bezeichnet werden:

$$(11\,\mathrm{c})\qquad a = \frac{\partial G}{\partial u} + \varepsilon_{u'} D_{u'}\, \frac{\partial G}{\partial u'},$$

wo alsdann $D_{u'}$ die Differentiation nach allen denjenigen Variablen andeuten soll, in Bezug auf welche die Ableitung u' gebildet ist, und wo gleichzeitig $\varepsilon_{u'}$ eine Zahl bezeichnet, welche den Werth $+1$ oder -1 hat, jenachdem u' eine Ableitung gerader oder ungerader Ordnung ist.

In ganz analoger Weise lässt sich eine allgemeinere Aufgabe behandeln. Ist nämlich nach wie vor u eine *unbestimmte* Function der Variablen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, sind ferner $u', u'', \ldots$ beliebig viele und beliebig hohe Ableitungen jener Function nach diesen Variablen, und ist endlich

$$G = G(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, u. u', u'' \ldots) \tag{12}$$

ein *gegebener* aus jenen Variablen, Functionen und Ableitungen zusammengesetzter Ausdruck, so wird sich für die *innere Variation* des Integrales

$$\int^{(n)} G\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n \tag{13}$$

folgender Werth ergeben:

$$\delta \int^{(n)} G\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n = \int^{(n)} a\,\delta u\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n, \tag{14}$$

wo a bei Anwendung der in (11c) eingeführten Bezeichnung so dargestellt werden kann:

$$a = \frac{\partial G}{\partial u} + \varepsilon_{u'} D_{u'} \frac{\partial G}{\partial u'} + \varepsilon_{u''} D_{u''} \frac{\partial G}{\partial u''} + \cdots. \tag{15}$$

Mit gleicher Leichtigkeit endlich lässt sich eine noch allgemeinere Aufgabe behandeln. Es seien nämlich $u, v, \ldots w$ beliebig viele *unbestimmte* Functionen der Variablen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$; ferner sei G ein *gegebener* Ausdruck, zusammengesetzt aus den Variablen α, aus den Functionen $u, v, \ldots w$ und aus beliebig gewählten Ableitungen dieser Functionen nach den α; es handele sich darum, die *innere Variation* zu ermitteln, welche das Integral

$$\int^{(n)} G\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n \tag{16}$$

erleidet durch gleichzeitige Aenderungen von $u, v, \ldots w$. Wie leicht zu übersehen, wird man in diesem Fall zu dem Resultat gelangen:

$$\begin{aligned} &\delta \int^{(n)} G\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n \\ &= \int^{(n)} (a\,\delta u + b\,\delta v + \cdots + c\,\delta w)\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \cdots d\alpha_n, \end{aligned} \tag{17}$$

wo $a, b, \ldots c$ die Werthe besitzen:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial G}{\partial u} + \varepsilon_{u'} D_{u'} \frac{\partial G}{\partial u'} + \varepsilon_{u''} D_{u''} \frac{\partial G}{\partial u''} + \cdots, \\ b &= \frac{\partial G}{\partial v} + \varepsilon_{v'} D_{v'} \frac{\partial G}{\partial v'} + \varepsilon_{v''} D_{v''} \frac{\partial G}{\partial v''} + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c &= \frac{\partial G}{\partial w} + \varepsilon_{w'} D_{w'} \frac{\partial G}{\partial w'} + \varepsilon_{w''} D_{w''} \frac{\partial G}{\partial w''} + \cdots. \end{aligned} \tag{18}$$

Dabei sind unter

$$\begin{matrix} u', & u'', & \ldots, \\ v', & v'', & \ldots, \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ w', & w'', & \ldots. \end{matrix}$$

diejenigen Ableitungen von $u, v, \ldots w$ zu verstehen, welche in G enthalten sind.

Es erscheint angemessen, die Grössen $a, b, \ldots c$, vermittelst deren die Variation des Integrales von G sich darstellt, die *Variationscoefficienten von G nach u, v, ... w zu nennen* (vergl. p. 407), und dieselben in analoger Weise wie die Differentialcoefficienten zu bezeichnen, nur mit dem Unterschiede, dass ein schräges $\varDelta$ an Stelle des runden ∂ in Anwendung gebracht wird*). Die Bezeichnung wird dann diese sein:

$$(19)\qquad \begin{aligned} a &= \frac{\varDelta G}{\varDelta u}, \\ b &= \frac{\varDelta G}{\varDelta v}, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c &= \frac{\varDelta G}{\varDelta w}. \end{aligned}$$

Das gewöhnliche kleine δ bleibt dabei reservirt zur Bezeichnung der Variationen selber.

Diese Variationscoefficienten von G nach $u, v, \ldots w$ verwandeln sich, wie man aus (18) erkennt, in die entsprechenden Differentialcoefficienten $\frac{\partial G}{\partial u}, \frac{\partial G}{\partial v}, \ldots \frac{\partial G}{\partial w}$, sobald der Ausdruck G nur die Functionen $u, v, \ldots w$ selber, nicht aber deren Ableitungen enthält.

Ein Satz über die Variationscoefficienten.

Mit Rücksicht auf die Bedürfnisse der folgenden Untersuchungen ist es schliesslich noch erforderlich, einen Satz abzuleiten, durch welchen die Rechnung mit Variationscoefficienten oft wesentlich erleichtert wird, auf den ich übrigens schon bei einer früheren Gelegenheit (Untersuchungen über Elasticität. Crelle's Journal Bd. 57, pag. 299) aufmerksam gemacht habe.

---

*) Das Wort *Differentialcoefficient* wird allerdings nur selten gebraucht, so weit mir aber bekannt immer als synonym gebraucht mit *Ableitung* oder *Differentialquotient*. Diesem Worte *Differentialcoefficient* entsprechend ist hier die Bezeichnung *Variationscoefficient* eingeführt. (In der Originalschrift von 1868 war an Stelle des schrägen $\varDelta$ ein umgedrehtes ϱ gebraucht worden).

Zu den Variablen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ und zu den m unbestimmten Functionen $u, v, \ldots w$ mögen noch hinzutreten M neue Functionen $U, V, \ldots W$, die ebenfalls nur von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ abhängen, ebenfalls unbestimmt sind, an jene früheren Functionen $u, v, \ldots w$ aber gekettet sind durch bestimmt festgesetzte Relationen:

$$
\begin{aligned}
U &= \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, u, v, \ldots w), \\
V &= \psi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, u, v, \ldots w), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
W &= \chi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, u, v, \ldots w).
\end{aligned} \tag{20}
$$

Ob M grösser oder kleiner als m ist, oder ob beide Zahlen gleich gross sind, bleibt dahingestellt.

Es sei nun G ein *gegebener* Ausdruck, zusammengesetzt aus den Variablen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, aus den Functionen $U, V, \ldots W$ und aus irgend welchen (beliebig hohen) Ableitungen dieser Functionen nach jenen Variablen; es handle sich um die Ermittelung derjenigen *inneren Variation*, welche das Integral

$$\int^{(n)} G\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n \tag{21}$$

erleidet durch Aenderungen von $u, v, \ldots w$. Diese Aufgabe kann in doppelter Weise gelöst werden.

Erster Weg. Sobald sich $u, v, \ldots w$ um beliebig gegebene Grössen $\delta u, \delta v, \ldots \delta w$ ändern, werden sich gleichzeitig die in G enthaltenen $U, V, \ldots W$ um gewisse andere Grössen $\delta U, \delta V, \ldots \delta W$ ändern, welche sich auf Grund der Relationen (20) ausdrücken lassen durch

$$
\begin{aligned}
\delta U &= \frac{\partial U}{\partial u}\delta u + \frac{\partial U}{\partial v}\delta v \cdots + \frac{\partial U}{\partial w}\delta w, \\
\delta V &= \frac{\partial V}{\partial u}\delta u + \frac{\partial V}{\partial v}\delta v \cdots + \frac{\partial V}{\partial w}\delta w, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\delta W &= \frac{\partial W}{\partial u}\delta u + \frac{\partial W}{\partial v}\delta v \cdots + \frac{\partial W}{\partial w}\delta w.
\end{aligned} \tag{22}
$$

In Folge dieser Aenderungen $\delta U, \delta V, \ldots \delta W$ wird aber das Integral (21) eine Aenderung erleiden, dargestellt durch

$$\delta \int^{(n)} G\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n \tag{23}$$

$$= \int^{(n)} (A\delta U + B\delta V \cdots + C\delta W)\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \cdots d\alpha_n$$

wo $A, B, \ldots C$ die Variationscoefficienten von G nach $U, V, \ldots W$ sind.

Zweiter Weg. Man kann die in G enthaltenen Functionen $U, V, \ldots W$ und die darin enthaltenen Ableitungen von $U, V, \ldots W$

eliminiren, nämlich vermittelst der Relationen (20) ersetzen durch die Functionen $u, v, \ldots w$ und durch deren Ableitungen. Denkt man sich solches ausgeführt, so wird die auf Grund der gegebenen Aenderungen $\delta u, \delta v, \ldots \delta w$ entstehende Aenderung des Integrales (21) repräsentirt sein durch die Formel:

$$(24) \qquad \delta \int^{(n)} G\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$$
$$= \int^{(n)} (a\,\delta u + b\,\delta v \cdots + c\,\delta w)\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \cdots d\alpha_n,$$

wo $a, b, \ldots c$ die Variationscoefficienten von G nach $u, v, \ldots w$ sind.

Vergleichung der Resultate. Die in (23) und (24) erhaltenen Resultate müssen unter einander übereinstimmen für beliebige Werthe von $\delta u, \delta v, \ldots \delta w$, vorausgesetzt, dass man unter $\delta U, \delta V, \ldots \delta W$ die in (22) gefundenen Ausdrücke versteht. Der Coefficient von δu z. B. muss in (24) derselbe sein wie in (23); daraus folgt:

$$a = A \frac{\partial U}{\partial u} + B \frac{\partial V}{\partial u} \cdots + C \frac{\partial W}{\partial u}.$$

Analoge Formeln ergeben sich durch Gleichsetzung der Coefficienten von $\delta v, \ldots \delta w$.

Bedient man sich für die Variationscoefficienten der vor einigen Augenblicken eingeführten Bezeichnung, so nehmen diese Formeln folgende Gestalt an:

$$(25) \qquad \begin{aligned}
\frac{\varDelta G}{\varDelta u} &= \frac{\varDelta G}{\varDelta U}\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\varDelta G}{\varDelta V}\frac{\partial V}{\partial u} \cdots + \frac{\varDelta G}{\varDelta W}\frac{\partial W}{\partial u},\\
\frac{\varDelta G}{\varDelta v} &= \frac{\varDelta G}{\varDelta U}\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\varDelta G}{\varDelta V}\frac{\partial V}{\partial v} \cdots + \frac{\varDelta G}{\varDelta W}\frac{\partial W}{\partial v},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\varDelta G}{\varDelta w} &= \frac{\varDelta G}{\varDelta U}\frac{\partial U}{\partial w} + \frac{\varDelta G}{\varDelta V}\frac{\partial V}{\partial w} \cdots + \frac{\varDelta G}{\varDelta W}\frac{\partial W}{\partial w}.
\end{aligned}$$

Und diese Formeln enthalten den Satz, um dessen Ableitung es sich hier handelte, einen Satz, welcher angesehen werden kann als die Verallgemeinerung eines bekannten Satzes der Differentialrechnung. Ist nämlich der gegebene Ausdruck G nur von $U, V, \ldots W$ selber, nicht aber von deren Ableitungen abhängig, so wird derselbe nach der durch die Relationen (20) zu bewirkenden Elimination ebenfalls nur von $u, v, \ldots w$ selber abhängig werden, nicht aber von den Ableitungen dieser Functionen. In solchem Falle werden daher die in den Formeln (25) enthaltenen Variationscoefficienten übergehen in die entsprechenden Differentialcoefficienten, die Formeln selber also übergehen in wohlbekannte Formeln der Differentialrechnung.

Um den in den Gleichungen (25) enthaltenen allgemeinen Satz deutlich vor Augen zu haben, wollen wir bemerken, dass derselbe, wenn die Anzahl der Functionen $u, v, \ldots w$ gleich 1, und die der Functionen $U, V, \ldots W$ ebenfalls gleich 1 ist, folgendermassen ausgesprochen werden kann:

Ist G in gegebener Weise gekettet an eine unbestimmte Function U und deren Ableitungen, und ist die Function U ihrerseits in gegebener Weise gekettet an eine andere unbestimmte Function u, so wird der Variationscoefficient von G nach u immer dadurch erhalten werden können, dass man den Variationscoefficienten von G nach U bildet und diesen multiplicirt mit dem Differentialcoefficienten von U nach u. Es wird nämlich die Formel stattfinden

$$(26) \qquad \frac{\varDelta G}{\varDelta u} = \frac{\varDelta G}{\varDelta U} \frac{\partial U}{\partial u} .$$

Dabei sind unter u und U Functionen zu verstehen von beliebig vielen Variablen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, und unter den Ableitungen dieser Functionen diejenigen zu verstehen, welche nach $\alpha_1, \ldots \alpha_2, \alpha_n$ gebildet sind durch beliebig gewählte und beliebig oft wiederholte Differentiationen.

§ 3.

Das emissive und das receptive Potential.*)

Wir betrachten zwei Punkte m und m_1, die sich bewegen unter ihrer gegenseitigen Einwirkung, und bezeichnen ihre Entfernung für einen *gegebenen* Zeitaugenblick t mit r, andererseits ihre Entfernung für irgend einen *früheren* Zeitaugenblick $t - \Delta t$ mit $r - \Delta r$. Setzen wir

$$(1) \qquad r = f(t),$$

so wird unter f eine Function zu verstehen sein, die ebenso *unbekannt* uns ist, wie überhaupt die Bewegung der Punkte. Jedenfalls wird dann aber auch zu setzen sein:

$$(2) \qquad r - \Delta r = f(t - \Delta t),$$

oder was dasselbe ist:

$$(3) \qquad r - \Delta r = f(t) - \frac{\Delta t}{1} f'(t) + \frac{\Delta t^2}{1 \cdot 2} f''(t) - \cdots \text{in inf.}$$

Diese letztere Formel nimmt mit Hülfe der aus (1) entspringenden Gleichungen

$$\frac{dr}{dt} = f'(t), \qquad \frac{d^2 r}{dt^2} = f''(t), \quad \text{etc. etc.}$$

folgende Gestalt an:

$$(4) \qquad r - \Delta r = r - \frac{\Delta t}{1} \frac{dr}{dt} + \frac{\Delta t^2}{1.2} \frac{d^2 r}{dt^2} - \cdots \text{in inf.}$$

Bedienen wir uns nun der früher (pag. 404, 405) eingeführten Benennungen, und bezeichnen wir demgemäss mit ϖ das *emissive Potential* der beiden Punkte zur Zeit t, so wird:

---

*) *Genaueres* über den Inhalt dieses (wohl etwas zu kurz gefassten) Paragraphen findet man in diesen Annalen, Bd. I, Seite 317 – 324.

(5) $$\varpi = m m_1 \varphi(r),$$

wo $\varphi(r)$ irgend welche *gegebene* Function vorstellt, welche bei Zugrundelegung des Newton'schen Gesetzes übergehen würde in $\frac{1}{r}$.

Andererseits mag das *receptive Potential* der beiden Punkte zur Zeit t bezeichnet werden mit ω; und zwar mag, um die Vorstellung zu fixiren, m als Empfänger, m_1 als Aussender gedacht, unter ω also dasjenige Potential verstanden werden, welches m zur Zeit t empfängt, und welches demgemäss bereits zu einer *früheren* Zeit $t - \Delta t$ von m_1 ausgesendet worden ist. Alsdann wird ω identisch sein mit dem dieser früheren Zeit entsprechenden emissiven Potential, folglich den Werth besitzen:

(6) $$\omega = m m_1 \varphi(r - \Delta r).$$

Durch Benutzung von (4) geht dieser Werth über in

(7) $$\omega = m m_1 \varphi\left(r - \frac{\Delta t}{1} \frac{dr}{dt} + \frac{\Delta t^2}{1.2} \frac{d^2 r}{dt^2} - \cdots \text{in inf.}\right).$$

Das hier vorhandene Δt repräsentirt diejenige Zeit, welche das Potential braucht zur Durchlaufung des Weges r. Da wir nun die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Potentiales mit c bezeichnet haben (pag. 404), unter c also denjenigen Weg verstehen, welchen das Potential in der Zeit 1 durchschreitet, so wird $\Delta t : r = 1 : c$, d. i.

(8) $$\Delta t = \frac{r}{c}.$$

Wir werden nun fortan die Geschwindigkeit c als eine überaus grosse, und demgemäss den Bruch $\frac{r}{c}$ als so klein betrachten, dass seine *dritte* Potenz vernachlässigt werden darf. Durch Substitution des Werthes (8) in (7) ergiebt sich dann:

(9) $$\omega = m m_1 \varphi\left(r - \frac{r}{c} \frac{dr}{dt} + \frac{rr}{2cc} \frac{d^2 r}{dt^2}\right),$$

und hieraus durch weitere Entwicklung:

(10) $$\omega = m m_1 \left[\varphi - \frac{r}{c} \frac{dr}{dt} \varphi' + \frac{rr}{2cc} \frac{d^2 r}{dt^2} \varphi' + \frac{rr}{2cc} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \varphi''\right],$$

oder anders geordnet:

(11) $$\omega = m m_1 \left[\varphi + \frac{rr\varphi''}{2cc} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{rr\varphi'}{2cc} \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{r\varphi'}{c} \frac{dr}{dt}\right],$$

wo zur Abkürzung $\varphi(r) = \varphi$, $\frac{d\varphi(r)}{dr} = \varphi'$, $\frac{d^2\varphi(r)}{dr^2} = \varphi''$ gesetzt ist. Nun gelten, wenn Φ eine beliebige Function von r vorstellt, ganz allgemein die Formeln:

$$\Phi \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\Phi \frac{dr}{dt}\right) - \frac{d\Phi}{dr}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

$$\Phi \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int \Phi dr\right);$$

und der für ω gefundene Ausdruck (11) verwandelt sich, wenn man seine beiden letzten Glieder nach Maassgabe dieser beiden Formeln umgestaltet, in folgenden:

$$(12)\qquad \omega = mm_1\left[\varphi + \frac{rr\varphi''}{2cc}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{(rr\varphi')'}{2cc}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]$$
$$+ mm_1 \frac{d}{dt}\left[\frac{rr\varphi'}{2cc}\frac{dr}{dt} - \frac{\int r\varphi' dr}{c}\right],$$

wo $(rr\varphi')'$ für $\frac{d(rr\varphi')}{dr}$ gesetzt ist, also $= rr\varphi'' + 2r\varphi'$ ist. Substituirt man diesen Werth, und bemerkt man ausserdem, dass $\int r\varphi' dr = r\varphi - \int \varphi dr$ ist, so gewinnt der Ausdruck für ω schliesslich folgende Gestalt:

$$(13)\qquad \omega = mm_1\left[\varphi - \frac{r\varphi'}{cc}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]$$
$$+ mm_1 \frac{d}{dt}\left[\frac{(\int \varphi dr) - r\varphi}{c} + \frac{rr\varphi'}{2cc}\frac{dr}{dt}\right].$$

Wir haben bisher m_1 als Aussender und m als Empfänger des Potentiales uns gedacht. Schritt für Schritt *dieselbe* Betrachtung, begleitet von genau *denselben* Formeln, wird aber, wie leicht zu übersehen, durchgeführt werden können, wenn wir umgekehrt m als Aussender und m_1 als Empfänger des Potentiales ansehen.

Daraus folgt, dass der in (13) gefundene Potentialwerth ω nicht nur derjenige ist, welcher in dem gegebenen Zeitaugenblick *t in m anlangt, gesendet von m_1*, sondern gleichzeitig auch derjenige, welcher in jenem Augenblick *anlangt in m_1, gesendet von m.*

Somit gelangen wir zu folgendem Resultat:

Bewegen sich zwei Punkte m und m_1 unter ihrer gegenseitigen Einwirkung, und bezeichnet r ihre Entfernung zur Zeit t, ferner ω das derselben Zeit entsprechende receptive Potential der beiden Punkte, so ist

$$(14\text{a})\qquad \omega = w + \frac{d\mathfrak{w}}{dt},$$

wo w und $\mathfrak{w}$ folgende Ausdrücke repräsentiren:

$$(14\text{b})\qquad \begin{aligned} w &= mm_1\left[\varphi - \frac{r}{cc}\frac{d\varphi}{dr}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right], \\ \mathfrak{w} &= mm_1\left[\frac{(\int \varphi dr) - r\varphi}{c} + \frac{rr}{2cc}\frac{d\varphi}{dr}\frac{dr}{dt}\right]. \end{aligned}$$

Hier ist zur Abkürzung φ für $\varphi(r)$ gesetzt, und ferner unter c die überaus grosse und constante Geschwindigkeit zu verstehen, mit welcher das Potential durch den Raum sich fortpflanzt.

Zu bemerken ist noch, dass der Werth des Ausdruckes w sich einfacher so darstellen lässt:

$$w = m m_1 \left[\varphi + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right], \tag{14c}$$

wo alsdann unter ψ folgende Function zu verstehen ist:

$$\psi = \int \sqrt{-r \frac{d\varphi}{dr}} \cdot \frac{dr}{c}. \tag{14d}$$

Das receptive Potential ω besteht nach (14a) *aus den beiden Bestandtheilen w und $\frac{d\mathfrak{w}}{dt}$. Von diesen mag der erstere, nämlich w das effective Potential, und der andere, nämlich $\frac{d\mathfrak{w}}{dt}$ das ineffective Potential genannt werden.*

Die hier eingeführten Namen scheinen mir durchaus nothwendig, falls bei den weiteren Untersuchungen die Auseinandersetzung nicht eine zu schleppende werden soll. Und die Art und Weise, *wie* die Namen gewählt sind, dürfte ihre Berechtigung von selber finden im Laufe der folgenden Expositionen.

Für den Fall des Newton'schen Emissionsgesetzes, nämlich für $\varphi = \frac{1}{r}$ wird $\psi = \frac{2\sqrt{r}}{c}$. Für diesen Fall gestalten sich daher die Formeln (14a, b, c) folgendermaassen:

$$\omega = w + \frac{d\mathfrak{w}}{dt}, \tag{15a}$$

$$w = m m_1 \left[\frac{1}{r} + \frac{4}{cc}\left(\frac{d\sqrt{r}}{dt}\right)^2\right], \tag{15b}$$

$$= \frac{m m_1}{r}\left[1 + \frac{1}{cc}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right],$$

$$\mathfrak{w} = m m_1 \left[\frac{\log r}{c} - \frac{1}{2cc}\frac{dr}{dt}\right]. \tag{15c}$$

§ 4.

Das Weber'sche Gesetz.

Ableitung desselben.

Es handle sich darum, die Bewegung zweier Punkte m und m_1 zu ermitteln, unter der von uns gemachten Voraussetzung, dass das von jedem der beiden Punkte in einem bestimmten Zeitaugenblick abgesendete Potential immer erst in einem gewissen späteren Zeitaugenblick den andern Punkt erreicht.

Für irgend einen Zeitaugenblick t mögen die Coordinaten der Punkte mit x, y, z, x_1, y_1, z_1 und ihre Entfernung von einander mit r bezeichnet werden. Ferner mag für jenen Zeitaugenblick unter ω das in (14a, b, c) ermittelte receptive Potential der beiden Punkte:

(16) $$\omega = w + \frac{d\mathfrak{w}}{dt},$$

und unter τ ihre lebendige Kraft:

(17) $$\tau = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] + \frac{m_1}{2}\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right]$$

verstanden werden. Da wir nun das Hamilton'sche Princip als unumschränkt gültig ansehen (pag. 404), so wird die Bewegung der Punkte m und m_1 in einer Weise stattfinden, welche charakterisirt ist durch die aus jenem Princip entspringende Formel:

(18) $$\delta \int (\tau - \omega)\, dt = 0.$$

In dieser Formel ist (pag. 403) die Integration hinerstreckt zu denken über einen beliebig zu wählenden Zeitraum, und andererseits unter δ die *innere Variation*, d. i. eine Variation zu verstehen, welche nicht die Grenzen, sondern nur das Innere jenes Zeitraumes betrifft.

Durch Substitution von (16) nimmt die Formel (18) folgende Gestalt an:

(19) $$\delta \int \tau\, dt = \delta \int \left(w + \frac{d\mathfrak{w}}{dt}\right) dt, \\ = \delta\left(\mathfrak{w}_{\prime\prime} - \mathfrak{w}_{\prime} + \int w\, dt\right),$$

oder, weil δ eine *innere* Variation andeutet, mithin $\delta\mathfrak{w}_{\prime\prime} = \delta\mathfrak{w}_{\prime} = 0$ sind, folgende:

(20) $$\delta \int \tau\, dt = \delta \int w\, dt.$$

Beachtet man nun, dass die in τ und w enthaltenen unbestimmten Functionen durch x, y, z und x_1, y_1, z_1 repräsentirt sind, so ergeben sich durch Ausführung jener Variation und mit Rücksicht auf die von uns eingeführten Bezeichnungen (pag. 414) folgende sechs Gleichungen:

$$
(21)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\Delta\tau}{\Delta x} &= \frac{\Delta w}{\Delta x}, &\qquad \frac{\Delta\tau}{\Delta x_1} &= \frac{\Delta w}{\Delta x_1},\\
\frac{\Delta\tau}{\Delta y} &= \frac{\Delta w}{\Delta y}, &\qquad \frac{\Delta\tau}{\Delta y_1} &= \frac{\Delta w}{\Delta y_1},\\
\frac{\Delta\tau}{\Delta z} &= \frac{\Delta w}{\Delta z}, &\qquad \frac{\Delta\tau}{\Delta z_1} &= \frac{\Delta w}{\Delta z_1}.
\end{aligned}
$$

Führt man die Variationscoefficienten linker Hand wirklich aus, mit Zugrundelegung des in (17) für τ gegebenen Werthes, so gewinnen diese sechs Gleichungen folgende Gestalt:

$$
(22)\qquad
\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta x}, &\qquad m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta x_1},\\
m\frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta y}, &\qquad m_1\frac{d^2y_1}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta y_1},\\
m\frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta z}, &\qquad m_1\frac{d^2z_1}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta z_1}.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen zeigen, *dass die negativen Variationscoefficienten rechter Hand die Componenten derjenigen Kräfte repräsentiren, welche auf die Punkte einwirken während ihrer Bewegung.* Um jene Variationscoefficienten wirklich zu bilden, bemerken wir, dass das effective Potential w (14c) den Werth hat:

$$
(23)\qquad
\begin{aligned}
w &= mm_1\left[\varphi + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right],\\
&= mm_1\left[\varphi + \left(\frac{d\psi}{dr}\frac{dr}{dt}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

also abhängig ist von r und $\frac{dr}{dt}$, während r seinerseits gebunden ist an die unbestimmten Functionen x, y, z, x_1, y_1, z_1 durch die Gleichung

$$
(24)\qquad r^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2.
$$

Jene Variationscoefficienten werden daher berechnet werden können vermittelst eines früher (pag. 416, 417) besprochenen Satzes, nämlich berechnet werden können vermittelst der Formeln:

$$
(25)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\Delta w}{\Delta x} &= \frac{\Delta w}{\Delta r}\frac{\partial r}{\partial x}, &\qquad \frac{\Delta w}{\Delta x_1} &= \frac{\Delta w}{\Delta r}\frac{\partial r}{\partial x_1},\\
\frac{\Delta w}{\Delta y} &= \frac{\Delta w}{\Delta r}\frac{\partial r}{\partial y}, &\qquad \frac{\Delta w}{\Delta y_1} &= \frac{\Delta w}{\Delta r}\frac{\partial r}{\partial y_1},\\
\frac{\Delta w}{\Delta z} &= \frac{\Delta}{\Delta r}\frac{\partial r}{\partial z}, &\qquad \frac{\Delta w}{\Delta z_1} &= \frac{\Delta w}{\Delta r}\frac{\partial r}{\partial z_1}.
\end{aligned}
$$

Substituirt man diese Ausdrücke in (22), und setzt man dabei gleichzeitig für $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\cdots$ die aus (24) sich ergebenden Werthe, so erhält man die Gleichungen:

$$
(26)\qquad
\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta r}\frac{x-x_1}{r}, & m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta r}\frac{x_1-x}{r},\\
m\frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta r}\frac{y-y_1}{r}, & m_1\frac{d^2y_1}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta r}\frac{y_1-y}{r},\\
m\frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta r}\frac{z-z_1}{r}, & m_1\frac{d^2z_1}{dt^2} &= -\frac{\Delta w}{\Delta r}\frac{z_1-z}{r}.
\end{aligned}
$$

Schliesslich bleibt noch übrig die Berechnung des Variationscoefficienten $\frac{\Delta w}{\Delta r}$. Setzt man zur Abkürzung r' statt $\frac{dr}{dt}$ und r'' statt $\frac{d^2r}{dt^2}$, so wird nach (23):

$$(27)\qquad w = mm_1\left[\varphi + \left(\frac{d\psi}{dr}r'\right)^2\right],$$

folglich:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = mm_1\left[\frac{d\varphi}{dr} + 2\frac{d\psi}{dr}\frac{d^2\psi}{dr^2}r'r'\right],$$

$$\frac{\partial w}{\partial r'} = mm_1\cdot 2\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2 r',$$

oder, was dasselbe ist:

$$(\alpha)\qquad \frac{\partial w}{\partial r} = mm_1\left[\frac{d\varphi}{dr} + 2\frac{d\psi}{dt}\frac{d\frac{d\psi}{dr}}{dt}\right],$$

$$(\beta)\qquad \frac{\partial w}{\partial r'} = mm_1\cdot 2\frac{d\psi}{dr}\frac{d\psi}{dt}.$$

Aus letzterer Formel ergiebt sich durch Differentiation:

$$(\gamma)\qquad \frac{d\frac{\partial w}{\partial r'}}{dt} = mm_1\left[2\frac{d\psi}{dr}\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2\frac{d\psi}{dt}\frac{d\frac{d\psi}{dr}}{dt}\right].$$

Nun wird, weil w (27) nur von r und r' abhängt:

$$(28)\qquad \frac{\Delta w}{\Delta r} = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{d\frac{\partial w}{\partial r'}}{dt},$$

folglich, wenn man die Werthe (α), (γ) substituirt:

$$(29)\qquad \frac{\Delta w}{\Delta r} = mm_1\left[\frac{d\varphi}{dr} - 2\frac{d\psi}{dr}\frac{d^2\psi}{dt^2}\right].$$

Aus (26) und (29) ergeben sich folgende Sätze:

Zwischen zwei Punkten m und m_1 ist während ihrer Bewegung eine Kraft R thätig, welche in jedem Augenblick zusammenfällt mit ihrer Verbindungslinie r.

Betrachtet man diese Kraft R als eine repulsive, und ist w das effective Potential der beiden Punkte auf einander, so wird R jederzeit *gleich sein dem negativen Variationscoefficienten von w nach r, also den Werth haben:*

$$R = -\frac{\varDelta w}{\varDelta r}. \tag{30}$$

Ist das in Betreff des Potentiales zu Grunde gelegte Emissionsgesetz ein beliebiges, das emissive Potential also $= m m_1 \varphi(r)$, wo φ eine beliebige Function bezeichnet, und setzt man zur Abkürzung

$$\begin{gathered} \varphi(r) = \varphi, \\ \frac{1}{c}\int\sqrt{-r\frac{d\varphi}{dr}}\,dr = \psi(r) = \psi, \end{gathered} \tag{31}$$

so sind die Werthe für das effective Potential w und für die Kraft R folgende:

$$\begin{gathered} w = m m_1\left[\varphi + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right], \\ R = -\frac{\varDelta w}{\varDelta r} = m m_1\left[-\frac{d\varphi}{dr} + 2\frac{d\psi}{dr}\frac{d^2\psi}{dt^2}\right]. \end{gathered} \tag{32}$$

Legt man insbesondere das Newton'sche Emissionsgesetz zu Grunde, so wird:

$$\begin{gathered} \varphi = \frac{1}{r}, \\ \psi = \frac{2\sqrt{r}}{c}, \end{gathered} \tag{31a}$$

und demzufolge:

$$\begin{gathered} w = m m_1\left[\frac{1}{r} + \frac{4}{cc}\left(\frac{d\sqrt{r}}{dt}\right)^2\right], \\ R = -\frac{\varDelta w}{\varDelta r} = m m_1\left[\frac{1}{rr} + \frac{4}{cc\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}\right], \\ \text{d. i.: } R = \frac{m m_1}{rr}\left[1 - \frac{1}{cc}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2r}{cc}\frac{d^2 r}{dt^2}\right]. \end{gathered} \tag{32a}$$

Ueberall repräsentirt hier c die constante und überaus grosse Geschwindigkeit, mit welcher das Potential im Raume sich fortpflanzt).*

*) Der Werth R (32) kann aus der Formel

$$w = m m_1\left[\varphi + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right]$$

auch folgendermassen abgeleitet werden. Nach dem Satz über die Variationscoefficienten (Pag. 416, 417) ist

$$\begin{aligned} \frac{\varDelta w}{\varDelta r} &= \frac{\varDelta w}{\varDelta \varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\varDelta w}{\varDelta\psi}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \\ &= m m_1\frac{\partial\varphi}{\partial r} - m m_1\cdot 2\frac{d^2\psi}{dt^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \end{aligned}$$

also

$$R = m m_1\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial r} + 2\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{d^2\psi}{dt^2}\right].$$

Die allgemeinere Formel (32) stimmt vollständig überein mit demjenigen Gesetze, welches ich in meiner Dissertation: „*Explicare tentatur quomodo fiat, ut lucis planum polarisationis per vires electricas vel magneticas declinetur. Halis Saxonum* 1858." supponirt habe in Bezug auf die gegenseitige Einwirkung zwischen einem *Elektrischen* und einem *Aethertheilchen*. Denn jene Formel (32) lässt sich so darstellen:

$$(33)\qquad R = mm_1\left[-\frac{d\varphi}{dr} + 2\,\frac{d\psi}{dr}\,\frac{d^2\psi}{dr^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2\frac{d^2r}{dt^2}\right],$$

und nimmt also, wenn man

$$(34)\qquad -\frac{d\varphi}{dr} = F, \qquad 2\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2 = \Phi$$

setzt, die Gestalt an:

$$(35)\qquad R = mm_1\left[F + \frac{1}{2}\,\frac{d\Phi}{dr}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \Phi\,\frac{d^2r}{dt^2}\right].$$

Dies aber ist das in jener Dissertation (pag. 3 derselben) supponirte Gesetz*).

---

*) Die Formeln (34) können, zufolge (31), auch so geschrieben werden:

$$(\alpha)\qquad -\frac{d\varphi}{dr} = F, \qquad -\frac{2r}{cc}\,\frac{d\varphi}{dr} = \Phi.$$

Demnach findet zwischen F und Φ die Relation statt:

$$(\beta)\qquad \frac{2F}{cc} = \frac{\Phi}{r}.$$

In der erwähnten Dissertation habe ich die Beziehung zwischen F und Φ unbestimmt gelassen, so dass also zwischen jener Dissertation und der gegenwärtig entwickelten Theorie nicht der geringste Widerspruch stattfindet. — Das in Rede stehende optische Phänomen habe ich später einer ausführlicheren Bearbeitung unterworfen in meiner Schrift: „Ueber die Magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes. Halle. 1863." Und hier habe ich leider (und zwar nur, um meiner Darstellung eine grössere Einfachheit und Uebersichtlichkeit zu verleihen) zwischen F und Φ eine gewisse Relation angenommen:

$$(\gamma)\qquad \frac{2F}{cc} = -\frac{d\Phi}{dr},$$

welche *für den Specialfall* $\varphi = \frac{1}{r}$ d. i. $F = \frac{1}{rr}$ identisch ist mit der Relation (β), (nämlich ebenso wie jene den Werth $\Phi = \frac{2}{ccr}$ liefert), *im Allgemeinen aber* in Widerspruch steht mit (β). Ich muss mit Bezug hierauf bemerken, dass die Annahme der Relation (γ) in der eben genannten Schrift durch keinerlei innere Gründe geboten wurde, sondern nur geschah, um in der äusseren Form eine grössere Einfachheit zu erzielen. In der That spielt die Function F bei meiner Untersuchung über die Drehung der Polarisationsebene durchaus keine Rolle. Sie

Wichtig vor allen Dingen aber ist, dass die speciellere Formel (32a) identisch (sogar bis auf die Buchstaben identisch) ist mit dem allgemein bekannten *Weber'schen Gesetz.*

Zusätze.

Bezeichnet man die, während der Bewegung der beiden Punkte m und m_1, auf m einwirkende Kraft R, was ihre Componenten anbelangt, mit X, Y, Z, so ist zufolge der Gleichungen (22):

$$(36)\qquad X = -\frac{\Delta w}{\Delta x}, \quad Y = -\frac{\Delta w}{\Delta y}, \quad Z = -\frac{\Delta w}{\Delta z},$$

Denkt man sich nun durch den Punkt m eine Linie gelegt in irgend welcher Richtung, bestimmt durch die Richtungscosinus α, β, γ, und bezeichnet man die Componente jener Kraft R nach dieser Richtung mit P, so wird

$$(37)\qquad P = X\alpha + Y\beta + Z\gamma, \quad = -\left[\frac{\Delta w}{\Delta x}\alpha + \frac{\Delta w}{\Delta y}\beta + \frac{\Delta w}{\Delta z}\gamma\right].$$

Denkt man sich die Beweglichkeit des Punktes m oder x, y, z für den Augenblick auf jene Linie beschränkt, setzt man also

$$x = a + p\alpha, \quad y = b + p\beta, \quad z = c + p\gamma,$$

wo a, b, c ein fester Punkt der Linie, und p die Entfernung ist zwischen diesem Punkte und dem Punkte x, y, z; so wird

$$\alpha = \frac{\partial x}{\partial p}, \qquad \beta = \frac{\partial y}{\partial p}, \qquad \gamma = \frac{\partial z}{\partial p}.$$

Und demgemäss verwandelt sich alsdann die Formel (37) in folgende:

$$(38)\qquad P = -\left[\frac{\Delta w}{\Delta x}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\Delta w}{\Delta y}\frac{\partial y}{\partial p} + \frac{\Delta w}{\Delta z}\frac{\partial z}{\partial p}\right].$$

Was die Abhängigkeit zwischen w und p anbelangt, so ist w zunächst abhängig von $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, während x, y, z ihrerseits abhängig sind von p. Der in (38) befindliche Ausdruck [ ] ist daher, wie aus einem früheren Satze (p. 416, 417) hervorgeht, nichts Anderes als der Variationscoefficient von w nach p. Somit ergiebt sich:

---

fällt gleich zu Anfang aus den Rechnungen heraus. Und die Resultate, zu welchen jene Untersuchung führt, werden daher *ein und dieselben bleiben*, welche Beschaffenheit die zwischen F und Φ vorhandene Relation auch haben mag.

(39) $$P = -\frac{\Delta w}{\Delta p},$$

eine Formel, welche völlig analog ist mit den Formeln (36), und dieselben als Specialfälle in sich fasst.

Sind beliebig viele Punkte $m, m_1, m_2, m_3, \cdots$ vorhanden, und bezeichnen $w_1, w_2, w_3, \cdots$ die effectiven Potentiale für jedes der Punktpaare (m, m_1), (m, m_2), (m, m_3), $\cdots$, so wird, wie sich aus (39) ergiebt, der Ausdruck

(40) $$-\left(\frac{\Delta w_1}{\Delta p} + \frac{\Delta w_2}{\Delta p} + \frac{\Delta w_3}{\Delta p} + \cdots\right)$$

diejenige Kraft repräsentiren, mit welcher der Punkt m von allen übrigen Punkten zusammengenommen in der Richtung p fortgetrieben wird. Dieser Ausdruck aber kann, wenn man unter W das effective Potential des ganzen Punktsystemes versteht, kürzer dargestellt werden durch:

(41) $$-\frac{\Delta W}{\Delta p}.$$

Somit folgt der Satz:

Ist W das effective Potential eines beliebigen Punktsystemes, so wird die Kraft, mit welcher irgend einer dieser Punkte in einer gegebenen Richtung fortgetrieben wird, immer gleich sein dem negativen Variationscoefficienten von W nach jener Richtung.

§ 5.

Das Princip der Lebendigen Kraft.

Betrachtung zweier Punkte.

Wir beginnen mit einem möglichst einfachen Fall, mit dem Fall, dass nur *zwei* Punkte m und m_1 vorhanden sind, und setzen überdies voraus, dass nur *m beweglich*, m_1 aber *fest* ist.

Es seien x, y, z und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten der beiden Punkte, r ihre Entfernung, ferner sei ω das *receptive Potential* der beiden Punkte auf einander, und endlich sei τ ihre lebendige Kraft:

Das receptive Potential ω besteht (pag. 419) aus zwei Theilen:

(1) $$\omega = w + \frac{d\mathfrak{w}}{dt},$$

von welchem der erstere das *effective*, der letztere das *ineffective* Potential genannt wurde. Ferner besitzt das effective Potential w (pag. 419, 420) den Werth:

(2) $$w = m m_1 \left[\varphi(r) + \left(\frac{d\psi(r)}{dt}\right)^2\right],$$

wo $\varphi(r)$ und $\psi(r)$ gegebene Functionen von r sind, welche im Falle des Newton'schen Emissionsgesetzes durch $\frac{1}{r}$ und $\frac{2\sqrt{r}}{c}$ repräsentirt sein würden, wo c die mehrfach genannte Fortpflanzungsgeschwindigkeit vorstellt. Wir bezeichnen die beiden Bestandtheile von w mit u und v, setzen nämlich:

$$(3)\qquad \begin{aligned} w &= u + v, \\ u &= mm_1\,\varphi(r) = mm_1\,\varphi, \\ v &= mm_1\left(\frac{d\psi(r)}{dt}\right)^2 = mm_1\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2. \end{aligned}$$

Im Zustande der Ruhe, d. i. bei sich gleichbleibendem Werthe von r verschwindet v, reducirt sich also w auf u. Von den beiden Bestandtheilen des *effectiven Potentiales* w mag demnach der erstere u das *statische Potential*, der andere v aber das *motorische Potential* genannt werden.

Was die lebendige Kraft τ der beiden Punkte anbelangt, so wird, weil m_1 *fest* gedacht ist:

$$(4)\qquad \tau = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right].$$

Bezeichnen wir die Differentiationen nach der Zeit durch Accente und beachten wiederum, dass x_1, y_1, z_1 *constant* sind, so können wir die Formeln (3) und (4) auch so darstellen:

$$(5)\qquad \begin{aligned} w &= u + v, \\ u &= mm_1\,\varphi, \\ v &= mm_1\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}x' + \frac{\partial\psi}{\partial y}y' + \frac{\partial\psi}{\partial z}z'\right)^2, \end{aligned}$$

$$(6)\qquad \tau = \frac{m}{2}(x'x' + y'y' + z'z').$$

Für die Bewegung der Punkte gilt nun nach dem Hamilton'schen Princip die Formel:

$$(7)\qquad \delta\int(\tau - \mathfrak{w})\,dt = 0$$

d. i. nach (1):

$$(8)\qquad \begin{aligned} \delta\int\tau\,dt &= \delta\int\left(w + \frac{d\mathfrak{w}}{dt}\right)dt, \\ &= \delta\mathfrak{w}_{,,} - \delta\mathfrak{w}_{,} + \delta\int w\,dt, \end{aligned}$$

oder weil die Grenzen der Integrale als unveränderlich zu betrachten sind in Bezug auf Ort und Geschwindigkeit:

$$(9) \qquad \delta' \int \tau\, dt = \delta \int w\, dt.$$

Da x_1, y_1, z_1 constant, und nur x, y, z veränderlich sind, so ergeben sich bei Ausführung der Variation δ nur drei Gleichungen. Diese lauten:

$$(10) \qquad \begin{aligned} -mx'' &= \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial x'}, \\ -my'' &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial y'}, \\ -mz'' &= \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial z'}, \end{aligned}$$

wo die Accente Differentiationen nach der Zeit andeuten. Multiplicirt man diese Gleichungen (10) mit $-x'$, $-y'$, $-z'$, und addirt dieselben sodann, so erhält man mit Rücksicht auf (6):

$$(11\,\text{a}) \qquad \begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} = &-\left(x'\frac{\partial w}{\partial x} + y'\frac{\partial w}{\partial y} + z'\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ &+ \left(x'\frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial x'} + y'\frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial y'} + z'\frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial z'}\right), \end{aligned}$$

oder in abgekürzter Schreibart:

$$(11\,\text{b}) \qquad \frac{d\tau}{dt} = -\left(x'\frac{\partial w}{\partial x} + \cdots\right) + \left(x'\frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial x'} + \cdots\right).$$

Von anderer Seite her ergiebt sich nun, wenn man das effective Potential w (5) nach der Zeit differenzirt, und beachtet, dass dieses w nicht nur von x, y, z, sondern auch von x', y', z' abhängt, die Formel:

$$(12\,\text{a}) \qquad \frac{dw}{dt} = \left(x'\frac{\partial w}{\partial x} + \cdots\right) + \left(x''\frac{\partial w}{\partial x'} + \cdots\right),$$

oder was dasselbe ist:

$$(12\,\text{b}) \qquad \begin{aligned} \frac{dw}{dt} = \left(x'\frac{\partial w}{\partial x} + \cdots\right) &+ \frac{d}{dt}\left(x'\frac{\partial w}{\partial x'} + \cdots\right) \\ &- \left(x'\frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial x'} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Durch Addition von (11b) und (12b) folgt:

$$(13) \qquad \frac{d(\tau + w)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x'\frac{\partial w}{\partial x'} + y'\frac{\partial w}{\partial y'} + z'\frac{\partial w}{\partial z'}\right).$$

Nun ist nach (5): $w = u + v$, ferner u unabhängig von x', y', z', andererseits v ein homogener Ausdruck zweiten Grades von x', y', z'. Daher ist:

$$x'\frac{\partial w}{\partial x'} + y'\frac{\partial w}{\partial y'} + z'\frac{\partial w}{\partial z'} = x'\frac{\partial v}{\partial x'} + y'\frac{\partial v}{\partial y'} + z'\frac{\partial v}{\partial z'} = 2v.$$

Demnach geht die Gleichung (13) über in:

$$\frac{d(\tau + w)}{dt} = \frac{d(2v)}{dt}. \tag{14}$$

Hieraus aber folgt:

$$\tau + w - 2v = \text{Const.}, \tag{15}$$

oder weil $w = u + v$ ist:

$$\tau + u - v = \text{Const.}, \tag{16}$$

d. h. *Die lebendige Kraft, vermehrt um das statische, und vermindert um das motorische Potential bleibt während der Bewegung constant.*

Betrachtung eines beliebigen Punktsystemes.

Völlig Analoges lässt sich nun durchführen für ein System von beliebig vielen, etwa n Punkten, und zwar ganz gleichgültig, ob die Beweglichkeit des Systems eine freie ist, oder beschränkt ist durch irgend welche gegebenen Bedingungen. In Bezug auf diese letzteren mag jedoch vorausgesetzt werden, dass sie ausdrückbar sind durch eine Anzahl von Gleichungen, in welchen *nur die Coordinaten* der Punkte (nicht aber deren Geschwindigkeiten) sich vorfinden. Diese Gleichungen mögen bezeichnet werden mit

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = 0, \text{ etc. etc.} \tag{17}$$

Die lebendige Kraft des Systemes mag T, und das receptive Potential des Systemes Ω genannt werden. Es wird dann T eine Summe von n Gliedern sein, deren jedes die Form hat:

$$\tau = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = \frac{m}{2}(x'x' + y'y' + z'z'); \tag{18}$$

und andererseits wird Ω eine Summe von $\frac{n(n-1)}{2}$ Gliedern sein, deren jedes, je zweien Punkten zugehörig, die Form hat:

$$\omega = w + \frac{d\mathfrak{w}}{dt} = u + v + \frac{d\mathfrak{w}}{dt}. \tag{19}$$

Eine analoge Form wird demnach auch Ω selber besitzen, nämlich:

$$\Omega = W + \frac{d\mathfrak{W}}{dt} = U + V + \frac{d\mathfrak{W}}{dt}, \tag{20}$$

wo W das effective und $\frac{d\mathfrak{W}}{dt}$ das ineffective Potential des Systemes repräsentirt, und wo andererseits, was die beiden Bestandtheile von W anbelangt, U das statische und V das motorische Potential des Systemes bezeichnet.

Das effective Potential $W = U + V$ des Systemes besteht aus $\frac{n(n-1)}{2}$ Gliedern von der Form $w = u + v$. Sind m und m_1 irgend zwei unter den Punkten des Systemes, r ihre Entfernung, ferner x, y, z und x_1, y_1, z_1 ihre Coordinaten, so wird das diesen beiden Punkten zugehörige Glied $w = u + v$ den Werth haben [vergl. die Formel (3)]:

$$\begin{aligned} & w = u + v, \\ (21\text{a}) \qquad & u = m m_1 \varphi(r) = m m_1 \varphi, \\ & v = m m_1 \left(\frac{d\psi(r)}{dt}\right)^2 = m m_1 \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2, \end{aligned}$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$\begin{aligned} & w = u + v, \\ (21\text{b}) \qquad & u = m m_1 \varphi, \\ & v = m m_1 \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}(x' - x_1') + \frac{\partial\psi}{\partial y}(y' - y_1') + \frac{\partial\psi}{\partial z}(z' - z_1')\right)^2. \end{aligned}$$

Für die Bewegung des Systemes würde, wenn seine Beweglichkeit eine völlig freie wäre, die Formel gelten:

$$\delta \int \mathsf{T}\, dt = \delta \int \Omega\, dt.$$

Da seine Beweglichkeit aber beschränkt ist durch die gegebenen Bedingungsgleichungen (17), so wird die genannte Formel zu ersetzen sein durch folgende:

$$(22) \qquad \delta \int \mathsf{T}\, dt = \delta \int (\Omega + \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \cdots)\, dt,$$

in welcher $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ anzusehen sind als unbekannte Functionen der Zeit. Setzt man nach (20): $\Omega = W + \frac{d\mathfrak{W}}{dt}$, so reducirt sich diese Formel auf:

$$(23) \qquad \delta \int \mathsf{T}\, dt = \delta \int (W + \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \cdots)\, dt.$$

Und hieraus ergeben sich nun, wenn man die Variation δ ausführt, $3n$ Differentialgleichungen, nämlich ebenso viele Gleichungen als veränderliche Grössen x, y, z vorhanden sind. Diejenigen dieser Gleichungen, welche dem Punkte m mit den Coordinaten x, y, z zugehören, lauten:

$$\begin{aligned} & -m x'' = \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial x'} + \lambda_1 \frac{\partial B_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial B_2}{\partial x} + \cdots, \\ (24) \qquad & -m y'' = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial y'} + \lambda_1 \frac{\partial B_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial B_2}{\partial y} + \cdots, \\ & -m z'' = \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial z'} + \lambda_1 \frac{\partial B_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial B_2}{\partial z} + \cdots. \end{aligned}$$

Durch Multiplication mit $-x', -y', -z'$ und Addition, und mit Rücksicht auf die Bezeichnung (18) ergiebt sich hieraus die Gleichung:

$$(25)\qquad \frac{d\tau}{dt} = -\left(x'\frac{\partial W}{\partial x} + y'\frac{\partial W}{\partial y} + z'\frac{\partial W}{\partial z}\right)$$
$$+\left(x'\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial x'} + y'\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial y'} + z'\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial z'}\right)$$
$$-\lambda_1\left(x'\frac{\partial B_1}{\partial x} + \cdots\right) - \lambda_2\left(x'\frac{\partial B_2}{\partial x} + \cdots\right) - \cdots.$$

Solcher Gleichungen können ebenso viele gebildet werden als Punkte vorhanden sind. Denkt man sich alle diese Gleichungen addirt, so erhält man mit Rücksicht auf die Bedingungen (17) folgende Formel:

$$(26)\qquad \frac{d\mathsf{T}}{dt} = -\Sigma\left(x'\frac{\partial W}{\partial x} + \cdots\right) + \Sigma\left(x'\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial x'} + \cdots\right).$$

Von anderer Seite her ergiebt sich, wenn man das von den Coordinaten und Geschwindigkeiten abhängende effective Potential W nach der Zeit differenzirt:

$$\frac{dW}{dt} = \Sigma\left(x'\frac{\partial W}{\partial x} + \cdots\right) + \Sigma\left(x''\frac{\partial W}{\partial x'} + \cdots\right),$$

oder was dasselbe ist:

$$(27)\qquad \frac{dW}{dt} = \Sigma\left(x'\frac{\partial W}{\partial x} + \cdots\right) + \frac{d}{dt}\Sigma\left(x'\frac{\partial W}{\partial x'} + \cdots\right)$$
$$-\Sigma\left(x'\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial x'} + \cdots\right).$$

Durch Addition von (26) und (27) folgt:

$$(28)\qquad \frac{d(\mathsf{T}+W)}{dt} = \frac{d}{dt}\Sigma\left(x'\frac{\partial W}{\partial x'} + y'\frac{\partial W}{\partial y'} + z'\frac{\partial W}{\partial z'}\right).$$

Nun ist $W = U + V$, und wie aus (21b) erhellt, U unabhängig von den $3n$ Grössen x', y', z', andererseits V ein homogener Ausdruck zweiten Grades dieser $3n$ Grössen. Demnach wird:

$$\Sigma\left(x'\frac{\partial W}{\partial x'} + y'\frac{\partial W}{\partial y'} + z'\frac{\partial W}{\partial z'}\right) = 2V.$$

Die Gleichung (28) geht daher über in:

$$(29)\qquad \frac{d(\mathsf{T}+W)}{dt} = \frac{d(2V)}{dt};$$

und hieraus folgt:

$$(30)\qquad \mathsf{T} + W - 2V = \text{Const.},$$

oder weil $W = U + V$ ist:

$$(31)\qquad \mathsf{T} + U - V = \text{Const.},$$

eine Formel, welche für $c = \infty$ d. i. für den Fall einer *momentanen* Fortpflanzung des Potentiales sich reducirt auf die wohl bekannte Formel $\mathsf{T} + U = \text{Const.}$ (Vergl. pag. 403.) Die allgemeine Formel (31) enthält den Satz:

Bei der Bewegung eines beliebigen Punktsystemes wird die Lebendige Kraft, vermehrt um das statische und vermindert um das motorische Potential beständig ein und denselben Werth behalten. Dabei ist es gleichgültig, ob die Beweglichkeit des Systemes eine freie ist, oder ob sie beschränkt ist durch irgend welche (die Coordinaten der Punkte betreffende) Bedingungen.

Bei der Ableitung dieses Satzes ist stillschweigend vorausgesetzt worden, dass in dem Punktsystem nur *innere* Kräfte thätig sind. Sollte ein aus den Punkten $m_1, m_2, \cdots m_n$ bestehendes System ausser seinen *inneren* Kräften auch noch gegebenen *äusseren* Kräften unterworfen sein, so werden sich immer irgend welche *feste Punkte* $M_1, M_2, \cdots M_p$ auffinden lassen, welche als die Ausgangspunkte jener letzteren Kräfte angesehen werden können. Das aus all' diesen $n + p$ Punkten bestehende System wird dann aber nur noch *inneren* Kräften unterworfen sein, und daher beherrscht werden von dem soeben aufgestellten Satz. Denn dass einige von jenen $n + p$ Punkten von gegebenen Bedingungen bis zur absoluten Unbeweglichkeit beschränkt sind, ist für die Anwendbarkeit des Satzes völlig gleichgültig.

Nachschrift.

Wenn man (wie das seit Newton fast allgemein geschieht) annimmt, dass *räumlich* getrennte Gegenstände unmittelbar auf einander wirken, so wird es ebenso gut auch zulässig sein, eine unmittelbare gegenseitige Wirkung zwischen Gegenständen anzunehmen, die *zeitlich* von einander getrennt sind; vorausgesetzt natürlich, dass eine solche Annahme zu ebenso glücklichen Consequenzen führt wie die erstere. Demgemäss bemerkt Herr Professer Weber, dem ich für seine gütige Mittheilung zu grösstem Dank verpflichtet bin, dass die von mir aufgestellte Hypothese $\left(\text{für den Fall } \varphi = \frac{1}{r}\right)$ sich so formuliren lasse:

„*Die von einem Massentheilchen herrührenden Potentialwerthe sind den Entfernungen umgekehrt proportional, und gelten für spätere Zeitmomente nach Proportion der Entfernung.* Der Grund, warum sie für spätere Zeitmomente gelten, *kann* in einer Fortpflanzung liegen, von der sich aber nur sprechen liesse unter Voraussetzung einer *höheren Mechanik* (wie z. B. von der Fortpflanzung der Luftwellen nur auf Grund der Mechanik der Luft), und woraus dann folgen würde, dass die Fortpflanzung in jedem Punkt des Mediums gestört und unterbrochen werden kann."

Müsste die hier angeregte Frage, ob die zwischen *zeitlich* getrennten Gegenständen zu supponirende Einwirkung als etwas Primäres (nicht weiter Erklärbares) oder als etwas Secundäres (auf einfachere Vorgänge Zurückführbares) angesehen werden solle, *augenblicklich* entschieden werden, so würde ich in der That der erstern Auffassung unbedenklich den Vorzug geben. Aber auch in diesem Fall dürfte die von mir gewählte Ausdrucksweise wenigstens als eine *bildliche* nicht ungeeignet, und somit *berechtigt* sein.

Tübingen, im Mai 1868.

Nachträgliche Bemerkungen des Verfassers im Jahre 1880.

Die *letzten Worte* der vorliegenden Schrift (pag. 433, 434) dürften *an und für sich* schon deutlich erkennen lassen, wie wenig zutreffend diejenigen Einwendungen waren, welche von *Clausius* im Jahre 1869 (in Poggend. Annal., Bd. 135, pag. 606) gegen den Inhalt der vorliegenden Schrift erhoben sind. Man vergleiche übrigens hierüber meinen Aufsatz in den Math. Annal., Bd. I, pag. 317—324.

Ferner zeigt ein flüchtiger Blick auf die *ersten Seiten* der vorliegenden Schrift (pag. 400—402), dass ich damals, im Jahre 1868, bei Verfassung dieser Schrift unbekannt war mit zwei in dieses Gebiet einschlagenden Betrachtungen von *Weber* und *Riemann*.

Die Weber'sche Betrachtung (eine kurze Notiz in Poggend. Annal., Bd. 73, pag. 229, vom Jahre 1848) *zeigt in einfacher Weise, dass bei Annahme des Weber'schen Grundgesetzes das Princip der lebendigen Kraft fortbesteht.* — Ich kann nur bedauern, dass mir diese Notiz damals unbekannt war; und habe übrigens in meinen späteren Publicationen (z. B in den Abhandlungen der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. 11, 1874, pag 115) nachträglich jene Weber'sche Betrachtung in das gehörige Licht zu stellen, mich angelegentlichst bemüht.

Andererseits enthalten die Riemann'schen Betrachtungen (vergl das Hattendorff'sche Werk über Schwere, Elektricität und Magnetismus, Hannover bei Rümpler, 1876, pag. 316—336) *den Gedanken, ein elektrodynamisches Potential einzuführen, und aus diesem die elektrischen Kräfte durch Variation abzuleiten*, also einen Gedanken, der in der vorliegenden Schrift besonders betont, und in ansehnlichem Umfange entwickelt ist. Dass diese Riemann'schen Betrachtungen mir damals, im Jahre 1868, bei Verfassung der vorliegenden Schrift *unbekannt* waren, bedarf offenbar keiner Entschuldigung. Denn dieselben bilden allerdings (wie Hattendorff angiebt) einen Theil einer schon 1861 von Riemann in Göttingen gehaltenen Vorlesung, sind aber erst im Jahre 1876 gedruckt worden (in dem schon genannten Hattendorff'schen Werk).

Ob es unter sobewandten Umständen erlaubt ist, schlechtweg *Riemann* als Urheber dieses Gedankens zu bezeichnen, oder ob es nicht vielmehr gerecht sei, daneben auch *denjenigen* zu nennen, der unabhängig von Riemann auf denselben Gedanken kam, und denselben *zuerst* (und zwar in sorgfältiger Ausarbeitung) publicirte, — darüber mögen Andere entscheiden. Ich meinerseits glaube allerdings, dass wenn z. B. Herr *Clausius* in einem seiner letzten Aufsätze diesen Gedanken der Einführung eines elektrodynamischen Potentials und der Ableitung der Kräfte aus demselben durch Variation reproducirt, ohne dabei meiner Arbeiten *auch nur mit einer Silbe zu gedenken*, — diess namentlich bei denjenigen, welche in der betreffenden Literatur nur oberflächlich bewandert sind, leicht zu einer sehr falschen Auffassungsweise Veranlassung geben könnte.

Leipzig, im November 1880.

N.
