Eléments d'analyse de Karl Weierstrass

PIERRE DUGAC

Présenté par A. P. YOUSCHKEVITCH

Table des matières

1. Introduction

L'étude de l'œuvre de CHARLES MÉRAY dans le domaine des fondements de l'analyse et, en particulier, de sa théorie des nombres irrationnels et de sa conception de la notion de limite ([34]) nous a amené, de façon tout à fait naturelle, à nous interroger sur les autres théories qui ont été élaborées dans cette deuxième moitié du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, particulièrement sur celle de KARL WEIERSTRASS.

WEIERSTRASS a un certain nombre de points en commun avec MÉRAY, mais, lui, a dominé l'analyse de son temps par l'unité et par la rigueur de sa conception mathématique, par les idées nouvelles et par les théories qui ont ouvert la voie à des branches mathématiques qui n'existaient pas à son époque.

Remarquons tout de suite qu'en ce qui concerne la théorie des nombres irrationnels, nous n'adopterons pas l'interprétation habituelle des historiens des mathématiques, selon laquelle vers 1872 apparaissent presque simultanément des théories équivalentes des nombres irrationnels, celle de MÉRAY en France et celles de WEIERSTRASS, de HEINE, de CANTOR et de DEDEKIND en Allemagne. Cette façon de voir, outre qu'elle est inexacte quant à la simultanéité de ces théories, ne fait pas ressortir les différentes voies prises pour arriver à la solution du problème et, surtout, elle semble donner le même poids aux différentes théories, alors que les raisons mathématiques qu'avaient ces mathématiciens d'élaborer une théorie rigoureuse des nombres irrationnels n'étaient pas d'égale importance.

En effet, HEINE et CANTOR étaient au courant de la théorie de WEIERSTRASS des nombres irrationnels et s'ils entreprennent d'élaborer des théories originales, c'est pour mieux les adapter à des problèmes mathématiques particuliers. Par contre, MÉRAY, comme nous l'avons vu dans [34] et souligné dans [35], cherche à trouver une nouvelle théorie, car l'ancienne lui paraît manquer totalement de rigueur et de clarté. De même, WEIERSTRASS au moment où il reconstitue les fondements de l'analyse, comme nous allons le voir dans cette étude, se trouve dans l'obligation de construire une théorie des nombres irrationnels, car il n'a à sa disposition aucune qui soit correcte.

DEDEKIND, lui aussi, semble être parvenu, de façon également indépendante, non seulement à construire une théorie rigoureuse et originale des nombres irrationnels, mais aussi à l'idée de la nécessité de cette construction pour asseoir l'analyse sur des bases plus solides [1].

Le but de notre exposé est de dégager quelques notions essentielles de l'analyse de WEIERSTRASS, d'en chercher l'origine et de suivre leur évolution et leurs transformations. Nous nous proposons de donner une esquisse, très partielle, de l'édifice mathématique imposant qu'a construit ce mathématicien qui alliait, de façon exemplaire, la profondeur et l'originalité de la pensée à une puissance de travail exceptionnelle. Nous essayerons aussi d'éclairer quelques points de sa personnalité et de cette époque, si décisive, dans l'histoire de l'analyse mathématique.

La difficulté de cette tâche est accrue par le fait que l'essentiel des travaux de WEIERSTRASS sur les fondements de l'analyse n'a jamais été publié. Pour savoir comment, dans ses cours, WEIERSTRASS exposait ses idées et présentait les fondements de l'analyse, nous avons utilisé de très nombreux manuscrits de ses élèves, des cours de 1861 à 1886, et c'est la première fois qu'une telle étude historique est entreprise. On trouvera, en de nombreux appendices, l'essentiel de certains de ces cours et, en particulier, tout le début du cours de 1878 rédigé par ADOLF HURWITZ (rédaction que nous avons découverte à Zürich), pour qu'on ait une idée précise de la construction weierstrassienne des nombres réels.

Il est important de noter que, dans le plan de l'édition de ses œuvres mathématiques, WEIERSTRASS n'envisageait pas de publier son cours sur l'introduction à la théorie des fonctions analytiques, cours qui contenait ses fondements de l'analyse ([91], 208). Cette omission, très significative, pose une question importante et la réponse motivée que nous tenterons d'en donner diffère de celles qui ont été avancées jusqu'à présent. Il ne s'agit pas seulement du perfectionnisme permanent de WEIERSTRASS, mais plutôt du fait qu'il avait le sentiment que sa théorie n'était pas au point. C'est ainsi qu'il écrivait à SCHWARZ ([A VII], 12 juin 1888): «je n'ai pas encore complètement tiré au clair plusieurs points difficiles». De plus, pendant que WEIERSTRASS enseignait sa théorie des fonctions, l'analyse faisait des progrès considérables et les méthodes de WEIERSTRASS étaient attaquées, en particulier par KRONECKER. C'est pourquoi, il sentait la nécessité de reprendre son introduction à la théorie des fonctions. Mais, les années passant, il n'avait plus les forces nécessaires pour mener à bien cette entreprise, ainsi qu'en témoignent les lettres inédites de G. MITTAG-LEFFLER à CHARLES HERMITE (tous les inédits se trouvent dans les appendices à la fin de ce travail et sont signalés par la lettre A suivie d'un chiffre romain). Dans sa lettre du 22 février 1881 ([A XI]), MITTAG-LEFFLER précise qu'une des causes de ce que WEIERSTRASS publie peu est sa difficulté physique à écrire: «le sang lui monte à la tête au même moment où il met la plume sur le papier». De plus, «il a la mauvaise habitude de remettre tout ce qui peut être remis». Et le 18 février 1885 il rappelle le mal qu'a WEIERSTRASS «de finir un travail de quelle nature que cela soit. Cette difficulté est devenue

---

[1] Nous ferons en mai 1973, à l'Institut Henri Poincaré de Paris, au Séminaire d'histoire des mathématiques, un exposé qui aura pour titre: «Coupure, idéal, ensemble. Sur l'analyse de RICHARD DEDEKIND jusqu'en 1872».

maintenant une impossibilité». Ainsi ce sont les difficultés théoriques et physiques conjuguées qui ont finalement obligé WEIERSTRASS à renoncer à la rédaction de son introduction à la théorie des fonctions analytiques.

Quelques éléments du présent travail ont été exposés dans [35].

2. Weierstrass avant son arrivée à Berlin

Il est né en 1815, l'année de Waterloo, la même année où naissait BISMARCK. Mais, WEIERSTRASS était, lui, profondément pacifiste. N'écrivait-il pas à son élève KÖNIGSBERGER le 25 octobre 1870 ([75], 131): «Espérons que l'année prochaine les gens pacifiques comme nous pourrons au moins profiter sans troubles des vacances, dont nous aurons doublement besoin après l'agitation actuelle». Et si la France ne considérait pas BISMARCK comme particulièrement amical envers elle, il n'en était pas de même pour WEIERSTRASS qui fut nommé, en 1882, chevalier de la Légion d'honneur.

Grâce à HERMITE, cette nomination de WEIERSTRASS ne fut pas une occasion de voir se déployer la rivalité entre lui et KRONECKER. En effet, HERMITE écrivit aussitôt à JEAN-BAPTISTE DUMAS, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences de Paris, dans une lettre inédite du 19 mai 1882 ([A XII]): «Nous avons dans la section de Géométrie deux correspondants illustres Mr. Weierstrass et Mr. Kronecker que de grandes découvertes ont placés au premier rang des analystes de notre époque». Et il demande à DUMAS, «d'appeler également l'attention de Mr. le Président de Conseil sur les titres éminents de Mr. Kronecker, qui dans une autre voie n'a pas moins mérité de la Science que Mr. Weierstrass». Par la lettre du 7 juillet 1882 d'HERMITE à DUMAS, nous apprenons que KRONECKER a également été nommé chevalier de la Légion d'honneur et DUMAS a ainsi procuré à HERMITE «l'un des meilleurs moments de sa vie scientifique».

2.1. Etudiant à Bonn

Nous retrouvons WEIERSTRASS de 19 à 23 ans à Bonn, étudiant le droit. Mais il s'intéresse surtout aux mathématiques. SCHWARZ ([A XIII], 3) signale que WEIERSTRASS a suivi les cours de PLÜCKER et qu'il s'est consacré «à l'analyse avec beaucoup de ferveur». Ces années sont marquées par une étude très poussée de la «Mécanique céleste» de LAPLACE, des «Fundamenta nova» de JACOBI parus en 1829 ([58], 278) et surtout, ce qui est capital, des articles d'ABEL publiés dans le Journal de CRELLE.

Déjà au lycée, WEIERSTRASS lisait la revue de CRELLE ([69], 597) et fut particulièrement intéressé par les articles de STEINER (beaucoup plus tard, il éditera les œuvres mathématiques de STEINER). Ce premier intérêt pour la géométrie est à rapprocher de celui de MÉRAY ([34], 334). S'adonnant ensuite de façon presque exclusive à l'analyse et à ses applications, WEIERSTRASS fit toutefois, entre 1858 et 1873, plusieurs cours consacrés à la géométrie et on rencontre une de ses rares démonstrations purement géométriques, dans le tome III de ses oeuvres mathématiques ([108], 161—174).

Le livre de LAPLACE, «Mécanique céleste», a eu un retentissement international exceptionnel et l'astronomie mathématique avait une faveur immense auprès des mathématiciens de cette époque. GAUSS lui-même y employait une partie très importante de son activité scientifique. Quant à ABEL, il écrit le 24 octobre 1826 à propos de cet ouvrage de LAPLACE ([2], Correspondance, 49): «Celui qui a écrit un pareil livre peut avec plaisir jeter un regard en arrière sur sa vie scientifique». Et quand, ses études terminées, CAUCHY part en mars 1810 rejoindre son premier poste à Cherbourg et participer à l'agrandissement du port devant servir à NAPOLÉON pour son invasion projetée de l'Angleterre ([104], 27), «il avait placé au fond de sa malle la *Mécanique céleste* de LAPLACE et le *Traité des Fonctions analytiques* de LAGRANGE». Cette œuvre de LAPLACE a profondément marqué WEIERSTRASS, car toute sa vie il s'intéressa à la physique mathématique, à la mécanique et aux systèmes différentiels.

La lecture de l'œuvre difficile de JACOBI ([57], 709), «Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum», qui eut exigé pour être comprise qu'on connût les travaux de LEGENDRE sur les fonctions elliptiques, a fait que, déjà à Bonn, WEIERSTRASS s'est intéressé au cours que faisait GUDERMANN à Münster sur les fonctions elliptiques et qu'il a étudié les notes prises au cours de GUDERMANN.

Mais il lisait aussi les travaux d'ABEL publiés dans le Journal de Crelle. A ce propos, nous avons un témoignage important de WEIERSTRASS lui-même qui révèle que ses études à Bonn l'ont mené plus loin que l'on ne le pensait jusqu'ici. En effet, WEIERSTRASS en faisant don à la Norvège de la lettre d'ABEL à LEGENDRE, publiée dans le Journal de CRELLE, écrit à SOPHUS LIE le 10 avril 1882 ([2], Correspondance, 108—109) que lorsqu'il connut cette lettre pendant ses années d'études à Bonn, grâce au Journal de CRELLE, elle fut pour lui d'une extrême importance. WEIERSTRASS dit que le premier problème mathématique important qu'il s'était posé, et «dont la solution heureuse» le décida, pendant son septième semestre à Bonn, «à se consacrer entièrement aux mathématiques», a été de tirer directement la fonction qu'ABEL, dans sa lettre, désigne par $\lambda(x)$ de l'équation différentielle qui la définit.

ABEL avait mentionné ce problème également dans son «Précis d'une théorie des fonctions elliptiques» publié dans le Journal de CRELLE en 1829 ([1], 518—617). A LEGENDRE, ABEL écrit ([2], Correspondance, 85—86) qu'en étudiant les fonctions elliptiques il a été conduit à de nouvelles fonctions ayant des propriétés remarquables. Il s'agit, en particulier, de la fonction $y = \lambda(x)$, où

$$x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}},$$

et il a trouvé (ABEL n'en donne pas la démonstration) qu'on peut représenter cette fonction sous la forme

$$\lambda(x) = \frac{x + A_1x^3 + A_2x^5 + A_3x^7 + \cdots}{1 + B_2x^4 + B_3x^6 + B_4x^8 + \cdots},$$

«où le numérateur et le dénominateur sont des séries *toujours convergentes* quelles que soient les valeurs de la variable x et du module c, réelles ou imaginaires». Notons que BORCHARDT a publié dans le tome 54 du Journal de CRELLE de 1857 un article de JACOBI sur la «Représentation des fonctions elliptiques par des séries entières», trouvé dans les manuscrits laissés par JACOBI.

Les travaux de JACOBI et d'ABEL sur les fonctions elliptiques ont marqué WEIERSTRASS si profondément, qu'il se fixe comme but de poursuivre et achever l'œuvre entreprise par ces deux mathématiciens dans le domaine des fonctions elliptiques et de leurs généralisations.

Mais cette double étude approfondie du livre de LAPLACE, d'une part, et des œuvres de JACOBI et d'ABEL, d'autre part, montre l'étendue de l'ambition scientifique de WEIERSTRASS. A cette époque, parmi les visées les plus hautes de la science figuraient l'achèvement de la construction newtonienne de la mécanique céleste ainsi que l'élaboration d'une théorie d'ensemble des fonctions elliptiques et abéliennes, ce qui était le problème le plus important de l'analyse mathématique de ce temps. Et si WEIERSTRASS opte finalement pour l'analyse, on peut penser que «l'heureuse solution» du problème posé par ABEL a eu son importance.

Ainsi, le séjour à Bonn de WEIERSTRASS marque une étape essentielle dans son orientation mathématique: les fonctions elliptiques et l'utilisation des séries entières.

2.2. Etudiant de Gudermann à Münster

En 1839, sans avoir obtenu de diplôme à Bonn, après quatre années d'études, et après avoir souffert physiquement et moralement durant l'automne et l'hiver de 1838 et le printemps de 1839 ([88], 215), WEIERSTRASS arrive à Münster pour préparer un diplôme de professorat de mathématiques pour l'enseignement secondaire. Et dans sa vie, où il lui faudra attendre longtemps pour que sa valeur mathématique soit reconnue et où, comme il le dira plus tard, lorsqu'il fut comblé d'honneurs, tout arrive malheureusement trop tard ([10], 192), il eut tout de même la chance de rencontrer à Münster CHRISTOF GUDERMANN (1798—1852). Déjà à Bonn WEIERSTRASS connaissait GUDERMANN de réputation, par les articles publiés dans le Journal de CRELLE et les notes prises aux cours de GUDERMANN sur les fonctions elliptiques, qu'il avait lues à Bonn, et il désirait, dès cette époque, suivre son enseignement à l'université de Münster.

Ce qui est aussi important à souligner pour notre propos, c'est le renouveau de l'enseignement des mathématiques dans les universités allemandes et qui eut son origine à l'université de Königsberg, où JACOBI arriva en 1826 ([4], 17). JACOBI introduisit de nouvelles matières dans ses cours et son influence se fit sentir progressivement dans les autres universités allemandes. C'est là qu'il faut chercher, pour une grande part, la raison de l'essor extraordinaire qui se fit jour dans les mathématiques allemandes au XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Et Münster fut une des premières universités où les recherches d'ABEL et de JACOBI furent enseignées. En effet, en 1836, GUDERMANN y fit son premier cours sur les fonctions elliptiques. Le premier cours sur le même sujet fait par JACOBI à Königsberg est de l'hiver 1829/1830 ([69], 600). GUDERMANN fut ainsi le deuxième mathématicien allemand à enseigner la théorie de ces nouvelles fonctions dont les travaux d'ABEL et de JACOBI, alors tout récents, avaient montré l'importance.

Remarquons que la rencontre de GUDERMANN et de WEIERSTRASS aurait pu avoir lieu quatre années plus tôt si GUDERMANN qui désirait enseigner à Bonn ne s'était vu préférer PLÜCKER. JACOBI, ami de GUDERMANN, écrit dans une lettre de la fin de 1835 ([3], 42) que GUDERMANN était si furieux de n'avoir pas été nommé à Bonn qu'il fit publier, dans des journaux, des entrefilets signés par lui disant que les étudiants des provinces du Rhin et de la Westphalie (dont faisait partie Bonn) ne pouvaient apprendre les mathématiques supérieures qu'à Münster!

GUDERMANN, âgé de 41 ans au moment de l'arrivée de WEIERSTRASS à Münster, avait été d'abord, comme le sera plus tard WEIERSTRASS, professeur dans l'enseignement secondaire. Il enseigna neuf ans au lycée de Clèves ([69], 598) avant d'être appelé à Münster, où il succéda à BAUMANN, mort jeune, qui y avait fait un cours de calcul différentiel et intégral d'après le traité de S. F. LACROIX. CRELLE disait de GUDERMANN, lorsque ce dernier fut nommé en novembre 1832 docteur honoris causa de l'université de Berlin, que ses travaux se caractérisaient par la clarté, la solidité, la rigueur des concepts et l'esprit de suite dans l'exécution.

GUDERMANN était en effet un bon mathématicien et un calculateur intrépide. Son premier travail sur les fonctions elliptiques, publié en 1835, est inspiré de l'œuvre de LEGENDRE et de JACOBI. Mais ce qui est important pour notre propos, c'est qu'entre 1838 et 1843 il publie un mémoire de plus de 600 pages dans le Journal de CRELLE sur les fonctions elliptiques. Avec GUDERMANN, WEIERSTRASS se trouvait donc à bonne école.

Notons également que c'est dans une publication de GUDERMANN de 1838 que nous avons trouvé mentionné pour la première fois, à notre connaissance, la notion de convergence uniforme (Journal reine angew. Math. **18** (1838), 251—252). GUDERMANN écrit que c'est un fait remarquable qu'aussi bien les produits infinis que les séries qu'il étudie ont une convergence uniforme («im ganzen gleichen Grad»), terme que WEIERSTRASS utilisera plus tard dans ses cours, comme nous le verrons par la suite. GUDERMANN étudie les développements des fonctions elliptiques, fonctions de l'amplitude et du module, et il signale que leur convergence ne dépend pas des amplitudes, mais uniquement des modules. C'est ainsi que WEIERSTRASS a eu l'occasion de se familiariser avec cette notion chez GUDERMANN, même si l'usage qu'en faisait ce dernier était restrictif.

Au cours de l'hiver 1839—1840, WEIERSTRASS suit le cours de GUDERMANN sur les fonctions elliptiques avec tout l'acquis de son travail personnel à Bonn. Et quand on examine les calculs que faisait GUDERMANN dans ses mémoires, on comprend pourquoi des 13 élèves du premier cours, il n'ait retrouvé qu'un seul, WEIERSTRASS, à son deuxième cours. Sans parler de la nouveauté de la matière et de sa difficulté.

C'est au mois de mai 1840 que GUDERMANN donne à WEIERSTRASS les sujets de la dissertation mathématique pour l'obtention du diplôme de professeur d'enseignement secondaire. L'énoncé du sujet sur les fonctions elliptiques précise qu'il a été donné à WEIERSTRASS sur sa demande ([77], 21), bien qu'il soit trop difficile pour un jeune analyste. Il était, entre autres, demandé au candidat de donner le développement des fonctions elliptiques en séries de puissances et de calculer les coefficients du développement jusqu'à un certain ordre.

Comme on le voit, la dissertation de WEIERSTRASS consistera à développer les résultats qu'il avait commencé à trouver à Bonn. Dans ce travail, publié pour la première fois dans ses œuvres mathématiques en 1894, WEIERSTRASS précise ([106], 1) que c'est ABEL qui a signalé la possibilité d'exprimer les fonctions elliptiques comme quotient de deux séries de puissances.

WEIERSTRASS rédige son travail en été 1840 et le présente à GUDERMANN en automne de la même année ([106], 50). Le jugement, remarquable de perspicacité et de clairvoyance, que porte GUDERMANN sur ce travail ([101]) est extrêmement intéressant. En effet, il dit que le candidat avait pris une direction tout à fait nouvelle dans l'étude des fonctions elliptiques et qu'il était arrivé à des résultats tout à fait nouveaux. Et dans la partie la plus importante du rapport (partie ignorée de WEIERSTRASS jusqu'en 1853) il dit qu'après «ce travail, il fait partie, égal parmi les égaux, de la suite des célèbres inventeurs. Cet accomplissement n'a pas été uniquement obtenu grâce à un immense effort, mais s'explique davantage par le fait que WEIERSTRASS est doué d'un talent exceptionnel qui, s'il n'est pas gaspillé, fera certainement avancer, également dans l'avenir, la science avec fruit».

On a rarement porté, au début d'une carrière mathématique, un jugement aussi explicite et que l'avenir a si amplement justifié. Mais, comme nous l'avons déjà signalé, WEIERSTRASS n'a connu ce jugement qu'en 1853 ([4], 41). A ce propos, WEIERSTRASS écrivait à H. A. SCHWARZ en 1884 que s'il avait connu l'ensemble de l'appréciation de GUDERMANN il aurait pu obtenir, beaucoup plus tôt, un poste à l'université. Dans cette lettre, WEIERSTRASS disait qu'il était d'autant plus reconnaissant à GUDERMANN que celui-ci critiquait les méthodes qu'il avait utilisées.

Ainsi, si en une année à Münster WEIERSTRASS accomplit un travail qu'un très bon mathématicien de son temps juge comme étant digne des plus grands, c'est qu'il n'avait pas tout à fait perdu son temps à Bonn.

Ce mémoire «Sur le développement des fonctions modulaires», c'est-à-dire des fonctions elliptiques ([106], 1—50), montre l'effort considérable qu'il a fourni. Effort de calcul aussi, car dans ses développements il calcule jusqu'au $10^{\text{ème}}$ coefficient. WEIERSTRASS y étudie les fonctions définies par les séries de puissances de la variable complexe (comme le suggérait ABEL dans sa lettre à LEGENDRE) et il semble avoir été en avance, de ce point de vue, sur CAUCHY qui n'aurait étudié de telles fonctions qu'en 1846 ([55], 291). Notons que, tandis que JACOBI dans ses développements des fonctions elliptiques imposait au module d'être compris entre 0 et 1, WEIERSTRASS fait ses développements pour toute valeur du module ([86], 2).

Cette première étude de WEIERSTRASS contient l'esquisse de quelques idées qui seront à la base de son œuvre en analyse: utilisation des séries entières et des équations différentielles pour construire de nouvelles fonctions.

Dans un autre travail «Représentation d'une fonction analytique d'une variable complexe, dont les valeurs absolues sont comprises entre deux valeurs données», fait également à Münster en 1841 ([106], 51—66), mais qui n'a été publié qu'en 1894, il étudie les séries de LAURENT. LAURENT publiera son théorème en 1843 (C.R. Acad. Sci. Paris **17** (1843), 348—349, 938—942).

En automne 1841, toujours à Münster, il écrit «Sur la théorie des séries entières», également publié pour la première fois dans ses œuvres mathématiques ([106], 67—74). Il y introduit (p. 67 et p. 70) la notion de convergence uniforme.

En 1842, WEIERSTRASS écrit à Münster le mémoire «Définition des fonctions analytiques au moyen des équations différentielles algébriques», publié seulement en 1894 ([106], 75—84), où il démontre le théorème sur les solutions séries entières d'un système différentiel, théorème qui fut publié en 1842 par CAUCHY. WEIERSTRASS précise dans ses œuvres mathématiques qu'il avait ignoré à cette époque la publication de CAUCHY ([106], 85); la démonstration de WEIERSTRASS diffère d'ailleurs de celle de CAUCHY. Mais ce mémoire contient l'idée de prolongement analytique ([106], 84) qui va être une des notions fondamentales de la théorie weierstrassienne des fonctions analytiques, notion à la fois ensembliste, car on considere les propriétés de la fonction dans l'intersection de deux sous-ensembles de $\mathbb{C}$, et topologique, car ces propriétés sont considérées dans un voisinage d'un point z_0. De plus, dans ce mémoire, WEIERSTRASS envisage la possibilité d'existence de points singuliers. Ainsi, il est arrivé à cette notion indépendamment de PUISEUX, dont le mémoire sur les fonctions algébriques fut publié en 1850 ([103], 39).

L'importance de ce mémoire de WEIERSTRASS dans son œuvre est soulignée par lui-même ([106], 85), mais c'est surtout POINCARÉ qui la met bien en lumière ([84], 9—10). Car, pour avoir le droit de représenter «toutes les fonctions par des séries et pour pouvoir sans crainte se servir de cette représentation dans toutes les questions du calcul intégral, il fallait faire voir qu'on peut égaler à une série de puissances toute fonction implicite tirée d'un système d'équations dont les premiers membres sont des séries de puissances, ou l'intégrale d'une équation différentielle dont les coefficients sont des séries de puissances. Cet important théorème devait être pour Weierstrass une des pierrres fondamentales de son système».

Quoique ce théorème fut d'abord établi par CAUCHY, POINCARÉ reconnait que WEIERSTRASS y est parvenu de façon indépendante et surtout il souligne les moyens utilisés pour sa démonstration: «L'uniformité de la convergence, la façon dont les éléments de fonctions se déduisent les uns des autres par continuation analytique sont des questions qu'il étudie à fond. D'un autre côté, au point de vue didactique, son mode d'exposition présente de grands avantages; sa «fonction majorante» est plus simple et plus maniable que celle de Cauchy; les inégalités du début sont tirées des propriétés élémentaires des séries, et non plus de la considération d'intégrales imaginaires. C'est là un progrès, il y avait intérêt à montrer quand cette considération est indispensable et quand on peut s'en passer».

Ainsi le séjour de WEIERSTRASS à Münster fut décisif pour lui et il y jeta les bases de sa future théorie des fonctions.

2.3. Lehrer der Mathematik

De 1842 à 1855, WEIERSTRASS va faire de l'enseignement secondaire. Signalons qu'également MÉRAY commence par être professeur du secondaire ([34], 334). D'abord à Saint-Quentin, il fut nommé ensuite, en 1860, au lycée de Nantes ([83], 16—17), où le proviseur du lycée lui communique son tableau de service qui comprenait, entre autres, la classe de quatrième, très nombreuse, mais qui offrait «l'avantage de multiples leçons particulières. Méray, que sa situation de fortune mettait au-dessus de ces petits calculs d'intérêt, eut de beaucoup préféré une classe moins lucrative mais moins absorbante, qui lui aurait laissé du temps pour ses travaux mathématiques». Un collègue de MÉRAY proposa alors un échange, que le proviseur refusa. MÉRAY donna sa démission et c'est seulement en mars 1866 qu'il reprit son enseignement, comme chargé d'un cours à la Faculté des Sciences de Lyon, poste qu'il obtint grâce à BRIOT.

Mais WEIERSTRASS, lui, n'avait pas de fortune personnelle et il dut passer plusieurs années dans d'obscures villes de province, chercheur solitaire, loin des centres de recherche et des bibliothèques. Il lui fallut une volonté et une énergie peu communes pour surmonter ces conditions de vie et trouver le temps, malgré les nombreuses heures d'enseignement, de poursuivre des études et ses recherches. Et, lorsque sa santé ne l'en empêche pas, il travaille beaucoup et avec persévérance. Ces années, il les a décrites, dans une lettre du 6 juin 1875 à PAUL DU BOIS-REYMOND ([109], 209), comme une époque de sa vie qui n'aurait été qu'un vide infini et un intolérable ennui, sans le dur labeur qu'il accomplissait. Parlant de ses années de solitude, il dit avec ironie (combien douloureuse, même en 1875) que d'ordinaire ces années, on les appelle les plus belles de la vie. Cette amertume ne devait plus quitter WEIERSTRASS, même au plus haut de sa gloire! D'autant plus que, vers 1845 à Deutsch-Crona, il fut terriblement marqué par une douloureuse déception sentimentale ([A XIII], 7). WEIERSTRASS en tomba malade et cette triste expérience «a jeté une ombre» sur toute sa vie affective. Comme l'écrit SCHWARZ, elle a donné «à tout son être quelque chose de timide et de réservé».

WEIERSTRASS publie, dans les Annales du Lycée de Deutsch-Crona 1842—1843 ([106], 87—103), le mémoire «Remarques sur les factorielles analytiques» qui passa complètement inaperçu. Ce qui est curieux, c'est que WEIERSTRASS n'ait pas eu l'idée de proposer son travail à CRELLE pour son Journal; d'autant plus que CRELLE lui-même s'était occupé de ce problème. Mais cela montre aussi la grande solitude scientifique dans laquelle vivait WEIERSTRASS.

D'août à octobre 1844 ([3], 43—44), il fit un séjour à Berlin pour suivre un stage pour les professeurs de ... gymnastique! Car, il enseignait aussi cette matière. Il rendit alors visite à DIRICHLET et à STEINER.

Il n'est pas sans intérêt de citer une lettre de JACOBI écrite le 21 décembre 1846 à von HUMBOLDT ([11], 48) qui éclaire la situation de l'analyse mathématique telle qu'elle se présentait avant que la nouvelle génération d'analystes, dont WEIERSTRASS sera un des éléments les plus importants, ne surgisse et ne crée une nouvelle analyse. JACOBI écrit que ni lui, ni CAUCHY, ni GAUSS, mais DIRICHLET seul sait ce qu'est une démonstration mathématique parfaitement rigoureuse. «Quand Gauss dit qu'il a démontré quelque chose, cela me parait très probable, quand Cauchy le dit, il y a autant à parier pour que contre, quand Dirichlet le dit, cela est *certain*».

En 1849, il publie dans les Annales du lycée de Braunsberg 1848—1849 le mémoire «Contribution à la théorie des intégrales abéliennes» ([106], 111—131) qui resta également inaperçu.

La publication de son mémoire «Sur la théorie des fonctions abéliennes» dans le Journal de CRELLE, en 1854, révèle d'un seul coup un travail important, solution, partielle, des problèmes les plus difficiles légués par ABEL et JACOBI. CRELLE reconnut immédiatement la valeur de WEIERSTRASS. Dans une lettre du 27 novembre 1854 ([7], 219), parlant du contenu du prochain tome de sa revue, il souligne en particulier le travail de WEIERSTRASS qui, dit-il, révèle une intelligence mathématique si profonde et si pénétrante et un don pour la recherche qui le situe parmi les plus célèbres continuateurs d'ABEL, de JACOBI et de EISENSTEIN.

Ainsi, pour la deuxième fois, WEIERSTRASS a rencontré un juge d'une rare clairvoyance. Mais, cette fois-ci, il en résultera autre chose qu'un jugement lucide et profond.

Ce mémoire de WEIERSTRASS a fait aussi une forte impression sur JOSEPH LIOUVILLE qui le fit aussitôt traduire et publier dans son Journal de Math. pures et appl. 19 (1854), 257—278. Par une lettre de DIRICHLET du 19 mai 1855, nous apprenons ([9], 311) que LIOUVILLE qui, des mathématiciens français de cette époque, possédait les connaissances les plus étendues sur la littérature mathématique de ce temps avait écrit, l'automne précédent, lors d'un séjour de DIRICHLET chez lui à Toul, une lettre à WEIERSTRASS dans laquelle il lui exprimait très chaleureusement son approbation pour son travail.

A la suite de la publication de ce mémoire de 1854, BORCHARDT, élève et ami de JACOBI, alla à Braunsberg, où enseignait WEIERSTRASS, pour faire sa connaissance. BORCHARDT et WEIERSTRASS devinrent amis et cette amitié durera jusqu'à la mort de BORCHARDT en 1880. BORCHARDT fut le seul, avec Sophie KOVALEVSKAYA, que WEIERSTRASS tutoya. En 1880, bouleversé par la mort de son ami, WEIERSTRASS se souvint de cette première visite avec une très grande émotion ([A VII], 1. 7. 80), car depuis 1841 il n'y avait eu personne avec qui il eût pu parler de mathématiques. De même RICHELOT, successeur de JACOBI à Königsberg, va à Braunsberg pour remettre à WEIERSTRASS le diplôme de docteur honoris causa que lui avait décerné l'université de Königsberg et là, devant les collègues et amis de WEIERSTRASS, il déclare ([57], 718): «Nous avons trouvé en Monsieur Weierstrass notre maître». Lors de son 80$^{\text{ème}}$ anniversaire, ayant reçu les honneurs que le monde scientifique accorde à ses membres les plus éminents, WEIERSTRASS parlait encore ([77], 51) avec une très grande émotion de cette visite de RICHELOT.

Ainsi, si ce mémoire de 1854 fit connaître WEIERSTRASS, il marque aussi une étape décisive dans son œuvre mathématique. En effet, on rencontre ici, pour la première fois, un passage naturel des intégrales abéliennes aux fonctions de plusieurs variables, ([103], 40), ce qui fut une des découvertes les plus importantes de WEIERSTRASS. On peut situer vers cette époque les débuts de ce que sera la théorie weierstrassienne des fonctions de plusieurs variables.

Le 4 janvier 1855, CRELLE écrit au ministre des cultes, qui avait la charge de l'éducation nationale, pour attirer son attention sur le cas de WEIERSTRASS. Il formule le vœu que WEIERSTRASS, dont la valeur est exceptionnelle, puisse trouver une place qui lui permette de poursuivre ses recherches ([4], 44—45). Il précisait qu'il craignait que la double activité d'enseignant et de chercheur ne fût fatale à WEIERSTRASS, qui n'avait pas une santé solide, et que, s'il y avait beaucoup d'excellents enseignants, il y avait très peu de chercheurs valables qui sont «les professeurs des professeurs».

A la suite de cette lettre, le ministre demande à DIRICHLET, professeur à l'université de Berlin, son opinion sur WEIERSTRASS et DIRICHLET lui répond le 19 mai 1855 (après que le ministre eut renouvelé sa demande, DIRICHLET n'ayant pas répondu à sa première lettre ([70], 187)). Avec son scrupule coutumier, il écrit au ministre ([4], 46—47) qu'il ne pouvait pas porter un jugement précis et complet sur des travaux mathématiques tant que toutes les propositions n'avaient pas été entièrement démontrées et que cette réserve était pour lui une obligation de conscience. Or, jusqu'à présent, WEIERSTRASS «n'a donné que des démonstrations partielles de ses recherches, dans lesquelles manquent des explications intermédiaires». Toutefois, affirme DIRICHLET, ses recherches manifestent d'une conception si solide et si profonde du sujet qu'indubitablement, plus tard, il en donnera des démonstrations complètes. Et DIRICHLET conclut qu'il était au plus haut point souhaitable que WEIERSTRASS trouvât une place lui permettant de se consacrer entièrement à la science.

A ce propos, il est intéressant de noter ce qu'écrit DIRICHLET à KUMMER dans une lettre du 4 mars 1856 ([12], 12). Parlant de RIEMANN, qui s'occupe depuis plusieurs années des propriétés générales des fonctions de variable complexe et qui a fondé une théorie des fonctions abéliennes sur cette base, DIRICHLET écrit que cette théorie «est certainement encore plus vaste que les recherches de Weierstrass».

3. Les cours de Weierstrass à Berlin

Ainsi, en 1855, l'année même où mourut GAUSS, WEIERSTRASS à quarante ans devient brusquement célèbre parmi les mathématiciens allemands. DEDEKIND avait alors 24 ans et il était à Göttingen, où il avait soutenu l'année précédente la thèse qui lui donnait accès à l'enseignement supérieur. Quant à MÉRAY, il était à l'Ecole Normale Supérieure de Paris, où il entra premier et le demeura pendant les années qu'il y passa.

A la mort de GAUSS, DIRICHLET quitte Berlin pour lui succéder à Göttingen et la place de DIRICHLET sera occupée par son ami KUMMER, qui était à Breslau. WEIERSTRASS pose alors sa canditature pour la place devenue vacante à Breslau, mais, KUMMER, s'y étant opposé, il n'est pas nommé. En effet, KUMMER écrit à son ami KRONECKER ([69], 603) que si WEIERSTRASS pouvait, avec honneur, être membre de l'Académie des Sciences de Berlin, «son grand mémoire sur la théorie des fonctions abéliennes n'offrait pas la garantie nécessaire» pour s'occuper pratiquement seul de la formation de jeunes mathématiciens. L'année suivante, le 12 juin 1856, KUMMER propose à la Faculté de philosophie de Berlin de nommer WEIERSTRASS et BORCHARDT comme professeurs extraordinaires, mais la décision fut ajournée ([10], 200).

Toutefois, WEIERSTRASS fut nommé le 14 juin 1856 à Gewerbeinstitut ([11], 100) (qui deviendra plus tard Technische Hochschule) grâce à l'intervention d'ALEXANDER VON HUMBOLDT ([4], 49—50) et à celle de RICHELOT ([A XIII], 2). Remarquous que VON HUMBOLDT était protecteur du Journal de CRELLE et ami de PLÜCKER.

En septembre 1856, WEIERSTRASS fait avec KUMMER un voyage à Vienne et il fit une telle impression sur KUMMER que celui-ci, dès son retour, écrivit directement au ministre le 28 septembre 1856. Trois jours plus tard, WEIERSTRASS se trouve nommé professeur extraordinaire à l'université de Berlin ([10], 201).

En novembre de la même année, toujours sur la proposition de KUMMER, il est élu à l'Académie des Sciences de Berlin ([8], 24).

Notons que cette même année, en 1856, LEOPOLD KRONECKER, ami intime de KUMMER, arrive à Berlin, après fortune faite dans les affaires.

Ainsi se trouve formé le triumvirat KRONECKER, KUMMER et WEIERSTRASS. Et en 1857 (l'année où meurt CAUCHY) BORCHARDT, ami de WEIERSTRASS, assumera la rédaction du Journal de CRELLE, mort en 1855. Nous voyons ainsi que l'année 1856 est une année charnière dans l'histoire des mathématiques.

En cette année 1856, WEIERSTRASS publie dans le Journal de CRELLE le mémoire «Sur la théorie des factorielles analytiques» ([106], 153—221), qui contient l'esquisse du concept weierstrassien de la fonction analytique ([82], 103), c'est-à-dire des fonctions développables en séries de TAYLOR et qui, connues dans un domaine aussi petit que l'on veut, peuvent être prolongées partout où l'on établira leur existence. Dans ce mémoire, WEIERSTRASS montre aussi l'équivalence de la convergence et de la divergence de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \quad \text{et du produit infini} \quad \prod_{n=0}^{\infty} (1+|u_n|) \qquad ([106], 175).$$

Le discours de WEIERSTRASS, lors de sa réception en 1857 à l'Académie des Sciences de Berlin, est très précieux pour l'histoire des mathématiques. WEIERSTRASS y exprime, pour la première fois, sa conception des mathématiques et donne une vue d'ensemble sur le travail qu'il avait accompli jusque là ([106], 223—226):

«Je dois maintenant expliquer en quelques mots quelle a été jusqu'ici la marche de mes études et dans quelle direction je m'efforcerai de les poursuivre.

Depuis le temps où, sous la direction de mon maître Gudermann, je fis pour la première fois connaissance avec la théorie des fonctions elliptiques, cette branche nouvelle de l'analyse mathématique a exercé sur mon esprit un puissant attrait dont l'influence sur le développement de ma pensée a été décisive.»

Cette branche nouvelle des mathématiques, fondée par EULER, développée par LEGENDRE, a été complètement bouleversée par ABEL et JACOBI qui introduisirent les fonctions doublement périodiques. Et WEIERSTRASS poursuit: «Ces transcendantes, dotant l'analyse de grandeurs nouvelles dont les propriétés sont remarquables, trouvaient aussi des applications en géométrie et en mécanique et montraient par là qu'elles étaient le fruit normal d'un développement naturel de la science». On trouve ici des idées chères à WEIERSTRASS et auxquelles il restera attaché: tendre vers une abstraction de plus en plus poussée, et il a été amené à cela de façon naturelle par la difficulté des problèmes à résoudre et par sa volonté de rigueur, mais ne jamais perdre de vue la solidarité naturelle des mathématiques avec les autres sciences, ne jamais oublier qu'elles font partie de la science dont les différentes disciplines s'interpénètrent et ne progressent que tant qu'elles s'appuient les unes sur les autres, se rendant mutuellement service.

Puis, WEIERSTRASS dit qu'ABEL avait réussi à démontrer un théorème qui s'étend à toutes les transcendantes résultant de l'intégration des différentielles algébriques, tandis que JACOBI a démontré l'existence de fonctions périodiques de plusieurs variables. «La représentation effective de ces grandeurs, dont l'analyse n'avait encore aucun exemple, l'étude détaillée de leurs propriétés devenait donc l'un des problèmes fondamentaux des mathématiques; et, dès que j'en eus compris le sens et l'importance, je résolus de m'y essayer.

C'eût été une véritable folie, si j'avais seulement voulu penser à la solution d'un pareil problème, sans m'y être préparé par une étude approfondie des moyens qui devaient m'y aider et sans m'être exercé d'abord sur des problèmes moins difficiles».

Ce texte montre d'abord que jusqu'en 1857 la théorie des fonctions abéliennes représentait pour WEIERSTRASS le but exclusif, il montre ensuite que la théorie des fonctions analytiques était, pour lui, un moyen pour y parvenir et enfin que les fondements de l'analyse ne préoccupaient pas WEIERSTRASS au point de ne même pas les mentionner dans son discours académique.

C'est seulement à Berlin que WEIERSTRASS va commencer une remise en question systématique des fondements de l'analyse tels qu'ils étaient établis à cette époque. Il exposera ses théories dans ses cours et les perfectionnera au cours des années. Nous ferons d'abord une étude de ses cours, puis, dans le chapitre 4, nous tenterons de donner une idée des états successifs des éléments de l'analyse weierstrassienne.

3.1. Cours du semestre d'hiver 1856—1857 au semestre d'été 1861

Nous allons procéder à un examen détaillé des cours de WEIERSTRASS à l'université de Berlin ([108], 355—360), car ils sont extrêmement instructifs pour la compréhension de l'évolution de son analyse.

Son premier cours, celui de l'hiver 1856—1857 porte sur les «Chapitres choisis de la physique mathématique». Il s'agissait de quelques leçons sur la théorie de la dispersion de GAUSS, leçons auxquelles assistait L. FUCHS ([61], 21—22), futur collègue de WEIERSTRASS à l'université de Berlin. WEIERSTRASS s'est toujours intéressé à la physique mathématique et il pensait que les mathématiques devaient être des outils destinés à résoudre les problèmes posés par les autres sciences et surtout par les sciences physiques.

De ce point de vue, il est intéressant de mentionner la thèse soutenue en 1878 par H. VON MANGOLDT ([11], 141—142), dirigée par WEIERSTRASS et intitulée: «Pour la solution des problèmes que la physique mathématique présente aux mathématiques, l'étude des fonctions analytiques suffit». On a un peu l'impression d'entendre MÉRAY affirmer que «tout phénomène naturel est représentable exactement par les séries entières» ([34], 337). Mais il ne faut pas prendre ce titre au pied de la lettre, ainsi qu'en témoignent les travaux de SOPHIE KOVALEVSKAYA et LAZARUS FUCHS, élèves de WEIERSTRASS, et de WEIERSTRASS lui-même.

Pendant le semestre d'été de 1857, WEIERSTRASS fait un cours sur «Les théorèmes généraux concernant la représentation des fonctions analytiques par des séries convergentes». Ainsi, un an après son arrivée à Berlin, il fait un exposé systématique qui englobe les résultats qu'il a obtenus depuis 1841. Notons que MÉRAY exposera ses idées sur le même sujet, pour la première fois, en 1868.

Ce même semestre, il fait son premier cours sur les fonctions elliptiques devant six étudiants, dont FUCHS et KÖNIGSBERGER ([61], 393). Il y cite «Fundamenta nova» de JACOBI (p. 396), la remarque d'ABEL sur la possibilité d'écrire les fonctions elliptiques comme quotients de deux séries entières (p. 397), ainsi que les travaux de LIOUVILLE, sur lesquels nous reviendrons. De même, il cite les noms d'HERMITE et de GUDERMANN (p. 411). Plus tard, WEIERSTRASS se référera beaucoup moins à d'autres mathématiciens, au fur et à mesure qu'il élaborera systématiquement sa théorie des fonctions. Toutefois, dans ce cours, comme le souligne KÖNIGSBERGER, le nom et les méthodes de CAUCHY furent complètement ignorés (p. 421). Et KÖNIGSBERGER ajoute que ce fut un sérieux handicap pour les jeunes chercheurs lorsqu'ils voulurent s'initier à l'œuvre de RIEMANN. Dans son autobiographie, «Ma vie» ([61], 59), KÖNIGSBERGER écrit encore: «Jadis, nous, les jeunes mathématiciens, avions tous le sentiment que les idées et les méthodes de Riemann ne faisaient plus partie des mathématiques rigoureuses d'Euler, de Lagrange, de Gauss, de Jacobi et de Dirichlet».

En hiver 1857—1858 il traite des «Problèmes choisis de géométrie et de mécanique résolus à l'aide des fonctions elliptiques». Cela montre cette même volonté de WEIERSTRASS de lier les mathématiques aux applications.

Ce même hiver, il fait un autre cours qui traite de la «Théorie et applications des séries trigonométriques et de l'intégrale définie qui servent à la réprésentation des fonctions arbitraires». Comme nous le verrons, le problème de l'intégration était un de ceux que WEIERSTRASS a toujours cherché à résoudre.

Sur ce cours de WEIERSTRASS, nous avons un témoignage de WEIERSTRASS lui-même. Dans une lettre du 14 mars 1885, dans laquelle WEIERSTRASS expose ses recherches sur les fonctions trigonométriques et en particulier son théorème sur l'approximation d'une fonction continue périodique par des polynômes trigonométriques, il parle ([A VII], 14 mars 1885) de ce cours de 1857—1858, disant qu'il a été si contrarié par le manque de rigueur de tous les travaux de l'époque sur le sujet et par l'inefficacité de ses propres efforts d'alors pour y remédier, qu'il n'a jamais pu se résoudre à refaire ce cours.

Dans cette lettre, WEIERSTRASS dit que l'on sait que le développement en série de FOURIER d'une fonction continue ne converge pas nécessairement vers la fonction. Notons à ce sujet qu'une lettre inédite de PAUL DU BOIS-REYMOND ([A XIV], 16 janvier 1883) à HALPHEN nous apprend qu'avant 1873 le contraire était la conviction générale, conviction partagée par DIRICHLET, RIEMANN et ... WEIERSTRASS lui-même.

Toutefois, ce fut WEIERSTRASS qui signala que le théorème de CAUCHY sur l'intégration terme à terme d'une série ne pouvait être démontré que si l'on supposait que la série est uniformément convergente ([95], 95—96). Il était donc nécessaire de revoir la méthode employée par FOURIER pour la détermination des coefficients des séries de FOURIER. De plus, dans une lettre du 30 novembre 1873 à DU BOIS-REYMOND ([109], 201), WEIERSTRASS écrit qu'à son avis il n'y avait pas de critère général valable pour la convergence des séries de FOURIER et que celui de DIRICHLET n'était pas rigoureux. WEIERSTRASS fut aussi l'un des premiers à se poser la question de l'unicité de la représentation d'une fonction donnée par une série trigonométrique ([79], 217).

Le semestre d'été 1858 est consacré à un cours sur «Quelques chapitres choisis du calcul intégral» et à un cours sur la «Nouvelle géométrie».

WEIERSTRASS avait signalé, à plusieurs reprises, que l'intégrale de RIEMANN n'était pas suffisamment générale et qu'il y avait des fonctions qui interviennent en analyse et qui n'étaient pas intégrables au sens de RIEMANN. Nous verrons que dans son dernier cours d'analyse, du semestre d'été 1886, il s'était encore occupé de ce problème d'intégration.

Dans la liste des cours faits par WEIERSTRASS à l'université de Berlin, et qui se trouve dans le tome III de ses œuvres mathématiques, ne figure pas le cours fait par WEIERSTRASS ([11], 121) *en hiver 1858—1859* sur les «Théorèmes généraux concernant la représentation des fonctions analytiques par les séries infinies».

Le 4 juillet 1859, WEIERSTRASS fait à l'Académie des Sciences de Berlin le rapport sur les titres de RIEMANN pour sa nomination comme membre correspondant de l'Académie ([8], 27). Il y affirme que les mémoires de RIEMANN appartiennent aux plus importantes publications mathématiques récentes et qu'ils se distinguent «par l'importance des résultats qu'ils contiennent, ainsi que par l'originalité et la fécondité de la méthode». Quant à leur influence sur le développement futur, elle «sera essentielle et durable».

En septembre 1859 ([10], 216) RIEMANN fait un voyage à Berlin en compagnie de DEDEKIND et la rencontre de RIEMANN et de WEIERSTRASS laissera une forte empreinte sur ce dernier.

C'est avec le cours de l'hiver 1859—1860 que WEIERSTRASS va commencer à étudier les fondements de l'analyse. Il fait alors un cours «privé» de 5 heures par semaine intitulé «Introduction à l'analyse» et le poursuit, pendant le semestre d'été 1860, comme cours «privatissime». De ces leçons, nous aurons de larges échos dans le cours professé à Gewerbeinstitut, pendant le semestre d'été 1861, intitulé «Calcul différentiel» et rédigé par H. A. SCHWARZ, élève de cet institut. C'est ce cours que nous utiliserons dans notre exposé pour donner une idée de l'analyse weierstrassienne vers 1860 ([A II]). Ce manuscrit, qui sera étudié pour la première fois dans le chapitre 4, est important à plusieurs points de vue. Il montre, entre autres, que WEIERSTRASS n'avait pas encore construit en 1861 sa théorie des nombres irrationnels, mais que déjà il en esquisse le modèle dans ce cours. Nous verrons dans le § 3.2 qu'il faut situer cette théorie vers 1863. Il montre aussi, comme nous le verrons plus loin, que WEIERSTRASS n'avait pas encore construit l'exemple de sa fonction continue qui n'est dérivable en aucun point de son ensemble de continuité.

Plus tard DINI ([33], IV), insatisfait lui aussi de l'état de l'analyse à son époque et ayant entendu parler des cours de WEIERSTRASS et de son nouvel enseignement de l'analyse, écrit à SCHWARZ et celui-ci lui communique ses notes sur les cours de WEIERSTRASS.

Le 8 mai 1861 eut lieu la première séance du Séminaire mathématique fondé par KUMMER et WEIERSTRASS à l'université de Berlin. Il est intéressant de noter que le catalogue de la bibliothèque du séminaire (fondée par WEIERSTRASS), et qui commence à la date du 1er juillet 1861 ([11], 126—127, 188), a pour les 5 premiers titres:

1. CAUCHY, AUGUSTIN-LOUIS:	Exercices de mathématiques T. 1—5, Paris 1826/30.
2. le même:	Résumés analytiques, Turin 1833.
3. le même:	Nouveaux exercices de mathématiques, Prague 1835.
4. le même:	Exercices d'analyse et de physique mathématique T. 1—4, Paris 1840/47.
5. le même:	Leçons sur les applications du calcul différentiel à la géometrie, T. 1—2, Paris 1826.

3.2. Premiers cours de Weierstrass sur les nombres irrationnels

WEIERSTRASS annonce pour *l'hiver 1861—1862* un cours qui portait le titre: «Théorie générale des fonctions analytiques». Mais, tombé gravement malade, il ne fera pas ce cours; et ne le donnera qu'*en hiver 1863—1864*. Entretemps, pendant l'hiver 1862—1863 et pour le semestre d'été 1863, WEIERSTRASS fait un cours sur les fonctions elliptiques. Il répétera le cours sur les fonctions analytiques deux ans plus tard, en *hiver 1865—1866*, cours dont s'inspirera KOSSAK pour la rédaction de son livre «Les éléments d'arithmétique», publié en 1872 ([62]), et qui est le premier exposé imprimé de la théorie weierstrassienne des nombres irrationnels.

Nous avons déjà vu que dans le cours de WEIERSTRASS du semestre d'été de 1861 à Gewerbeinstitut, rédigé par SCHWARZ ([A II]), figurait le modèle dont il s'inspirera pour la construction de sa théorie des nombres irrationnels. Il y disait ([A II], 35) qu'il y a des grandeurs qu'on ne peut pas exprimer à l'aide de l'unité et de ses parties et pour lesquelles il faut utiliser la forme des séries infinies. Mais si l'idée est bien là, on est très loin de la théorie telle que WEIERSTRASS l'exposera plus tard dans ses cours et qui sera rapportée par KOSSAK. D'autant que, en 1861, pour définir la série infinie, WEIERSTRASS utilise la définition de la convergence de la série et la notion du reste, qui n'interviendront pas dans sa définition des nombres irrationnels. Donc, si WEIERSTRASS avait pu faire le cours annoncé pour le semestre d'hiver 1861—1862, on n'aurait pas pu y trouver sa théorie des nombres irrationnels telle que nous l'exposerons. Rien de ce qui existe à ce sujet dans le cours d'été de 1861 ne le laisse prévoir. Nous pensons qu'il a mis à profit les deux années, pendant lesquelles il n'a pas fait de cours sur les fonctions analytiques, pour élaborer sa théorie des nombres irrationnels, qui figurait au début de ce cours, et dont il a donné le premier exposé public pendant le semestre d'hiver 1863—1864. Il est vraisemblable qu'il a mis au point sa théorie dans le courant de 1863. Notons que GEORG CANTOR arrive à Berlin en automne 1863 ([36], 193), où il reste jusqu'en été 1866, et qu'il assiste ainsi aux premiers cours où WEIERSTRASS expose sa théorie des nombres irrationnels dont la trame ensembliste est un des éléments très important. (WEIERSTRASS fut le deuxième rapporteur de la thèse de CANTOR du 14 décembre 1867.)

Examinons maintenant quelques idées qui étaient dans l'air à cette époque, pour mieux comprendre pourquoi WEIERSTRASS éprouva le besoin de reprendre les bases de la théorie des fonctions.

En 1862, paraît un article de J. B. LISTING ([68], 99) où on retrouve le mot agrégat dans sa définition de «complexes spatiaux» qui sont des agrégats de points, de lignes et de surfaces et qui partagent, d'une façon quelconque, un espace infini. LISTING, qui introduit de nombreuses définitions de topologie et donne une très grande généralité à ces notions topologiques (le mot topologie y figure), précise toutefois ([68], 111) que plus grande est la généralité qu'on cherche à obtenir plus il est nécessaire que les premières notions soient définies avec rigueur. Sinon, on court le risque de perdre en précision ce que l'on gagne en généralité. Or, WEIERSTRASS voulait arriver à la plus grande généralité possible et dans cette revue de Göttingen, où paraissait l'article de LISTING, il pouvait lire ses propres préoccupations. Ainsi, une des idées de ce temps était qu'il fallait donner à toute théorie mathématique générale une base rigoureuse.

Un autre événement important de cette année 1862 fut la traduction en allemand du livre de Briot et Bouquet (les maîtres de Méray ([34], 337)) sous le titre: «Théorie des fonctions doublement périodiques et notamment des transcendantes elliptiques, avec références aux travaux des mathématiciens allemands». Ce livre est intéressant à plus d'un titre. Hermite estimait en 1885 (Archives de l'Académie des Sciences de Paris) que Bouquet avait donné, en collaboration avec Briot, «sur la théorie des fonctions elliptiques un ouvrage qui compte parmi les plus importantes publications analytiques de notre époque». Comme nous le verrons plus bas, pour écrire ce livre, Briot et Bouquet s'étaient inspiré d'un cours de Liouville.

Ce qui est surtout intéressant, pour notre propos, dans le livre de Briot et Bouquet, c'est qu'il commence par une théorie *générale* des fonctions analytiques, préliminaire à l'étude des fonctions doublement périodiques. Mais cette première partie contient plusieurs théorèmes incomplets et les efforts qui ont été faits pour en donner des énoncés exacts et pour clarifier les notions qui y interviennent, efforts auxquels Weierstrass a participé, ont eu une très grande importance en analyse. De plus, ces théorèmes faisaient appel à des propriétés non explicitées de sous-ensembles de points de la droite et du plan, ce qui devait amener d'autres mathématiciens, de façon tout à fait naturelle, à la notion de point d'accumulation, à la propriété de Bolzano-Weierstrass et à une construction rigoureuse des nombres irrationnels.

Ainsi, Briot et Bouquet considérant ([19], 36—37) l'équation $f(z)=0$, où f est une fonction holomorphe et z appartenant à une partie bornée du plan, affirment que cette équation n'admet qu'un nombre fini de racines, «car, si elle en admettait une infinité, les points qui correspondent aux racines seraient infiniment rapprochés les uns des autres et la fonction nulle en ces points infiniment rapprochés, ce qui est impossible». Or, cette «démonstration» fait appel à des notions qui ne sont pas du tout définies dans le cours de Briot et Bouquet, en particulier à celle du point d'accumulation. A la page 38, Briot et Bouquet écrivent: «Supposons maintenant que la fonction $f(z)$ ne devienne infinie pour aucune valeur finie ou infinie de z, c'est-à-dire que le module de la fonction reste moindre qu'une quantité finie M dans toute l'étendue du plan». Voilà encore une affirmation, portant sur la notion de borne supérieure atteinte ou non, que Briot et Bouquet ne justifient pas. Briot et Bouquet étaient parmi les premiers à étudier les points singuliers, mais ils ont formulé de façon incorrecte le théorème sur les points singuliers essentiels. Ainsi, ils affirment ([19], 38) qu'une fonction holomorphe dans le plan, ayant un point singulier essentiel à l'infini, «acquiert toutes les valeurs possibles».

Ces quelques exemples montrent combien il était nécessaire de clarifier et de redéfinir un certain nombre de notions fondamentales et il n'est pas étonnant que Weierstrass, qui, comme nous allons le voir, a lu ce livre avec le plus grand soin et voulait donner une base solide à la théorie des fonctions, ait été obligé de reprendre tous ces théorèmes et leurs démonstrations.

Dans son rapport du 16 janvier 1876 ([8], 49) pour la nomination de Liouville comme membre associé de l'Académie des Sciences de Berlin, Weierstrass signale en particulier sa théorie des fonctions elliptiques qui se distingue par «l'originalité des idées qui en forment la base, théorie qui, dans ses parties les plus essentielles, est entièrement développée». C'est un grand compliment par l'orfèvre en la matière qu'était WEIERSTRASS. WEIERSTRASS dit que, pour des raisons inconnues, LIOUVILLE n'avait pas publié sa théorie, mais qu'il en avait fait le sujet d'un cours détaillé au Collège de France et que deux de ses auditeurs d'alors (WEIERSTRASS ne donne pas leurs noms, mais il s'agit sans aucun doute possible de BRIOT et de BOUQUET), auteurs d'un traité connu, ont eu le mérite de conserver à la littérature mathématique le contenu essentiel de ce précieux travail.

Bien que BRIOT et BOUQUET écrivent dans la préface de leur livre ([19], XXIV): «Nous devons beaucoup à M. LIOUVILLE. Il y a quelques années, l'éminent géomètre prit pour sujet de son cours au Collège de France les *fonctions elliptiques*; ses savantes leçons ont été le point de départ de nos propres recherches», WEIERSTRASS remarque que cette reconnaissance de la dette de BRIOT et de BOUQUET envers LIOUVILLE ne souligne pas assez ce qu'ils lui doivent réellement. En effet, WEIERSTRASS précise «que tous les fondements de leur ouvrage sont l'œuvre de Liouville», ainsi qu'en témoigne la rédaction, par un de ses collègues de l'Académie (il s'agit de BORCHARDT, cosignataire du rapport sur LIOUVILLE), du cours de LIOUVILLE sur les fonctions elliptiques. LIOUVILLE avait fait un cours privé à BORCHARDT et à un autre mathématicien allemand et la rédaction de ce cours fut communiquée, avec le consentement de LIOUVILLE, à JACOBI, à DIRICHLET et à d'autres collègues de BORCHARDT. WEIERSTRASS a dû connaître ce cours dès son arrivée à Berlin, où une très intime amitié le lia à BORCHARDT.

Dans une curieuse lettre de WEIERSTRASS à SCHWARZ, du 3 mars 1883 ([A VII]), qui partait pour Paris et à qui il demandait de saluer HERMITE et JORDAN de sa part, il lui recommandait de rendre visite à PICARD, APPELL et POINCARÉ, mais il lui conseillait d'être prudent avec BOUQUET! A son retour, si SCHWARZ signale dans sa lettre du 13 mai 1883 ([A VIII]) que BOUQUET s'était montré intéressé de savoir si l'on utilisait beaucoup les surfaces de RIEMANN en Allemagne, il ne mentionne aucune question de BOUQUET sur les travaux de WEIERSTRASS! Il faut dire que BOUQUET n'était pas favorable aux méthodes de WEIERSTRASS; ainsi, lorsque MÉRAY, son élève, publia en 1872 son traité de calcul infinitésimal où il utilisait, de façon tout à fait indépendante, les méthodes semblables à celles de WEIERSTRASS basées sur les séries entières, il fut «un peu secoué» par BOUQUET, comme l'écrit DARBOUX dans une lettre inédite ([A X], 22 novembre 1872).

En résumé, vers les années 1860, des questions qui portaient sur quelques notions essentielles de l'analyse moderne commençaient à être soulevées. Et elles renvoyaient toutes, en dernier ressort, à la structure de la droite réelle et à celle de ses sous-ensembles. On avait besoin en analyse, outre une définition claire et maniable de la limite, d'outils plus fins, tel que le point d'accumulation et des précisions sur la borne supérieure et sur la convergence uniforme. Et toutes ces notions exigeaient que l'ensemble des nombres réels fût défini rigoureusement. Entre 1861 et 1863, WEIERSTRASS franchira une nouvelle étape dans cette direction et, à partir de 1863, ses cours témoigneront de ce qu'il était parvenu à construire les bases qui vont ouvrir la voie à l'analyse d'aujourd'hui.

3.3. Les cours de Weierstrass, image de son édifice mathématique

WEIERSTRASS reprend son cours sur la «Théorie générale des fonctions analytiques» pendant *le semestre d'été de 1868 et de 1870* (remarquons que FROBENIUS passe sa thèse, dirigée par WEIERSTRASS, le 28 juillet 1870) et ce cours devient, pendant le *semestre d'été 1872*, «Introduction à la théorie des fonctions analytiques». C'est ce cours de 1872 qui a été, en partie, utilisé par DANTSCHER dans son livre ([30]) sur la théorie weierstrassienne des nombres irrationnels et que nous examinerons plus loin.

Sans que WEIERSTRASS s'en doutât, ses cours étaient difficiles à suivre, à cause de leur densité et de leur niveau élevé. C'est ainsi que L. KIEPERT ([56], 59—60), qui suivait les leçons de WEIERSTRASS pendant le semestre d'été 1869, nous dit que, pour en tirer profit, un camarade prenait le cours en sténographie sans essayer de le comprendre, tandis que KIEPERT ne prenait que de brèves notes mais essayait d'en comprendre les enchaînements. Ils ne se séparaient le soir que lorsque la rédaction du cours était terminée, ce qui les menait parfois jusqu'à deux heures du matin. Il faut croire que cette méthode était la seule bonne, comme le montre le nombre d'élèves qui tombait de 117 à 7; et parmi ces 7, il y en avait encore qui n'avaient que l'impression de comprendre le cours. Mais, comme le souligne aussi KIEPERT, c'est parce qu'il fallait faire tant d'efforts pour comprendre le cours de WEIERSTRASS, qu'on y apprenait énormément. WEIERSTRASS ne laissait subsister aucune lacune, tout, jusqu'au plus petit détail, était fondé et «démontré avec une précision logique et assemblé en un édifice somptueux».

Mais, d'année en année, les leçons de WEIERSTRASS devenaient plus faciles, grâce aux améliorations constantes qu'il y apportait et aux rédactions des anciennes leçons que ses élèves mettaient à sa disposition.

Ces cours de WEIERSTRASS à l'université de Berlin commençaient à devenir célèbres dans tout le monde mathématique; ainsi, lorsque MITTAG-LEFFLER vint en 1873 faire ses études à Paris, il entendit HERMITE lui dire ([75], 131): «Vous avez fait erreur, Monsieur, vous auriez dû suivre les cours de Weierstrass à Berlin. C'est notre maître à tous».

WEIERSTRASS refait *en 1874* son cours sur l'«Introduction à la théorie des fonctions analytiques», et il existe une rédaction complète de ce cours par un de ses élèves G. HETTNER ([A III]), avec qui WEIERSTRASS se lia d'amitié. Il lui confiera plus tard le soin de s'occuper, avec d'autres de ses élèves, de l'édition de ses œuvres mathématiques. Nous ferons dans la suite une étude détaillée de ce manuscrit de HETTNER.

La description que MITTAG-LEFFLER, dans une lettre du 19 février 1875 à son maître HJALMAR HOLMGREN ([4], 53—55), fait des enseignements donnés à l'université de Berlin à cette époque est d'autant plus intéressante que MITTAG-LEFFLER avait fait auparavant des études à Paris et à Göttingen. Il écrit que nulle part il n'avait trouvé autant à apprendre qu'à Berlin. Et de fait, disait-il, les mathématiques de cette époque offraient difficilement quelque chose qui pouvait rivaliser avec la théorie des fonctions de WEIERSTRASS et l'algèbre de KRONECKER. WEIERSTRASS traitait de la théorie des fonctions en un cycle de deux ou trois ans et construisait sur des concepts de base, simples et clairs, une théorie des fonctions elliptiques et abéliennes. Ce qui caractérisait principalement son système, c'est qu'il est entièrement analytique. Il fait rarement appel à la géométrie et, lorsque cela lui arrive, il le fait uniquement à titre d'illustration. WEIERSTRASS et KRONECKER présentaient dans leurs leçons, les résultats de leurs recherches et, contrairement à ce qui se faisait habituellement en Allemagne, ils évitaient de faire imprimer leurs travaux. Quant à la difficulté des cours de WEIERSTRASS, MITTAG-LEFFLER, dans sa lettre à HOLMGREN, considère lui aussi que si l'on réussissait, après un long et difficile travail, à mettre en forme une leçon de WEIERSTRASS, telle que celui-ci l'avait conçue, alors tout devenait clair, simple et systématique.

WEIERSTRASS répète son cours sur les fonctions analytiques pendant les *semestres d'été de 1876 et de 1878*. Nous avons trouvé à Zurich une rédaction de ce cours par ADOLF HURWITZ, dont nous donnons en appendice ([A I]) les 37 premières pages (transcrites intégralement d'un texte allemand en gothique) pour qu'on ait enfin un texte complet de la théorie weierstrassienne des nombres réels. Nous étudierons plus loin ce texte. A propos de ce cours, WEIERSTRASS écrit à SOPHIE KOVALEVSKAYA le 15 avril 1878 que ces leçons l'occupaient au plus haut point et qu'en particulier «pour l'introduction à la théorie des fonctions analytiques — faite devant 102 auditeurs pendant le dernier semestre — j'ai encore beaucoup travaillé».

C. RUNGE ([71], 161—162), qui a suivi en 1878 les cours de WEIERSTRASS, disait que ses leçons étaient profitables, parce qu'on assistait aussi «à la naissance des idées, ce qui faisait une très grande impression». Il remarque que WEIERSTRASS ne laissait subsister aucune obscurité et que, commençant son cycle par l'introduction à la théorie des fonctions analytiques, qui débute avec la notion de nombre, et n'utilisant aucun théorème qu'il n'avait lui-même démontré, il tenait à ce que ses élèves commencent leurs études par le début du cycle, ce qui était nécessaire si l'on voulait comprendre son édifice mathématique. Toutefois, pour RUNGE, le défaut du cours de WEIERSTRASS résidait dans le fait qu'il renvoyait très rarement ses élèves à la littérature mathématique «ce qui eût été justement souhaitable à cause de l'originalité de ses propres leçons».

A ce propos, remarquons que l'Académie des Sciences de Paris avait envoyé, en 1882, le tome I des œuvres mathématiques de CAUCHY (Archives de l'Académie des Sciences de Paris, Œuvres de Cauchy, Liste de distribution des exemplaires souscrits par l'Institut) à WEIERSTRASS (qui ne citait jamais CAUCHY). Si WEIERSTRASS n'en a pas accusé réception, KRONECKER, à qui on avait égalemant envoyé ce volume, exprime dans une lettre du 22 mars 1882 sa «profonde reconnaissance» pour ce tome qui contient «les fondements de beaucoup de parties de l'analyse de notre temps» et se dit «être un des plus ardents admirateurs» de CAUCHY!

WEIERSTRASS répète encore le cours sur les fonctions analytiques *en hiver 1882—1883*. Cet hiver-là, il fut constamment malade et, se reposant en Suisse, il écrivait à SCHWARZ le 15 octobre 1883 ([A VII]) qu'il se sentait extrêmement fatigué et qu'il n'avait aucune joie ni envie de travailler. Certes, disait-il, il s'était souvent trouvé dans cet état, toutefois il se remettait ensuite au travail avec plus d'énergie. Mais, «à dire vrai, il y a une grande différence, selon qu'on approche de la cinquantaine ou de 70 ans».

Les premières leçons de WEIERSTRASS, au cours de *l'hiver 1884—1885* sur les fonctions analytiques, sont suivies par le mathématicien russe TIHOMANDRICKY

([103], 50). Ces leçons consacrées à la notion de nombre et aux opérations sur les nombres paraissaient fastidieuses, d'après TIHOMANDRICKY, à la majorité des auditeurs. Lors de la première leçon, disait-il, il y avait tellement d'étudiants que WEIERSTRASS fut obligé de s'installer dans le grand amphithéâtre de l'Institut de chimie qui pouvait contenir plus de mille personnes. Mais le nombre d'auditeurs diminua rapidement de sorte qu'au bout de quelques leçons WEIERSTRASS alla s'installer dans une salle, plus petite que celle initialement attribuée, pouvant contenir 150 à 200 personnes et qui était loin d'être pleine.

Au cours du *semestre d'été 1886*, pour son dernier cours d'analyse, WEIERSTRASS traite des «Chapitres choisis de la théorie des fonctions». Nous étudierons ce cours ([A IV]) plus loin, d'après une rédaction de G. THIEME. WEIERSTRASS avait annoncé pour l'hiver 1888—1889 un cours sur les «Notions fondamentales et théorèmes principaux de la théorie des fonctions», que la maladie l'empêche de faire. Ainsi, à la fin de son activité d'enseignement, il avait voulu faire un cours qui fît ressortir les notions et les théorèmes fondamentaux de l'analyse mathématique; en cela aussi il préfigure la tendance moderne de bâtir sur quelques notions de base et quelques théorèmes clés les différentes branches des mathématiques. Nous verrons que déjà son cours de 1886 était construit sur ces idées.

L'examen de la liste des cours de WEIERSTRASS à l'université de Berlin est important pour la compréhension de son œuvre mathématique. Lorsqu'on lit attentivement cette liste, on y trouve une suite de cycles qui reflètent la conception weierstrassienne. Il y a seize cycles, généralement de deux ans, plus ou moins complets, du semestre d'été 1857 au semestre d'été 1887, dont le schéma général (qui ne comprend pas tous les cours de WEIERSTRASS, en particulier ceux sur le calcul des variations) est le suivant:

La théorie des fonctions analytiques.

La théorie des fonctions elliptiques.

Applications des fonctions elliptiques à la géométrie et à la mécanique.

La théorie des fonctions abéliennes.

Mais il ne faut pas négliger un autre aspect de l'enseignement de WEIERSTRASS et du but qu'il poursuivait à l'université de Berlin, que tant d'autres universités reprendront plus tard. Il caractérisera lui-même ([11], 123) l'époque de 1864 à 1883 comme celle des efforts conjugués de KUMMER, de KRONECKER et de lui-même pour donner, en deux années, aux jeunes mathématiciens une formation générale de base avec un très large éventail des plus importantes disciplines mathématiques. Dans ces conditions, on comprendra pourquoi Berlin fut à cette époque le centre mondial où affluaient les jeunes de tous les pays pour apprendre les mathématiques nouvelles.

4. Les états successifs des éléments d'analyse de Weierstrass

Nous allons maintenant examiner l'évolution de quelques idées de WEIERSTRASS sur les fondements de l'analyse, essentiellement d'après plusieurs manuscrits de ses élèves, dont tous, sauf celui de HETTNER, sont ici étudiés pour la première fois et dont l'étude d'ensemble est tentée pour la première fois dans ce travail.

4.1. Etat de la théorie weierstrassienne des fonctions en 1861, d'après le manuscrit de H. A. Schwarz

Nous avons déjà vu qu'avant d'arriver à Berlin en 1856 WEIERSTRASS ne s'était pas occupé des fondements de l'analyse. C'est pourquoi, le cours de WEIERSTRASS sur le calcul différentiel du semestre d'été 1861 à Gewerbeinstitut, rédigé par H. A. SCHWARZ, est précieux pour connaître les idées de WEIERSTRASS, à cette époque, sur les notions fondamentales de la théorie des fonctions.

SCHWARZ a souvent mentionné les études qu'il avait faites avec WEIERSTRASS et, en particulier, ce cours de 1861. Ainsi, dans une lettre à GEORG CANTOR du 27 février 1870 ([73], 87—89) où SCHWARZ donne la première démonstration correcte du théorème qu'une fonction dérivable, dont la dérivée est toujours nulle, est une constante, il dit avoir pris des éléments de sa démonstration du cours de WEIERSTRASS de 1861 à Gewerbeinstitut. En 1872 ([98], 220—221), évoquant le début de ses études mathématiques et parlant de la définition de la continuité d'une fonction de deux variables, définition qu'on lui enseignait à cette époque, SCHWARZ concluait qu'avec «l'aide d'une méthode inventée par Bolzano et perfectionnée par Monsieur Weierstrass» cette définition conduisait à la continuité uniforme au sens de HEINE. Un témoignage intéressant sur ce cours est la lettre de SCHWARZ à WEIERSTRASS du 17 juin 1888, dans laquelle il lui écrit que, comme WEIERSTRASS le lui avait demandé, il venait de lui envoyer un paquet contenant sa rédaction du cours que WEIERSTRASS avait fait à Gewerbeinstitut pendant le semestre d'été de 1861 sur le calcul différentiel. SCHWARZ indique que dans sa rédaction manquait l'application du calcul différentiel à l'étude des propriétés des courbes planes, ainsi que «votre si satisfaisante théorie du contact des courbes». WEIERSTRASS remercie SCHWARZ pour cet envoi ([A VII], 12. 6. 88), mais ne donne pas, ni dans cette lettre, ni dans les suivantes, son sentiment sur cette rédaction.

Dans sa préface ([A II]), SCHWARZ précise qu'il s'agit d'une rédaction succincte des leçons de WEIERSTRASS, rédaction qu'il avait terminée à la fin du semestre d'été de 1861.

WEIERSTRASS commence (p. 1) par définir la variable et les quantités qui varient continûment, mais il ne définit pas les nombres réels. Ensuite, il donne la définition d'une fonction, telle que l'avait donnée DIRICHLET (nous verrons plus tard que WEIERSTRASS fera des réserves sur cette définition, la considérant comme trop générale): «Si deux quantités variables peuvent être reliées de façon à ce qu'à toute valeur déterminée de l'une corresponde une valeur déterminée de l'autre, alors on appelle la dernière une fonction de la première». Et WEIERSTRASS précise que cette correspondance peut être étendue aux fonctions de plusieurs variables. Toutefois, il ne donne pas à cette définition exactement le même sens que nous lui donnons aujourd'hui, car il précise que si à une valeur de la variable on fait correspondre une seule valeur de la fonction, alors on appellera la dernière une fonction uniforme (eindeutige Funktion) de la première.

En introduisant ([A II], 2) la définition de la variation infiniment petite de la variable et de la fonction à l'aide de δ et de ε, WEIERSTRASS introduit une notion très importante qui donnera aux définitions de limite et de continuité toute la précision et la clarté qu'elles ont aujourd'hui. WEIERSTRASS met ainsi en forme la notion de limite qui, jusqu'à cette époque, après un pas décisif accompli par CAUCHY, s'exprimait essentiellement en disant que lorsque h tend vers zéro, alors $f(x+h)-f(x)$ tend vers zéro. En effet, il donne la définition suivante: «S'il est possible de déterminer une borne δ telle que pour *toute* valeur de h plus petite en valeur absolue que δ, $f(x+h)-f(x)$ soit plus petite qu'une quantité ε aussi petite que l'on veut, alors on dira qu'on a fait correspondre à une variation infiniment petite de la variable, une variation infiniment petite de la fonction». Ainsi, le pas décisif est franchi vers la définition actuelle de la limite, en établissant une relation fonctionnelle entre δ et ε qui s'exprime par des inégalités entre les variables et entre les valeurs de la fonction. Et le fait de substituer ces inégalités à l'idée intuitive de «tendre vers» se traduit par une expression analytique précise dont l'introduction en analyse aura une très grande portée. De plus, à des suites de points tendant vers un point fixe, elle substituera les voisinages d'un point défini par les inégalités, ce qui sera une des origines de la topologie générale. L'utilisation de cette définition dans ce cours confirme l'opinion de PRINGSHEIM ([90], 25): «il semble bien que c'est Karl Weierstrass qui a, le premier, donné à la notion de *limite d'une fonction* toute la précision dont elle était susceptible». Et le premier manuel s'inspirant des idées de WEIERSTRASS, publié par OTTO STOLZ ([100]), donne la définition actuelle de la limite, en précisant qu'elle est due à WEIERSTRASS ([100], tome I, 339).

Page 3, WEIERSTRASS donne la définition d'une fonction continue qui est une simple application de la notion de variation infiniment petite. Après avoir énoncé le théorème: si f est continue et si $y_1=f(x_1)$ et $y_2=f(x_2)$, alors quel que soit $y_3\in[y_1, y_2]$, il existe $x_3\in[x_1, x_2]$ tel que $y_3=f(x_3)$, WEIERSTRASS introduit la définition du voisinage (die Nachbarschaft) du point x_0: ce sont tous les x «pour lesquels la différence $x-x_0$ en valeur absolue ne dépasse pas une borne déterminée». Et, après avoir démontré ce théorème, il conclut (p. 4), en traduisant en langage d'aujourd'hui, que l'image continue d'un compact est un compact.

Page 5, WEIERSTRASS commence à introduire les notions fondamentales du calcul différentiel. Les façons de définir la dérivée et le fait qu'il ne mentionne nulle part dans ce cours (alors qu'il le fera toujours dans ses cours après 1872) l'existence d'une fonction continue qui n'est dérivable en aucun point montrent à l'évidence que WEIERSTRASS n'avait pas encore construit en 1861, comme certains historiens de mathématiques l'affirment ou le laissent entendre, son exemple de fonction continue sans dérivée. En plus de la définition classique, il est important de souligner que WEIERSTRASS donne une définition de la dérivée par la formule

$$f(x+h)=f(x)+h\cdot f'(x)+h\cdot(h), \quad \text{où} \quad (h)=o(1).$$

Nous verrons plus tard que, lorsqu'il aura construit sa fonction continue sans dérivée, il affirmera qu'il vaut mieux définir ainsi la dérivée plutôt que comme la limite du rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, car cette dernière définition ne faisait qu'obscurcir la notion de dérivée et qu'elle était à l'origine des erreurs qui ont conduit à penser qu'une fonction continue, sauf en certains points exceptionnels, était toujours dérivable. En cela, il sera d'accord avec MÉRAY ([34], 336) qui affirme que si les mathématiciens étaient partis pour définir la dérivée du développement des fonctions en séries entières, ils n'auraient pas contracté de mauvaises habitudes résultant de la considération, analytiquement si stérile et si artificielle, de rapports de termes infiniment petits. Il est d'ailleurs probable que l'idée directrice de WEIERSTRASS, dans cette définition de la dérivée, provient également des séries entières.

WEIERSTRASS met en relief que la différence $f(x+h)-f(x)$ peut s'écrire comme somme de deux parties, la première étant le produit d'un élément indépendant de h multiplié par h et la deuxième tendant vers zéro avec h, lorsqu'on la divise par h. WEIERSTRASS met ainsi en évidence la partie dépendant linéairement de h.

La définition des infiniment petits que donne ensuite WEIERSTRASS montre avec quelle netteté il utilise la définition de la limite à l'aide de δ et ε et que cette définition correspond exactement à celle que nous utilisons encore aujourd'hui. Un infiniment petit est une fonction φ de la variable h telle que dès que «ε est donné, on peut trouver un δ, tel que pour toutes les valeurs de h, dont la valeur absolue est plus petite que δ, $\varphi(h)$ est plus petit que ε». Ainsi, en donnant une définition correcte des infiniment petits, WEIERSTRASS ne les a pas «bannis» de l'analyse, comme l'affirme, avec bien d'autres, BERTRAND RUSSELL ([94], 345); il a toujours utilisé cette terminologie, mais il lui a enlevé tout le vague que le manque d'une définition rigoureuse lui donnait.

En utilisant la notion de différentielle et la notation dx, WEIERSTRASS indique que dx est une fonction indépendante de x. Dans la démonstration de l'unicité de la dérivée (p. 6), WEIERSTRASS introduit la notation (h) qui correspond à la notation $o(1)$.

Comme nous allons encore le voir, ce cours de WEIERSTRASS a un aspect moderne. Et l'on comprend l'enthousiasme du jeune SCHWARZ devant cette façon nouvelle d'aborder quelques-unes des notions qui sont à la base de l'analyse.

A la page 7, on coupe (man zerlege) les epsilons, ce qui caractérisera pour beaucoup le style weierstrassien. Cette association de WEIERSTRASS et de ses élèves avec les epsilons est universellement connue. C'est ainsi que, cherchant à Zürich des documents sur WEIERSTRASS et prenant contact avec un parent d'ADOLF HURWITZ, nous entendîmes cet homme, qui ignorait tout des mathématiques, nous déclarer que dans sa famille on se souvenait que HURWITZ «war epsilonistisch»!

Après avoir donné les théorèmes sur les limites de la somme, du produit et du quotient ([A II], 7—8), ainsi que sur le calcul des différentielles (p. 9), WEIERSTRASS définit les différentielles d'ordre supérieur. Insistant sur le fait que dx est une fonction indépendante de x, il déduit (p. 15) la différentielle seconde en calculant la différentielle de $f'(x)\cdot dx$, en tenant compte de ce que $d(dx)=0$. Les théorèmes obtenus sur les différentielles sont ensuite appliqués aux fonctions trigonométriques (p. 17).

Pages 20—24, WEIERSTRASS donne les propositions pour l'étude des variations d'une fonction. Après avoir énoncé le théorème des accroissements finis (p. 26), il donne la règle de l'HÔPITAL. Il conclut cette partie de son cours par ce qu'il considère comme «le véritable théorème fondamental de toute l'analyse» (p. 30), à savoir: si une fonction réelle de la variable réelle est n fois continûment dérivable et si toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ sont toutes nulles, au point x_0, alors on a

$$f(x)-f(x_0)=\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right).$$

(Ce théorème est pris des «Leçons sur le Calcul différentiel» de A. L. CAUCHY, Paris, 1824, de Bure, 35—36.) Ensuite, WEIERSTRASS étudie les problèmes du maximum et du minimum d'une fonction (p. 32), avant de passer aux développements en séries entières (p. 33).

Après avoir indiqué ([A II], 35) «qu'il y a des quantités qu'on ne peut pas exprimer à l'aide de l'unité et de ses parties», c'est-à-dire, qui ne sont pas des nombres rationnels et «pour lesquelles on applique la forme des séries infinies» (ce qui montre que WEIERSTRASS a déjà le modèle pour la construction des nombres irrationnels qu'il va entreprendre), WEIERSTRASS donne la définition de la somme d'une série et le critère de convergence d'une série. Ce critère est formulé à l'aide de δ (qui joue le rôle de notre ε) et de ε (qui joue le rôle de notre N), en faisant intervenir le reste de la série. Remarquons que WEIERSTRASS, à cette époque, ne semble pas préoccupé par le fait que la notion de limite était contradictoire tant qu'une théorie rigoureuse des nombres irrationnels n'était pas élaborée.

Donnant le développement en série des fonctions $\sin x$ et $\cos x$, WEIERSTRASS note (p. 37) que l'on peut en déduire toutes les propriétés de ces fonctions trigonométriques et, ainsi, apporte la rigueur qui manquait à sa définition des fonctions trigonométriques, définies géométriquement dans un paragraphe précédent.

Le chapitre sur les fonctions réelles de plusieurs variables réelles (p. 42) contient le théorème sur l'égalité: $f''_{xy}(x, y)=f''_{yx}(x, y)$, avec l'hypothèse que la fonction, ses dérivées partielles premières et secondes sont continues (p. 43). WEIERSTRASS souligne (p. 46) l'importance de ce théorème pour la dérivation des fonctions de plusieurs variables. Il introduit ensuite la notion de différentielle pour les fonctions de deux variables, en généralisant la méthode appliquée aux fonctions d'une variable. Finalement (p. 49), il introduit les différentielles d'ordre supérieur et calcule (p. 50) la différentielle d'une fonction composée; de même, il donne la formule de TAYLOR (p. 58) pour les fonctions de plusieurs variables. Cette partie se termine par le théorème classique sur les fonctions implicites.

Une des parties les plus importantes de ce cours est l'étude de la dérivation des séries infinies (p. 64), problème qui, à cette époque, est loin d'être traité avec la rigueur et la netteté que l'on trouve dans ce cours. WEIERSTRASS commence d'abord par se poser la question suivante: sous quelles conditions une série de fonctions continues, convergente pour tout x appartenant à un intervalle fini, est-elle aussi une fonction continue? Pour cela, il introduit la notion de convergence uniforme (Konvergenz in gleichem Grade) à l'aide du critère de CAUCHY.

Puis, énonçant le théorème que la limite uniforme des fonctions continues est une fonction continue (p. 65), SCHWARZ, dans sa rédaction, indique qu'il s'agit d'une condition nécessaire et suffisante, ce qui est une négligence de rédaction, car la démonstration ([A II], 65—66), qui ne diffère en rien de celle que l'on fait actuellement dans les cours du premier cycle des universités, montre clairement qu'il s'agit seulement d'une condition suffisante; la démonstration est obtenue en coupant l'epsilon en trois parties et en tenant compte de la continuité des fonctions et de la convergence uniforme de la série.

Page 68, WEIERSTRASS pose le problème de la dérivation terme à terme d'une série de fonctions. Il suppose que la série de fonctions continues et la série de dérivées continues convergent toutes les deux uniformément. Après la démonstration, il renvoie au tome II des œuvres complètes d'ABEL publiées en 1839, p. 268, où ABEL écrivait dans une lettre à HOLMBOE du 16 janvier 1826: «La théorie des séries infinies en général est jusqu'à présent très mal fondée. On applique aux séries infinies toutes les opérations, comme si elles étaient finies; mais cela est-il bien permis? Je crois que non. Où est-il démontré qu'on obtient la différentielle d'une série infinie en en prenant la différentielle de chaque terme? Rien n'est plus facile que de donner des exemples où cela n'est pas juste».

WEIERSTRASS démontre ensuite que l'on peut dériver terme à terme une série entière.

Pages 70 à 78, WEIERSTRASS étudie les fonctions exponentielles, et en particulier la fonction e^x, et la fonction $\log x$. Il définit ensuite (p. 80), avec beaucoup de soin, les fonctions inverses des fonctions trigonométriques. Et le cours se termine ([A II], 81—82) par la recherche du développement en série d'une fonction $f(x)$ dont on connaît le développement en série de la dérivée.

Lorsque HEINE publiera en 1872 «Les éléments de la théorie des fonctions» ([46]), il reconnaîtra s'être inspiré des cours de WEIERSTRASS rédigés par ses élèves et qu'en particulier ([46], 182) certaines de ses démonstrations ont été faites d'après les principes de WEIERSTRASS qu'il connaissait «par les communications verbales de ce dernier, de Messieurs Schwarz et Cantor». Comme SCHWARZ enseignait de 1867 à 1869 à l'Université de Halle où HEINE était professeur, il est certain que HEINE a connu ce cours de 1861 rédigé par SCHWARZ et qu'il s'en est servi pour son mémoire.

La nouveauté de ce cours est incontestable et cette rédaction de SCHWARZ (la plus ancienne que l'on connaisse d'un cours de WEIERSTRASS sur l'analyse mathématique) montre que, déjà en 1861, WEIERSTRASS avait introduit et utilisé certaines notions à la base de l'analyse moderne. On y voit aussi que WEIERSTRASS n'avait pas encore construit sa théorie des nombres irrationnels ni sa fonction continue sans dérivée.

4.2. La théorie des nombres irrationnels de Weierstrass, d'après le cours du semestre d'hiver 1865—1866, dans la rédaction de Kossak

KOSSAK a suivi le cours de WEIERSTRASS de l'hiver 1865—1866 sur la «Théorie générale des fonctions analytiques» et il publie en 1872 sa rédaction d'une partie de ce cours: «Les éléments de l'arithmétique» ([62]). Cette rédaction est un mélange de notes prises au cours de WEIERSTRASS, d'un travail de KOSSAK sur l'histoire de la notion du nombre et de ses développements personnels, ce qui ne clarifie pas les choses. Notons que c'est cette publication de KOSSAK qu'ont étudiée tous ceux qui ont voulu connaître la théorie weierstrassienne, en allant «aux sources». Ce livre fut même traduit en russe, à Kiev, en 1884.

Mais, avant d'étudier ce travail de KOSSAK, voyons ce qu'en dit le fidèle élève H. A. SCHWARZ à son maître WEIERSTRASS, le 12 juin 1872 ([A VIII]). Il remarque d'abord que KOSSAK fait état, dans sa préface, de la permission de WEIERSTRASS de publier cet exposé et regrette beaucoup que la théorie de WEIER-

STRASS y soit si défigurée. La critique de SCHWARZ porte essentiellement sur la partie algébrique de l'étude de KOSSAK. Comme nous le verrons plus loin, WEIERSTRASS développait beaucoup cette partie dans ses cours. «Le problème, disait Schwarz, que l'auteur avait à résoudre, consistait exclusivement en une rédaction correcte et soignée des notions que vous aviez exposées dans vos leçons; sous ce rapport, le travail de KOSSAK ne satisfait même pas à une exigence moyenne». Mais, dans les lettres de WEIERSTRASS à SCHWARZ ([A VII]), on ne trouve aucun commentaire sur ce jugement sévère de SCHWARZ. L'opinion de WEIERSTRASS ne sera exprimée que dans une lettre à MITTAG-LEFFLER du 5 avril 1895 ([76], 12), dans laquelle il écrit que son introduction à la théorie des fonctions a été «gâchée» par KOSSAK.

Toutefois, le livre de KOSSAK donne une image assez exacte de la théorie weierstrassienne des nombres irrationnels, ce qui est le plus important pour notre propos. Certes, la longue exposition algébrique de WEIERSTRASS a disparu dans cet exposé, les points les plus difficiles ne sont pas bien mis en valeur et il n'y a pas de doute que les rédactions de HETTNER et de HURWITZ (que nous étudierons plus loin) rendent beaucoup mieux compte de la théorie weierstrassienne.

L'exposé de KOSSAK commence par une théorie naïve des nombres entiers ([62], 16). On considère des éléments de même nature, sans se préoccuper de ce qu'ils représentent, et «ainsi on a une représentation de cet ensemble au moyen du nombre». Lorsque l'ensemble se réduit à un seul élément, on lui fait correspondre le nombre un. Et «le nombre est la représentation composée de un et un etc.». C'est l'idée que l'on trouve chez EUCLIDE (Œuvres, Blanchard, Paris 1966, Livre Septième des Eléments, Définitions, 2, p. 180): «un nombre est un assemblage composé d'unités».

KOSSAK donne ensuite la définition de l'égalité de deux entiers: «Deux nombres sont égaux, si à tout élément de l'un correspond un élément de l'autre». Cette définition est intéressante. D'abord un nombre entier est représenté par un ensemble d'éléments et pour dire que deux nombres entiers sont égaux, on va les mettre, comme nous le dirions aujourd'hui, en bijection.

A cet endroit, KOSSAK précise que, pour l'essentiel, dans l'établissement de la notion du nombre, il a utilisé «les mots mêmes» de WEIERSTRASS et que, dans toute la mesure du possible, il citera «textuellement» les parties du cours de WEIERSTRASS. Cela est exact, car nous les retrouverons dans les autres rédactions.

KOSSAK introduit ensuite les opérations sur les entiers (p. 17). Pour définir la division des entiers, on considère les parties exactes (die genaue Teile) d'un nombre entier positif (p. 18). Ainsi un nombre a est une partie exacte d'un nombre b, si b est un agrégat entier composé d'éléments tous égaux à a. Ainsi, une partie exacte de l'unité, c'est un élément e_n tel que $n \cdot e_n = 1$.

On considère maintenant les agrégats composés d'un élément fondamental (das Grundelement) et de ses parties exactes, c'est-à-dire l'ensemble des nombres rationnels positifs. Sur cet ensemble, on définit les transformations permises (die gestatteten Umformungen), c'est-à-dire les réductions au même dénominateur qui donnent les différentes représentations d'un même nombre rationnel: ainsi les deux agrégats $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ et $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ sont égaux, d'après la définition de l'égalité donnée pour les entiers, qui reste valable pour les agrégats composés d'un nombre fini de nombres rationnels, et d'après la définition des transformations permises. Ils représentent le même nombre rationnel qui est la somme de leurs éléments, à savoir le nombre $\frac{3}{4}$.

Il s'agit maintenant d'introduire les agrégats composés d'une infinité d'éléments et de définir leur égalité ([62], 18—19). Pour cela, on introduit encore une notion ensembliste: celle d'un nombre b partie d'un nombre a (p. 19). Cette notion est tout à fait naturelle, lorsqu'on définit un nombre par un agrégat d'éléments dont il est la somme. Ainsi, si on compare un nombre a à un nombre b, le nombre b étant un agrégat fini, «on dira que b est une partie de a, si on peut transformer a de telle façon qu'il contienne tous les éléments de b». Cette définition reste valable si a est un agrégat composé d'une infinité d'éléments (à condition toutefois de donner un sens à un agrégat composé d'une infinité de nombres rationnels positifs), car la notion de partie signifie toujours, par définition, une partie finie. Mais ces idées ne sont pas nettes et cela n'est pas dû seulement à la rédaction de KOSSAK.

Pour redéfinir l'égalité des agrégats composés d'un nombre fini d'éléments, c'est-à-dire les nombres rationnels, KOSSAK donne la définition weierstrassienne d'un nombre fini: on dira que a est fini, s'il existe «un nombre dont l'agrégat est composé d'un nombre fini d'élements et qui n'est pas contenu dans a». Alors on peut introduire le critère de finitude: «Un nombre a est fini, s'il existe un agrégat fini b tel que tout nombre composé d'éléments de a est contenu dans b». a est donc fini, si toute partie de a est contenu dans b, b étant un nombre rationnel positif.

Avec cette notion de la finitude, on peut définir l'égalité de deux nombres a et a' composés d'un nombre d'éléments fini ou non: on dira que a et a' sont égaux, si tout agrégat fini composé d'éléments de a est une partie de a'. Et réciproquement, quoique KOSSAK ne le dise pas.

KOSSAK conclut cette partie de son exposé en précisant qu'ainsi on arrive à la notion de nombre irrationnel et que «rien ne s'oppose à son introduction comme une série infinie». Car on sait quels éléments sont dans le nombre irrationnel, combien de fois ils s'y trouvent et que tout agrégat fini composé d'éléments de ce nombre irrationnel est inférieur à un nombre fixe. «*Ainsi le nombre irrationnel a un sens bien déterminé.*»

En somme, ce qui est parfaitement clair dans cet exposé, c'est l'introduction des nombres rationnels positifs. La notion de partie (toujours finie) d'un nombre est aussi claire. On introduit ensuite les agrégats composés d'un nombre quelconque de rationnels positifs qui, *a priori*, ne sont rien d'autre que des suites de nombres rationnels. Mais avant de parler de l'égalité de tels agrégats, comme il est fait dans l'exposé de KOSSAK, il aurait peut-être mieux fallu d'abord introduire la notion de finitude, puis donner la définition d'égalité de ces nouveaux agrégats infinis. Et dire ensuite, ce qui ne figure pas dans la rédaction de KOSSAK, que si un tel agrégat ne représente pas un nombre rationnel, alors on complète l'ensemble de nombres rationnels positifs par de tels agrégats qui sont des nombres irrationnels (ou plus précisément, que le nombre irrationnel est, comme nous le dirions aujourd'hui, la classe d'équivalence pour la relation d'équivalence définie par l'égalité). Mais ce qui est essentiel, c'est que la définition des nombres irrationnels, telle que la donne KOSSAK, à quelques précisions formelles près, est parfaitement rigoureuse.

Puis, pour compléter les nombres réels positifs a, on définit les nombres négatifs a', par $a + a' = 0$ (p. 22). Nous développerons cette partie lors de l'étude des autres rédactions.

Une lettre du 4 septembre 1867 de HERMANN HANKEL à HERMANN GRASSMANN (GRASSMANN, HERMANN, Gesammelte mathematische und physikalische Werke, Dritten Bandes Zweiter Teil, Leipzig, Teubner, 1911) éclaire bien les problèmes qui se font jour à cette époque à propos de la théorie des nombres réels et complexes.

HANKEL écrit avec quel intérêt il venait de prendre connaissance, grâce à H. A. SCHWARZ, d'un cours de WEIERSTRASS sur les nombres complexes. Dans ces questions, dit-il, WEIERSTRASS «n'est pas allé profondément, ou plutôt pas très loin; il s'est davantage attaché à une construction rigoureuse et soigneuse des notions élémentaires des nombres complexes et réels». Et HANKEL se réjouit de trouver un accord à peu près total entre le point de vue de WEIERSTRASS et le sien, ce qui est «une garantie pour moi que le domaine scientifique qui nous a rapproché, vous et moi, prendra bientôt sa juste place dans le corps des mathématiques».

Avant de passer à l'étude du cours de WEIERSTRASS de 1874, il serait intéressant de citer une lettre de WEIERSTRASS à DU BOIS-REYMOND du 21 décembre 1873 ([109], 203—204). Parlant de la notion des nombres irrationnels (soulignons que WEIERSTRASS dit «die extensive Größe»: dans cette façon de s'exprimer il y a la notion de complétion des nombres rationnels), WEIERSTRASS dit qu'il y a plusieurs façons de les introduire: soit géométrique, soit physique, soit en partant de la notion du nombre et des opérations fondamentales de l'arithmétique. «Je tiens que seule la dernière méthode permet de fonder rigoureusement l'analyse et d'aplanir toutes les difficultés», à condition de l'appliquer de façon conséquente dans toutes les parties de l'analyse. C'est ce que WEIERSTRASS a tenté dans ses cours, comme nous allons également le voir en étudiant la rédaction de HETTNER du cours de 1874.

4.3. La théorie des nombres irrationnels, d'après le manuscrit de G. Hettner du cours de Weierstrass de 1874

Ce cours intitulé «Introduction à la théorie des fonctions analytiques» du semestre d'été 1874 a été rédigé par G. HETTNER qui, d'après MITTAG-LEFFLER ([77], 53), fut un des plus fidèles élèves de WEIERSTRASS. Cette rédaction manuscrite se trouve à l'Institut mathématique de Göttingen, mais il en existe une autre à l'Institut Mittag-Leffler à Djursholm. Il est probable que la copie de Djursholm est celle que HETTNER a faite pour MITTAG-LEFFLER ([87], 125).

Le début du cours ([A III], 1—4) est consacré à une étude de la notion de fonction et à celle de la notion de fonction analytique. Donnant la définition de la fonction, telle que nous la connaissons aujourd'hui et telle qu'il l'avait donnée dans son cours de 1861, l'attribuant à FOURIER, CAUCHY et DIRICHLET (p. 1), WEIERSTRASS fait des réserves sur sa trop grande généralité. Notons d'abord que WEIERSTRASS n'attribue pas la paternité de cette définition uniquement à DIRICHLET, mais aussi à FOURIER et à CAUCHY. En tout cas, ces deux mathématiciens ont contribué à sa clarification. Quant à la trop grande généralité de cette définition, il précise ([A III], 1—2) que si l'on ne sait rien d'autre sur une fonction que ce que cette définition en exprime, on ne pourra tirer aucune conclusion sur ses propriétés. Et une des tâches importantes, qu'il s'assigne et qui transparaît clairement lorsqu'on jette un regard synthétique sur son œuvre, est de déterminer la classe de fonctions la plus large dont on puisse donner une représentation analytique et qui puisse répondre de façon aussi complète que possible aux besoins de l'analyse. Il faut de plus que cette représentation analytique des fonctions soit utilisable de manière aussi commode que générale. Nous verrons que pour WEIERSTRASS cette classe sera celle des fonctions continues, grâce à son théorème sur la représentation des fonctions continues par des séries uniformément convergentes de polynômes, ce qui fait, comme le remarque HENRI LEBESGUE ([66], 30), «rentrer toutes les fonctions continues dans la classe des fonctions représentables analytiquement».

Dans ce cours, la conception de WEIERSTRASS est assez proche de celle de MÉRAY ([34], 336—338) pour qui la série de TAYLOR était la base de l'analyse. Ainsi, parlant des fonctions développables en série de FOURIER (p. 2), WEIERSTRASS remarque d'abord que la série de FOURIER d'une fonction continue ne converge pas toujours vers la fonction et qu'en tout état de cause ce développement ne contribue pas à une connaissance intime de la fonction. «On ne peut pas démontrer qu'elle est dérivable, ainsi il manque le moyen le plus important pour la connaissance des propriétés de la variation des fonctions.» Il va montrer, en empruntant un exemple à la physique mathématique, la nécessité de préciser les propriétés de la fonction (p. 3): la température φ d'une barre homogène satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2},$$

où φ est la température au temps t au point x et WEIERSTRASS remarque qu'avec la définition de DIRICHLET de la fonction φ «on peut faire peu de choses». Si, malgré tout, on se sert de fonctions aussi générales, c'est que (p. 4) «nous avons transporté, tacitement, les propriétés que possèdent toutes les fonctions considérées sur ces fonctions générales». Et WEIERSTRASS conclut qu'il ne donnera pas une définition générale de la fonction, mais qu'on arrivera à une représentation correcte et réellement utilisable de la fonction «peu à peu au cours de ces leçons». Ainsi le but de cette introduction à la théorie des fonctions analytiques est indiqué dès le départ par WEIERSTRASS: élaborer une notion de la fonction qui sera l'outil principal de l'analyse.

Comment arriver à cette notion de fonction «réellement utilisable et correcte»? WEIERSTRASS va partir du nombre entier, définir sur l'ensemble des nombres entiers les opérations élémentaires de l'arithmétique, en complétant cet ensemble par les nombres rationnels, puis en élaborant la théorie des nombres irrationnels, dont le modèle sera la série infinie. Ensuite, il définira les polynômes et les séries entières et il reprendra les mêmes opérations élémentaires de l'arithmétique sur ces nouveaux éléments. Et un des buts de l'analyse sera d'approcher un champ de fonctions aussi vaste que possible par les éléments fonctionnels obtenus.

WEIERSTRASS expose ce plan ([A III], 4—5), en précisant qu'il va considérer d'abord les fonctions auxquelles conduisent les opérations arithmétiques habituelles, ensuite les fonctions que l'on obtient à partir des polynômes en leur appliquant un nombre fini de fois les opérations élémentaires. Puis, il introduit les séries entières et «lors de l'extension des définitions aux séries infinies et aux nombres complexes, nous nous laisserons guider par le principe que les théorèmes fondamentaux d'addition, de soustraction, de multiplication et de division doivent rester toujours valables».

A la page 6, nous retrouvons encore une idée que WEIERSTRASS avait en commun avec MÉRAY, à savoir que «l'analyse doit se garder pure de toute géométrie».

Les notions fondamentales de l'arithmétique sont développées de la page 6 à la page 73.

Après une rapide et très élémentaire introduction de la notion du nombre entier (p. 7) et du choix de l'élément unité, WEIERSTRASS définit l'addition des entiers, avec les propriétés de commutativité et d'associativité, puis (p. 8) la multiplication avec la propriété de distributivité.

Dans les pages 9 à 12 sont introduites les opérations «indirectes», la soustraction et la division, qui nécessitent une extension du domaine des nombres entiers positifs (p. 9). Pour que la soustraction de deux nombres entiers positifs quelconques soit toujours définie, il introduit des nombres qu'il appelle «complexes» (p. 10), c'est-à-dire les nombres entiers négatifs. Pour définir la division ([A III], 11—12), il introduit d'autres nombres «complexes», qui sont les nombres rationnels. Et pour la définition de l'égalité de ces nombres (pp. 13—14), il introduit la notion de transformation, c'est-à-dire la réduction au même dénominateur et la représentation d'un nombre rationnel a sous la forme: $a = m\frac{a}{m}$, où m est un entier. Cette égalité entre les nombres rationnels possède la propriété de symétrie (p. 14).

De la page 16 à la page 19, WEIERSTRASS traite de l'égalité des quantités (Grössen) ayant une infinité d'éléments. Pour cela, il considère toutes les suites de rationnels positifs, en précisant combien de fois chaque élément se trouve dans la suite considérée (p. 16). Comme un nombre sera la somme des éléments qui le composent, il s'agit donc pour l'instant des séries formelles et WEIERSTRASS va donner la définition de leur égalité. A cet effet, il introduit la notion de quantité b, partie de la quantité a (p. 17): «Soient a une quantité composée d'un nombre fini ou infini d'éléments et b une quantité composée d'un nombre fini d'éléments, alors b sera une partie de a, si tout élément de b est un élément de a». On en déduit la définition de l'égalité entre deux quantités a et a': a et a' sont égales, «si toute quantité b, qui est contenue dans a, est aussi contenue dans a'». Et réciproquement.

Si b est égale à l'unité et si, quel que soit un entier positif N, il existe un agrégat formé d'un nombre fini d'éléments de a qui est plus grand que N, alors on dira «que la quantité a est infiniment grande». Cette définition de WEIERSTRASS nous donne un critère de finitude: un agrégat composé d'une infinité d'éléments sera fini, s'il existe un nombre entier N, tel que toute partie finie de a est plus petite que N.

Aux pages 20—21, un lemme fondamental donnera un autre critère de finitude que WEIERSTRASS adoptera dans ce cours: si un nombre est fini, il peut être décomposé en deux parties, dont la première a un nombre fini d'éléments et dont la seconde est un agrégat composé d'une infinité d'éléments dont la somme est aussi petite que l'on veut. D'où le critère de finitude: un nombre est fini si l'on peut en extraire un nombre fini d'éléments de façon que le reste de ses éléments ait une somme plus petite que tout nombre positif donné à l'avance.

Dans les pages 22 à 27, il étudie la sommation par paquets d'une infinité d'agrégats composés d'une infinité d'éléments. WEIERSTRASS signale (p. 23) que la condition, pour que formellement on puisse définir l'addition, est que tout élément ne se présente qu'un nombre fini de fois dans la somme. Alors la somme de l'agrégat a, obtenu à partir des agrégats infinis considérés, sera finie s'il «existe un multiple de l'unité qui est plus grand que toute somme d'éléments de a» (p. 24), naturellement somme finie d'éléments, car pour WEIERSTRASS la partie d'un agrégat a toujours un nombre fini d'éléments. Si l'on a cette propriété, on dira alors que la série correspondante est convergente.

Et WEIERSTRASS en tire le théorème fondamental pour la théorie des séries (p. 27): Si la somme d'une infinité de groupes, composés chacun d'une infinité d'éléments, est finie, alors on peut former de nouveaux groupes et la somme de ces nouveaux groupes est finie et égale à la somme des groupes précédents.

WEIERSTRASS introduit maintenant la représentation d'un nombre réel positif à l'aide de fractions décimales; plus généralement, il veut démontrer (p. 28) que si l'on se donne une suite de nombres entiers

$$1, g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots \quad \text{où} \quad 1 < g_1 < g_2 < \cdots < g_n < \cdots,$$

alors il est toujours possible d'écrire tout nombre réel positif comme somme d'une série dont les éléments sont des nombres rationnels de dénominateur g_i. Il en déduit (pp. 31—32) la proposition que tout nombre a peut se mettre sous la forme

$$a = h_0 + h_1 \frac{1}{g} + h_2 \frac{1}{g^2} + h_3 \frac{1}{g^3} + \cdots, \quad \text{où} \quad h_1, h_2, \ldots$$

prennent les valeurs $0, 1, 2, \ldots, g-2, g-1$. Ce développement est unique et le développement décimal est un cas particulier de cette proposition pour $g = 10$ (p. 35). Cela permet à WEIERSTRASS de donner la définition d'un nombre réel: un nombre réel n'est rien d'autre qu'une «telle série de nombres».

Il arrive enfin à la définition suivante des nombres rationnels et irrationnels (p. 36): «Les nombres rationnels sont ceux qui sont composés d'une suite finie de nombres. On doit appeler irrationnel tout nombre qui n'est pas rationnel»! Et pour montrer que cette définition a un sens, WEIERSTRASS donne l'exemple du nombre e (p. 37).

Après avoir défini l'ensemble des nombres réels positifs, WEIERSTRASS définit les nombres négatifs en introduisant d'autres nombres «complexes»: les «nombres opposés» (pp. 37—42). Deux nombres e et e' sont dits opposés (p. 39) si en les ajoutant tous deux à un troisième celui-ci reste inchangé. Dans les pages 43 à 49, il définit les nombres composés d'une infinité d'éléments positifs et négatifs. Pour cela, il considère un agrégat composé d'une infinité d'éléments obtenus à partir de l'unité positive e et d'une infinité d'éléments obtenus à partir de l'unité négative e'. La définition exige que l'agrégat composé à partir de l'unité positive et celui obtenu à partir de l'unité négative soient tous deux finis. Cette définition correspond à la convergence absolue des séries considérées (p. 49): une série infinie de nombres a une somme finie, lorsqu'il existe un nombre positif N tel que toute somme finie des valeurs absolues des termes de la série est plus petite que N. Et pour les séries de nombres réels, on a la propriété de sommation par paquets (p. 51).

Ayant défini la multiplication pour les nombres réels (pp. 53—60) et le produit infini (pp. 60—61), WEIERSTRASS introduit la division pour les nombres réels (pp. 63—67). Et il conclut (pp. 72—73) qu'il a démontré, dans ce qui précède, qu'en étendant le domaine des nombres, les quatre opérations élémentaires sont réalisables pour les agrégats ayant un nombre fini ou infini d'éléments.

De la page 74 à la page 116, il étudie la représentation arithmétique des nombres complexes. Ensuite (pp. 117—157) vient l'étude des polynômes et des fractions rationnelles.

Un but que WEIERSTRASS poursuit dans ce cours (p. 117) est de développer la notion de fonction analytique; il lui associe un deuxième: introduire dans les enchaînements analytiques la même clarté que l'on trouve dans les enchaînements algébriques. Cette algébrisation de l'analyse, entreprise par LAGRANGE, WEIERSTRASS la reprend à son compte, mais en utilisant les outils que sont les notions de limite, de borne supérieure et inférieure, de point d'accumulation et de convergence uniforme.

De la page 158 à la page 206, WEIERSTRASS étudie les séries entières. Après la définition d'une série entière et du rayon de convergence, il énonce un lemme, qu'il souligne comme important, qui est celui de l'existence d'une borne supérieure et d'une borne inférieure, mais dont la démonstration correspond à celle du théorème des intervalles emboîtés et de l'existence d'un point d'accumulation (pp. 163—170). Il commence par supposer qu'il s'agit d'un ensemble infini de nombres réels positifs (il remarque qu'on peut se limiter à l'ensemble des nombres rationnels d'un intervalle de la droite) (p. 163). Ces nombres réels positifs sont inférieurs à un nombre positif g_1. Cet ensemble admet donc une borne supérieure g, telle que, quel que soit $g' < g$, il y a des éléments de l'ensemble dans l'intervalle $]g', g[$.

Par hypothèse sur l'ensemble X considéré, et par un emploi implicite de l'axiome d'ARCHIMÈDE, on peut trouver un nombre entier b_0, tel que dans l'intervalle $[b_0, b_0+1[$ il y ait encore des points de X. Pour ces points, on a donc

$$b_0 \leqq x < b_0 + 1.$$

Soit $a > 1$, un entier, on peut donc trouver un entier b_1 tel que

$$a x < b_1 + 1$$

pour tout élément x de X et tel qu'il y ait encore des points de X satisfaisant à

$$b_1 \leqq a x < b_1 + 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{b_1}{a} \leqq x < \frac{b_1+1}{a}.$$

Ainsi, on construit une suite possédant les propriétés précédentes:

$$b_0, \frac{b_1}{a}, \frac{b_2}{a^2}, \ldots, \frac{b_{r+1}}{a^{r+1}}, \quad \text{avec} \quad \frac{b_p}{a^p} < \frac{b_q+1}{a^q}$$

quels que soient p et q.

Comme

$$\frac{b_r}{a^r} < \frac{b_{r+1}+1}{a^{r+1}} \quad \text{et} \quad \frac{b_{r+1}}{a^{r+1}} < \frac{b_r+1}{a^r},$$

il en résulte que $a b_r + a > b_{r+1}$ et $b_{r+1} + 1 > a b_r$.

Posons $b_{r+1} = a b_r + c_{r+1}$. D'après ce qui précède, on a

$$-1 < c_{r+1} = b_{r+1} - a b_r < a.$$

Comme il s'agit de nombres entiers, il en résulte que c_{r+1} est un élément de l'ensemble $(0, 1, 2, \ldots, a-1)$.

Des définitions, il résulte (p. 166) que

$$\frac{b_{r+1}}{a^{r+1}} = b_0 + \frac{c_1}{a} + \cdots + \frac{c_{r+1}}{a^{r+1}}.$$

Comme $a > 1$, la série numérique

$$g = b_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_{n+1}}{a^{n+1}}$$

est convergente. Et WEIERSTRASS démontre que g est la borne supérieure de l'ensemble considéré et qu'elle possède les propriétés énoncées (pp. 167—168).

Pour étudier les séries entières, WEIERSTRASS introduit un certain nombre de notions de topologie générale. Il commence (p. 181) par définir la notion d'ensemble borné et celle d'ensemble non borné, puis il donne la définition d'un ouvert borné O (qui à cet endroit est appelé das Gebiet: le mot qui désigne région ou domaine). Le point a appartient à l'ouvert O, s'il existe un voisinage de a (un voisinage, en général, pour WEIERSTRASS est un disque ouvert de centre a) qui est contenu dans O; a est un point extérieur de O, s'il existe un voisinage de a qui ne rencontre pas O; et, enfin, a appartient à la frontière de O, si dans tout voisinage de a il y a des points de O et des points qui n'appartiennent pas à O. Dans cette rédaction de HETTNER, il n'a pas été bien mis en évidence, dans les définitions, quand est-ce qu'il s'agissait d'une propriété qui doit être vraie pour tout voisinage et quand est-ce qu'il s'agissait d'une propriété vérifiée pour un voisinage. Il introduit alors (p. 182) la notion de connexité.

Après avoir appliqué ces notions topologiques à l'étude des séries entières d'une et de plusieurs variables, WEIERSTRASS aborde l'étude (pp. 206—276) des «principes du calcul différentiel».

WEIERSTRASS discute ensuite (p. 215) de la notion de dérivée, discussion importante pour resituer la découverte weierstrassienne d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et qui n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$. Depuis qu'il a démontré en 1872 l'existence d'une telle fonction, WEIERSTRASS donne, dans son cours, une nouvelle présentation du problème de la dérivation, différente de celle du cours de 1861, dont il fait ici une critique implicite.

En définissant la dérivée au point x' par la limite du quotient (p. 216) $\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}$ lorsque h tend vers zéro, et en illustrant l'existence de cette limite pour des fonctions connues, WEIERSTRASS dit qu'on avait jadis supposé que cette propriété était également vraie pour d'autres points, où la fonction était définie, et que la fonction dérivée obtenue avait les mêmes propriétés que la fonction f. Ce qui avait donné lieu à des «démonstrations» (pp. 217—218) qu'une fonction continue, sauf en des points isolés, était toujours dérivable.

Sur cette question, HETTNER dit dans sa rédaction du cours de WEIERSTRASS (p. 220): «Depuis longtemps Weierstrass connaissait des fonctions qui ont la propriété d'être dérivables en une infinité de points et de ne pas l'être en une autre infinité de points. Avec cela, se trouve réfutée la proposition qu'une fonction continue est dérivable».

WEIERSTRASS affirme que RIEMANN aurait donné dans ses cours, dans les années 1860, l'exemple de la fonction continue sur $\mathbb{R}$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n^2 x}{n^2}$$

comme n'étant dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$. Mais, WEIERSTRASS remarque, ce qui est intéressant, qu'on ne sait pas si RIEMANN avait affirmé que cette fonction n'était dérivable en aucun point, ou seulement en certains points de $\mathbb{R}$. Remarque d'importance, quand on connaît le résultat très récent ([40]) qui montre justement que cette fonction est dérivable sur certains multiples rationnels de π.

Notons, à ce propos, que DARBOUX déclare dans une lettre à HOUËL du 30 mars 1873 ([A X]) au sujet de la définition de l'intégrale donnée par RIEMANN: «C'est de là que j'ai tiré une foule de fonctions qui n'ont pas de dérivée».

C'est WEIERSTRASS qui a le premier résolu ce problème (pp. 221—234) en donnant l'exemple de la fonction

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} b^n \cos(a^n x)\pi,$$

avec des conditions pour a et b, qui est continue sur $\mathbb{R}$ et n'admet de dérivée en aucun point de $\mathbb{R}$.

Ce qui est à noter, c'est la conclusion sur la définition de la dérivée d'une fonction que WEIERSTRASS tire de cet exemple et qu'on trouve dans ce cours de 1874 (encore un fait qui permet de dater sa découverte). On dira que la fonction f est dérivable au point x_0 (p. 235), s'il existe un nombre c tel que l'on ait

$$f(x_0+h)=f(x_0)+c\cdot h+h\cdot h_1$$

où h_1 tend vers zéro avec h, c'est-à-dire $h_1=o(1)$; c étant indépendant de h et $f(x_0)+c\cdot h$ étant une fonction affine (lineare Funktion) de h. WEIERSTRASS démontre (pp. 235—236) l'unicité de cette application affine. Mais, c'est sa conclusion qui est importante: «Là-dedans se trouve la véritable notion de dérivée».

Ainsi a eu lieu dans l'évolution de la pensée mathématique de WEIERSTRASS un processus contraire de celui qu'en présente HILBERT ([49], 63). Tandis que HILBERT affirme que c'est la critique de la notion classique de la dérivée qui a amené WEIERSTRASS à la découverte de sa fonction continue sans dérivée, il apparaît, d'après l'étude que nous venons de faire, que c'est le processus inverse qui a eu lieu: c'est la découverte par WEIERSTRASS de sa fonction continue sans dérivée qui l'a amené à critiquer la notion classique de la dérivée. Nous pouvons comprendre la méprise de HILBERT. Il a connu l'analyse weierstrassienne dans la rédaction du cours de WEIERSTRASS de 1878, faite par son ami intime ADOLF HURWITZ, et que nous allons étudier plus loin, dans laquelle la dérivation, présentée comme dans le cours de 1874, suggère le processus tel que l'avait compris HILBERT.

WEIERSTRASS développe ensuite (pp. 276—360) les propositions sur la convergence des séries entières.

Dans cette partie nous trouvons quelques théorèmes fondamentaux de l'analyse, dont une source est indiquée par la citation (p. 304) du mémoire célèbre de BOLZANO de 1817 ([16]). A propos de BOLZANO, notons que SCHWARZ dans une lettre à CANTOR ([74], 68) mentionne une lettre que lui avait écrite KRONECKER le 30 juin 1870 et dans laquelle ce dernier affirme que «les conclusions de Bolzano sont évidemment de faux arguments» et que, dans cette affaire, il a KUMMER, BORCHARDT et HEINE dans son camp. Et SCHWARZ poursuit: «Je suis content que toi, Thomé et moi, soyons dans le camp de Weierstrass». Au sujet de ces conclusions de BOLZANO, SCHWARZ écrivait à CANTOR le 1er avril 1870 ([74], 228) qu'il était d'accord avec CANTOR et avec l'idée qui se dégageait des leçons de WEIERSTRASS «que sans les conclusions, qui ont été développées par Weierstrass à partir des principes de Bolzano, on n'aurait pas pu réussir dans de nombreuses recherches». Ainsi WEIERSTRASS a connu avant 1870 l'œuvre de BOLZANO qu'il a développée et utilisée dans ses recherches.

WEIERSTRASS donne à la page 305 l'énoncé du théorème que tout ensemble infini borné de nombres réels admet un point d'accumulation. La démonstration (pp. 305—310) est semblable à celle que nous avons vue pour l'existence de la borne supérieure. Il en déduit (pp. 310—311) le théorème qu'une fonction continue sur un compact atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure. L'existence des points d'accumulation est démontrée dans le cas de sous-ensembles bornés infinis de $\mathbb{R}^n$ (p. 313) et de $\mathbb{C}^n$ (p. 318).

Après avoir appliqué ces résultats à l'étude des séries entières d'une et de plusieurs variables, WEIERSTRASS expose (pp. 359—360) le sens de ses recherches sur la convergence et le but de la théorie des fonctions. Le sens profond de ses recherches sur la convergence est que les propriétés caractéristiques des fonctions reposent sur leurs points singuliers, méthode qui diffère fondamentalement de celle utilisée par ABEL. Quant au «but idéal» de la théorie des fonctions, il est de «représenter analytiquement» les fonctions définies par ailleurs de façons diverses. Et il est fondamental «d'obtenir a priori la forme et les conditions d'une telle représentation». WEIERSTRASS va s'y employer dans le cas des fonctions analytiques d'une variable (pp. 361—397) et des fonctions analytiques de plusieurs variables (pp. 398—490). Après quoi, il étudie les fonctions uniformes (pp. 491—512).

L'étude de cette rédaction de HETTNER, sur l'exemplaire qui se trouve à l'Institut Mittag-Leffler, a été faite par KLAUS KOPFERMANN ([4], 75—96) qui y étudie, en particulier, les théories de WEIERSTRASS sur les séries entières et les fonctions analytiques. KOPFERMANN donne une citation, extraite d'une leçon de 1874 ([4], 78), qui résume bien la conception weierstrassienne des fondements de l'analyse: «Les principales difficultés de l'analyse supérieure viennent précisément d'une présentation floue et pas assez détaillée des notions de base et des opérations arithmétiques». C'est pourquoi WEIERSTRASS a poussé ces développements, avec une grande rigueur, jusqu'aux plus petits détails. En ce sens, il est juste de le considérer comme l'initiateur de l'arithmétisation de l'analyse. Par contre, MÉRAY, qui s'intéressait beaucoup moins aux opérations arithmétiques, ne peut être rattaché aussi directement à cette tendance de l'analyse du XIX$^{\text{ème}}$ siècle.

Cette reconstitution de l'analyse à partir de ses bases arithmétiques peut être considérée comme la deuxième phase du style weierstrassien, la première étant celle d'avant 1863, caractérisée par le style epsilonien.

En cette année 1874, où WEIERSTRASS fait son cours rédigé par HETTNER, sa gloire est universelle et la rigueur weierstrassienne est considérée comme un modèle, même si ce modèle est assez mal connu. En France, celui qui semble le plus au courant de cet effort weierstrassien pour refaire l'analyse, c'est GASTON DARBOUX. On en trouve des échos dans sa correspondance inédite avec HOUËL ([A X]). Ce sont d'ailleurs DARBOUX et ensuite JORDAN, dans son cours d'analyse, qui introduiront la nouvelle analyse en France. Dans sa lettre à HOUËL du 23 décembre 1873, DARBOUX souligne l'importance de la notion de convergence uniforme. Dans la lettre du 24 janvier 1874, DARBOUX développe sa conception de l'analyse dont l'exigence essentielle est la rigueur et il indique comment élaborer cette analyse: «Avec le théorème des accroissements finis tel qu'il est démontré dans Serret vous pouvez élever un édifice solide. Ça et la définition de l'intégrale; il n'y a pas autre chose. C'est comme cela je crois que procède Weierstrass». Dans la lettre du 17 février 1874, DARBOUX invoque même l'autorité de WEIERSTRASS dans un problème de limite pour une fonction de deux variables.

Tout cela montre qu'en 1874, lorsqu'on parlait en France de la rigueur weierstrassienne, il s'agissait surtout de l'analyse telle que WEIERSTRASS la présentait dans son cours de 1861.

4.4. Le cours du semestre d'été de 1878, d'après le mémoire de Pincherle et le manuscrit d'Adolf Hurwitz

4.4.1. Le mémoire de Pincherle

En 1878, se trouvent, parmi les auditeurs du cours de WEIERSTRASS sur l'introduction à la théorie des fonctions analytiques, SALVATORE PINCHERLE et ADOLF HURWITZ. Le premier publie, dès 1880, un essai d'une introduction à la théorie des fonctions analytiques suivant les principes de WEIERSTRASS, dans lequel il utilise ses notes prises au cours de WEIERSTRASS de 1878 et les notes des cours précédents de WEIERSTRASS, que des élèves de WEIERSTRASS mirent à sa disposition ([81], 178).

La comparaison entre les rédactions de PINCHERLE et de HURWITZ est intéressante, car elle révèle que PINCHERLE a fait une rédaction originale du cours de WEIERSTRASS. Nous n'insisterons pas sur cette rédaction, qui est très connue, car presque toutes les analyses de l'œuvre mathématique de WEIERSTRASS sont basées sur elle. (Notons que PINCHERLE a adopté, par la suite, dans ses cours d'analyse la définition des nombres réels de DEDEKIND.)

L'exposé de PINCHERLE, s'il ne suit pas exactement celui de WEIERSTRASS, a eu une grande importance pour faire connaître l'analyse de WEIERSTRASS, en mettant bien en relief les notions de topologie générale contenues dans les cours de ce dernier, et cela de façon plus systématique qu'elles ne l'étaient dans ces cours mêmes.

4.4.2. La rédaction d'Adolf Hurwitz

Ecrite en lettres gothiques, par le mathématicien de premier plan que fut ADOLF HURWITZ, cette rédaction nous a paru si intéressante que nous en avons transcrit tout le début concernant la définition des nombres réels, pour avoir une idée précise de la façon dont procédait WEIERSTRASS ([A I]).

DAVID HILBERT écrit ([54], XIII) que HURWITZ, après avoir étudié chez KLEIN à München, vint pour trois semestres à Berlin «où il étudia et assimila les méthodes rigoureuses de la théorie des fonctions de Weierstrass». ERNST MEISSNER précise ([54], XXII) que, pendant les trois semestres de 1877/1878, on trouve HURWITZ comme étudiant de KUMMER, WEIERSTRASS et KRONECKER. En 1881/1882, on le retrouve jeune docteur de 21 ans de nouveau à Berlin «pour se perfectionner auprès de Weierstrass et de Kronecker». Ainsi HURWITZ, pendant ses séjours à Berlin, assiste au cours de WEIERSTRASS sur l'introduction à la théorie des fonctions analytiques, cours que WEIERSTRASS n'a fait qu'une seule fois dans cette période, durant le semestre d'été de 1878. HURWITZ rédige ce cours avec beaucoup de soin, comme le souligne HILBERT dans sa préface aux œuvres mathématiques de HURWITZ.

L'introduction du cours de WEIERSTRASS commence ([A I], 1) par la notion de nombre, qui tire son origine de la réunion mentale de choses auxquelles on a découvert une propriété commune, «particulièrement des objets mentalement identiques. Cet objet, nous le désignerons comme unité du nombre».

Cette notion d'unité va permettre à WEIERSTRASS de donner la définition d'un nombre complexe: c'est tout simplement l'agrégat composé de nombres obtenus à partir de différentes unités. «Ces différentes unités, nous les appelons les éléments du nombre complexe.» Remarquons que la notion d'unité n'est pas claire, car, d'après la définition, il y aurait autant d'unités que d'agrégats composés d'objets identiques «en pensée».

Dès le départ, WEIERSTRASS introduit la notion d'égalité qui va jouer un rôle fondamental dans sa théorie des nombres irrationnels. Il postule que cette propriété doit être une relation d'équivalence. En effet, on dit que deux objets sont égaux, s'il existe entre eux une «correspondance désignée par $a=b$, telle qu'on ait aussi $b=a$ et telle que si $a=b$ et $b=c$ on ait aussi $a=c$». Cette définition de l'égalité va nous permettre de conclure, par la suite, qu'un nombre irrationnel est au fond pour WEIERSTRASS une classe d'équivalence.

La définition de l'égalité de deux entiers positifs (pp. 1—2) a et b consiste à mettre en correspondance les unités de a et de b, de façon qu'aucune «unité de a ne reste sans correspondance avec une unité de b», c'est-à-dire, comme nous le dirions aujourd'hui, que cette correspondance soit bijective.

Conformément à cette définition, il établit pour l'addition les propositions suivantes:

$$1)\ a+b=b+a \qquad 2)\ (a+b)+c=(a+c)+b.$$

Il est immédiat que de 1) et de 2), il résulte que l'addition est associative. En effet,

$$\begin{aligned}(a+b)+c&=(a+c)+b &&\text{d'après 2)}\\ &=(c+a)+b &&\text{d'après 1)}\\ &=(c+b)+a &&\text{d'après 2)}\\ &=a+(b+c) &&\text{d'après 1).}\end{aligned}$$

Après avoir défini la multiplication (p. 3), WEIERSTRASS introduit la notion importante (p. 4) des «parties exactes de l'unité»: $1/n$ est la $n^{\text{ième}}$ partie exacte de l'unité si, et seulement si, $n \cdot \frac{1}{n} = 1$. Ces nouveaux éléments sont introduits pour pouvoir définir un nombre b tel que $c = a \cdot b$, a et c étant deux entiers positifs donnés. On en déduit la notion de parties exactes des parties exactes de l'unité. Notons que l'on introduit, sans le préciser davantage, la notion d'unité principale.

Pour pouvoir définir l'égalité de deux nombres rationnels, qui sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers de ces nouveaux nombres (les parties exactes de l'unité), WEIERSTRASS montre que l'on peut faire sur ces nouveaux nombres les transformations suivantes:

1) n éléments quelconques de la forme $1/n$ peuvent être remplacés par l'unité;

2) tout élément peut être remplacé par ses parties exactes. Par exemple, 1 par $n \cdot \frac{1}{n}$.

Maintenant on peut définir l'égalité de deux nombres rationnels: on dira que deux nombres a et b sont égaux, si a peut être transformé en a' de façon que a' contienne les mêmes éléments, et le même nombre de fois, que b.

Après avoir redéfini l'addition pour les nombres rationnels positifs, on arrive à la partie essentielle de la théorie des nombres de WEIERSTRASS (p. 11), il s'agit du paragraphe intitulé: Nombres constitués d'une infinité d'éléments.

A partir d'une unité et de ses parties exactes, qui sont en nombre infini, on pourrait constituer des agrégats ayant un nombre infini d'éléments. Mais pour donner une représentation rigoureuse de tels nombres, composés d'une infinité d'éléments, «il est nécessaire que ces éléments soient pris dans le domaine des nombres existants (unité et ses parties exactes) d'après une loi bien déterminée».

Le premier pas dans la définition de ces nouveaux nombres, qui sont une extension des nombres rationnels positifs, sera l'introduction de quelques notions qui vont jouer un rôle important dans la théorie des ensembles.

«Nous dirons que a' est une partie de a, si l'on peut transformer a' en a'', de façon que tous les éléments de a'' se trouvent autant de fois en a qu'en a''», a pouvant contenir d'autres éléments.

Avec cette définition d'un nombre a', comme partie d'un nombre a, il est possible de donner une définition d'égalité entre deux nombres, même lorsqu'ils sont composés d'une infinité d'éléments (il est clair que de tels «nombres» sont encore à définir), car, selon la démarche constante de WEIERSTRASS, on se ramènera au cas fini.

Cette définition d'égalité (p. 12), HURWITZ la donne entre guillemets (il s'agit donc de la définition même de WEIERSTRASS): «Nous dirons que deux nombres a et b sont *égaux* si *toute* partie de a peut être transformée en une partie b, et réciproquement toute partie de b en une de a».

Il est important de noter que pour WEIERSTRASS a' est appelée une partie de a, si a' contient seulement «un nombre *fini* d'éléments de a». Donc, pour égaler deux nombres composés d'une infinité d'éléments, WEIERSTRASS se ramène à des sous-ensembles finis et il constate que cette définition de l'égalité est en accord avec celle donnée au début de son cours.

Cette nouvelle définition de l'égalité entraîne une nouvelle définition de l'inégalité (p. 14) entre deux nombres et on dira que $b > a$, si toute partie de a est une partie de b et s'il existe un nombre c qui est partie de b mais n'est pas partie de a.

L'égalité ainsi définie possède (p. 15) les propriétés de symétrie et de transitivité, donc c'est une relation d'équivalence et cela est important car, comme nous allons le voir, un nombre réel sera défini comme une classe pour cette relation d'équivalence (cela sera dit de façon implicite et moins nette que chez MÉRAY ([34], 341)). Il est ensuite démontré que l'inégalité aussi possède la propriété de transitivité.

Pour définir les nombres composés d'une infinité d'éléments, WEIERSTRASS va introduire maintenant un critère de finitude: «Nous dirons qu'un nombre a a une valeur finie, s'il existe un nombre b plus grand que a, b étant composé d'un nombre fini d'éléments». Ce critère fait donc intervenir les nombres rationnels qui sont des agrégats composés d'un nombre fini d'éléments.

Puis vient la définition d'un agrégat ne possédant pas la propriété de finitude: «Si tout nombre c, composé d'un nombre fini d'éléments, est une partie de a, alors nous dirons que a est infiniment grand». La question que se pose maintenant WEIERSTRASS est de savoir s'il est possible d'égaler deux nombres infiniment grands. La réponse, conséquence de la définition précédente de l'égalité, est négative. Le calcul avec de tels agrégats étant impossible (p. 16), WEIERSTRASS n'utilisera dans la suite que les agrégats possédant la propriété de finitude.

WEIERSTRASS affirme ensuite que l'addition des agrégats composés d'un nombre infini d'éléments est la même que celle des nombres entiers, mais c'est seulement plus loin qu'il en donnera la justification. HURWITZ remarque avec justesse que cela est vrai «seulement pour un nombre fini de termes».

Puis est définie la multiplication de deux agrégats composés d'un nombre infini d'éléments et il est démontré que $a \cdot b$ est fini lorsque a et b sont finis (p. 17) et que toutes les propriétés de la multiplication des nombres rationnels sont conservées pour ces nouveaux nombres.

A la page 18, commence le paragraphe consacré à la somme d'une infinité de nombres. Le critère de sommabilité qui est donné n'est rien d'autre qu'une reformulation du critère de finitude: pour qu'une suite infinie de nombres soit sommable et ait une valeur finie, il faut et il suffit qu'il existe un nombre plus grand que la somme d'un nombre quelconque fini d'éléments de la suite.

WEIERSTRASS étudie à la page 22 la sommation par paquets et montre que, quelle que soit la façon de grouper les termes d'une suite sommable, la valeur de la somme reste toujours la même.

Partant de la définition de la soustraction des nombres rationnels (p. 24): «par $(a-b)$ on désigne le nombre qui additionné à b a pour somme a», il est possible, dans le cas des agrégats composés d'un nombre fini d'éléments et lorsque $a > b$, de construire immédiatement le nombre $a-b$. Mais si a et b sont des agrégats composés d'une infinité d'éléments, alors (p. 25) on ne peut plus construire directement $a-b$ «et, par conséquent, nous devons démontrer que dans ce cas aussi la différence $(a-b)$ existe». Pour cela, on commence d'abord par démontrer que si l'on a deux nombres a et b tels que, quel que soit c, on ait $a+c > b$, alors on a soit $b=a$, soit $a > b$. Il en résulte (p. 26) que si $a > b$, alors il existe des éléments tels qu'en les ajoutant à b, a reste toujours supérieur à la somme obtenue. On a ainsi les différentes propriétés des nombres réels que WEIERSTRASS utilise pour établir l'existence d'un nombre c tel que $c = a - b$.

Pour pouvoir toujours définir l'opération de soustraction (pp. 26—27), il introduit les éléments «opposés»: étant donné un agrégat, à chaque élément a de l'agrégat, on fait correspondre un nouvel élément a', tel que $a + a' = 0$. Ces nouveaux éléments a' possèdent la propriété suivante: $(a')' = a$. Ainsi toute différence de deux nombres positifs quelconques a un sens.

Les nombres positifs et négatifs ainsi construits, le critère de finitude devient: un nombre sera fini si l'agrégat constitué d'éléments positifs et celui constitué d'éléments négatifs sont tous deux finis.

WEIERSTRASS cherche à établir, à la page 31, une condition pour que la somme d'une infinité d'éléments soit finie. Ce sera celle de la convergence absolue (p. 33): «Pour que la somme d'une infinité de nombres soit finie, il faut et il suffit qu'il existe un nombre fini fixe g plus grand que toute somme d'un nombre quelconque d'éléments pris en valeur absolue».

Toutefois, WEIERSTRASS précise qu'habituellement on définit autrement la somme d'une série et il est important de noter ces précisions, car elles montrent que si WEIERSTRASS avait une idée très nette de la nécessité d'élaborer une théorie rigoureuse des nombres réels, base de sa théorie des fonctions, il semblait moins préoccupé par le manque de clarté dans la définition de la limite. Sur ce point, MÉRAY était plus clair dès 1869 ([34], 340).

WEIERSTRASS donne la définition habituelle de la somme d'une série $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ qui fait intervenir les sommes partielles $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ et il précise aussitôt que cette définition ne concorde pas avec la sienne, car la sienne est indépendante de l'ordre des termes.

Donnant l'exemple de l'agrégat $(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots)$, il montre qu'il n'est pas sommable au sens de sa définition, mais que, par contre, il l'est comme $\lim s_n$ (p. 34); c'est donc que cette somme n'est pas indépendante de l'ordre des termes.

Cet apparent manque de lien, entre la construction des nombres réels et la notion de limite, est dû au fait que WEIERSTRASS n'utilise pas les notions de limite et de suite dans sa construction, du moins explicitement, car la notion de limite est sous-jacente dans sa définition, qui revient à considérer les suites croissantes bornées de nombres positifs. Alors, ou bien ces suites admettent une borne supérieure rationnelle, ou bien cette borne supérieure sera le nombre irrationnel correspondant à un agrégat infini ayant la propriété de finitude.

Avant de passer à l'étude du livre de DANTSCHER, signalons que HELMUTH GERICKE, dans son livre sur l'histoire de la notion de nombre ([39]), a analysé la rédaction d'ADOLF KNESER du cours du semestre d'hiver 1880—1881.

4.5. *Exposé de Dantscher sur la théorie weierstrassienne des nombres irrationnels, basé sur le cours du semestre d'hiver 1884—1885*

Le livre de DANTSCHER ([30]) est basé sur le cours de WEIERSTRASS que DANTSCHER avait suivi en 1872 (c'était la première fois que WEIERSTRASS intitulait son cours «Introduction à la théorie des fonctions analytiques») et sur les notes prises au cours professé par WEIERSTRASS pendant le semestre d'hiver 1884—1885.

Publié en 1908, le livre de DANTSCHER répond aux différentes critiques adressées à la théorie weierstrassienne des nombres irrationnels et surtout à celle de FREGE.

Pour juger sévèrement la théorie wierstrassienne des nombres, FREGE a utilisé certaines rédactions des élèves de WEIERSTRASS, sans préciser lesquelles, et le livre d'OTTO BIERMANN ([13]).

WEIERSTRASS fut fort mécontent de la publication du livre de BIERMANN, comme en témoigne sa correspondance avec SCHWARZ ([A VII], [A VIII]). En effet, dans sa lettre à SCHWARZ du 12 juin 1888, parlant du livre d'OTTO BIERMANN, WEIERSTRASS indique que BIERMANN était venu, en 1885, lui demander s'il pouvait utiliser ses leçons pour écrire une «théorie générale des fonctions». Et WEIERSTRASS écrit: «Je lui répondis qu'il s'est certainement fixé une tâche trop difficile; que moi-même je n'ose pas m'y résoudre pour l'instant, parce que je n'ai pas encore tiré complètement au clair plusieurs points difficiles». Dans cette lettre, WEIERSTRASS juge sevèrement BIERMANN, qui n'avait même pas assisté à son cours sur l'introduction à la théorie des fonctions analytiques, et surtout sa façon ambiguë de parler, dans l'introduction de son livre, de l'autorisation de WEIERSTRASS. Il ajoute qu'il ne considère pas ce livre comme une «fidèle reproduction» de ses leçons, affirmant qu'il possède des rédactions de ses élèves qui «de loin, sont meilleures». Il est probable, qu'il se réfère, entre autres, à celle de HETTNER.

SCHWARZ, dans sa lettre du 17 juin 1888, cite le propos d'un de ses collègues qui disait que le livre de BIERMANN «est tout ce que l'on veut, sauf la théorie weierstrassienne des fonctions».

Cependant, OTTO BIERMANN fut l'interlocuteur privilégé de GOTTLOB FREGE. (Ainsi un article inédit de Frege «Sur la notion de nombre» ([38]) fut écrit à la suite d'une discussion de FREGE avec BIERMANN. En note, l'éditeur a ajouté l'étiquette usurpée: «Otto Biermann, élève de Weierstrass».)

Dans son livre, FREGE dit ([37], 149—150) «que Weierstrass veut poser les bases plus profondément que la plupart des mathématiciens. Il commence, comme nous, avec la notion de cardinal (mit dem Anzahlen)». Mais, aussitôt après, il lui fait deux critiques: d'une part, qu'il n'a pas pris en considération ce que les autres, avant lui, avaient pensé de ce problème et, d'autre part, qu'il n'a vu aucun des écueils qui s'y présentent.

Ces critiques sont excessives. D'abord, la tentative de WEIERSTRASS se situe à une époque où n'existait aucune théorie cohérente et rigoureuse ni des nombres entiers ni des nombres irrationnels. Avant 1863 (au moment où WEIERSTRASS élabore sa théorie des nombres) les autres auteurs disaient très peu de choses sur les nombres irrationnels et même sur les nombres entiers. Ensuite, les logiciens et les philosophes des mathématiques qui l'ont précédé n'avaient guère trouvé d'écueils dans la définition des nombres irrationnels! Enfin, pour qui connaît tant soit peu l'œuvre de WEIERSTRASS, cet auteur, comme nous l'avons vu dans ce travail à maintes occasions, n'a cessé, jusqu'à la fin de son activité mathématique, de se poser des questions sur sa théorie des nombres et l'a toujours considérée comme lacunaire et inachevée.

La faiblesse de la théorie des nombres entiers de WEIERSTRASS est évidente si l'on se place au point de vue d'une définition rigoureuse de la notion du nombre entier; toutefois, elle n'est pas aussi insuffisante que cela ressort de la présentation de FREGE. Nous avons vu combien la tentative de WEIERSTRASS était valable, car sa théorie était sous-tendue par des notions ensemblistes, qui plus tard contribueront à l'élaboration d'une théorie cohérente des nombres entiers. Tout cela paraît échapper à FREGE qui écrit: «Si un homme, qui a réfléchi sur ce problème, vous le réveillez de son sommeil en lui posant la question ‹qu'est-ce que le nombre›, il utiliserait certainement, avant de reprendre ses esprits, les mêmes expressions que WEIERSTRASS: ‹ensemble›, ‹tas›, ‹suite d'objets›, ‹objets composés de parties égales›, etc.»

FREGE remarque ensuite ([37], 151) que «d'après Weierstrass, égalité n'est pas identité». Or, pour WEIERSTRASS l'égalité est une relation d'équivalence. De même, FREGE reproche à WEIERSTRASS son manque de clarté dans sa notion d'équivalence. Il dit que WEIERSTRASS affirme «qu'un élément peut être équivalent à plusieurs autres; mais comment on peut reconnaître cette équivalence reste obscur». Nous avons abondamment développé la relation d'équivalence définie par l'égalité et souligné avec quelle minutie WEIERSTRASS avait donné sa définition de l'égalité.

FREGE critique aussi la définition des nombres irrationnels de WEIERSTRASS, en affirmant que WEIERSTRASS (p. 154) considère une somme infinie de termes positifs «non comme une limite, mais comme une somme». Il semble que le critère de finitude, sur lequel nous avons longuement insisté dans ce qui précède, a échappé à FREGE, ainsi que l'originalité de la construction weierstrassienne. En tout cas, c'est FREGE qui tombe dans la contradiction en parlant de la notion de limite avant que la construction des nombres réels soit achevée! FREGE conclut son étude sur WEIERSTRASS, en affirmant qu'il n'est pas nécessaire de faire une critique détaillée de sa théorie des nombres irrationnels, car, «d'après les fondements, ses démonstrations sont tout à fait douteuses». (Notons que DEDEKIND ([32], 339) considérait la théorie de WEIERSTRASS des nombres irrationnels comme «parfaitement rigoureuse».)

Pour revenir au livre de DANTSCHER, c'est une présentation personnelle de la théorie de WEIERSTRASS, dans laquelle l'auteur signale les théorèmes dus à WEIERSTRASS. Voulant répondre à ceux qui critiquent WEIERSTRASS, DANTSCHER insiste beaucoup sur la notion de convergence. Ainsi, un paragraphe du livre porte comme sous-titre «Convergence et divergence». D'ailleurs, ce livre est une synthèse de l'exposé de WEIERSTRASS et de la théorie classique de la convergence des séries.

Toutefois, DANTSCHER fait disparaître le support ensembliste de la théorie de WEIERSTRASS; il écrit ([30], 11): «On désigne un nombre rationnel positif α, qui est plus petit que a, comme une ‹*partie*› de a».

Et il ne met pas en valeur la notion de classe d'équivalence, sous-jacente dans la théorie de WEIERSTRASS, en désignant simplement «les agrégats additifs convergents comme nombres» (p. 29).

4.6. Le dernier cours d'analyse de Weierstrass du semestre d'été de 1886, d'après la rédaction de G. Thieme

Il s'agit du dernier cours d'analyse fait par WEIERSTRASS à l'université de Berlin. Celui qu'il avait annoncé, pour le semestre d'hiver 1888—1889, et qu'il n'a pas fait, devait s'intituler: «Notions fondamentales et théorèmes principaux de la théorie des fonctions». Le cours que nous analyserons ici a pour titre «Chapitres choisis de la théorie des fonctions».

Ces leçons sont une suite à son cours sur les «Eléments de la théorie des fonctions analytiques», qu'il avait fait pendant le semestre d'hiver 1884—1885. Mais, pour WEIERSTRASS, il y avait quelque chose d'insatisfaisant dans ce précédent cours, car «la généralité des résultats obtenus n'a pas été pleinement mise en évidence» ([A IV], 1). Tel sera le but de ce nouveau cours et ainsi on retrouve ici un autre apport important de l'analyse weierstrassienne, qui sera une des composantes de la mathématique moderne: faire ressortir la généralité des théories qui sont à la base de l'analyse. Pour cela, WEIERSTRASS veut suivre de façon «critique et historique» les différentes méthodes sur lesquelles est fondée la théorie des fonctions et les comparer entre elles. Il insiste sur cet aspect historique de son cours, qui permet de montrer comment les notions fondamentales de l'analyse ont été établies.

La tâche que WEIERSTRASS s'assigne est «d'élaborer des bases solides» en ce qui concerne les principes de la science mathématique. Pour cela, il est certes indispensable de s'occuper des problèmes particuliers, «mais le but final, qu'on doit toujours avoir présent à l'esprit, est d'atteindre un jugement sûr sur les fondements de la science».

Le chapitre 1 (pp. 2—5) est consacré à une étude historique de la formation de la notion de fonction. Développant le point de vue arithmétique de la notion de fonction, qui remonte à LEIBNIZ, consistant en une relation arithmétique entre deux quantités et le point de vue, explicité par DIRICHLET et qui selon WEIERSTRASS est en apparence plus général, de la définition de fonction comme correspondance entre les éléments, WEIERSTRASS conclut que, lorsque cette correspondance est continue, ces deux notions sont au fond les mêmes. Cela résulte d'un théorème de WEIERSTRASS qui permet de donner une expression analytique à une fonction continue quelconque. Et ce sont ces considérations qui vont faire partie du chapitre 2.

Ce chapitre est intitulé: «Sur la représentation des fonctions dites arbitraires» (pp. 6—8). Partant de la définition générale de la fonction continue (p. 6), WEIERSTRASS note qu'une telle fonction peut être approchée par un polynôme à coefficients rationnels, c'est-à-dire qu'elle admet une expression arithmétique. Ainsi, dans le cas de la continuité, la définition la plus générale de la fonction coïncide avec la définition arithmétique. Il rappelle que jadis on avait cru (notons que WEIERSTRASS lui-même le croyait, comme nous l'affirme son ami du BOIS-REYMOND ([A XIV], 18 janvier 1883)) que ce problème pouvait être résolu grâce aux séries de FOURIER, mais qu'on avait démontré (p. 7) «qu'il y avait des fonctions continues qu'on ne peut pas exprimer de cette façon». Et WEIERSTRASS affirme, contrairement à MÉRAY, répondant ainsi à LAGRANGE sans le nommer, qu'une telle fonction peut s'exprimer «très rarement» comme une série de puissances.

A la page 17, on trouve le célèbre théorème de WEIERSTRASS sur l'approximation par des polynômes d'une fonction continue sur un compact de la droite. N'ayant pas pu, et pour cause, réaliser le rêve de LAGRANGE de représenter toute fonction par une série de TAYLOR (rêve que MÉRAY croyait avoir atteint, tout simplement parce qu'il refusait de tenir compte d'une partie de l'analyse), WEIER-

STRASS s'en approche aussi près que possible par ce théorème dont la portée théorique est immense. Et WEIERSTRASS conclut lui-même (p. 21) qu'ainsi la notion d'une fonction réelle continue «s'identifie complètement avec la notion de la représentation arithmétique sous la forme d'une série infinie de polynômes».

Le chapitre 5 de ce cours (pp. 26—57) est intitulé: «Digression: Esquisse d'une arithmétique générale». Après une discussion sur la notion de nombre dans laquelle il parle de l'opération de «la représentation d'ensemble» (die zusammengesetzte Vorstellung) utilisée en logique, il introduit (pp. 26—27) la notion d'égalité basée sur la correspondance bijective entre deux agrégats.

Remarquons, avant de poursuivre notre examen de ce dernier cours de WEIER STRASS sur l'analyse, que la rédaction de THIEME n'a pas du tout la clarté et l'ordre de celle de HURWITZ, ni même de celle de HETTNER, et que la structure des chapitres, des propositions et des théorèmes n'est pas bien mise en valeur. Peut-être cela est-il dû un peu à la conception même de ce cours.

Si l'on suppose (p. 30) que les nombres entiers sont construits, alors on arrive à la notion «des nombres abstraits» (die unbenannten Zahlen), de «leur addition, multiplication, division, bref, dans le domaine de l'arithmétique pure». Après avoir construit les nombres rationnels, WEIERSTRASS considère les agrégats composés d'une infinité d'éléments (pp. 35—36). Une des difficultés qui se présente immédiatement, c'est de définir la notion d'égalité pour de tels agrégats. Pour cela, il faut remplacer la notion d'égalité entre les agrégats composés d'un nombre fini d'éléments «par celle d'équivalence» (p. 37), c'est-à dire définir l'égalité comme WEIERSTRASS le fait depuis plus de vingt ans: deux nombres sont égaux si, et seulement si, tout nombre c qui est contenu dans le premier est aussi contenu dans le second. Il en résulte immédiatement que si $a=b$ et $b=c$, alors $a=c$. Cette définition va permettre d'égaler deux agrégats composés d'une infinité d'éléments (p. 38). Ainsi, dans ce cours, WEIERSTRASS est plus explicite sur le fait essentiel que sa définition des nombres réels va correspondre à la définition d'un nombre comme une classe pour la relation d'équivalence définie par cette égalité.

Considérant un agrégat composé d'une infinité de nombres rationnels positifs a_i, WEIERSTRASS donne (p. 39) son critère de finitude, qui est une condition nécessaire et suffisante pour que la série $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ soit finie. Et WEIERSTRASS, dans ce cours, met son critère de finitude sous la forme du critère de CAUCHY.

Il définit ensuite la multiplication (p. 41), la soustraction, puis la division (p. 46) et enfin introduit les nombres complexes.

Rappelant (p. 52) qu'un agrégat composé d'une infinité de nombres rationnels positifs et négatifs définit, d'après sa construction, un nombre réel si, et seulement si, l'ensemble de ses éléments positifs et l'ensemble de ses éléments négatifs ont une somme finie, WEIERSTRASS signale l'existence des séries à termes quelconques non absolument convergentes, dont la somme est définie par la limite de la suite $S_n=a_1+\cdots+a_n$ lorsque n tend vers l'infini. WEIERSTRASS précise que cette limite, d'après la façon dont il a construit les nombres réels, «doit être définie arithmétiquement» (p. 53).

Et c'est dans ce cours que nous trouvons exprimée, de la façon la plus claire, l'idée que la notion de limite ne peut être correctement définie qu'à condition de définir d'abord les nombres réels. WEIERSTRASS précise que lorsque seulement l'ensemble des nombres rationnels est construit, nombres représentés par des agrégats finis, «il n'y a aucun sens à parler de la limite», car dans le domaine considéré une telle limite «en général n'existe pas» (p. 54).

Pour «définir arithmétiquement» la limite de la suite (S_n) (ce qui reviendra en définitive à montrer que la définition des nombres réels de MÉRAY et celle de WEIERSTRASS sont équivalentes), WEIERSTRASS démontre que toute série convergente, mais non absolument convergente, peut être transformée en une série absolument convergente. La démonstration de WEIERSTRASS revient à la démonstration habituelle de la proposition que toute suite de CAUCHY est convergente. Ainsi, «sans aucune considération sur la limite, nous avons rangé ces séries parmi les nombres» (p. 57).

Le chapitre 6 traite de la notion de variable et du théorème fondamental de prolongement (pp. 57—82). Pour WEIERSTRASS, la définition d'une quantité variable implique «qu'il y ait une infinité de nombres correspondant à la définition donnée» (p. 57). A cette notion de variable est liée la notion de limite des quantités variables. Et la question qui se pose (p. 58) est de savoir «quelle notion arithmétique on doit lui associer». Cette notion va être celle du point d'accumulation.

WEIERSTRASS revient de nouveau sur la définition des nombres irrationnels, en se reposant la question de leur définition purement arithmétique. «Si nous partons de l'existence des nombres rationnels, il est absurde de définir les nombres irrationnels comme limites des nombres rationnels, car a priori nous ne pouvons pas du tout savoir si, en dehors des nombres rationnels, il y a d'autres nombres». Mais, si l'on considère l'agrégat composé d'éléments

$$1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n!}, \ldots,$$

suivant la définition des nombres donnée par WEIERSTRASS, cet agrégat définit un nombre et il n'existe aucun nombre rationnel qui lui soit égal. Donc le domaine des nombres n'est pas complet avec les nombres rationnels. WEIERSTRASS note qu'il faut tenir compte du cas exceptionnel d'un «nombre construit à partir d'une infinité d'éléments et qui est équivalent à un nombre rationnel». Ainsi, un agrégat composé d'une infinité de nombres rationnels, et qui n'est pas équivalent à un nombre rationnel, appartient à une classe d'équivalence qui définit le nombre irrationnel. Et une fois que les nombres rationnels et les nombres irrationnels sont définis, alors on peut considérer les nombres irrationnels comme limite des nombres rationnels (p. 60).

WEIERSTRASS arrive ensuite au théorème qu'il considère comme l'un des plus importants de la théorie des fonctions. Il s'agit de déterminer les conditions pour que de l'égalité de deux séries de fonctions, dans un sous-domaine du plan, il résulte leur égalité dans tout le domaine (p. 61), c'est-à-dire du problème du prolongement, problème capital pour la théorie weierstrassienne des fonctions. Dans de telles questions, la notion de convergence uniforme est indispensable (p. 62). Et la démonstration du théorème de prolongement «s'appuie en dernier ressort» sur l'existence des points d'accumulation.

Après avoir donné la démonstration de la proposition que tout ensemble infini admet un point d'accumulation, WEIERSTRASS en donne une autre sous forme géométrique, comme celle de BOLZANO, en précisant que l'on ne peut pas consdérer la démonstration de BOLZANO «comme tout à fait rigoureuse» (p. 65).

Après avoir généralisé la notion de point d'accumulation à un espace de dimension n (p. 68), WEIERSTRASS étudie dans le chapitre 7 (pp. 83—92) la notion de continuité et souligne l'importance de la notion de continuité uniforme (p. 84) qui jadis était souvent négligée.

Dans le chapitre 12 (pp. 122—146), on étend certains théorèmes aux fonctions de plusieurs variables et, en particulier, le théorème sur l'approximation d'une fonction continue par des polynômes. A ce propos, WEIERSTRASS se pose la question de savoir comment étendre aux fonctions, qui ne sont pas continues en certains points, ce théorème d'approximation. Ce problème le conduit à envisager de généraliser «la notion d'intégrale définie à des cas pour lesquels, d'après les conceptions existant jusqu'alors, on ne pouvait pas parler d'intégrale définie» (p. 142). Ainsi, WEIERSTRASS trouve que la définition de RIEMANN est trop restrictive et il étend la notion d'intégrale à des fonctions bornées discontinues sur un ensemble dénombrable (p. 146). THOMAS HAWKINS ([44], 69—70), dans son histoire de l'intégrale de LEBESGUE, note que la tentative de WEIERSTRASS était un pas dans la bonne direction, mais sa théorie «n'était pas suffisamment raffinée pour donner à l'intégrale la propriété essentielle d'additivité». Ainsi, nous voyons dans ce cours combien cette notion était pour WEIERSTRASS capitale; elle seule pouvait lui permettre de donner la forme la plus générale à son théorème fondamental sur la représentation d'une fonction «arbitraire» par une série de polynômes.

Dans cette tentative de généraliser la notion d'intégrale définie, WEIERSTRASS utilise la notion d'ensemble dénombrable introduite par CANTOR. Il reconnaît, dans une lettre du 28 mai 1885 à SCHWARZ ([A VII]), que les travaux de CANTOR (WEIERSTRASS précise qu'il ne s'agit pas de travaux de CANTOR sur les nombres transfinis) jouent un rôle essentiel dans son élaboration d'une nouvelle définition, plus générale, de l'intégrale.

Traitant dans le chapitre 13 des fonctions de variables complexes (pp. 147—200), WEIERSTRASS souligne qu'à ces recherches se rattache la représentation des surfaces de RIEMANN «que nous ne voulons pas admettre parmi les véritables bases de la théorie des fonctions». Il signale, en particulier, la difficulté d'extension de cette théorie des surfaces de RIEMANN aux fonctions de plusieurs variables. Dans sa rédaction, THIEME cite WEIERSTRASS qui ajoutait que cette méthode résultait «d'une imagination mathématique» (eine mathematische Phantasie). Devant les difficultés que présente l'utilisation des surfaces de RIEMANN, WEIERSTRASS précise: «C'est pourquoi nous avons remplacé ces représentations géométriques par des moyens purement analytiques». Cela montre l'influence des fonctions de plusieurs variables dans la volonté de WEIERSTRASS de reprendre la théorie des fonctions à partir de ses fondements; ainsi que celle de RIEMANN, car ce sont les travaux de RIEMANN qui ont montré combien la théorie des fonctions de plusieurs variables est fondamentale. En même temps, WEIERSTRASS a le sentiment que les bases sur lesquelles repose l'édifice riemannien sont fragiles. De plus, il prend conscience de la souplesse de la théorie des séries entières quant à leur possibilité d'être étendues aux fonctions de plusieurs variables. Tout cela l'incite, déjà avant 1860, à construire une théorie plus rigoureuse que celle de son émule RIEMANN en faisant appel aux «moyens purement arithmétiques». Voilà quelles sont, pensons-nous, les raisons qui ont conduit WEIERSTRASS à reprendre les fondements de la théorie des fonctions dans le contexte du développement de l'analyse mathématique du début de la seconde moitié du XIX$^{\text{ème}}$ siècle.

Dans la conclusion (pp. 245—257) de son dernier cours d'analyse, WEIERSTRASS indique qu'en théorie des fonctions «le dernier but est toujours la représentation d'une fonction» (p. 256). Les deux dernières pages de sa conclusion (pp. 256—257) sont un testament laissé aux jeunes mathématiciens. Il y exprime la nécessité de poursuivre la recherche pure qui seule peut mener, peut-être par des chemins difficiles, aux outils mathématiques qui seront utilisés plus tard. Il est possible qu'une fois découverts ces outils pourront être introduits de façon plus simple, mais, sans ces recherches abstraites et difficiles, ils n'auraient pas vu le jour.

4.7. Les raisons de la «révolution» weierstrassienne

Nous avons donné tout au long des pages précédentes les raisons qui ont conduit WEIERSTRASS à entreprendre un exposé rigoureux de la théorie des fonctions. Nous allons essayer ici de préciser encore les raisons qui ont amené le principal auteur de la révolution en analyse au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, comme le désignait POINCARÉ ([A VI]), à construire sa théorie des fonctions et des nombres irrationnels.

Comme nous l'avons déjà signalé à maintes reprises, WEIERSTRASS s'est lui-même expliqué plusieurs fois sur sa conception de la théorie des fonctions et sur son lien avec l'arithmétique. Il évoque encore ce problème dans son Séminaire mathématique du 28 mai 1884 à l'université de Berlin ([111], 1). Parlant des travaux qui ont suivi son mémoire «De la théorie des fonctions analytiques uniformes» publié en 1876 ([107], 77—124) et qui ont fait avancer cette théorie sur des points essentiels, WEIERSTRASS note que leurs auteurs ont quelquefois utilisé des méthodes plus simples que les siennes et qui sont basées sur le théorème de CAUCHY. WEIERSTRASS sent le besoin de préciser pourquoi il a utilisé, lui, ses propres méthodes: elles sont liées aux fondements mêmes de sa théorie des fonctions, car il relie la notion de fonction «aux opérations arithmétiques fondamentales. Dès que celles-ci sont définies, on obtient la notion de fonction, qui est déduite, au moyen des opérations fondamentales, des quantités variables considérées». Et si l'on applique aux nombres «les opérations élémentaires un nombre fini de fois, on parvient à des fonctions rationnelles». Mais l'on démontre en arithmétique qu'on peut aussi définir le produit et la somme pour un nombre infini de termes «et on arrive ainsi immédiatement aux fonctions que l'on peut représenter sous la forme de sommes et de produits infinis de fonctions rationnelles». Quant à la fonction analytique uniforme, elle résultera des applications d'opérations arithmétiques, conservant leurs propriétés, sur toutes les fonctions en question. L'arithmétisation de l'analyse, dont WEIERSTRASS fut le promoteur, est ainsi complète.

Cette méthode situe WEIERSTRASS dans un courant de l'analyse opposé à celui dont faisait partie RIEMANN et pour qui les méthodes géométriques sont souveraines. LAMPE, élève de WEIERSTRASS, souligne ([63], 35) que pour WEIERSTRASS les théorèmes de l'analyse devaient être démontrés «par des méthodes de démonstration purement analytiques, sans y faire entrer la géométrie». Le parallélisme avec MÉRAY est ici frappant, car lui aussi voulait éviter dans les démonstrations de l'analyse tout emprunt à la géométrie ([34], 336).

Notons à ce propos la vigueur avec laquelle s'est élevé SOPHUS LIE contre les méthodes weierstrassiennes dans cette étonnante lettre inédite à DARBOUX, qui doit être de 1893 ([A IX]) et que nous avons découverte dans les Archives de l'Institut de France. LIE considère que c'est à cause du «point de vue exclusif de Weierstrass» qu'il n'y a pas eu en Allemagne une «école sérieuse» dans le domaine de la théorie des fonctions! De plus, LIE s'y réjouit d'avoir mis en lumière «les très grandes bêtises» que l'école weierstrassienne a dites sur les fondements de la géométrie. Tout en étant, à plusieurs égards, très excessive, la lettre de LIE est précieuse pour comprendre l'évolution des idées mathématiques depuis 1870 et, en particulier, ces deux grands courants que pour simplifier on pourrait appeler «arithmétique» et «géométrique», weierstrassien et riemannien. Dans cette lettre de LIE, même l'ombre de BISMARCK se profile, car si «l'année 1870 fut heureuse pour la politique allemande, elle fut fatale pour la mathématique allemande». Tout en admettant que la mathématique allemande en 1870 surpassait la mathématique française, il décelait dans les travaux des géomètres français, et en particulier dans ceux de JORDAN, les germes de la future renaissance de la mathématique française.

WEIERSTRASS, lui-même, exprimait sa crainte que Paris ne devienne «encore une fois le centre principal des mathématiques», comme en témoignent ses propos rapportés par son élève MITTAG-LEFFLER à HERMITE, dans une lettre inédite du 3 août 1882 ([A XI]).

POINCARÉ ([84], 7) caractérise de la façon suivante ces deux méthodes qui dominèrent l'analyse de la deuxième moitié du XIX$^{\text{ème}}$ siècle: «La méthode de Riemann est avant tout une méthode de découverte, celle de Weierstrass est avant tout une méthode de démonstration».

On peut dire que ce problème des tendances profondes des mathématiques est toujours à l'ordre du jour. Ainsi en témoigne la défense par RENÉ THOM ([102], 233) du «continu géométrique» et son attaque contre «les traditions axiomatiques et livresques» et contre les différentes théories des nombres réels qui reconstituent le continu à partir des entiers naturels. Si l'on peut être d'accord avec THOM pour constater qu'il y a là un problème important, on ne peut que regretter son manque de compréhension du développement historique de ce problème.

En 1857, RIEMANN avait publié son mémoire sur les fonctions abéliennes et fait connaître une nouvelle théorie des fonctions. WEIERSTRASS, qui depuis de longues années travaillait sur le même sujet, considère que la théorie riemannienne n'est pas satisfaisante quant à ses fondements et décide de construire une théorie purement «arithmétique». Il esquisse vers 1860 son modèle des nombres irrationnels, puis donne en 1863 le premier état de sa théorie et emploie le restant de sa vie à édifier sa théorie des fonctions qui provoquera la «révolution» weierstrassienne en analyse.

5. De quelques apports de Weierstrass en analyse

Dans ce qui précède, nous avons déjà mis en relief de nombreux apports de WEIERSTRASS en analyse. Il est toutefois intéressant de donner des précisions sur quelques points.

Disons d'abord que notre propos n'est pas de décrire toutes ses contributions à l'analyse. Ce travail reste à faire, comme d'ailleurs une étude d'ensemble de toute son œuvre mathématique. Et pour se rendre compte de l'importance de cette œuvre, il suffit de consulter l'Encyclopédie des sciences mathématiques, publiée au début de ce siècle et qui faisait le bilan du savoir mathématique à cette époque, pour y rencontrer le nom de WEIERSTRASS dans de nombreuses pages.

WEIERSTRASS s'était fixé comme but de créer une théorie rigoureuse et aussi complète que possible des fonctions abéliennes. Et, comme le note POINCARÉ ([84], 2), les instruments qu'il créait pour atteindre ce but «pouvaient servir à bien d'autres besognes; à droite et à gauche de la grande route qu'il suivait, il a ouvert bien des voies latérales et il s'y est engagé assez avant pour nous montrer où elles conduisaient». Mais, au fur et à mesure de ses découvertes, le développement et l'achèvement de sa théorie des fonctions prenait la première place dans ses préoccupations.

5.1. Théorème sur les facteurs primaires

Nous avons déjà signalé le mémoire de WEIERSTRASS de 1876 sur la théorie des fonctions uniformes ([107], 77—124). PICARD écrivait ([80], 173—174) que ce «mémoire, en faisant connaître à un public plus étendu les résultats développés depuis longtemps déjà dans l'enseignement du maître, a été le point de départ d'un très grand nombre de travaux sur la théorie des fonctions. CAUCHY et ses disciples français, en étudiant les fonctions analytiques uniformes, n'avaient pas pénétré bien profondément dans l'étude de ces points singuliers appelés «points singuliers essentiels», dont le point $z = 0$ pour la fonction $e^{1/z}$ donne l'exemple le plus simple. WEIERSTRASS, en approfondissant cette étude, a été conduit à un résultat qui est un des plus admirables théorèmes de l'analyse moderne, je veux parler de la décomposition des fonctions entières en facteurs primaires. D'après le théorème fondamental de l'algèbre, un polynôme peut être décomposé en un produit de facteurs linéaires; pour une fonction entière, c'est-à-dire pour une fonction uniforme continue dans tout le plan (telle que $\sin z$), ne peut-on chercher à obtenir aussi une décomposition en facteurs? CAUCHY avait obtenu sur ce sujet des résultats importants, mais sans les traiter dans toute sa généralité. Il était réservé à WEIERSTRASS de montrer qu'une fonction entière peut être décomposée en un produit d'un nombre généralement infini de facteurs primaires, chacun de ceux-ci étant le produit d'un facteur linéaire par une exponentielle de la forme $e^{P(z)}$, où $P(z)$ est un polynôme».

ROLF NEVANLINNA note ([4], 98—99) qu'on doit à WEIERSTRASS une théorie systématique des classes «élémentaires» des fonctions analytiques et en premier lieu des fonctions elliptiques et abéliennes. La construction systématique de ces fonctions, poursuit NEVANLINNA, a conduit WEIERSTRASS «à la création d'une théorie générale des *fonctions entières* et *méromorphes*», théorie dont la base est le théorème sur les facteurs primaires.

Dans une lettre à SCHWARZ ([A VII], 16. 12. 74), WEIERSTRASS souligne l'importance qu'il attachait au théorème sur la décomposition en facteurs primaires et nous apprenons qu'il venait de le découvrir (il avait alors soixante ans). Il écrit notamment que ce théorème lui était indispensable pour pouvoir élaborer sa théorie des fonctions uniformes, car, disait-il, il lui manquait la base de la théorie. « J'ai jusqu'à présent cherché la solution du problème d'une façon erronée. » Cette lettre montre aussi combien la pensée de WEIERSTRASS était orientée vers les théorèmes unificateurs de l'analyse.

5.2. La notion de convergence uniforme

Nous avons déjà vu qu'en 1838, GUDERMANN employait le terme de convergence uniforme. Cette notion jouait un rôle fondamental dans les recherches de WEIERSTRASS depuis 1842 ([106], 67—74) et dans ses cours à l'université de Berlin.

SEIDEL, élève de DIRICHLET, qui avait suivi, avec HEINE, les cours de JACOBI à Königsberg ([67], 27, 30), publiera en 1847 l'article «Sur les nouvelles propriétés des séries qui représentent des fonctions discontinues» (München Akad. Wissen. Abhandl. 51 (1847), 379—394), où il introduit la notion de convergence non uniforme (die ungleichmäßige Konvergenz), mais il n'a pas du tout exploité cette notion.

C'est grâce à WEIERSTRASS que cette notion fut utilisée systématiquement en analyse. A ce propos, nous avons le témoignage de HEINE qui écrit en 1869 ([45], 353) que jusqu'à cette époque on croyait qu'on pouvait intégrer terme à terme une série convergente «et c'est Monsieur Weierstrass qui, le premier, a remarqué que la démonstration de ce théorème exigeait que la série, entre les bornes de l'intégration, non seulement converge, mais qu'elle converge aussi uniformément».

Dans une étude extrêmement fine ([43]), G. H. HARDY examine les différentes définitions de la convergence uniforme données par STOKES, SEIDEL et WEIERSTRASS et il écrit que seul WEIERSTRASS «a pris pleinement conscience de son extrême importance comme idée fondamentale de l'analyse».

WEIERSTRASS, lui-même, écrit dans une lettre à SCHWARZ du 6 mars 1881 ([A VII]) que son mémoire sur les fonctions uniformes avait fait «sensation en France», ajoutant qu'on se rendait enfin compte de «l'importance qu'a la notion de convergence uniforme».

5.3. Fonction continue sans dérivée

A ce sujet, il est intéressant de relire le passage de l'article de SCHWARZ de 1873 qui est à l'origine des affirmations de certains historiens de mathématiques selon lesquelles WEIERSTRASS avait construit sa fonction continue sans dérivée en 1861. SCHWARZ dit ([99], 33—34) dans cet article en français, où il donnait l'exemple d'une fonction continue non dérivable (DARBOUX a montré ensuite que la fonction de SCHWARZ admettait des dérivées en certains points), que WEIERSTRASS dans son cours de 1861 à Gewerbeinstitut sur le calcul différentiel avait déclaré «qu'on doit considérer comme manquées, et cela sans exception, toutes les tentatives qui ont été faites pour établir, d'une manière générale, l'existence nécessaire de la dérivée de toute fonction continue à argument réel». Remarquons que SCHWARZ ne dit pas que WEIERSTRASS avait construit en 1861 une fonction continue sans dérivée, mais il exprime seulement le fait (largement répandu à cette époque à la suite des travaux de RIEMANN sur l'intégrale définie) que WEIERSTRASS considérait toutes les «démonstrations» de la dérivabilité d'une fonction continue quelconque comme inexactes.

WEIERSTRASS avait présenté son exemple de fonction continue sans dérivée en 1872 à l'Académie des Sciences de Berlin et il fut publié en 1875 par DU BOIS-REYMOND dans le Journal de CRELLE.

Dans une lettre à DU BOIS-REYMOND du 23 novembre 1873 ([109], 199—200), alors que ce dernier préparait son article où devait figurer pour la première fois l'exemple de WEIERSTRASS, celui-ci lui écrit que RIEMANN aurait donné en 1861 la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin n^2 x/n^2$ comme exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}$ et qui n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$. Demandant à DU BOIS-REYMOND de signaler ce fait, WEIERSTRASS écrit que RIEMANN n'a communiqué à personne sa démonstration, mais qu'il aurait indiqué qu'elle résultait de la théorie des fonctions elliptiques. Mais, WEIERSTRASS disait plus loin que l'on ne savait pas au juste si RIEMANN affirmait que sa fonction ne possédait de dérivée en aucun point de $\mathbb{R}$ ou seulement en certains points de $\mathbb{R}$. Il était facile, disait-il, de trouver des fonctions, «et j'en connais de telles depuis longtemps déjà», qui possèdent la propriété d'être dérivables aux points irrationnels, mais pas aux points rationnels.

Toutefois, personne jusqu'en 1970 n'a pu démontrer si la fonction de RIEMANN $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin n^2 x/n^2$ était ou non dérivable en certains points de $\mathbb{R}$. C'est JOSEPH GERVER qui a démontré que cette fonction admet une dérivée égale à $-\frac{1}{2}$ en tout point de la forme $x\pi$, où x est un nombre rationnel de la forme $(2p+1)/(2q+1)$, où p et q sont des entiers ([40], 33—34). GERVER dit dans son mémoire que l'affirmation de RIEMANN était inexacte, mais nous venons de voir, d'après la lettre de WEIERSTRASS à DU BOIS-REYMOND, que l'on ne sait pas si RIEMANN avait affirmé la non dérivabilité de cette fonction sur $\mathbb{R}$ ou seulement sur certains points de $\mathbb{R}$.

Cet exemple de WEIERSTRASS, qui a été aussi à l'origine de recherches sur la notion de courbe, est lié, comme WEIERSTRASS lui-même le précise ([107], 221—222), à ses travaux sur le comportement de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} b^n x^{a^n}$ sur la frontière de son disque de convergence. WEIERSTRASS s'est d'ailleurs toujours occupé des propriétés des fonctions réelles de la variable réelle et construisait des exemples, comme il disait, «piquants» de ses fonctions. Ainsi, il a donné le premier exemple de fonction monotone qui n'est pas dérivable sur un ensemble partout dense de $\mathbb{R}$, exemple publié par CANTOR ([21], 109). (HURWITZ note qu'«à la base de toutes les recherches» du mémoire de WEIERSTRASS de 1876 sur les fonctions uniformes se trouvent les théorèmes de CANTOR sur les ensembles de points et même que «les nombres transfinis de Cantor jouent un rôle important dans ces théorèmes» ([53], 94—95).)

Notons, à propos de l'exemple de la fonction continue sans dérivée, que WEIERSTRASS n'était pas aussi indifférent qu'on le dit aux questions de priorité. Dans une lettre à DU BOIS-REYMOND du 6 juin 1875 ([109], 211), il lui demande d'envoyer à GASTON DARBOUX un exemplaire du mémoire où DU BOIS-REYMOND avait publié l'exemple de la fonction sans dérivée de WEIERSTRASS, car DARBOUX venait de publier son article sur les fonctions discontinues ([31]) et dans lequel il donnait des exemples de telles fonctions.

DU BOIS-REYMOND a dû écrire immédiatement à DARBOUX, mais ce dernier, dans une lettre à HOUËL du 14 juin 1875 ([A X]), se borne à dire qu'il venait de recevoir une lettre de DU BOIS-REYMOND. «Il ne me dit pas grand chose de bon et me parle des fonctions qui n'ont pas de dérivée»!

Ainsi, avec la théorie de WEIERSTRASS des nombres irrationnels vers 1863 et la construction de sa fonction continue non dérivable en 1872, on commence à voir avec plus de précision l'évolution de l'analyse à cette époque.

5.4. La notion de limite et la topologie générale

Ce sujet a été aussi étudié dans les pages précédentes, mais il convient d'en souligner encore quelques points et de faire ressortir l'apport important de WEIERSTRASS à la création de la topologie générale.

En dehors du fait que l'utilisation systématique de la notion de convergence uniforme ne faisait qu'accélérer l'introduction de nouvelles fonctions en analyse, définies par des passage à la limite, l'insistance de WEIERSTRASS sur les notions de borne supérieure et de borne inférieure (et surtout sur les notions de borne supérieure et de borne inférieure atteintes) et l'usage constant de la notion de point d'accumulation ont été à l'origine de l'élargissement de la notion de limite et des progrès qui ont conduit à la création de la topologie générale.

Un autre outil important de la topologie est le théorème de WEIERSTRASS sur l'approximation des fonctions continues par des polynômes ([108], 1—37). BUTZER et GÖRLICH ([4], 339—340) considèrent que les théorèmes de WEIERSTRASS sur l'approximation des fonctions continues par des polynômes et des fonctions continues périodiques par des polynômes trigonométriques ont une importance telle «qu'il n'est pas exagéré de désigner ces théorèmes comme des pierres angulaires de l'analyse moderne».

Amorcée par les travaux de RIEMANN sur l'intégration, progressant grâce à toutes les notions introduites et utilisées par WEIERSTRASS dans sa théorie des fonctions, développée par les travaux de GEORG CANTOR, l'étude des différents sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et de leur rareté, ainsi que la détermination des fonctions sur un ensemble E, lorsqu'elles sont connues sur un sous-ensemble de E, seront parmi les points importants de l'analyse de la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle.

MENGER écrit ([4], 609) que «l'introduction par Weierstrass des fonctions analytiques comme ensembles de séries entières» fut, pendant plusieurs décennies, la seule définition de fonction «purement ensembliste». Jusqu'à ce que, vers les années trente du XX$^{\text{ème}}$ siècle, on introduise la définition des fonctions comme ensemble de couples de nombres. «Car», poursuit MENGER, «les vieilles définitions de Dirichlet et d'autres, malgré leur très grande fécondité, ne peuvent pas être caractérisées comme ensemblistes.»

De plus, en introduisant les notions de voisinage et de connexité, en définissant les nombres réels par sa théorie des agrégats dont la notion est sous-tendue par des concepts ensemblistes, WEIERSTRASS a été l'un de ceux qui ont ouvert la voie à la topologie générale.

6. Sur l'héritage de Weierstrass

Ce qui précède montre combien WEIERSTRASS a contribué à la création de l'analyse moderne par ses propres travaux et par les recherches qu'ils ont suscitées.

A ce propos, WALTER THIMM ([4], 123) signale que les idées de WEIERSTRASS, vieilles d'un siècle, «furent efficaces et fécondes jusqu'à l'époque la plus récente». En effet, en 1869, considérant les fonctions abéliennes, c'est-à-dire les fonctions méromorphes $2p$-périodiques de p variables, WEIERSTRASS énonce son théorème fondamental qu'entre $p+1$ fonctions abéliennes de même période il existe une relation algébrique. Il en donne seulement une ébauche de démonstration, mais pour résoudre ce problème, il a fallu attendre d'avoir «des connaissances extrêmement importantes de la théorie des fonctions de plusieurs variables».

Dans de nombreuses recherches sur la théorie des nombres, les corps valués non archimédiens, en particulier les corps p-adiques, jouent un rôle important. GRAUERT et REMMERT ([4], 393) indiquent que, pour construire une théorie des fonctions analytiques sur de tels corps qui, au point de vue topologique, sont totalement non connexes, on ne dispose plus de l'intégrale de la théorie classique et l'on doit utiliser exclusivement les méthodes des séries entières. Ainsi, ici encore, les idées de WEIERSTRASS sont fécondes.

HILBERT considérait ses propres travaux sur les fondements des mathématiques «comme une continuation directe de l'œuvre de Weierstrass» ([4], 70). Par ailleurs, il écrit ([50]): «Weierstrass, au moyen de sa critique maniée avec une pénétration magistrale, a donné une base solide à l'analyse mathématique. En élucidant entre autres les notions de minimum, de fonction, de dérivée, il a écarté les objections que soulevait encore le calcul infinitésimal, il a nettoyé celui-ci de toutes les idées confuses sur l'infiniment grand et l'infiniment petit, et a définitivement surmonté les difficultés qui proviennent des notions mêmes d'infiniment grand et d'infiniment petit. Si aujourd'hui, grâce aux méthodes qui reposent sur la notion de nombre irrationnel, ou plus généralement sur celle de limite, il règne en analyse une harmonie et une certitude parfaites, et si, dans les questions les plus compliquées de la théorie des équations différentielles et intégrales, malgré les combinaisons les plus hardies et les plus diverses de toutes les formes de passage à la limite, tous les résultats se trouvent d'accord, nous le devons essentiellement à l'activité scientifique de Weierstrass.»

WEIERSTRASS donne aussi l'exemple par son style mathématique. Le style mathématique, d'après C. CHEVALLEY, «subit, de temps à autre, sous l'influence de personnalités mathématiques puissantes, des révolutions qui infléchissent l'écriture, et donc la pensée, pour les périodes qui suivent». Ce style de WEIERSTRASS est le «style des ε», caractérisé par le fait que «les opérations du calcul infinitésimal redeviennent des opérations du type algébrique» ([28], 375, 382). CHEVALLEY note que le style de HILBERT est caractérisé par l'axiomatisation des théories mathématiques. Cet article de CHEVALLEY de 1935 n'exprime-t-il pas aussi l'ambition de sa génération de créer son propre style mathématique, ce qui a donné naissance au style de BOURBAKI ?

Mais ce qui nous paraît exprimer la véritable grandeur du génie mathématique de WEIERSTRASS, c'est qu'il confirme de façon éclatante la loi fondamentale du développement de la science mathématique: pour résoudre les problèmes légués par les générations précédentes, il faut construire de nouveaux outils qui ouvrent des voies entièrement nouvelles.

Appendice I[1]

Karl Weierstrass

Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen[2]

(Sommer-Semester 1878) Rédigé par Adolf HURWITZ (Bibliothek d. Eidg. Technischen Hochschule Zürich)

(Extraits)

(1)

1. Vortrag, 1. Kapitel, 1. Definition der Zahl

Der Begriff der Zahl entsteht durch gedankliches Zusammenfassen von Dingen, an denen man ein gemeinschaftliches Merkmal entdeckt hat, speziell von gedanklich identischen Dingen. Dieses Ding bezeichnen wir als die Einheit der Zahl.

Complexe Zahl

Unter einer complexen Zahl verstehen wir das Aggregat aus Zahlen von verschiedenen Einheiten (a RG, b Gr, c Pf)[3]. Diese verschiedenen Einheiten nennen wir die Elemente der complexen Zahl.

Addition

Unter der Summe zweier Zahlen a und b, welche gewöhnliche oder complexe Zahlen sein können, verstehen wir die Zahl, die durch begriffliches Verknüpfen der Einheiten der Zahl b mit denen der Zahl a entsteht.

Gleichheit

Wir nennen nun 2 Dinge a und b einander gleich wenn unter ihnen eine Verknüpfung, Beziehung, sie sei durch $a=b$ bezeichnet, stattfindet, daß auch $b=a$ ist, und daß wenn $a=b$ und $b=c$ auch $a=c$ ist. (Z. B. könnte man 2 Strecken im Raum einander gleich nennen, wenn sie parallel und nach derselben Seite gerichtet und zur Deckung gebracht werden können). 2 gewöhnliche Zahlen a und b können wir nun einander gleich nennen, wenn, indem wir einer Einheit von a eine Einheit von b zuordnen, einer andern Einheit von a eine andere von b und so fort, jede Einheit von a

(2)

eine entsprechende von b findet, also keine Einheit von a bei jener Zuordnung übrig bleibt. (Diese Definition stimmt offenbar mit der obigen allgemeinen De-

---

[1] Je remercie Hanno MARTIN, de Goethe-Institut de Paris, d'avoir bien voulu relire tous les textes de langue allemande et d'en avoir corrigé des erreurs de transcription.

[2] Dans une lettre de Berlin adressée le 24 octobre 1878 à Felix KLEIN (Cod. Ms. Klein 9, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Göttingen), Adolf HURWITZ promet de lui montrer sa rédaction du cours de WEIERSTRASS sur les fonctions analytiques qu'il était en train de rédiger, non sans quelques difficultés.

WEIERSTRASS lui-même appréciait les rédactions de HURWITZ et les utilisait. Ce dernier écrit le 18 juillet 1885 à KLEIN qu'il espère retrouver, lors de son passage à Berlin, sa rédaction d'un cours de WEIERSTRASS qu'il avait prêtée à WEIERSTRASS et qu'il escomptait que ce dernier ne l'aurait pas égarée, comme cela s'était déjà produit avec une autre rédaction.

[3] WEIERSTRASS donne comme exemples d'unités: Reichsgulden, Groschen, Pfennig.

finition der Gleichheit überein.) Ist letzteres der Fall, so nennen wir $a > b$ (größer als) oder $b < a$ (kleiner als).

Gesetze der Addition

Dieser Definition gemäß können wir über die Addition folgende Sätze aufstellen:

$$1)\ a+b=b+a \qquad 2)\ (a+b)+c=(a+c)+b.$$

Aus diesen beiden Gesetzen folgt dann, daß die Summe von beliebig vielen Zahlen unabhängig ist von der Reihenfolge in welcher die Addition vorgenommen wird. Denn es ist

$$[(a+b+c+d)+e]+f=[(a+b+c+d)+f]+e$$

nach dem zweiten Gesetze, und $(a+b+c)+d+e+f=(a+b+d)+c+e+f$ ebenfalls nach 2) und $a+b+c+d+e+f=b+a+c+d+e+f$ nach 1); daher ist es erlaubt in einer Summe irgend zwei aufeinanderfolgende Zahlen zu vertauschen. Durch sukzessive Vertauschung von 2 aufeinanderfolgenden Zahlen, kann aber jede Zahl der Summe an jeden beliebigen Platz geschafft werden.

Würden wir 2 complexe Zahlen nur dann einander gleich nennen, wenn ein beliebiges Element in der einen ebenso oft vorkommt als in der andern, so würde dies

(3)

zu beschränkt sein, da zwischen den Elementen einer complexen Zahl Beziehungen vorkommen können.

Ist c eine (gewöhnliche) Zahl, so läßt sich dieselbe als Summe von einer gegebenen Zahl a und einer gesuchten Zahl b ansehen. Man bezeichnet dann b, als aus c und a entstanden, durch $(c-a)$. $(c-a)$ ist also die Zahl, welche zu a addiert zum Resultat c gibt. Das Symbol $(c-a)$ hat zunächst nur dann Bedeutung, wenn $c > a$ ist. Im entgegengesetzten Falle kommen wir auf etwas Imaginäres (im ursprünglichen Sinne des Wortes).

Multiplikation

Unter ab verstehen wir diejenige Zahl, welche, wenn b als Einheit aufgefaßt wird, aus a solchen Einheiten (b) besteht. Die Operation, wie aus a und b die Zahl ab gefunden wird, heißt Multiplikation.

Aus dieser Definition folgt:

$$ab=ba;$$

$$(ab)c=c(ac)b;$$

$$(a+b)c=ac+bc.$$

Es liegt nun die Frage nahe, ob eine gegebene Zahl c sich durch Multiplikation einer gegebenen Zahl a mit einer gesuchten b herstellen läßt. Man bezeichnet die Zahl b durch c/a. Dieses Symbol hat aber offenbar nur dann eine reale Bedeutung, wenn c ein vielfaches von

(4)

a ist, d.h. in dem Zahlengebiet vorkommend, welches die Zahl a zur Einheit hat. Im entgegengesetzten Falle hat c/a keinen Sinn. Wir werden dadurch zur Einführung neuer Elemente geführt.

Genaue Teile der Einheit

Wir definieren nämlich $1/a$ als ein Element von dem a auf das Hauptelement, die Einheit, gehen. $1/a$ wird ein genauer Teil der Einheit genannt. Wir wollen nun von jetzt an unter Zahlgröße, eine jede complexe Zahl verstehen, deren Elemente die Einheit und deren genaue Teile, es gibt daran unendlich viele, sind.

2. Vortrag

Genaue Teile der genauen Teile der Einheit, sind ebenfalls genaue Teile der Einheit und kommen daher auch bei Zahlgrößen als Elemente vor. Z.B. der genaue 4^{te} Teil des genauen 5^{ten} Teils der Einheit ist der genau $(4\cdot 5)^{\text{te}}$ Teil der Einheit. Nämlich $\frac{1}{4\cdot 5}$ bedeutet nach unserer Definition ein Element von den $4\cdot 5$ die Einheit ergeben

(5)

oder $\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{4\cdot 5}$ ($4\cdot 5$ solcher Summanden) $=1$ oder $\left(\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 5}\right)$ (5 solcher Klammern) $=1$.

Anderseits ist aber $\frac{1}{5}$ das Element von dem 5 die Einheit äquivalent sind. Also muß $\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 5}$ $\frac{1}{5}$ äquivalent sein, oder $\frac{1}{4\cdot 5}$ der 4^{te} genaue Teil von $\frac{1}{5}$ sein. Allgemein $\frac{1}{m\cdot n}$ der m^{te} genaue Teil von $\frac{1}{n}$ sein und auch umgekehrt der n^{te} genaue Teil von $\frac{1}{m}$ sein.

Dies vorausgeschickt, können wir nun an einer Zahlgröße folgende Transformationen vornehmen:

1) Irgend n Elemente $\frac{1}{n}$ können durch die Haupteinheit ersetzt werden.

2) Jedes Element kann durch seine genauen Teile ersetzt werden. Z. B. 1 durch $n\cdot\frac{1}{n}$, $\frac{1}{a}$ durch $b\cdot\frac{1}{a\cdot b}$ etc.

Wir wollen nun 2 Zahlgrößen a und b dann einander gleich nennen, wenn a durch die angegebenen Transformationen in eine andere a' transformiert werden kann, welche dieselben Elemente und ebenso oft enthält wie b. Läßt sich aber a durch Transformationen in a', a'' überführen wo a' dieselben Elemente gleich oft enthält wie b, a'' aber eine andere Zahlgröße noch darstellt, so nennen wir $a > b$ oder $b < a$.

(6)

Wie die Vergleichung der Zahlgrößen a und b durch Transformationen praktisch ausgeführt wird, lehren die Elemente der Zahlentheorie. Sind α und β zwei gewöhnliche Zahlen, welche also nur die Einheit zum Element haben und die wir ganze Zahlen nennen wollen, so gibt es eine dritte ganze Zahl γ, welche ein Teiler von beiden ist und welche außerdem die größte unter allen Zahlen ist, die Teiler sowohl von α als von β sind. Die Zahl γ kann natürlich die Einheit auch selbst sein, wenn nämlich α und β sonst kein gemeinschaftliches Maß haben. Dies jedoch nur nebenbei. Für unsere Zwecke der Vergleichung der Zahlgrößen (gewöhnliche gemischte Zahlen genannt) a und b ist das Folgende, das ebenfalls in den Elementen der Zahlentheorie bewiesen wird, ungleich wichtiger.

Es existieren nämlich für irgendwelche ganze Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ immer gemeinschaftliche Vielfache. D.h. Zahlen c, welche ein Vielfaches von jeder der Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ sind und besonders eine Zahl c_1, deren sämtliche Vielfache die Zahlen c sind. c_1 heißt das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen $a_1, \ldots, a_n$. Sind nun die Zahlen a und b zusammengesetzt aus den Elementen $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots$; $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots$ resp. und ist c das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der

(7)

Zahlen $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots,$ so daß $\alpha_1 a_1 = c,\ \alpha_2 a_2 = c, \ldots,\ \beta_1 b_1 = c,\ \beta_2 b_2 = c, \ldots,$ so kann statt jedes Elementes $\frac{1}{a_n}$,

$$\alpha_n \frac{1}{\alpha_n \cdot a_n} \text{ Elemente} = \alpha_n \text{ Elemente } \frac{1}{c}$$

gesetzt werden, so daß die Zahlgrößen a und b in andere transformiert werden, welche nur das Element $1/c$ besitzen. Gehen so die Zahlgrößen a und b in gleich viel Elemente $1/c$ über, so sind sie (nach Definition) gleich, im entgegengesetzten Falle ungleich. Man kann jedoch bei der Transformation der Zahlen a und b auch jedes Vielfache $p \cdot c$ von c als gemeinschaftliches Vielfache von $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ ansehen und es ist zu zeigen, daß diese verschiedene Wahl das Vielfachen keinen Einfluß auf den Vergleich von a und b ausübt. In der Tat ging die Zahl a in m Elemente $1/c$, b in n Elemente $1/c$ über, so geht sie in $2m$ Elemente $\frac{1}{2c}$ resp. $2n$ Elemente $\frac{1}{2c}$ über, in $p \cdot m$ Elemente $\frac{1}{p \cdot c}$ resp. $p \cdot n$ Elemente $\frac{1}{p \cdot c}$ über, woraus die Unabhängigkeit der Wahl des gem. Vielfachen auf das Resultat der Vergleichung folgt.

Nach der Definition von $a > b$ geht eine Zahlgröße, welche ich dadurch verändere, daß ich irgend ein Element zu ihr hinzufüge, in eine größere Zahlgröße über.

(8)

Addition

Definition der Addition von Zahlgrößen (gemischten Zahlen). Setzen wir zu den Elementen einer Zahlgröße a ein Element von b hinzu, dann ein zweites Element von b und so fort bis alle Elemente von b erschöpft sind, so nennen wir das schließliche Resultat, welches offenbar wieder eine Zahlgröße ist, die Summe von a und b: $a+b$. Dann ist $a+b=b+a$ (denn ein Element, das in a α-mal in b β-mal vorkommt, kommt nach Definition in $a+b$, $(\alpha+\beta)$-mal vor und in $b+a$, $(\beta+\alpha)$-mal). Ferner $(a+b)+c=(a+c)+b$, woraus in Verbindung mit $a+b= b+a$ folgt, daß die Reihenfolge in welcher beliebig viele Zahlgrößen addiert werden auf das Endresultat ohne Einfluß ist. Die Addition ist eine eindeutige Operation. Wird nämlich an Stelle von b in $a+b$, eine andere Zahl $b_1 > b$ gesetzt, so wird auch die Summe eine andere. Aus $b_1 > b$ folgt nämlich, daß sich b in b' und b_1 in $b'+b''$ transformieren läßt. Also auch $a+b_1 > a+b$.

Multiplikation

Definition der Multiplikation von Zahlgrößen. Wir wollen nun zunächst untersuchen, ob aus 2 beliebig gewöhnlichen ganzen Zahlen a und b eine Zahl, wir wollen sie durch ab bezeichnen, sich finden läßt, wenn die Operation, welche durch ab angedeutet ist, den folgenden Gesetzen genügen soll:

(9)

I) $ab = ba$;
II) $(ab)c = (ac)b$;
III) $a(b+c) = ab + ac$.

Aus III) und I) ergibt sich leicht:

$$\text{III)}' \quad (a+b+c+\cdots)(a'+b'+c'+\cdots) = aa'+ab'+ac'+\cdots+ba'+bb'+bc' + \cdots + ca'+cb'+cc'+\cdots$$

Aus III)' ergibt sich, daß ab sich als Summe von einer gewissen Anzahl von Symbolen $1 \cdot 1$ darstellen läßt. Diesem Symbole selbst kann aber noch eine willkürliche Bedeutung beigelegt werden, da es sich nicht weiter spalten läßt. Legen wir ihm den Wert 1 (die Einheit) bei, so ist jetzt die durch ab angedeutete Operation vollkommen bestimmt. Wenn wir nun die Multiplikation auf complexe Zahlen ausdehnen wollen, so können wir das Produkt ab zweier complexer Zahlen definieren als eine dritte Zahl und so daß für die Operation ab die Gesetze I), II), III) bestehen. Dann müssen wir aber nach Obigen noch definieren, was wir unter dem Produkt zweier Elemente verstehen wollen.

Bei unseren Zahlgrößen (gemischte Zahlen) müssen wir also sagen, was wir unter $\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}$ verstehen wollen. Diese Bedeutung ist aber nicht willkürlich, wenn wir festsetzen, daß Einheit mal Einheit wieder die Einheit sein sollen. Denn alsdann ist:

$$\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \cdots m \text{ Summanden}\right)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots n \text{ Summanden}\right) = 1 \tag{10}$$

oder da Gesetz III), also auch III)' bestehen soll,

$$\left(\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n} + \cdots\right) = 1.$$

In der Klammer stehen aber $m \cdot n$ Glieder $\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}$. Diese sind also der Einheit äquivalent, oder $\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}$ ist der $(m \cdot n)^{\text{te}}$ genaue Teil der Einheit, das heißt $= \frac{1}{m \cdot n}$.

Sind nun a und b zwei beliebige Zahlgrößen, die aus den Elementen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$ zusammengesetzt sind, so ist ihre Multiplikation nach den Gesetzen I)—III) und der Bedeutung von $\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}$ jetzt ausführbar. Wir haben nun zu beweisen, daß auch wirklich ein solches Produkt den Gesetzen I), II), III) genügt.

Bezeichnet α ein Element von a, β ein solches von b, so ist $ab = \sum \alpha\beta$, $ba = \sum \beta\alpha$ und da nun für Elemente α, β das Gesetz $\alpha\beta = \beta\alpha$ rein aus der Definition von $\alpha\beta$ entspringt, gültig ist, so ist auch I) $ab = ba$; $(ab)c = \sum \alpha\beta\gamma$, $acb = \sum \alpha\gamma\beta$, also da $\alpha\beta\gamma = \alpha\gamma\beta$ auch $abc = acb$(II) $a(b+c) = \sum \alpha(\sum \beta + \sum \gamma) = \sum \alpha\beta + \sum \alpha\gamma = ab + ac$.

(11)

Zahlen aus unendlich vielen Elementen

Zahlgrößen aus unendlich vielen Elementen gebildet. Aus einer Einheit und deren genauen Teilen lassen sich nicht nur solche complexe Zahlen bilden, welche eine endliche Anzahl von Elementen haben, sondern auch solche mit unzählig vielen Elementen, denn es gibt unzählig viele genaue Teile der Einheit. Damit man eine genaue Vorstellung von solchen Zahlgrößen mit unendlich vielen Elementen haben kann, ist es erforderlich, daß diese Elemente nach einem bestimmten Gesetze aus dem bisherigen Zahlengebiete (Einheit und genaue Teile derselben) ausgewählt seien. Zum Beispiel $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 3\cdot 3}+\cdots$ ist eine solche Zahlengröße. Auf alle diese neuen Zahlgrößen lassen sich die Transformationen 1 und 2 (p. 5) anwenden; wir würden aber nicht damit ausreichen 2 Zahlgrößen nur dann einander gleich zu nennen, wenn beide sich in ein und dieselbe dritte transformieren lassen, denn eine solche Zahlgröße von unendlich vielen Elementen kann im allgemeinen nicht auf eine Form gebracht werden, welche nur ein Element enthielt (unendlich viele Zahlen haben kein endliches gemeinschaftliches Vielfache im allgemeinen).

Nennen wir nun a' dann einen Bestandteil von a, wenn a' in a'' transformiert werden kann, so daß sämtliche Elemente von a'' ebenso oft in a vorkommen als in a'' und a außerdem noch andere Elemente oder dieselben in größerer Anzahl enthält, als a'', so können wir jetzt die Definition von Gleichheit zweier Zahlgrößen, zu diesen rechnen wir jetzt die gewöhnlichen ganzen Zahlen, die Zahlen mit endliche Anzahl von Elementen, die mit unendlich vielen Elementen folgendermaßen

(12)

geben: „Wir nennen zwei Zahlengrößen a und b *gleich*, wenn ein *jeder* Bestandteil von a durch Transformation zu einem von b gemacht werden kann und umgekehrt jeder Bestandteil von b zu einem von a.“ Wir nennen $b > a$, wenn ein jeder Bestandteil von a in einem von b transformiert werden kann, nicht aber auch umgekehrt.

3. Vorlesung

(Nur dann heißt a' Bestandteil einer Zahl a mit unendlich vielen Elementen, wenn a' nur eine *endliche* Anzahl der Elemente von a enthält.)

Die obige Definition ist mit den früher gegebenen im Einklang (Mittelst ihr können wir oft die Summen von unendlichen Reihen finden). Zum Beispiel es ist

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{1\cdot 2}=1,$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3},$$

$$\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n},$$

I) $$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{n+1}=1$$

für jedes n. Hat man nun die Zahl

$$a \equiv \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots,$$

so möge c ein beliebiger Bestandteil derselben sein. Das höchste Element von a, das in c enthalten ist, sei $\frac{1}{r(r+1)}$, dann ist offenbar

$$c \leqq \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{r(r+1)},$$

also nach I) $c < 1$.

Jeder Bestandteil c von a ist also auch ein Bestandteil von 1. Nehmen wir nun an c' sei eine in 1 enthaltene Zahlgröße, also $c' < 1$, so daß $(c', c'') = 1$, dann ist nach I)

(13)

auch

$$(c', c'') = \frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{r(r+1)} + \frac{1}{r+1}.$$

Nun kann r genügend groß gewählt werden, damit $c'' > \frac{1}{r+1}$ wird. Dann ist auch $c' < \frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{r(r+1)}$. Also ist c' auch in a enthalten. a ist daher $= 1$, also $1 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots$.

Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}, \\
\frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n(n+1)^2}, \\
\frac{1}{n(n+1)^2} &= \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{n(n+1)^3}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
\frac{1}{n(n+1)^{m-1}} &= \frac{1}{(n+1)^m} + \frac{1}{n(n+1)^m}, \\
\hline
\frac{1}{n} &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^m} + \frac{1}{n(n+1)^m}.
\end{aligned}$$

Zum Beispiel $(n = 1)$:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m}.$$

Setzen wir nun $b \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$ ad inf., so wollen wir zeigen, daß jede Zahl, die für b Bestandteil ist, es auch für a ist und umgekehrt. Ist c Bestandteil von b, so ist $c \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^m}$ (1). Es ist aber immer

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m} = \frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{r(r+1)} + \frac{1}{r+1}.$$

Wir können nun r so wählen, daß $\frac{1}{r+1} > \frac{1}{2^m}$ wird und folglich aus (1) folgt: $c \leqq \frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{r(r+1)}$. Umgekehrt kann gezeigt werden, daß jeder Bestandteil von a auch Bestandteil für b ist, so daß $a = b$ ist.

Später werden andere Methoden entwickelt werden, um die Gleichheit von Zahlen mit unendlich vielen Elementen

(14)

nachzuweisen.

(Man ist zur Erweiterung des Zahlengebietes immer dann gekommen, wenn man auf eine unmögliche Operation kam. Zum Beispiel bei Quadratwurzeln. Bei letzteren hatte man einen bestimmten Algorithmus, um bei solchen Wurzeln die einen (rationalen) Sinn hatten, die Zahl wirklich zu finden. Man wandte denselben auch dann noch an, wenn die Wurzel nicht „aufging" und erhielt dann einen sich ins Unendliche fortsetzenden Dezimalbruch. Definiert war dadurch zum Beispiel $\sqrt{2}$ jedenfalls, indem man durch besagten Algorithmus für jede Stelle (Dezimal-) *eine* bestimmte Zahl findet. Danach konnte man sagen: es gibt freilich keine rationale Zahl, die mit sich selbst multipliziert 2 ergibt, aber man kann doch eine Reihe von rationalen Zahlen aufstellen, von denen jede spätere dieser Eingenschaft näherkommt, als eine frühere. Dieses läßt sich auch für Wurzeln einer Gleichung sagen.)

Wir sagten nun $b > a$, wenn es eine Zahl c gibt, die wohl von b, nicht aber auch von a Bestandteil ist. Wenn nun c' eine Zahl ist, die in einer der Zahlen a, b enthalten ist, in der andern aber nicht, so ist nachzuweisen, daß sie *nur* in b enthalten sein kann. (Sonst hätte unsere Definition keinen Sinn.) 1) Es sei $c' > c$. Dann kann c' nicht in a enthalten sein, da ja schon c nicht in a enthalten ist; c' muß also in b enthalten sein. 2) Es sei $c' < c$. Daraus folgt: c' ist

(15)

in b enthalten (denn c ist schon in b enthalten). Wäre c' *auch* in a enthalten, so würde das der Voraussetzung widersprechen, daß nämlich c' nur in einer von beiden Zahlen a und b enthalten sein soll.

Man zeigt leicht, daß aus der Definition der Gleichheit die Gesetze sich als richtig erweisen: Wenn $a = b$ auch $b = a$ und wenn $\left.\begin{matrix} a = b \\ b = c \end{matrix}\right\}$ auch $a = c$. Ebenso zeigt man leicht wenn $\left.\begin{matrix} a > b \\ b > c \end{matrix}\right\}$ auch $a > c$.

Endliche und unendliche große Zahlen. „Von einer Zahlgröße a wollen wir sagen, sie habe einen endlichen Wert, wenn es Größen c gibt, die aus einer endlichen Anzahl von Elementen bestehend, größer sind als a".

Dies kann dahin vereinfacht werden, daß es hinreichend ist, ein Vielfaches der Einheit zu finden, das $> a$ ist. Denn setzt man an Stelle jedes Elementes einer Zahl c, die Einheit, so ist die resultierende Zahl $> c$, also auch $> a$, wenn $c > a$ war.

„Wenn im Gegenteil jede Zahl c, die aus einer endlichen Zahl von Elementen zusammengesetzt ist, Bestandteil der Zahl a ist, so wollen wir a unendlich groß nennen".

Ist es möglich 2 unendlich große Zahlen a und b miteinander zu vergleichen? Nach der Definition ist jede eine endliche Anzahl von Elementen enthaltende Zahl, sowohl von a als auch von b Bestandteil. Es ist also $a = b$ zu setzen. Es ist aber unmöglich $a \gtrless b$ nach den von uns gegebenen Definitionen.

(16)

Mit unendlich großen Zahlen läßt sich daher nicht rechnen. Es handelt sich daher im Folgenden immer um endliche Zahlen.

Addition

Definition der Addition von Zahlen mit unendlich vielen Elementen ist dieselbe wie für ganze Zahlen und es gelten auch für sie die Gesetze der Addition. (Freilich nur für eine endliche Anzahl von Summanden.)

Multiplikation

„Um eine Zahl a mit einer andern b zu multiplizieren muß man jedes Element von a mit jedem Element von b multiplizieren und die Summe dieser einzelnen Produkte bilden". Es ist nun nachzuweisen, daß das Produkt $a \cdot b$ einen eindeutigen ganz bestimmten Wert hat, und daß es einen endlichen Wert hat, wenn a und b endliche Werte haben. a möge die Elemente $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, b die Elemente $\alpha', \beta', \gamma' \ldots$ haben. $\frac{1}{r}$ sei irgendein Element und untersuchen wir, wie oft es im Produkt ab vorkommen kann. Offenbar dann, wenn $\frac{1}{r_1}$ ein Element von a, $\frac{1}{r_2}$ eines von b ist und $\frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}$. Das Element mit dem Nenner r_1 kommt aber in a nur in endlicher Anzahl vor; ebenso das Element $\frac{1}{r_2}$ in b und außerdem läßt sich r nur endlich oft in 2 Faktoren r_1 und r_2 spalten, so daß also genau bestimmt werden kann, wie oft ein jedes Element $\frac{1}{r}$ in ab vorkommt. Das Produkt ab hat also *einen* bestimmten

(17)

Wert. Wir wollen nun überdies zeigen, daß ab einen endlichen Wert besitzt, wenn a und b endlich sind.

ab ist endlich, wenn wir eine aus einer endlichen Anzahl von Elementen zusammengesetzte Zahl finden können, die $> ab$ ist.

Nun gibt es aber eine Zahl a', die eine endliche Anzahl von Elementen hat, und größer ist als jede aus den Elementen von a zusammengesetzte Zahl, analog eine Zahl b' für b. Greifen wir also aus dem Produkte ab eine beliebige Anzahl Glieder heraus, von denen keines von a ein höheres Element als α_r und von b als α'_s enthält (wir denken uns die Elemente von a und b geordnet, so daß die von a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \ldots$, von b $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_s, \ldots$ sind) so ist dieser herausgegriffene Bestandteil c von ab kleiner als (oder $=$) $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r)$ $(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \cdots + \alpha'_s)$ und also da $a'b' > (\alpha_1 + \cdots + \alpha_r)$ $(\alpha'_1 + \cdots + \alpha'_s)$ auch $a'b' > c$. $a'b'$ ist also ein Produkt, welches größer ist, als jeder beliebige Bestandteil von ab, also größer als ab selbst. $a'b'$ ist aber eine aus einer endlichen Anzahl von Elementen zusammengesetzten Zahl, also ist ab endlich.

Daß nun auch für Zahlen a, b, c die unendlich viele Elementen enthalten, die Sätze gelten $ab = ba$, $abc = acb$, $a(b+c) = ab + ac$ ist leicht zu zeigen.

„Wenn $b' > b$ ist, so ist auch $ab' > ab$". Aus $b' > b$ folgt, daß es eine Zahl c, aus endlich vielen Elementen zusammengesetzt, gibt, die in b' nicht aber in b enthalten ist, $b' = (c, c')$; ist nun $c' = (c'', c''')$, wo c'' wieder eine endliche Anzahl von Elementen enthält, so ist $b' > c + c''$ und $c + c'' > b$,

(18)

und folglich $ab' > a(c + c'')$, $a(c + c'') > ab$, also schließlich $ab' > ab$ q.e.d.[1].

Summen aus unendlich vielen Zahlen

Gehen wir jetzt dazu über, Summen mit unendlich vielen Summanden zu betrachten! Die letzten Zahlgrößen waren schon solche Summen (von unendlich vielen Elementen). Damit eine solche Summe einen endlichen Wert habe ist vor allem nötig, daß kein Element unendlich oft vorkommt.

4. Vorlesung

„Damit eine Reihe von unendlich vielen Zahlen summierbar und einen endlichen Wert zur Summe habe, ist notwendig und hinreichend, daß sich die Existenz einer Zahlgröße nachweisen läßt, welche größer ist als jede aus beliebig vielen der Zahlen der Reihe gebildete Summe". Daß dies möglich sei, ist aus folgendem Beispiel ersichtlich:

$$\frac{1}{a} \text{ war} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{(a+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(a+1)^n} + \frac{1}{a(a+1)^n}\,.$$

Bilden wir nun die Reihe der Zahlen:

$$b_1 \cdot \frac{1}{a+1},\; b_2 \cdot \frac{1}{(a+1)^2},\; \ldots,\; b_n \cdot \frac{1}{(a+1)^n},\; \ldots,$$

wo $b_p < b$, so können wir leicht zeigen, daß man für diese Reihe von Zahlen eine Zahlgröße angegeben werden kann, die größer ist als jede aus beliebigen und beliebig vielen Zahlen der Reihe gebildete Zahl. Nämlich ist $b_r \frac{1}{(a+1)^r}$ die der Stelle r nach höchste unter beliebig vielen der Zahlen der Reihe herausgegriffenen und dann summierten Glieder, so ist letztere Summe

$$\leqq b_1 \cdot \frac{1}{a+1} + b_2 \frac{1}{(a+1)^2} + \cdots + b_r \frac{1}{(a+1)^r} < b\left(\frac{1}{a+1} + \cdots + \frac{1}{(a+1)^r}\right)$$

(19)

$$< b \cdot \frac{1}{a}\,.$$

$b\frac{1}{a}$ ist also eine Zahlgröße, größer als eine jede Summe, die aus Gliedern der betrachteten Zahlreihe zusammengesetzt ist.

Wir wollen nun nachweisen, daß die in unserem Satze aufgestellte Bedingung für die Endlichkeit der Summe der Zahlen einer Zahlenreihe (von unendlich vielen Gliedern) — sie sei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — eine hinreichende Bedingung ist. Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ die Elemente, so finden wir die Summen von $a_1, a_2, a_3, \ldots$, wenn wir bestimmen wie oft das Element α in $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vorkommt und sämtliche Elemente α vereinigen. Unendlich oft kann keines vorkommen, dann ist m die Zahl, die größer ist als jede Summe $\sum a_i$, die aus den Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ gebildet ist, so könnten wir aus dem unendlich oft vorkommenden Elemente schon eine genügend

[1] Adolf Hurwitz note en marge de cette démonstration: „nicht streng".

große Anzahl zusammenfassen, die eine Summe $>m$ ergeben würden, was der vorausgesetzten Eigenschaften von m widerspräche.

Wir wollen nun unter $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ nicht nur die Elemente, sondern auch die Anzahl wie oft sie in der Gesamtheit der Zahlenreihe $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vorkommen verstehen. Dann ist offenbar die Summe (nach der Definition der Summe) der Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dieselbe wie die Summe der Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Denkt man sich nun aus letztern beliebige und beliebig viele herausgegriffen und zu einer Summe b vereinigt, so ist $a' + a'' + a''' + \cdots \geqq b$, wenn $a', a'', \ldots$ diejenigen

(20)

der Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sind, welche den herausgegriffenen Elementen enthalten. Andererseits ist nach Voraussetzung $m > a' + a'' + a''' + \cdots + a^{(r)} + \cdots$ also ist auch $m > b$. Die Summe der Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ist also nach Definition auf p. 15 endlich und folglich auch die Summe $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$.

Wir wollen jetzt nachweisen, daß in einer Summe mit unendlich vielen Gliedern, Gleiches für Gleiches gesetzt werden kann, ohne den Wert der Summen zu verändern. Daß also wenn $a_1 = a_1'$, $a_2 = a_2'$, etc. auch

$$\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots}_{\sum a_i} = \underbrace{a_1' + a_2' + a_3' + \cdots}_{\sum a_i'}.$$

Wir beweisen dies, indem wir zeigen, daß jede Zahl c die in der einen Summe enthalten ist, es auch in der andern ist. Die Summe $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ gehe, durch wirkliches Summieren in $\alpha + \beta + \gamma + \cdots$ über, wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Elemente sind. Die Summe $a_1' + a_2' + \cdots$ analog in $\alpha' + \beta' + \gamma' + \cdots$ Ist dann c in $\sum a_i$ enthalten (oder was dasselbe in $\alpha + \beta + \gamma + \cdots$), so heißt das ich kann c in eine Zahl c' so transformieren, daß c' auch einige (beliebig viele) der Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ enthält aber höchstens ebenso oft wie $\sum a_i$. Also kann ich aus $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ eine endliche Anzahl von Gliedern herausgreifen, deren Summe schon $> c$ ist. Kommen die herausgegriffenen Glieder in den Größen $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_r$ (welche zu den Größen a_i gehören) vor, so ist $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \cdots + \bar{a}_r > c$, also auch

(21)

$\bar{a}_1' + \bar{a}_2' + \cdots + \bar{a}_r' > c$. c ist daher auch ein Bestandteil der Summe $\sum a_i'$. Umgekehrt läßt sich leicht zeigen, daß auch jede in $\sum a_i'$ enthaltene Zahl auch in $\sum a_i$ enthalten ist, also (nach Definition) $\sum a_i = \sum a_i'$.

Es sei eine unendliche Anzahl von Zahlgrößen gegeben, deren Summe einen endlichen Wert habe. Man kann dann diese Zahlenreihe in Gruppen zerlegen; die Anzahl dieser Gruppen kann eine endliche oder unendliche sein, und jede Gruppe kann wieder eine endliche oder unendliche Anzahl der Zahlgrößen enthalten.

Zum Beispiel betrachten wir die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{(a+1)^{\lambda}} \, \frac{1}{(b+1)^{\mu}}.$$

Diese Summe hat einen endlichen Wert. Greifen wir nämlich aus ihr eine beliebige Anzahl von Gliedern heraus, l sei der höchste vorkommende Wert von λ, m der von μ, so ist die Summe der herausgegriffenen Glieder

$$\leqq \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\lambda=1}^{l} \frac{1}{(a+1)^\lambda} \frac{1}{(b+1)^\mu} \leqq \sum_{1}^{l} \frac{1}{(a+1)^\lambda} \sum_{1}^{m} \frac{1}{(b+1)^\mu} < \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}.$$

$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$ ist also größer als die Summe jeder beliebiger aus $\sum\limits_{1}^{\infty} \sum\limits_{1}^{\infty}$ herausgegriffenen Glieder. Diese Summe ist also endlich. Hier ist nur eine Zerlegung in Gruppen leicht zu bewerkstelligen. Nämlich

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{(a+1)^\lambda} \cdot \frac{1}{(b+1)^\mu} = \frac{1}{b+1} \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{(a+1)^2} + \cdots \right)$$
$$+ \frac{1}{(b+1)^2} \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{(a+1)^2} + \cdots \right) + \cdots.$$

(22)

„Zerlegt man eine unendliche Reihe von Zahlen in Gruppen, vereinigt die Zahlen jeder Gruppe durch Summierung, und addiert dann alle Gruppen zueinander, so ist die Endsumme der Summe der unendlichen Reihe der Zahlen gleich". $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ sei die Reihe der Zahlen.

$a_1 + a_1' + a_1'' + \cdots$ die erste Gruppe $= b_1$,

$a_2 + a_2' + a_2'' + \cdots$ die zweite Gruppe $= b_2$,

. . . .

Faßt man ein Element α ins Auge, so kommt dasselbe endlich oft in der Summe $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$ vor. Es möge in den Zahlen $a, b, \ldots, g$ der Zahlenreihe vorkommen. Dann wird es nur in solchen der Gruppen $b_1, b_2, \ldots$ vorkommen, welche eine der Zahlen $a, b, \ldots, g$ als Summand haben. Also wird es in der Summe $b_1 + b_2 + \cdots$ genau ebenso oft vorkommen als in $a_1 + a_2 + \cdots$. Dies gilt von jedem beliebigen Elemente. Die Umkehrung des bewiesenen Satzes gilt ebenfalls: „$b_1 + b_2 + \cdots$ sei eine Summe von unendlich vielen Gliedern. b_p lasse sich darstellen als eine Summe von unendlichen Zahlgrößen. $b_p = a_p + a_p' + a_p'' + \cdots$. Dann ist $\sum b = \sum a$." (Voraussetzung ist natürlich, daß $\sum b$ einen endlichen Wert hat.)

(23)

Es ist es nun zu beweisen, daß die Gesetze der Multiplikation, die oben für Summen mit endlicher Gliederzahl abgeleitet sind auch für solche mit unendlich vielen Gliedern gültig sind. Das Produkt $(a_1 + a_2 + \cdots$ ad inf.$)$ $(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots)$ erhalte ich nach der Definition des Multiplizierens, wenn ich jedes Element, welches in der einen Summe vorkommt, mit jedem Element der andern Summe multipliziere. Wir wollen aber zeigen, daß dies Produkt gleich ist

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\lambda b_\mu = (a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 + \cdots) + (a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3 + \cdots) + \cdots. \tag{I}$$

Zunächst beweisen wir, daß $\sum \sum a_\lambda b_\mu$ endlich ist; vorausgesetzt daß $\sum a_\lambda$ und $\sum b_\mu$ endlichen Wert haben. A sei die Zahl die größer ist als jeder direkte Bestandteil von $\sum a_\lambda$, $B>$ jeder Teil von $\sum b_\mu$, dann ist, da jeder Teil (jede Teilsumme mit endlicher Gliederzahl) T von $\sum\sum a_\lambda b_\mu \leqq \sum\limits_1^l a_\lambda \sum\limits_1^m b_\mu$, wenn l der höchste Wert von λ, m der von μ, welche in jener Teilsumme vorkommen, ist. Also $T<A\cdot B$. Daher ist die betrachtete Doppelsumme in der Tat endlich.

Die erste Gruppe von (I) ist $=a_1(b_1+b_2+\cdots)$. Dann sind $\alpha, \alpha', \ldots$ die Elemente von a_1, $\beta, \gamma, \delta, \ldots$ die Elemente der (ausgeführten) Summe $\sum b_\mu$, so ist das ausgeschriebene Produkt des Aggregat von

$$\alpha\beta_1, \alpha\gamma_1, \alpha\delta_1, \ldots$$
$$\alpha'\beta_1, \alpha'\gamma_1, \alpha'\delta_1, \ldots$$

Andererseits kommt jedes Glied dieses Aggregates in der (ausgeführten) Summe $a_1 b_1+a_1 b_2+\cdots$ vor, also ist

$$a_1 b_1+a_1 b_2+\cdots=a_1(b_1+b_2+\cdots)$$

(24)

ebenso:

$$(a_1+a_2+\cdots)c=a_1 c+a_2 c+\cdots.$$

Also die rechte Seite von (I) und folglich die linke Seite

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} a_\lambda b_\mu=(a_1+a_2+a_3+\cdots)(b_1+b_2+\cdots),$$

was wir beweisen wollten.

Die Lehre von Produkten aus unendlich vielen Zahlgrößen, die jetzt konsequenterweise folgen müßte, wird erst später entwickelt werden.

Wir gehen jetzt zu den indirekten Rechnungsarten über. Wir werden dabei finden, daß um der Subtraktion in allen Fällen einen Sinn beilegen zu können, wir das Zahlengebiet erweitern müssen, bei der Division jedoch nicht. Diese scheinbare Inkongruenz rührt davon her, daß wir oben schon die genauen Teile eingeführt haben, also schon dort das Zahlengebiet und zwar *nur* auf Grund der Division erweitert haben.

„Unter $(a-b)$ wollen wir die Zahl verstehen welche zu b addiert, die Summe a ergibt."

Also $(a-b)+b=a$. Dies ist die Definitionsgleichung der Subtraktion. Wenn a und b Zahlen mit endlicher Anzahl von Elementen sind und a ist $>b$ so kann die Differenz unmittelbar gebildet werden. Indem man nämlich a in $a'+a''$ umformt, so daß a' dieselben Elemente (und keine andere weiter) wie b enthält und zwar gleich oft, so ist a'' die gesuchte Differenz $(a-b)$.

(25)

Ist $a>b$, aber a und b Zahlen mit unendlich vielen Elementen, so können wir die Differenz nicht direkt bilden und müssen daher beweisen, daß auch für diesen Fall die Differenz $(a-b)$ existiert.

„Hat man 2 Zahlgrößen a und b und man kann beweisen, daß wenn ich zu b jedes beliebige Element ε hinzufüge $b+\varepsilon>a$ wird, so kann entweder $b=a$ oder $b>a$ gewesen sein".

a habe die Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, b die Elemente $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$. $b+\varepsilon > a$ heißt nun: Ich kann aus den Elementen $\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots, \varepsilon$ eine endliche Anzahl herausgreifen, so daß die Summe der herausgegriffenen nicht Bestandteil von a ist, also $> a$ ist. Entweder braucht nun ε nicht unter den herausgegriffenen zu sein, dann ist schon $b > a$, oder ε muß notwendig unter den herausgegriffenen vorhanden sein, dann ist $b = a$, denn jeder Bestandteil von b ist dann auch Bestandteil von a, und umgekehrt kann es keinen Bestandteil von a geben der nicht auch Bestandteil von b wäre. Denn angenommen $\sum\limits_{i=1}^{i=n} \alpha_i$, wo n eine bestimmte endliche Zahl ist, sei $>$ als $\sum\limits_{k=1}^{k=x} \beta_k$, wo x jeden beliebigen Wert annehmen kann, so würde nach der Voraussetzung x so groß gewählt werden können, daß

$$\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i < \sum_{k=1}^{k=x} \beta_k + \varepsilon$$

wo ε ein beliebiges Element ist. Andererseits würde

$$\sum_1^x{}^k \beta_k < \sum_1^n{}^i \alpha_i,$$

also auch

$$\sum_1^n \alpha_i + \sum_1^x \beta_k < \sum_1^x \beta_k + \sum_1^n \alpha_i + \varepsilon,$$

was unmöglich ist[1].

(26)

Aus dem vorhergehenden Satz folgt nun, daß wenn $a > b$ ist, es doch noch Elemente gibt, die zu b addiert werden können, ohne daß a aufhörte größer als die resultierende Summe zu sein. In der Reihe der Elemente $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ sei nun α das erste, welches die Eigenschaft hat, daß noch $a > b + \alpha$ ist. Wenden wir auf diese Ungleichung dieselbe Überlegung an, wie bei der $a > b$, so können wir ein Element $\alpha' (\leqq \alpha)$ finden, so daß noch $a > b + \alpha + \alpha'$ ist. So können wir ins Unbegrenzte fortfahren, so daß

$$a > b + \alpha + \alpha' + \alpha'' + \cdots + \alpha^{(n)}.$$

Setze ich nun $c = \alpha + \alpha' + \alpha'' + \cdots$ ad inf., so kann ich zeigen daß c endlich ist und zu b addiert a liefert, also $c = (a - b)$ ist. b' sei eine Größe die der Ungleichung genügt $a < b + b'$, für b' kann zum Beispiel a selber gewählt werden, so folgt, daß die Summe von beliebig vielen Größen α kleiner als b' sein muß. Also ist c endlich. Man zeigt nun leicht, daß jede Zahl, die in $b + c$ enthalten ist, auch in a enthalten ist und umgekehrt und schließt daraus, daß $a = b + c$, also der Definition gemäß $c = \sum \alpha = a - b$ ist.

Wir wollen nun das Zahlengebiet so erweitern, daß die Subtraction immer möglich ist. Dazu müssen wir neue Elemente einführen. Wir nehmen nun zu jedem der bislang betrachteten

(27)

Elemente ein demselben entgegengesetztes hinzu, d.h. ein solches, das es in einem Aggregate von Elementen sein zugehöriges Element zerstört. Also z. B. ist α ein

[1] Adolf Hurwitz note en marge de cette démonstration: „falsch".

Element (etwa $1/n$) so führen wir ein Element α' ein, welches ein Element α zerstört, aufhebt, vernichtet. Ist a eine Zahl, welche das Element α enthält, also $a = a_1 + \alpha$, so ist $(a_1 + \alpha) + \alpha' = a_1$. Zu jeder beliebigen Zahl b (die aus bisher betrachteten Elementen zusammengesetzt ist) gibt es eine sie vernichtende, ihr entgegengesetzte Zahl b'; sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ die b konstituierenden Elemente, so ist die Zahl, welche aus $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \ldots$ zusammengesetzt ist, die Zahl b'. ($(b')' = b$. Denn b wird durch b' vernichtet, also auch b' durch b, daher ist b identisch mit $(b')'$.) Jetzt hat jede Differenz einen Sinn. Ist nämlich $a < c$, so ist $a - c$ gleichbedeutend mit $a + c'$, denn $(a - c)$ ist definiert durch $(a - c) + c = a$ und auch $(a + c') + c = a$.

„Das entgegengesetzte α' eines genauen Teiles $\frac{1}{n}$ der Einheit 1, ist der n^{te} genaue Teil der entgegengesetzten Einheit $1'$".

Nämlich

$$a + \underbrace{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}_{n \text{ Summanden}} + \underbrace{(\alpha' + \alpha' + \alpha' + \cdots)}_{n \text{ Summanden}} = a$$

oder $a + 1 + (\alpha' + \alpha' + \cdots) = a$, daher $\alpha' + \alpha' + \alpha' + \cdots = 1'$ und α' der n^{te} genaue Teil von $1'$.

(28)

Die Haupteinheit soll die positive, die entgegengesetzte soll die negative Einheit genannt werden, entsprechend den Elementen.

Wir betrachten jetzt Größen, die aus sämtlichen eingeführten Elementen zusammengesetzt sein sollen. Eine solche Größe ist endlich, wenn die aus den positiven Elementen gebildete Zahl, wie auch die aus den negativen gebildete, jede für sich genommen, endlich ist. (Letztere sind natürlich mit der negativen Einheit zu vergleichen.) Unter der Summe zweier Größen verstehen wir die Vereinigung der Elemente der einen mit denen der anderen. An einer Zahl können wir außer den auf p. 5 angegebenen Transformationen, jetzt noch die folgenden vornehmen: 1) 2 entgegengesetzte Elemente können einfach fortgelassen werden. 2) Man kann zu einer Zahl ein beliebiges Element zusetzen, muß aber gleichzeitig das entgegengesetzte Element hinzufügen.

Den Begriff der Gleichheit zweier Zahlen des erweiterten Zahlengebietes wollen wir so feststellen, daß der Satz gültig bleibt: „Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches". a sei $= a_1 + a_2'$, wo a_2' das Aggregat aus allen negativen Elementen bedeutet, a_1 das aus allen positiven. b sei $= b_1 + b_2'$.

(29)

Wir wollen also $a = b$ nennen, wenn z. B.

$$a + a_2 + b_2 = b + a_2 + b_2; \quad \text{aber} \quad \begin{cases} a + a_2 + b_2 = a_1 + a_2' + a_2 + b_2 = a_1 + b_2, \\ b + a_2 + b_2 = b_1 + b_2' + b_2 + a_2 = b_1 + a_2. \end{cases}$$

Also heißt dann $a = b$, wenn $a_1 + b_2 = b_1 + a_2$. Diese Definition stimmt mit den früher gegebenen überein. Es folgt aus ihr auch, und das muß nachgewiesen werden, daß wenn $\left.\begin{matrix} a = b \\ c = d \end{matrix}\right\}$ auch $a + c = b + d$.

Bei einer Zahl können drei verschiedene Fälle eintreten in Bezug auf ihre posit. und negat. Elemente. Versteht man nämlich unter absolutem Betrag einer Zahl die Zahl welche aus der gegebenen entsteht, wenn ich ihre sämtlichen Elemente auf eine Einheit beziehe, so kann

1) der absolute Betrag der positiven Glieder einer Zahl $>$ sein als der absolute Betrag der negativen; dann heißt die Zahl, positiv.

2) das Gegenteil von 1) stattfinden; dann heißt die Zahl negativ.

3) die beiden absoluten Beträge können einander gleich sein. Im letzteren Falle stehen das Aggregat aus den positiven Elementen der Zahl im Verhältnis der entgegengesetzten Zahl zu dem Aggr. aus den negativen Elementen derselben. Denn ist $a = a_1 + a_2'$ und $a_1 = a_2$, so ist eben a_2' das Entgegengesetzte von a_1, denn $b + (a_1 + a_2)' = b + a_2 + a_2' = b$. Die Zahlgrößen, bei welchen 3) stattfindet, können zu einer beliebigen Zahl addiert werden, ohne daß durch ihr

(30)

Hinzutreten die Zahl vergrößert würde. Man bezeichnet sie durch 0. $0 + a$ ist also $= a$.

Ist $a - b = c$, so muß $a = b + c$ sein, also $a + b' = b + b' + c = c$, $a - b$ ist also gleich bedeutend mit $a + b'$. Alle Sätze der Addition lassen sich auf die Subtraktion übertragen. $a - a$ ist $= a + a' = 0$. Man bezeichnet aus diesem Grunde das Entgegengesetzte von a durch $-a$ (und nicht durch a').

Ist $a = a_1 + a_2' = a_1 - a_2$, $a_1 > a_2$, so nennen wir (s. p. 29, 1)) a positivwertig. Man kann dann a in eine Zahl transformieren, deren negativer Teil einen absoluten Betrag hat, der so klein angenommen werden kann, als man will.

a_2 sei $= a_3 + a_4$; ist nun n eine beliebige ganze positive Zahl, so gibt es in der Reihe $\frac{1}{n}, 2 \cdot \frac{1}{n}, 3 \cdot \frac{1}{n}, \ldots$ sicher ein erstes Glied, welches $\geqq a_2$ ist, dies sei das $(\mu + 1)^{\text{ste}}$ Glied, dann ist $\mu \cdot \frac{1}{n} < a_2$; setzen wir nun $a_3 = \mu \cdot \frac{1}{n}$, so wird $a_4 \leqq \frac{1}{n}$; es wird aber $a = (a_1 - a_3) - a_4$. $(a_1 - a_3)$ kann immer in eine Zahl mit positiven Elementen umgewandelt werden, da a_1 so transformiert werden kann, daß a_3 ein direkter Bestandteil von a_1 wird. a_4 kann, wie aus $a_4 \leqq \frac{1}{n}$ folgt, so klein, als man nur immer will, angenommen werden.

(31)

Ist a eine positive Größe, die aber aus $+$ und $-$ Elementen zusammengesetzt ist, $a = b - c$, so gibt es immer eine ihr gleiche, wenn auch nicht direkt angebbare, Zahl, die nur $+$ Elemente enthält. Dies folgt aus dem Existenzbeweis der Differenz $a - b$ wenn $a > b$. Ebenso gibt es, wenn $a = b - c$ und $c > b$, eine a gleiche Zahl, die nur negative Elemente enthält.

6. Vorlesung

„Wenn die Summe der Zahlgrößen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ (die $+$ und $-$ Elemente haben) eine endliche ist, und man zerlegt diese Summe in Gruppen, bildet dann für jede Gruppe die Summe der in ihr enthaltenen Zahlen a_i, so ist, wenn man die erhaltenen Summen wieder durch Summation vereinigt, das Resultat gleich der

Summe aller a_i's". Jedes Element α kommt nämlich in der Summe der a_i's ebensooft vor, als in der Summe aus der Gruppensummen. Umgekehrt: ist $b_1+b_2+b_3+\cdots$ endlich und b_i ist gleich einer Summe aus anderen Zahlen $b_i=a_1^i+a_2^i+a_3^i+\cdots=\sum\alpha_i-\sum\beta_i$, wo $\sum\alpha_i$ die Summe sämtlicher $+$ Elemente, die in $a_1^i+a_2^i+\cdots$ vorkommen, $\sum\beta_i$ die der $-$ Elemente bedeutet, so ist $\sum\limits_i b_i=\sum\limits_i(a_1^i+a_2^i+\cdots)$ denn es ist $b_i+\sum\beta_i=\sum\alpha_i$, also nach p. 22 unten $\sum\limits_i(b_i+\sum\beta_i)=\sum\limits_i\sum\alpha_i$ oder $\sum\limits_i b_i=\sum\limits_i(\sum\alpha_i-\sum\beta_i)=\sum\limits_i(a_1^i+a_2^i+\cdots)$.

Wir wollen jetzt die Bedingung untersuchen, unter welcher die Summe von unendlich vielen beliebigen Zahlgrößen einen endlichen Wert hat.

Die Reihe $a_1, a_2, a_3, \ldots$ enthält nur positive

(32)

Glieder, welche selbst aber pos. und neg. Elemente enthalten können. Die Summe aus diesen Größen ist endlich wenn die in derselben vorkommenden $+$ Elemente für sich und die vorkommenden $-$ Elemente für sich eine endliche Summe geben (s. p. 28)

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_i+\cdots$$

sei eine Summe von nur positive Elemente enthaltenden Zahlgrößen, die einen endlichen Wert besitzt, dann kann ich a_i so in eine Differenz b_i-c_i umformen, daß $c_i<\alpha_i$ wird. Also $a_1=b_1-c_1$, $a_2=b_2-c_2$, $a_3=b_3-c_3, \ldots$.

Nun ist die Summe $(c_1+c_2+c_3+\cdots)$ endlich, da $\sum\alpha_i$ endlich ist und es ist daher, wenn $\sum a_i$ endlich sein soll, notwendig, daß $\sum b_i$ endlich ist. $\sum b_i$ ist aber endlich, wenn es eine angebbare Größe g gibt, die größer ist, als die Summe beliebig vieler der Größen a_i. Denn da $\sum\limits_{\nu=1}^{x} b_\nu=\sum\limits_{\nu=1}^{x}(a_\nu+c_\nu)=\sum\limits_{\nu=1}^{x} a_\nu+\sum\limits_{\nu=1}^{x} c_\nu$ und ist $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} c_\nu=h$, so ist $\sum\limits_{1}^{\infty} b_\nu<g+h$. Man sieht auch leicht ein, daß die Bedingung $\sum a_\nu<g$ auch notwendig ist. Unter der Voraussetzung, daß es eine Zahl g gibt, die größer ist als die Summe jeder beliebigen aus $a_1, a_2, a_3, \ldots$ herausgegriffenen Zahlen, ist es möglich $a_1+a_2+a_3+\cdots$ so zu transformieren, daß die $+$ Glieder wie die $-$ Glieder für sich eine endliche Summe geben. Dasselbe gilt auch für den Fall, daß sämtliche a_i's negative Werte haben.

Kommen pos. und neg. Glieder gemischt vor, so müssen die $+$ und die $-$ Glieder für sich genommen eine endliche Summe geben. Wir können alles vorhergehende

(33)

nun so zusammenfassen: „Damit die Summe aus unendlich vielen Zahlgrößen endlich sei, ist notwendig und hinreichend daß es eine endliche angebbare Größe g gibt, welche größer ist als die aus beliebig vielen der Zahlgrößen gebildete Summe, die Zahlgrößen ihrem absoluten Betrag nach genommen".

Ist nämlich $a_1+a_2+a_3+\cdots$ die unendliche Summe, und A_i der absolute Betrag von a_i, so muß die Summe der absoluten Beträge von beliebig vielen der positiven Glieder der Zahlengröße $a_1, a_2, a_3\ldots$ wie die von beliebig der neg. Glieder kleiner sein als eine angebbare endliche Größe, also auch die Summe der absoluten Beträge von beliebigen und beliebig vielen der Größen der Zahlenreihe $a_1, a_2, a_3 \ldots$ Anderseits ist auch leicht zu zeigen, daß die Bedingung hinreichend ist.

(Gewöhnlich definiert man die Summe einer Reihe $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ folgendermaßen: Man soll zu a_1 das folgende Glied a_2 addieren, zu dieser Summe s_2, die Zahl a_3, zu der resultierenden Zahl s_3 die Zahl a_4 u. so fort. Nähert sich nun s_n mit wachsenden n einer bestimmten Grenze a, so nennt man die letztere die Summe der Reihe. a heißt also dann die Summe der Reihe, wenn $a - s_n > \delta$ nur für eine endliche Anzahl von n's ist, wo δ eine beliebig kleine angenommene Größe ist. Dies stimmt nicht mit unserer Definition überein. Das Wesentliche bei der Addition ist nämlich die Unabhängigkeit der Resultates von der Anordnung der Glieder. Diese Unabhängigkeit ist bei unseren als summierbar bezeichneten Summen bewahrt, nicht aber bei allen den Reihen für welche s_n sich einer Grenze nähert mit wachsendem n. Z.B. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ ist eine Reihe von Elementen, welche nach unserer Definition nicht

(34)

summierbar ist, da die negativen Elemente für sich genommen eine unendlich große Summe ergeben; ebenso die positiven Elemente. Nichts desto weniger besitzt nach der gewöhnlichen Definition der Summe als $\lim(s_n)$ die Reihe eine Summe; dieselbe ist aber nicht unabhängig von der Anordnung der Glieder; $(1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) + (\frac{1}{5}-\frac{1}{6}) + \cdots$ ergibt eine andere Summe, als $(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}) + (\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}) + \cdots$. Die obige Summe kann man daher nur konventionell durch $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{\nu}$ bezeichnen; streng genommen muß sie durch $\lim_{n=\infty} \left[\sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{\nu}\right]$ bezeichnet werden. Die von uns als summierbar bezeichneten Reihen heißen unbedingt convergent, dagegen die von der Anordnung der Glieder abhängigen, bedingt convergent. Im folgenden ist unter einer summierbaren Reihe immer eine unbedingt convergente zu verstehen.)

Multiplikation von Zahlen, die aus beliebigen Elementen zusammengesetzt sind. Unter Produkt zweier solcher Zahlen verstehen wir das Aggregat aus allen möglichen Produkten der Elemente der einen mit den Elementen der andern. Es fragt sich nun, welche Bedeutung hat: $(-1)(+1)$, $(+1)(-1)$, $(-1)(-1)$, $\left(-\frac{1}{m}\right)\cdot\frac{1}{n}$, $\frac{1}{m}\left(-\frac{1}{n}\right)$, $\left(-\frac{1}{m}\right)\left(-\frac{1}{n}\right)$?

(35)

Soll das Hauptgesetz der Multiplikation $(a+b)c = ac + ab$ bestehen bleiben, so muß $(a+b')c + bc = (a+b'+b)c = ac + b'c + bc$ oder da $a+b'+b = a$ ist, $ac = ac + b'c + bc$ $b'c$ ist also das Entgegengesetzte von bc oder $(-b)\cdot c = -(b\cdot c)$. Also $(-1)\cdot 1 = -(1\cdot 1) = -1$, $1\cdot(-1)$ (wenn man bedenkt, daß $-(-1) = +1$ ist) $= -1$, $(-1)(-1) = -(-1) = +1$.

$$\left(-\frac{1}{m} - \frac{1}{m} - \frac{1}{m} \cdots m \text{ Summanden}\right)\left(+\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots n \text{ Summanden}\right) = (-1)\cdot 1.$$

Andererseits auch $= m\cdot n\left(-\frac{1}{m}\right)\cdot\frac{1}{n}$; also $\left(-\frac{1}{m}\right)\frac{1}{n} = -\frac{1}{mn}$. Ebenso ergibt sich $\frac{1}{m}\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{m\cdot n}$ und $\left(-\frac{1}{m}\right)\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{m\cdot n}$.

Wir zeigen jetzt, daß wenn eine Zahl $a-b=a+b'$ endlich und ebenso eine Zahl $c-d=c+d'$, auch deren Produkt Π einen endlichen Wert hat. Es ist $\Pi=(a+b')(c+d')=ac+(ad)'+(bc)'+bd=ac-ad-bc+bd$. Da nun jede dieser 4 Zahlen, wie früher bewiesen, einen endlichen Wert hat, so ist auch das Aggregat aus ihnen endlich. Es läßt sich jetzt leicht nachweisen, daß ein Produkt seinen Wert nicht ändert, wenn Gleiches für Gleiches eingesetzt wird. Alle Gesetze der Multiplikation bleiben auch für das erweiterte Zahlengebiet bestehen.

Division einer beliebigen Zahl durch eine andere.

(36)

Wir zeigen jetzt, daß es immer eine Zahl c gibt, die wenn a und b zwei andere gegebene Zahlen sind, der Gleichung $c\cdot b=a$ genügt. Die Zahl c wird, als aus a und b gefunden, durch das Symbol $a:b$ oder $\frac{a}{b}$ bezeichnet. $\Big($Letzteres Symbol findet seine Berechtigung darin, daß $\frac{1}{n}\cdot n=1$ ist.$\Big)$ Wir brauchen nur die Existenz der Zahl $\frac{1}{b}$ zu beweisen. Denn ist $\frac{1}{b}\cdot b=1$, so ist $a\cdot\frac{1}{b}\cdot b=a$ also $\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}$. Ist b aus einer endlichen Anzahl von Elementen zusammengesetzt, so läßt sich b durch Transformation auf die Form $\mu\cdot\frac{1}{n}$ bringen (μ und n Vielfaches der Einheit). Dann ist unmittelbar $\frac{1}{b}=n\cdot\frac{1}{\mu}$ denn $\frac{1}{b}\cdot b=n\,\frac{1}{\mu}\cdot\mu\,\frac{1}{n}=1$, also genügt $\frac{1}{b}$ in der Tat der Definitionsgleichung.

b sei nun eine aus unendlich vielen Elementen gebildete positive Zahl. Dann läßt sich immer eine Zahl (Vielfaches der Einheit) m finden, so daß $m\geqq b$, $m-1<b$ ($m=b$ führt auf den schon betrachteten Fall) $m>b$, $m-1<b$ gibt $b=m-b_1$, wo $b_1<1$; $\frac{1}{b}=\frac{1}{m-b_1}$. Nun bestehen folgende Identitäten:

$$\frac{1}{m-b_1}=\frac{1}{m}+\frac{b_1}{m(m-b_1)},$$

$$\frac{b_1}{m(m-b_1)}=\frac{b_1}{m^2}+\frac{b_1^2}{m^2(m-b_1)},$$

$$\frac{b_1^2}{m^2(m-b_1)}=\frac{b_1^2}{m^3}+\frac{b_1^3}{m^3(m-b_1)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(37)

Also

$$\frac{1}{m-b_1}=\frac{1}{m}+b_1\cdot\frac{1}{m^2}+b_1^2\cdot\frac{1}{m^3}+b_1^3\cdot\frac{1}{m^4}+\cdots+b_1^{\nu-1}\frac{1}{m^\nu}+b_1^\nu\frac{1}{m^\nu(m-b_1)},$$

$$\frac{1}{m-b_1}=\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}\cdot b_1+b_1^2\cdot\frac{1}{m^3}+\cdots\quad\text{in inf.}$$

Man muß nun zeigen, daß diese Reihe einen endlichen Wert hat, und mit b multipliziert exact 1 ergibt. Nun ist $b_1^\alpha\cdot\frac{1}{m^{\alpha+1}}<\frac{1}{m^{\alpha+1}}$, da $b_1<1$. Also

$$\sum_{r=1}^{r=\nu} b_1^{r-1}\cdot\frac{1}{m^r}<\sum_{r=1}^{r=\nu}\frac{1}{m^r}<\frac{1}{m-1};\quad\frac{1}{m-1}$$

ist also größer als die Summe beliebig vieler aus unserer Reihe herausgegriffener Glieder, die Reihe besitzt somit eine endliche Summe. Mit b oder $m - b_1$ multipliziert liefert sie aber

$$\left.\begin{array}{l} 1 + b_1 \cdot \frac{1}{m} + b_1^2 \cdot \frac{1}{m^2} + \cdots \\ \quad - b_1 \cdot \frac{1}{m} - b_1^2 \cdot \frac{1}{m^2} - \cdots \end{array}\right\} = 1.$$

Ist b negativ, so folgt aus $\frac{1}{-b} = -\frac{1}{b}$ daß auch in diesem Falle der Quotient $\frac{1}{-b}$ eine Zahl aus unserem Zahlengebiet ist. $\Big($Da $\left(-\frac{1}{b}\right)(-b) = +\frac{1}{b} \cdot b = 1$ ist, so ist $\left(-\frac{1}{b}\right)$ in der Tat $= \frac{1}{-b}$.$\Big)$

$\frac{a}{b}$ ist also eine in allen Fällen existierende Zahlgröße. Exacter ist der Existenzbeweis von $\frac{1}{b}$ so zu führen, daß man von der Reihe $\frac{1}{m} + \frac{1}{m^2}\beta + \frac{1}{m^3}\beta^2 + \cdots$ nachweist, daß sie endlich ist $(b = m - \beta)$ und daß sie mit $b = m - \beta$ multipliziert exact 1 gibt.

---

(81)

. . .

Einleitung in die Funktionentheorie

Geschichtliche Entwicklung des Funktionsbegriffs

Verknüpft man beliebig angenommene Zahlen $a, b, c, d, \ldots$ zu zweien durch die 4 bis jetzt behandelten Rechnungsarten, so erhält man eine neue Reihe von Zahlen. Diese letzteren mögen wieder untereinander und mit den Ausgangszahlen verknüpft werden zu einer dritten Reihe von Zahlen u.s.f. Jede in einer beliebigen Reihe stehende Zahl F wird dann formell aus den Zahlen $a, b, c, \ldots$ zusammengesetzt sein. Der Rechnungsausdruck F ist eine bestimmte Zahl, so lange $a, b, c, \ldots$ bestimmt an-

(82)

genommene Zahlgrößen sind. Man nannte nun ursprünglich F eine Funktion von $a, b, c, \ldots$ wenn man sich vorbehielt für $a, b, c, d, \ldots$ jede beliebige Zahlgröße wählen zu können, so daß F andere und andere Werte annehmen kann, wenn man $a, b, c, d, \ldots$ andere und andere Werte beilegt.

Diese Definition der Funktion erweitert sich zunächst dadurch, daß man neben den 4 Grundoperationen noch andere einführte. Indem nämlich das Produkt aus n gleichen Faktoren b, abgekürzt b^n geschrieben wurde, entstand die Frage, b aus a und n so zu finden, daß $b^n = a$ ist. Mit andern Worten: man führte das Radizieren als Operation ein, symbolisch angedeutet durch $\sqrt[n]{a}$. Alles was durch diese letzte und die 4 Grundoperationen aus einer Anzahl unbestimmt gelassener Zahlen $a, b, c, \ldots$ zusammengesetzt werden konnte, nannte man Funktion der Größen $a, b, c, \ldots$ Mit der Ausdehnung der Potenz ganzzahliger Exponenten auf solche mit beliebigen Exponenten, ergab sich die neue Operation des Logarithmierens.

Durch die Forderung, daß eine Funktion in dem bisher entwickelten Sinne genommenen einer Zahl gleich sein sollte, $f(a, b, c, \ldots) = m$, kann man auf die Erweiterung

(83)

des Funktionsbegriffes durch Gleichungen. Man nannte eine Größe einer beliebigen Gleichung (in der die bis jetzt angegebenen Operationen vorkommen) eine Funktion der übrigen in derselben vorkommenden und unbestimmt gelassenen Größen. Man konnte nun noch für solche Funktionen bestimmte Symbole einführen u.s.f.

Eine andere und scheinbar sehr allgemeine Definition einer Funktion gab zuerst J. Bernoulli.

„Wenn zwei veränderliche Größen so miteinander zusammenhängen, daß jedem Wert der einen eine gewisse Anzahl bestimmter Werte der andern entsprechen, so nennt man jede der Größen eine Funktion der andern". Z. B. die Koordinaten eines Punktes einer Kurve sind Funktionen des Bogens, der zwischen ihm und einem fest angenommenen Punkte liegt. Auch in der Mechanik treten viele Beispiele auf, welche die Bern. Definition rechtfertigen.

Dieselbe gilt jedoch zunächst nur für reelle Zahlen. Sie ist aber überhaupt vollkommen unhaltbar und unfruchtbar. Es ist nämlich unmöglich aus ihr irgendwelche allgemeine Eigenschaften der Funktionen abzuleiten und wenn dennoch in neuerer Zeit die Analysten, welche die Bern. Definition adoptierten,

(84)

die Funktionentheorie erfolgreich behandelten, so war dies die Folge davon, daß sie stillschweigend noch andere Eigenschaften der Funktionen voraussetzen, als die, welche aus der Bern. Definition folgen. So z.B. folgt aus der besondern Definition durchaus nicht, daß jede Funktion einen Differenzialquotienten hat, letzterer definiert als der Koeffizient von h, in dem Ausdruck $\big(y = f(x),\ y + k = f(x+h)$ gesetzt$\big)$: $k = f(x+h) - f(x) = ch + c_1 h$. Selbst dann nicht läßt sich die Existenz des Koeffizienten c beweisen, wenn man annimmt, daß die Funktion stetig sei. (Bertrand führt einen solchen Beweis, derselbe ist jedoch falsch.) Es gibt nämlich wirklich Funktionen, die stetig sind und nicht differenzierbar sind. Z.B.

$$\left.\begin{aligned} x &= b\cos(at) + b^2\cos(a^2t) + b^3\cos(a^3t) + \cdots \\ y &= b\sin(at) + b^2\sin(a^2t) + \cdots \end{aligned}\right\} \; b < 1.$$

Diese Funktionen haben für jedes t einen endlichen Wert, aber keinen Differenzialquotienten, sobald $ab > 1$ ist.

Die Fourier'sche Darstellung von Funktionen, die in Bernoullischer Weise definiert sind zwischen einem Intervall a bis b, ist, wie

(85)

Dirichlet gezeigt hat nur anwendbar, wenn die Funktion in dem Intervall a bis b eine endliche Anzahl Maximis und Minimis hat.

Der nächste Fortschritt in dem Funktionsbegriff wird durch die Einführung complexer Argumente bezeichnet. Da man sah, daß jeder Satz, den man über

Gleichungen mit reellen Wurzeln gefunden hatte, auch dann noch gültig bleibt, wenn nicht alle Wurzeln reell sind, sondern andere in der symb. Form $a+b\sqrt{-1}$ (wo $\sqrt{-1}$ definiert war durch die Gleichung $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=-1$) und man genau so mit diesen letztern Größen rechnet, als wären sie reell, so lag es nahe auch komplexe Größen $a+b\sqrt{-1}$ als Argumente einzuführen.

(Gauss bewies, daß jede ganze rationale Funktion $f(x)$ sich in lineare und quadratische Faktoren spalten läßt. Da bei quadratischen Gleichungen nun, wenn die Wurzeln nicht reell sind, dieselben in der Form $a+b\sqrt{-1}$ erscheinen, so ist klar, daß jede beliebige Gleichung, sowohl reelle, als auch komplexe Wurzeln haben kann.)

Diese Erweiterung der Argumente geschah zuerst an der Exponentialfunktion e^x. Euler erhielt durch Einführung von $a+bi$ an Stelle von x in e^x, letzteres

(86)

definiert als $\sum\frac{x^n}{n!}$, die Moivreschen Relationen zwischen e^x, $\sin x$ und $\cos x$ und sah, daß alle Folgerungen, die aus diesen Relationen sich ergeben, richtig waren. Nun wurden auch für andere Funktionen komplexe Argumente eingeführt. Bei solchen Erweiterungen von Funktionen, die nur für eine beschränkte Anzahl von Argumenten definiert waren, kam es immer darauf an, dieselbe so zu stellen, daß die für die nicht erweiterte Funktion gefundenen Sätze auch für die erweiterte bestehen blieben.

Aus der Bernoulli'schen Definition der Funktion ist die Möglichkeit einer solchen Erweiterung nicht zu ersehen. Und in der Tat gibt es auch Funktionen (in Bernoulli's Sinn) welche keine Erweiterung zulassen — nicht analytische — und solche, deren Definition auf das ganze Zahlengebiet zu erweitern möglich ist, heißen analytische.

$f(x)$ sei ein aus $a, b, c, \ldots x$ zusammengesetzter Ausdruck, so ist $f(u+vi)=p+qi$ zu setzen. Also

$$f'(u+vi)=\frac{\partial p}{\partial u}+i\frac{\partial q}{\partial u} \quad \text{und} \quad if'(u+vi)=\frac{\partial p}{\partial v}+i\frac{\partial q}{\partial v}.$$

(87)

Also

$$\frac{\partial p}{\partial v}=\frac{\partial q}{\partial u}; \quad \frac{\partial p}{\partial u}=-\frac{\partial q}{\partial v}. \tag{I}$$

Diese Differenzialgleichungen gelten für jede durch Rechnungsoperationen dargestellte Funktion. Demgemäß kann man die analytische Funktion so definieren: $p+qi$ ist eine analytische Funktion von $u+vi$, wenn p, q von u und v so abhängen, daß die Gleichungen (I) gültig sind. Diese Definition rechtfertigt sich allerdings, indem man später sieht, daß sie für alle Funktionen auf die man stößt, sie befriedigen; sie setzt jedoch die Kenntnis und Möglichkeit der Ableitung voraus, ist also wohl schlecht geeignet, um von ihr aus die Theorie der analytischen Funktionen zu begründen.

Wie wir nun oben immer von Einfacherem zu Schwierigerem gegangen sind, so wollen wir auch jetzt von den einfachsten Funktionen (den sog. rationalen) ausgehen. Dann den Funktionsbegriff erweitern durch Betrachtung von Ausdrücken, die aus unendlich vielen rationalen Funktionen zusammengesetzt sind. Es wird sich zeigen, daß

(88)

wir schon dann die Mittel haben, jedes beliebige Abhängigkeitsverhältnis zwischen Größen zu behandeln[1].

. . .

Appendice II

Karl Weierstrass

Differentialrechnung

Ausarbeitung der Vorlesung an dem König. Gewerbeinstitut zu Berlin im Sommersem. 1861 von H. A. SCHWARZ (Institut Mittag-Leffler)

(Extraits)

Das vorliegende Heft enthält eine kurzgefaßte Ausarbeitung der Vorlesung über die Differentialrechnung, welche Herr Professor Weierstrass an dem Königlichen Gewerbeinstitute zu Berlin *im Sommersemester 1861* gehalten hat. Da diese Vorlesung die erste Vorlesung über Differentialgleichungen gewesen ist, die ich zu hören das Glück gehabt habe, und da die Ausarbeitung derselben noch vor dem Schlusse des Sommersemesters 1861 vollendet werden mußte, so ist die Ausarbeitung mit all den Schwächen und Unvollkommenheiten behaftet, welche bei einer ersten solchen Arbeit nur zu leicht erklärlich sind.

Der Beweis für den Lehrsatz: „Eine stetige Funktion, deren erste Ableitung innerhalb eines bestimmten Intervalles des Argumentes überall gleich Null ist, reduciert sich auf eine Konstante" ist in der vorliegenden Ausarbeitung nicht enthalten.

. . .

H. A. Schwarz

---

[1] Au sujet de la remarque de WEIERSTRASS sur BERTRAND, page 84 de la rédaction de HURWITZ, notons que déjà A. M. AMPÈRE affirme, à la page 149 de son article «Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor, et à l'expression finie des termes qu'on néglige lorsqu'on arrête cette série à un terme quelconque» (Journal Ecole Polytechnique **6** (1806), 148—179), qu'une fonction quelconque de la variable x est dérivable en tout point, «à l'exception de certaines valeurs particulières et isolées de x».

Louis POINSOT dans son article «Des principes fondamentaux et des règles générales du calcul différentiel» (Correspondance sur l'Ecole impériale polytechnique, publiée par M. Hachette, 3 (1814), 111—123), après avoir donné p. 115 une définition de la fonction d'où sortira directement celle de DIRICHLET (Si on considère «une quantité y qui dépende continuellement d'une autre x par une loi quelconque, y sera ce qu'on appelle une fonction de x»), «démontre» que toute fonction continue est dérivable, «et c'est ce que la considération d'une courbe et de sa tangente, dont l'existence n'est pas douteuse, fait voir d'ailleurs avec la dernière évidence».

Ernest LAMARLE dans son livre «Exposé géométrique du calcul différentiel», Mallet-Bachelier, Paris 1861, fait aussi, pp. 96—99, une «démonstration» géométrique de la dérivabilité d'une fonction continue.

(1)

Differentialrechnung

Vorgetragen von Herrn Professor *Weierstrass*

(H. A. Schwarz)

Differentialrechnung

Im Gegensatz zu einer unveränderlichen Größe oder Constante, welche nur einen Wert annehmen kann, heißt eine veränderliche *Größe* solche, welche nicht bloß mehrere einzelne, sondern unendlich viele Werte annehmen kann. Es kann vorkommen, daß eine veränderliche Größe jeden möglichen positiven und negativen Wert annehmen kann, dann heißt sie eine *unbeschränkt* veränderliche Größe. Eine veränderliche Größe kann auch beschränkt veränderlich sein und eine untere oder obere Grenze, oder beide zugleich haben. Die Werte, welche eine veränderliche Größe annehmen kann, können einer oder mehreren *stetigen* Folgen angehören, wenn die veränderliche Größe alle möglichen Werte zwischen zwei Grenzen annehmen kann. Die Differentialrechnung beschäftigt sich nur mit solchen stetig veränderlichen Größen.

Zwei veränderliche Größen können in einem solchen Zusammenhang stehen, daß zu jedem bestimmten Werte der einen ein bestimmter Wert der andern gehört, so heißt die letztere eine *Funktion* der ersteren. Es kann sich diese Beziehung auf mehrere veränderliche Größen ausdehnen; hiernach unterscheidet man Funktionen mit einer, mit mehreren veränderlichen Größen. Gehört zu einem Werte der einen veränderlichen Größe stets nur ein Wert einer andern, so heißt die letztere eine eindeutige Funktion und einwertige Funktion der ersten. Gehören zu einem Werte der einen Größe mehrere Werte einer andern, so heißt die letztere eine mehrdeutige Funktion der ersteren. — Das Kriterium einer

(2)

Funktion ist, daß die eine veränderliche Größe sich im Allgemeinen um ein bestimmtes verändert, sobald eine bestimmte Aenderung der andern angenommen ist. —

. . .

Ist $f(x)$ eine Funktion von x und x ein bestimmter Wert, so wird sich die Funktion, wenn x in $x+h$ übergeht, in $f(x+h)$ ändern; die Differenz $f(x+h) - f(x)$ nennt man die Veränderung, welche die Funktion dadurch erfährt, daß das Argument von x in $x+h$ übergeht. Ist es nun möglich, für h eine Grenze δ zu bestimmen, sodaß für *alle* Werte von h, welche ihrem absoluten Betrage noch kleiner als δ sind, $f(x+h) - f(x)$ kleiner werde als irgendeine noch so kleine Größe ε, so sagt man, es entsprechen unendlich kleine Aenderungen des Arguments unendlich kleinen Aenderungen der Funktion. Denn man sagt, wenn der absolute Betrag einer Größe kleiner werden kann als irgendeine beliebig angenommene noch so kleine Größe, sie kann unendlich klein werden. Wenn nun

(3)

eine Funktion so beschaffen ist, daß unendlich kleinen Aenderungen des Arguments unendlich kleine Aenderungen der Funktion entsprechen, so sagt man, daß dieselbe eine *continuierliche Funktion* sei vom Argument, oder daß sie sich stetig mit diesem Argument ändere.

. . .

Lehrsatz. Wenn eine continuierliche Funktion von x für einen bestimmten Wert x_1 des Argumentes einen bestimmten Wert der Funktion y_1, und für einen andern bestimmten Wert x_2 einen bestimmten Wert der Funktion y_2 hat und ist y_3 ein beliebiger Wert zwischen y_1 und y_2, so muß zwischen x_1 und x_2 wenigstens ein solcher Wert x_3 liegen, für welchen die Funktion y_3 annimmt.

Zum Beweise dienen folgende Hülfssätze.

Ist $y = f(x)$ eine continuierliche Funktion von x und $y_0 = f(x_0)$ nicht Null, so werden die Werte $f(x)$ der Funktion, für alle Werte von x, welche in der Nachbarschaft von x_0 liegen, d.h. für welche die Differenz $x - x_0$ ihrem absoluten Betrage nach eine bestimmte Grenze nicht überschreitet, dasselbe Vorzeichen haben als $f(x_0)$.

. . .

(4)

. . .

Die Werte, welche eine continuierliche Funktion annimmt oder annehmen kann gehören auch einer stetigen Folge an; daher rechtfertigt sich ihre Benennung.

(5)

Grundbegriffe der Differentialrechnung

Die vollständige Veränderung $f(x+h) - f(x)$, welche eine Funktion $f(x)$ dadurch erfährt, daß x in $x+h$ übergeht, läßt sich im allgemeinen in zwei Teile zerlegen, von denen der eine der Aenderung h des Argumentes proportional ist, also aus h und einem von h unabhängigen — in Bezug auf h constanten — Faktor besteht, also unendlich klein wird, wenn h unendlich klein wird, oder gleichzeitig mit h unendlich klein wird, der andere aber nicht bloß an und für sich unendlich klein wird, wenn h unendlich klein wird, d.h. noch unendlich klein wird, wenn man ihn mit h dividiert.

Bezeichnet h eine Größe, welche unendlich kleine Werte annehmen kann, und ist $\varphi(h)$ eine beliebige Funktion von h von der Eigenschaft, daß sie für unendlich kleine Werte von h ebenfalls unendlich klein wird (d.h. daß sich stets sobald eine bestimmte noch so kleine Größe ε angenommen ist, eine Größe δ bestimmen läßt, sodaß für alle Werte von h, deren absoluter Betrag kleiner als δ ist, $\varphi(h)$ kleiner als ε wird) — so kann es vorkommen, daß auch noch $\frac{\varphi(h)}{h}$ eine Funktion von h ist, welche für unendlich kleine Werte von h selbst unendlich klein wird; in diesem Falle sagt man $\varphi(h)$ wird für unendlich kleine Werte von h im Verhältnis zu h unendlich klein. Der erste der Veränderung des Argumentes proportionale Teil der ganzen Veränderung der Funktion heißt *Differentialänderung* oder *Differential* und wird durch ein der Funktion vorgesetztes karakteristisches d bezeichnet, während ein vorgesetztes Δ die ganze Veränderung bedeutet. Dem analog schreibt man auch für h, da von x die einfachste Funktion x selbst ist, dx, eine von x ganz unabhängige Größe, welche unendlich klein werden kann. — Je kleiner dx

oder h genommen wird, umso weniger wird die Differentialänderung von der ganzen Veränderung abweichen, der Unterschied kann durch Verkleinerung von dx kleiner gemacht werden als je-

(6)

de noch so kleine Größe; man hat daher das Differential als die Veränderung erklärt, welche eine Funktion erleidet, wenn sich ihr Argument um eine unendlich kleine Größe ändert.

Das Differential einer Funktion hat also im allgemeinen die Gestalt $df(x) = p \cdot dx$; der Faktor p, mit welchem das Differential des Argumentes multipliciert werden muß, damit das Differential der Funktion entsteht, heißt *Differentialcoefficient* oder Differentialquotient. Er ist im allgemeinen wieder eine Funktion von x und da er auf eine bestimmte Weise von $f(x)$ abgeleitet ist, so heißt er die *Ableitung* der Funktion und wird geschrieben $f'(x)$. Diese Funktion ist also vollständig und unabhängig von der Veränderung des Argumentes.

Lehrsatz. Hat eine Funktion für einen bestimmten Wert x des Arguments einen Differentialquotienten, so kann es für die Funktion und denselben Wert von x keinen zweiten von diesem verschiedenen geben.

Es sei gelungen, $f(x+h) - f(x)$ in der angegebenen Weise zu zerlegen $= ph + h(h)$, worin (h), eine mit h unendlich klein werdende Größe bezeichnet; es ist zu zeigen, daß diese Zerlegung die einzig mögliche ist.

. . .

Dividiert man das Differential einer Funktion durch das Differential des Argumentes, so erhält man den Differentialcoefficienten; er heißt aus diesem Grunde auch Differentialquotient:

$$\frac{df(x)}{dx} = p = f'(x).$$

. . .

(7)

. . .

Hülfssätze zur Bestimmung der Differentiale

1.

Sind $f_1(h)$ und $f_2(h)$ zwei Funktionen, welche gleichzeitig mit ihrem Argument h unendlich klein werden, so ist auch ihre Summe $f_1(h) + f_2(h)$ eine solche Funktion.

Es sei ε eine beliebige noch so kleine Größe; man zerlege es in zwei Teile $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ und bestimme δ so, daß für alle Werte von h, welche ihrem absoluten Betrage nach δ nicht überschreiten, sowohl $f_1(h) < \varepsilon_1$ als auch $f_2(h) < \varepsilon_2$ ist, dann ist $f_1(h) + f_2(h) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Derselbe Satz gilt auch bei der Addition mehrerer solcher Funktionen, welche mit h gleichzeitig unendlich klein werden. —

(35)

. . .

Es gibt nun aber auch Größen, die sich durch die Einheit und Teile der Einheit nicht ausdrücken lassen; bei ihnen wendet man die Form der unendlichen Reihe an. Wenn irgend eine Größe in Form einer unendlichen Reihe ausgedrückt wird, so ist der Sinn der, daß die Summe der n ersten Glieder dem Werte der Größe zwar nicht gleich ist, daß sie aber durch Vergrößerung von n demselben so nahe gebracht werden kann, als man nur immer will, oder es muß der *Rest*, der bei n Gliedern am vollen Werte noch fehlt, von der Beschaffenheit sein, daß er durch Vergrößerung von n kleiner gemacht werden könne als jede beliebig angenommene noch so kleine Größe. Bezeichnet man also den Rest, der nach n Gliedern noch bleibt, mit R_n, so muß, wenn δ eine beliebig angenommene kleine Größe bezeichnet, sich stets eine Größe ε angeben lassen, sodaß für alle Werte von n die größer sind als ε, R_n dem absoluten Betrage noch kleiner ist als δ.

In der Differentialrechnung wird nun zu untersuchen sein, wie eine solche Darstellung oder Entwicklung einer Funktion durch eine unendliche convergente Reihe möglich ist und *die Bestimmung der Grenze des Restes* zu geben sein, welche letztere ein Kriterium für die Convergenz der Reihe abgibt.

...

(37)

...

Vermittelst dieser Reihenentwicklungen kann man $\sin x$ und $\cos x$ in eine unendliche Reihe entwickeln . . .

. . . Aus diesen Reihen kann man alle Eigenschaften der trigonometischen Funktionen herleiten . . .

(38)

...

Andere (*Cauchy's*) Restbestimmung für die *Taylor'sche* und Maclaurin'sche Reihe.

...

(42)

Funktionen mehrerer veränderlicher Größen

Es kann eine veränderliche Größe so im Zusammenhange mit zwei andern veränderlichen Größen stehen, daß zu je zwei Werten von diesen ein bestimmter Wert jener gehört, es heißt jene in diesem Falle eine Funktion dieser beiden. So gibt es auch Funktionen mehrerer veränderlicher Größen.

...

(43)

...

Lehrsatz. Es sei $f(x, y)$ eine Funktion von zwei Veränderlichen, welche selbst, so wie ihre ersten und zweiten Ableitungen stetig seien; es soll bewiesen werden, daß

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)}{\partial x} \quad \text{ist.}$$

...

(64)

Differentiation unendlicher Reihen

Es kommt häufig vor, daß eine Funktion aus unendlich vielen anderen zusammengesetzt ist. Es kann sich eine Funktion z.B. als eine Summe oder Produkt von unendlich Gliedern darstellen lassen. Es soll nun untersucht werden, wie sich eine solche durch eine unendliche *Reihe* dargestellte Funktion differentieren läßt; denn der Schluß, daß die früher entwickelten Regeln ohne weiteres auch für eine Summe aus unendlich vielen Gliedern gelten, ist nicht strenge und häufig sogar unrichtig.

Es sei nun eine Reihe gegeben, deren einzelne Glieder stetige Funktionen einer veränderlichen Größe seien und es sei angenommen,

$$f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots \text{ in infinitum}$$

daß dieselbe *convergent* sei für alle zwischen zwei gegebenen Grenzen liegende Werthe von x, so ist zunächst zu untersuchen, unter welchen Umständen diese Reihe eine continuirliche Funktion von x darstellt. Eine Reihe

$$S = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \cdots \text{ in inf.}$$

heißt überhaupt dann convergent, wenn sie so beschaffen ist, daß die Differenz der ganzen Reihe und der Summe der n ersten Glieder $S - S_n$ durch Vergrößerung von n so klein gemacht werden kann, als man immer will, oder wenn die Summe von r auf das n-te Glied folgenden Gliedern

$$t_n + t_{n+1} + t_{n+2} + t_{n+3} + \cdots + t_{n+r},$$

wo r eine ganz beliebige positive Zahl bedeutet, durch Vergrößerung von n kleiner als jede nur angebbare Größe gemacht werden kann, und zwar so, daß für alle Werthe x dasselbe n zu nehmen ist, wobei die Eigenschaft auch erhalten *bleibt*, wenn statt n $n+m$ gesetzt wird, wo m eine beliebige $+$ Zahl ist.

Der Sinn zeigt, daß diejenige Art der Convergenz gemeint ist, welche seither mit dem Namen „*Convergenz in gleichem Grade*" bezeichnet wird.

Soll also

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots \text{ in inf.} \qquad \text{für}$$

(65)

alle Werthe von x zwischen den Grenzen a und b convergent sein, so muß, legt man dem x einen bestimmten Werth innerhalb dieses Intervalles bei, die Summe

$$f_n(x) + f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+r}(x)$$

wie groß auch r sei, durch Vergrößerung von n kleiner gemacht werden können als irgend eine beliebig angenommene, noch so kleine Größe. Damit nun die Funktion $f(x)$ für alle Werthe ihres Arguments innerhalb des Intervalls von a bis b eine stetige Funktion sei, ist notwendig und hinreichend, wenn die einzelnen Glieder derselben stetige Funktionen von x sind, daß die Summe

$$f_n(x) + f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+r}(x)$$

wie groß auch r sei durch Vergrößerung von n für *alle* Werthe von x (d.h. in gleichem Grade) kleiner als jede beliebige noch so kleine Größe gemacht werden kann.

Denn es sei unter dieser Voraussetzung $x + h$ ein anderer Werth des Arguments innerhalb des Intervalls von a bis b, so kann die Summe von

$$f_n(x+h) + f_{n+1}(x+h) + f_{n+2}(x+h) + \cdots + f_{n+r}(x+h)$$

wie groß auch $n+r$ sei durch Vergrößerung von n, wie groß auch r sei, kleiner gemacht werden als jede beliebige noch so kleine Größe. Bezeichnet man nun mit $F_n(x)$ die Summe der n ersten Glieder der Reihe $f(x)$ und mit $F_n(x+h)$ die Summe der n ersten Glieder der Reihe $f(x+h)$, so ist es nach Vorhergehendem möglich, sowohl $f(x)-F_n(x)$ als auch $f(x+h)-F_n(x+h)$ durch Vergrößerung von n kleiner als jede beliebige noch so kleine Größe zu machen. Nun sei

$$f(x)=F_n(x)+R_n(x) \quad \text{und} \quad f(x+h)=F_n(x+h)+R_n(x+h)$$

so ist

$$f(x+h)-f(x)=\big(F_n(x+h)-F_n(x)\big)+\big(R_n(x+h)-R_n(x)\big).$$

Diese Differenz kann nun, durch Vergrößerung von n und Verkleinerung von h kleiner gemacht werden als jede beliebige noch so kleine Größe ε. Man zerlege ε in drei Theile ε_1, ε_2, ε_3 und wähle n so groß, daß sowohl $R_n(x+h)$ seinem absoluten Betrage nach kleiner

(66)

als ε_1, als auch $R_n(x)$ seinem absoluten Betrage nach kleiner als ε_2 wird, dann ist $R_n(x+h)-R_n(x)$ seinem absoluten Betrage nach kleiner als $\varepsilon_1+\varepsilon_2$. Hierauf bestimme man für h eine solche Grenze daß für alle Werthe von h, welche ihrem absoluten Betrage nach kleiner sind als δ, die Differenz $F_n(x+h)-F_n(x)$ kleiner als ε_3, dem absoluten Betrage nach, wird, dieses letztere ist aber möglich, weil $F_n(x+h)-F_n(x)$ aus n Differenzen von der Form $f_i(x+h)-f_i(x)$ besteht, und die Funktionen f_i nach der Voraussetzung stetige Funktionen von x sind. Es kann also $f(x+h)-f(x)$ durch geeignete Wahl von n und h kleiner als $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$, also kleiner als ε gemacht werden und es ist somit bewiesen, daß wirklich die Reihe $f(x)=f_0(x)+f_1(x)+\cdots$ in inf. eine stetige Funktion von x darstellt, wenn die einzelnen Glieder stetige Funktionen von x sind und die Reihe für alle Werthe von x „in gleichem Grade convergent" ist. Eine Potenzreihe ist stetig wenn sie convergent ist.

...

(67)

...

Mann kann nun drei Arten von Potenzreihen unterscheiden; solche, welche für jeden Werth von x convergiren, solche welche nur für Werthe von x zwischen gewissen Grenzen convergiren und solche, welche für keinen Werthe von x convergiren.

Nun soll das Differential einer solchen Reihe bestimmt werden. Dazu dient folgender Hülfsatz:

Sind $f(x)$ und $F(x)$ zwei stetige Funktionen und man kann beweisen, daß für je zwei bestimmte Werte x_1 und x_0 des Arguments der Quotient

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

stets liegt zwischen dem größten und dem kleinsten Werthe, den $F(x)$ in dem Intervalle $x_0 \ldots x_1$ annehmen kann, so ist

(68)

$F(x)$ die Ableitung von $f(x)$.

...

Es seien nun

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots \text{ in inf.}$$

und

$$g(x) = f_0'(x) + f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots \text{ in inf.}$$

zwei in gleichem Grade convergente Reihen, deren Glieder stetige Funktionen von x sind, also $f(x)$ und $g(x)$ seien stetige Funktionen von x und es seien Glieder der Reihe $g(x)$ so beschaffen, daß jedes die Abteilung des entsprechenden Gliedes der Reihe $f(x)$ ist, so soll bewiesen werden, daß $g(x)$ die Abteilung von $f(x)$ ist ...

Appendice III

Karl Weierstrass

Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen

(Sommer Semester 1874) Rédigé par G. Hettner
(Mathematisches Institut der Universität, Göttingen)

(Extraits)

(16)

...

Vorher wollen wir jedoch über die *Rechnung mit unendlich vielen Elementen* sprechen. Es ist auf mannigfache Weise möglich, aus der Reihe der Elemente unendlich viele herauszugreifen, z.B. die beiden Reihen

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$$

$$1, \frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}, \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}, \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}, \ldots$$

haben jede unendlich viele Elemente, sie sind aber von einander verschieden. Wenn wir uns die Gesamtheit der Reihe vorstellen, und wissen, welche Elemente in der Reihe vorkommen, und wie oft jedes einzelne, so haben wir eine arithmetische Größe, denn das Wesen einer arithmetischen Größe besteht darin, daß angegeben werden kann, welche Elemente in ihr enthalten sind und wie oft jedes einzelne, und dies auch bei einer unendlichen Anzahl von Elementen bestehen.

Die Schwierigkeit, die sich jetzt erhebt, besteht darin, daß wir genau den Begriff der Gleichheit und des Größer- und Kleinerseins feststellen. Wir hatten

(17)

oben festgesetzt, daß zwei Größen als gleich zu betrachten seien, wenn die eine Größe in die andere umgeformt werden kann. Zu einer Umformung gehört jedoch eine endliche Anzahl von Operationen, und es fragt sich daher, ob der Begriff der Gleichheit durch diese Definition erschöpft ist.

Es sei a eine Größe, die eine endliche oder unendliche Anzahl von Elementen besitzt und b eine Größe mit einer endlichen Zahl von Elementen. Dann ist b ein Bestandteil von a, wenn jeder Element von b in a vorkommt. Ferner ist b auch ein Bestandteil von a', wenn es so umgeformt werden kann, daß alle seine Elemente in a' enthalten sind. Wir setzen nun fest, zwei Größer a und a' heißen gleich, wenn jede Größe b, die in a enthalten ist, auch in a' enthalten ist.

Wenn die Größe b gleich der Einheit ist, und eine beliebige ganze Zahl immer kleiner ist als eine gewisse Anzahl der Elemente von a, welches z. B. die Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

sein mag, so sagen wir die Größe a sei unendlich groß. Zwei unendlich große Größen sind nicht vergleichbar, sie können auch stets als gleich betrachtet werden. Jedoch führt es zu keinem Resultat,

(18)

auf unendliche Zahlgrößen den Begriff der Gleichheit anzuwenden, wir wollen ihn daher nur auf endliche Größen anwenden.

Wir setzen daher voraus, die Größen a und a' seien endlich. Dann kann nicht jedes belibige Vielfache von 1 in ihnen enthalten sein, möglicherweise ist es die Einheit auch nicht. Dann läßt sich wenigstens ein Element $1/n$ der Einheit finden, das in ihnen enthalten ist, und wenn die Größen a und a' endlich sind, so wird $1/n$ auch immer nur eine endliche Anzahl von Malen in ihnen enthalten sein. Wir werden daher bei endlichen a und a' stets auf ein Vielfaches von $1/n$ kommen, das nicht mehr in ihnen enthalten ist, es wird z. B. $1/n$ m mal in a und a' enthalten sein, aber nicht $m+1$ mal. Wir können daher jetzt folgende Definition des Gleichheit aufstellen: Zwei Zahlgrößen a und a' heißen gleich, wenn sowohl die Einheit, wie jeder Teil derselben in a so oft enthalten ist wie in a'.

Diese Definition ist mit der obigen identisch, wenn wir die Größe b, die wir zur Vergleichung von a und a' annahmen, als ein Aggregat der Einheit und ihrer Elemente wählen.

Wenn zwei Größen a und a' einander nicht gleich sind, so muß es notwendig Elemente geben, von denen

(19)

ein bestimmtes Vielfaches noch in der einen Größe enthalten ist, während das nämliche Vielfache in der anderen Größe nicht mehr enthalten ist. Wir sagen dann, die eine Größe ist größer als die andere ...

(20)

...

Wenn eine Zahlgröße einen endlichen Wert hat, so kann sie immer in zwei zerlegt werden, von denen die eine aus einer endlichen Gliederzahl, die zweite aus einer unendlichen Anzahl von Elementen besteht, und zwar bleibt die letztere kleiner als eine beliebig gegebene Zahlgröße ...

(21)

...

Wir können demnach von jeder endlichen Zahl eine endliche Anzahl von Elementen so ausscheiden, daß die übrigbleibenden unendlich vielen Elementen kleiner als eine beliebig gegebene Zahlgröße sind.

Wir können nun den Begriff der Endlichkeit so festsetzen, daß eine Zahl endlich ist, wenn es möglich ist, von ihr eine endliche Anzahl von Elementen so auszuscheiden, daß der Rest kleiner als jede gegebene Größe bleibt.

...

(22)

. . .

Wir wollen nun das Criterium entwickeln, wenn wir aus unendlich vielen Zahlgrößen Summen bilden können, wenn jede Zahlgröße wieder aus unendlich vielen Elementen besteht.

Multiplicieren wir z.B. die beiden Zahlgrößen mit den Elementen

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots,$$

welche endliche Summen haben, mit einander, so erhalten wir eine derartige Zahlgröße, bei der jedes Element wieder aus unendlich vielen

(23)

Elementen besteht, nämlich

$$\begin{array}{l} 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots \\ \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{1}{48}, \ldots \\ \frac{1}{9}, \frac{1}{18}, \frac{1}{36}, \frac{1}{48}, \frac{1}{96}, \ldots \\ \frac{1}{27}, \frac{1}{54}, \frac{1}{108}, \frac{1}{216}, \frac{1}{432}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Sollen nun diese sämtlichen Elemente zu einem einzigen Aggregat vereinigt werden, so muß zunächst von jedem Elemente bestimmt sein, wie oft es vorkommt, d.h. es ist die erste Bedingung für die Möglichkeit der Summation, daß jeder Bestandteil in der Reihe nur eine endliche Anzahl mal vorkommt. Denn kommt irgend ein Bestandteil unendlich oft vor, so wird auch die Summe sämtlicher Bestandteile unendlich groß und die Summation hat keinen Sinn mehr. Eine selbstverständliche Bedingung ist ferner die, daß keines der Elemente der Reihe unendlich groß ist. Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so ist die Addition gleicher Elemente, die in der Reihe enthalten sind, formell möglich. Wir mögen dadurch zu den Zahlgrößen

$$a, a', a'', a''', \ldots$$

gelangen, die nun noch zu addieren sind. Die Summe dieser Zahlgrößen wird nun endlich sein,

(24)

wenn es stets ein Vielfaches der Einheit gibt, welches größer ist als die Summe beliebig vieler dieser Elemente a.

. . .

Nehmen wir nun an, daß es ein Vielfaches g der Einheit giebt, so daß

$$g > \sum a$$

d.h. also, daß die Reihe convergiert ...

(27)

Ist also die Summe von unendlich vielen Gruppen wobei jede Gruppe wieder aus unendlich vielen Elementen besteht, endlich, so können wir diese Gruppen auflösen und neue Gruppen bilden. Die Summe dieser neuen Gruppen ist endlich und gleich der Summe der ursprünglichen Gruppen.

Diese Sätze bilden die Grundlage für die ganze Reihentheorie.

Wenn zwei Zahlengrößen so dargestellt werden können, daß in ihnen nur dieselben Elemente vorkommen, und jedes Element in beiden gleich oft, so sind sie identisch.

Wir wollen nun zeigen, daß jede Zahlengröße in einem Decimalbruch dargestellt werden kann. Ein Decimalbruch ist nämlich eine Summe, in der die Elemente

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$$

vorkommen und zwar jedes Element nur 1 bis 9 mal. Zwei Zahlengrößen, die in einem Decimalbruch dargestellt sind, sind also nur identisch, wenn sie in sämtlichen einzelnen Ziffern übereinstimmen.

Wir wollen jedoch nicht den speciellen Satz beweisen, daß sich jede Größe in einem Decimalbruch darstellen läßt, sondern folgenden allgemeinen:

(28)

Haben wir eine Reihe ganzer Zahlen

$$1, g_1, g_2, g_3, \dots \quad \text{wo} \quad g_1 < g_2 < g_3$$

und bilden die Elemente, die die Größen $g_1, g_2, g_3, \dots$ zu Nennern haben, so ist es stets möglich, durch eine Reihe solcher Elemente jede Zahlgröße darzustellen ...

(31)

...

Wir wollen nun zeigen, daß jede Zahl auf die Form

(32)

$$a = h_0 + h_1 \frac{1}{g} + h_2 \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g^3} h_3 + \cdots$$

gebracht werden kann, und zwar so, daß $h_1, h_2, h_3, \dots$ die Werte $0, 1, 2, 3, \dots, g-2, g-1$ erlangen. Für $g=10$ ist dies die *Entwicklung einer Zahl in einen Decimalbruch.*

...

(35)

...

Wir erhalten daher ganz bestimmte Werte für $h_0, h_1, h_2, \dots$ mithin ist es stets möglich, a auf die Form

$$h_0 + h_1 \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} h_2 + \cdots$$

zu bringen und zwar nur in einer einzigen Weise.

Daher ist die Entwickelung einer beliebigen Zahl in einen Decimalbruch stets möglich und zwar nur in einer einzigen Weise.

Unter der Zahl a soll nun nichts weiter als eine solche Zahlenreihe verstanden werden.

...

(36)

...

Rationalzahlen sind solche, die aus einer endlichen Reihe von Zahlen bestehen. Irrational soll jede Zahl heißen, die nicht rational ist. Doch diese Definition wäre nichtssagend, wenn nicht bewiesen würde, daß es solche Zahlen giebt. Wir wollen jedoch an einem Beispiel zeigen, daß es wirklich derartige irrationale Zahlen giebt.

...

Appendice IV

Karl Weierstrass

Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre

Rédigé par G. Thieme (Sommer Semester 1886)
(Humboldt-Universität zu Berlin, Mathematisches Institut)

(Extraits)

(35)

... Legen wir jetzt diese unendliche Reihe von Elementen der Größenbildung zugrunde, so kann man offenbar Zahlgrößen bilden, die aus einer unendlichen Zahl von Elementen bestehen. Eine solche Zahl ist bestimmt, wenn angegeben wird, welche Elemente vorkommen, und wie oft jedes Element vorkommt. So hat z.B. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$ einen ganz bestimmten Wert. Eine Schwierigkeit besteht nur darin zu definieren, was man unter der Gleichheit zweier

(36)

aus unendlich vielen Elementen gebildeten Zahlgröße zu verstehen hat.

...

(37)

...

Für Zahlengrößen, die aus einer endlichen Anzahl von Elementen bestehen, ließ sich der Begriff der Gleichheit durch den der Aequivalenz ersetzen. Ist ferner a eine beliebige und c eine aus einer endlichen Anzahl von Elementen gebildete Zahlgröße, so sagen wir, c sei in a enthalten, wenn man a so verwandeln kann, daß die Elemente von c sämtlich in denen von a vorkommen, und wenn damit noch nicht die Elemente von c sämtlich in denen von a vorkommen, und wenn damit noch nicht alle Elemente von a erschöpft sind. Sind nun a und b zwei beliebige Zahlgrößen, so sollen sie gleich heißen, wenn jede Zahl c, die in der einen enthalten ist, auch in der anderen enthalten ist. Man braucht nur nachzuweisen, daß dieser erweiterte Begriff der Gleichheit den früheren in sich schließt. Ist dies festgestellt, so sieht man sofort, daß auch hier $p=r$ aus $p=q$, $q=r$ folgt. Ist weiter c in a enthalten, nicht aber in b, so sagen wir a sei größer als b. Eine

Zahlgröße, die jede andere enthält, heißt unendlich groß. Es wird sich die Notwendigkeit herausstellen, die mathematischen Operationen auf endliche Größen zu beschränken. Die Entscheidung der Gleichheit zweier Größen kann natürlich nicht dadurch vollführt werden, daß man jede Größe c darauf prüft, ob sie in der einen und in der andern enthalten ist. Wenn c in einer Größe a enthalten ist, so ist dies auch mit jeder andern der Fall, die kleiner als c ist. Sind ferner zwei Zahlgrößen a und a' ungleich, so müssen sich unendlich viele c angeben lassen, die in der einen enthalten sind, in der andern aber

(38)

nicht. Nachdem diese Definitionen festgestellt sind, hat nun das Rechnen mit aus unendlich vielen Elementen gebildeten Zahlgrößen keine Schwierigkeit mehr. Liegt eine Summe von zwei Zahlgrößen vor und kommt ein bestimmtes Element in der einen p-, in der andern q-mal vor, so kommt es in der Summe $(p+q)$-mal vor. Um dies nun erweitern zu können auf eine Summe von *unendlich* vielen Summanden, muß noch folgendes vorausgeschickt werden: Wir haben bereits den Begriff einer unendlich großen Zahl definiert. Betrachten wir z. B. die Zahlgröße, deren Elemente $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ sind, so beweist man in bekannter Weise, daß jede Zahl c in ihr enthalten ist. Man zeigt nämlich, daß es eine endliche Zahl von Gliedern gibt, die für sich genommen eine Größe bilden, die größer ist als c. Zwischen zwei solchen unendlich großen Größen ist nun weiter keine Vergleichung möglich. Da nun die Zahlgrößen in der Mathematik hauptsächlich benutzt werden, um das Verhalten einer extensiven Größe zu einer andern darzustellen, so ist klar, daß solche Zahlgrößen immer einen endlichen Wert haben, und deshalb beschränkt man sich beim Rechnen auf solche. Handelt es sich nun um die Summation unendlich vieler Größen, so können, wenn man die Regeln der Summation einer endlichen Anzahl von Summanden auf diesen Fall anwendet, die beide Fälle eintreten, daß die Summe einen unendlichen oder endlichen Wert hat. Nun ist aber eine Zahlgröße nur

(39)

dann bekannt, wenn für jedes Element angegeben werden kann, wie oft es vorkommt. Soll daher überhaupt eine unendliche Reihe von Größen summierbar sein, so ist zunächst erforderlich, daß jedes Element der Reihe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ nur in einer endlichen Anzahl — auch 0-mal — vorkommen darf. Es fragt sich, wann die Summe einen endlichen Wert hat, vorausgesetzt, daß jeder einzelne Summand dieser Bedingung genügt. Hierzu stellen wir folgende Überlegung ein: Soll $a_1+a_2+a_3+\cdots$ endlich sein, so muß es Größen geben, die größer als dieser endliche Wert sind, mithin auch größer als jede beliebige aus einer endlichen Anzahl gebildete Summe. Dies letztere ist das uns bei Entscheidung der in Rede stehenden Frage leitende Kriterium. Daß dies nicht nur die notwendige, sondern auch die hinreichende Bedingung ist, folgt daraus, daß wir Größen angeben können, die größer sind als eine beliebige aus $a_1, a_2, \ldots$ gebildete Summe, sodaß in der Tat die Reihe einen endlichen Wert hat nach unserer früheren Definition. Hierin ist unter anderem auch der Satz ausgesprochen, daß es unter den Gliedern der Reihe $a_1, a_2, \ldots$ falls diese Summe einen endlichen Wert hat, nur eine endliche Anzahl gibt, die größer als eine noch so kleine Größe g sind. Gewöhnlich denkt man sich die Reihe der Summanden als eine wohlgeordnete, indem jeder derselben eine ganz bestimmte Stelle hat. Es läßt sich dann leicht zeigen, daß man durch fortgesetzte Addition jedes der Ele-

(40)

mente bekommt und zwar wirklich so oft, als es in der Summe vorkommt. Denken wir uns eine kleine Größe g, so gibt es jedenfalls nur eine endliche Anzahl von Gliedern $a_1, a_2, \ldots$ die $> g$ sind. Man drückt dies so aus, daß man sagt: die Glieder werden unendlich klein, wenn die Stellenzahl unbegrenzt wächst. Diese Bedingung ist aber nicht ausreichend; um eine solche zu erhalten, pflegt man so zu verfahren: Man bezeichnet die Summe der n ersten Glieder mit s_n und betrachtet die Reihe der Größen $s_1, s_2, s_3, \ldots$ und soll nun die Summe einen endlichen Wert haben, so muß s_n stets unter einer gewissen Grenze bleiben, d.h. nimmt man n hinlänglich groß, so muß

$$s_{n+r} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+r}$$

für jedes r beliebig klein gemacht werden können. Umgekehrt kann man zeigen, daß, wenn man nach Annahme einer Größe g für n eine Grenze r so herstellen kann, daß die vorstehende Differenz, wenn $r > 0$, kleiner als g ist, die Reihe einen endlichen Wert hat.

...

(52)

...

Wir haben oben von den Werten aus positiven und negativen Gliedern gebildeter Reihen nur unter der beschränkenden Annahme gehandelt, daß das Aggregat der positiven und das der negativen Glieder für sich betrachtet endliche Werte haben. Da es sich in der Entwicklung der Analysis bald gezeigt hat, daß diese Bedingung zwar eine hinreichende, keineswegs aber notwendige für die Endlichkeit der Gesamtsumme ist, so wollen wir jetzt Reihen untersuchen, bei denen die absoluten Beträge der positiven und der negativen Glieder für sich betrachtet nicht mehr endlich sind. So hat z.B. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ wie bekannt, einen endlichen Wert, ohne daß $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$ oder $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots$ endliche Werte besitzen. Eine besondere Schwierigkeit bei der Betrachtung solcher Reihen liegt in dem Umstande, daß sie nicht stets denselben Wert ergeben, wenn man die Reihenfolge der Glieder ändert und dann summiert. Redet man nämlich überhaupt von einer Reihe, so setzt man dabei stillschweigend voraus, daß eine bestimmte Reihenfolge der Glieder festgesetzt sei; bezeichnet man dann die Summe der ersten n Glieder mit s_n, so definiert man gewöhnlich als den Wert der Reihe den Grenzwert für $n = \infty$, d.h. $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$. Nach der arithmetischen Anschauung, die wir hier

(53)

vertreten, ist dies unzulässig, wir gehen nicht von der Voraussetzung einer Grenze aus, sondern betrachten den Grenzbegriff als etwas, das arithmetisch definiert werden muß.

...

Wenn man dagegen rein arithmetisch verfahrend zunächst Zahlgrößen definiert hat, die aus einer endlichen Anzahl von Elementen zusammengesetzt sind, so hat es gar keinen Sinn, von der Grenze zu sprechen, der sich mit wachsender Anzahl der Elemente eine Zahlgröße nähert, weil in dem betrachteten Ge-

(54)

biet eine solche im allgemeinen nicht vorhanden ist. In dem von uns jetzt zu behandelnden Falle tritt eine neue Schwierigkeit ein. Wenn nämlich die positiven und die negativen Glieder für sich betrachtet nicht bereits etwas Endliches darstellen, so kann man sich auch keine Vorstellung davon machen, wie die Reihe, — in der Gestalt wenigstens, wie sie vorliegt — etwas Bestimmtes, Endliches darstellen können. Diesem Übelstande kann man leicht dadurch begegnen, daß man die Reihe in eine andere verwandelt, bei welcher dies nicht mehr der Fall ist, z.B.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots.$$

Dazu erinnern wir an den Satz, daß eine aus positiven und negativen Gliedern gebildete Reihe, bei der die Reihe der absoluten Beträge endlich ist, selbst einen endlichen Wert hat. Sobald man aber die Reihe auf eine solche reduzieren kann, die man als *unbedingt* summierbar bezeichnet, ist die Wertbestimmung etwas Feststehendes. Man kann nun auch leicht zeigen, unter welchen Bedingungen eine aus positiven und negativen Gliedern bestehende Reihe in eine solche übergeführt werden kann. Bei einer solchen unbedingt summierbaren Reihe beweist man nämlich sehr leicht, daß

$$\lim_{n\to\infty}|S_{n+r}-S_n|=0$$

für jedes r, d.h. daß die Änderung von S_n mit wachsender Stellenzahl beliebig klein wird. Man sieht nun sehr leicht

(55)

ein, daß diese Bedingung auch von einer aus positiven und negativen Gliedern bestehenden Reihe erfüllt sein kann, ohne daß die Summe der positiven sowie die der negativen Glieder für sich betrachtet endliche Werte haben, wie es z.B. bei $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots$ der Fall ist. Wir wollen nun den Begriff der Zahlgröße dadurch erweitern, daß wir jede Reihe, welche die eben auseinandergesetzte Eigenschaft hat, unter ihn einordnen; dabei ist aber wesentlich die Reihenfolge der Elemente, durch die die betreffende Zahlgröße definiert ist. Ist nun obige Bedingung erfüllt, so läßt sich sehr leicht folgendes beweisen: Faßt man unter Beibehaltung der Reihenfolge immer eine gewisse Anzahl der Glieder der vorgelegten Reihe $a_1+a_2+a_3+\cdots$ in ein Glied zusammen, so entsteht eine neue Reihe $b_1+b_2+\cdots$. Man kann nun diese Überführung auf beliebig viele Weisen machen so, daß die neue Reihe unbedingt summierbar ist. Damit dann die Wertbestimmung eine unbedingte sei, ist notwendig und hinreichend, daß man bei allen Verwandlungsweisen stets Reihen von demselben Werte erhält. Solche unbedingt konvergente Reihen nämlich sind nach unsern allgemeinen Sätzen miteinander vergleichbar.

Das einzuschlagende Verfahren gestaltet sich nun im einzelnen so:

Es sei

$$a_1+a_2+\cdots$$

die vorgelegte Reihe; es sei

$$g_1+g_2+\cdots$$

eine Reihe, die nur aus positiven Gliedern besteht und von der man weiß, daß sie einen endlichen Wert hat, sodaß also $\lim_{n\to\infty} g_n=0$ ist. Man kann nun zunächst eine gewisse Anzahl

(56)

von Gliedern der ersten Reihe so abtrennen, daß beliebig viele Glieder des Restes summiert kleiner als g_1 sind. Nach unserer Voraussetzung nämlich kann durch passende Wahl des n die Differenz

$$|S_{n+r}-S_n|<\delta$$

werden, man kann also $\delta=g_1$ wählen, um den eben angedeuteten Zweck zu erreichen. Es sei $n=2$ und $S_2=b_1$. Mit der Restreihe verfahren wir ebenso; der Rest dieser Reihe soll nämlich beliebig viele Glieder enthalten, deren Summe kleiner als g_2 ist. Die von ihr abgetrennte Summe sei b_2. So fortfahrend erhalten wir eine Reihe von Größen $b_1, b_2, \ldots, b_n$, wo allgemein $|b_{r+1}|<g_r$ ist. Somit ist

$$|b_2+b_3+b_4+\cdots+b_n|<\sum_1^{n-1} g_r,$$

da nun die rechte Seite der Voraussetzung zufolge einen endlichen Wert hat, so ist dies auch mit der linken der Fall, und da b_1 endlich ist, so hat die ganze Reihe, wenn man n beliebig wachsen läßt, einen endlichen Wert. Es ist nun zu zeigen, daß, wenn wir dieselbe Operation auf andere Weise ausführen, und so eine Reihe $c_1, c_2, c_3, \ldots$ bilden, deren Summe denselben Wert hat wie die erste. Ist nämlich die Reihe

$$b_1+b_2+\cdots+b_m+R_m$$

so ist

$$R_m<g_{m-1}+g_m+\cdots$$

und dies kann bei der über $\sum g_r$ geltenden Voraussetzung durch Vergrößerung von m so klein gemacht werden, wie man nur will. Ebenso ist die Reihe

$$=c_1+c_2+\cdots+c_p+R'_p.$$

(57)

Setzt sich nun $b_1+b_2+\cdots+b_m$ aus den ersten n Gliedern der Reihe $a_1+a_2+\cdots$ zusammen, so ist dies einmal

$$=S_n+R_m$$

sodann

$$=S_r+R'_p,$$

wenn r für die c dieselbe Bedeutung hat als n für die b. Die Differenz der beiden Ausdrücke ist

$$=S_n-S_r+R_m-R'_p.$$

Nun können mit wachsendem m und p R_m und R'_p so klein gemacht werden als man will, ebenso S_n-S_r zufolge der über die Reihe geltenden Voraussetzung.

Somit kann die Differenz so klein gemacht werden, wie man nur verlangt; mit anderen Worten, hat eine aus positiven und negativen Gliedern gebildete Reihe einen endlichen Wert, so kann man diesen erhalten durch Bildung von beliebig vielen absolut summierbaren Reihen. Wir sehen, daß wir ohne alle Grenzbetrachtungen unsere Reihe unter den Begriff der Zahlgröße eingeordnet haben; wir können mit ihnen jetzt die Operationen der Addition, Subtraktion u.s.w. vornehmen; daß wir hierbei erst die auseinandergesetzte Reduktion vornehmen müssen, braucht wohl nicht erst näher begründet zu werden.

§ 6. Einführung des Begriffs einer veränderlichen Größe

Beweis eines hierauf bezüglichen Fundamentalsatzes

Unter einer veränderlichen Größe versteht man eine Größe, die so definiert ist, daß es unendlich viele Größen gibt, die der gegebenen Definition entsprechen. So z.B. bilden im Gebiete

(58)

der aus einer Haupteinheit gebildeten Zahlen diejenigen Zahlen, welche Vielfache der Haupteinheit sind, veränderliche Größen. Man hat zwischen e.g. realen und komplexen veränderlichen Größen zu unterscheiden. Gewöhnlich nennt man also nur solche Größen veränderlich, die unendlich viele Werte annehmen können; an und für sich ist eine Größe schon veränderlich, die überhaupt verschiedene Werte annehmen kann. Man nennt unbeschränkt veränderlich die Größen bei deren Definition man überhaupt keine Beschränkung macht. Solche Beschränkungen der Veränderlichen können in mannigfaltiger Weise gemacht werden, so z.B. wenn man sich auf die realen Werte zwischen zwei Grenzen a und b oder auf die komplexen Werte beschränkt, die einem begrenzten Stück der Zahlenebene entsprechen. Mit der Definition einer Veränderlichen hängt zusammen der Begriff der *Grenze* von veränderlichen Größen. Es fragt sich, welchen Begriff man damit im arithmetischen Sinne zu verbinden hat. Ist x eine veränderliche Größe und ist a eine solche Stelle, daß in jeder Nähe derselben es unendlich viele x gibt, die zu den definierten gehören, so ist a eine Grenze der veränderlichen Größe, falls a nicht selber zu den definierten Stellen gehört. Offenbar kann es solcher Grenzstellen mehrere, ja sogar unendlich viele geben, wie z.B. wenn wir eine veränderliche Größe dadurch definieren, daß ihr alle Zahlgrößen entsprechen sollen, die sich aus einer endlichen Anzahl von Elementen zusammensetzen lassen, die sämtlich aus einer Haupteinheit und deren Teilen gebildet sind. Dann würden nämlich alle rationalen Zahlgrößen zu den

(59)

definierten gehören; in jeder Nähe jeder irrationalen Zahlgröße gibt es aber beliebig viele rationale Zahlgrößen, die ihr beliebig nahe kommen. Somit ist jede beliebige irrationale Zahlgröße eine Grenze der rationalen, d.h. der in diesem Falle definierten. Wie wird nun aber der Unterschied zwischen rationalen und irrationalen Größen rein arithmetisch zu definieren sein? Wenn wir von der Existenz rationalen Zahlgrößen ausgehen, so hat es keinen Sinn, die irrationalen als Grenzen derselben zu definieren, weil wir zunächst gar nicht wissen können, ob es außer den rationalen noch andere Zahlgrößen gebe. Nur wenn man es mit extensiven Größen zu tun hat, kann man von der Grenze einer Strecke sprechen, nicht aber, wenn man sich auf den rein arithmetischen Standpunkt stellt. Aber die Zahlgrößen, wie wir sie im Vorstehenden definiert haben, umfassen die rationalen Zahlen sämtlich, enthalten aber auch noch andere. Betrachten wir z.B. die Zahl e, die zusammengesetzt ist aus den Elementen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{n!}, \ldots$ so ist dies eine wohldefinierte Reihe, die eine ganz bestimmte Zahlgröße definiert; gleichwohl hat *Hermite* zu zeigen vermocht, daß es keine rationale Zahlgröße gibt, die ihr nach den aufgestellten Definitionen gleich ist, daraus geht hervor, daß das Größengebiet mit den rationalen Zahlen nicht erschöpft ist. Ja es ist als eine Ausnahme zu betrachten, wenn eine aus unendlich vielen Elementen gebildete Zahlgröße einer rationalen äquivalent ist. Eine rationale Zahlgröße definierten wir zunächst als eine aus einer endlichen Anzahl

(60)

von Elementen zusammengesetzten Größe, daraus folgt, daß wir sie darstellen können als ein Vielfaches eines positiven oder negativen Teiles der Haupteinheit. Das Gebiet der aus einer Haupteinheit und deren Teilen gebildeten Zahlgrößen umfaßt also sowohl die rationalen als auch die irrationalen Zahlgrößen. Dies festgestellt, kann man nun allerdings die irrationalen Zahlgrößen als Grenzen von veränderlichen rationalen Größen betrachten. Denn von einer aus unendlich vielen Elementen gebildeten Zahl können wir immer soviel Elemente absondern, daß der Rest kleiner ist als eine beliebig kleine Größe δ, es gibt also unendlich viele rationale Zahlen, die der betrachteten irrationalen so nahe kommen, wie man nur immer will. Nachdem dies gezeigt ist, erkennen wir auch die schon oben an einem Beispiel gezeigte Möglichkeit, daß eine veränderliche Größe unendlich viele Grenzstellen haben kann.

Wir kommen nun zu der Entwicklung eines Satzes, der nicht nur für einen der wichtigsten der Größenlehre zu halten ist, sondern der überhaupt das nötige Fundament für die meisten hierher gehörigen Untersuchungen bildet. Ein Beispiel wird dies klar machen. Betrachten wir nämlich zwei Reihen:

$$g_0(x) + g_1(x) + \cdots \text{ in inf.}$$

$$h_0(x) + h_1(x) + \cdots \text{ in inf.},$$

wo die $g_r(x)$ und $h_r(x)$ ganze rationale Funktionen von x sind, mit beliebigen Koeffizienten, die unter anderem auch ratio-

(61)

nal sein können. Diese Reihen können, wenn man sich auf reelle Werte des Arguments beschränkt, zwischen a und b definiert sein, wenn man dagegen die Betrachtung auf komplexe Werte des Arguments ausdehnt, für einen zusammenhängenden Teil der Zahlenebene. Diese Reihen können nun einander gleich sein, und es entsteht die Frage, welche Voraussetzungen dazu hinreichend sind; d.h. sie sollen für jeden Wert von x innerhalb des Gebietes für das sie definiert sind, denselben Wert ergeben. Wenn sich die eine Reihe in die andere durch analytische

Operationen überführen läßt, so genügt der Nachweis der Konvergenz für beide, um dies einzusehen. Aber es kommen Fälle vor, wo von einer solchen Umformung nicht die Rede sein kann, und da muß man dann die Gleichheit erschließen. Da fragt es sich nur, ob nicht vielleicht eine geringere Anzahl von Bedingungen ausreicht, um diese Gleichheit festzustellen, so z.B. ob man die Gleichheit nur für eine geringere Reihe von Werten von x nachzuweisen braucht, um sie dann ganz allgemein erschlossen zu haben. Ist z.B. die Reihe nur definiert für einen zusammenhängenden Teil der Zahlenebene, so fragt es sich, ob man nicht schon aus der Gleichheit der Funktionswerte längs einer ganz in dem betrachteten Flächenstück verlaufenden Linie die Gleichheit derselben im gesamten Gebiet, für welches die definiert sind, erschließen könne. Ein solcher Nachweis scheint auf den ersten Blick etwas sehr Schwieriges zu sein; in der Tat ist für ihn die Einführung eines neuen Begriffs, des Begriffs der *gleichmäßigen*

(62)

Konvergenz erforderlich. Da wir schon früher Gelegenheit gehabt haben, die Bedeutung und den Inhalt dieses Begriffes kennen zu lernen, so wollen wir an dieser Stelle auf ihn nicht näher eingehen. Nur soviel sei erwähnt, daß er bei allen derartigen Beweisen eine große Rolle spielt. In letzter Linie aber stützt sich der in Rede stehende Nachweis auf folgenden Satz, den wir jetzt entwickeln:

Ist x eine unbeschränkt veränderliche Größe, die also — wie man sagt — eine einfache Mannigfaltigkeit bildet und geometrisch durch eine Gerade repräsentiert wird, und wird in ihr eine andere veränderliche Größe x' so definiert, daß die Anzahl der definierten Stellen unendlich ist, so gibt es im Gebiete von x, welches für x' definiert ist, mindestens eine Stelle, in deren Nähe sich unendlich viele der definierten Stellen x' befinden. Eine solche Stelle kann entweder selbst zu den definierten gehören, oder nicht; im letzteren Falle ist sie eine „*Grenzstelle*".

. . .

Appendice V

Charles Hermite

Rapport sur Weierstrass

Séance du 7 juin 1892. (Archives de l'Institut de France, Paris)

Mr Weierstrass occupe depuis plus de trente ans le premier rang dans la science mathématique de notre époque. Ses travaux ont eu pour objet les parties les plus élevées de l'analyse, son nom est étroitement lié à celui de Riemann dans les découvertes relatives aux transcendantes abéliennes, tout récemment enfin des recherches d'une autre nature, sur la théorie des fonctions qui touchent aux fondements de la science, ont excité l'admiration des analystes et jeté sur son nom le plus vif éclat. Indiquer même rapidement le caractère propre de ces divers travaux, essayer de dire leur importance et leur rôle, dans le grand mouvement dont l'analyse offre maintenant le spectacle, ainsi que leur influence sur les recherches des géomètres contemporains, serait bien difficile dans ces courts moments que peut accorder l'Académie à la lecture d'un rapport. Et c'est moins la nature abstraite des questions à exposer qui serait un obstacle, que la nécessité, pour n'être pas incomplet, de parler en même temps de Cauchy, de revenir sur les travaux de notre grand géomètre pour montrer comment Riemann et Mr Weierstrass ont été les continuateurs, pour embrasser enfin dans le même exposé des œuvres qui tendent au même but et semblent comme le développement d'une même pensée. Afin de ne point trop m'étendre, je considérerai en particulier l'une des principales découvertes de Mr Weierstrass, et je dirai quelques mots d'abord de l'origine puis des développements successifs de la théorie d'analyse dont elle a été le couronnement. Certaines circonstances de cette origine, auxquelles je dois m'arrêter, ont laissé dans l'histoire de la science un ineffaçable souvenir, et me semblent en ce moment mériter l'intérêt de l'auditoire, et devoir être rappelées à son attention.

En 1827, Legendre recevait une lettre dont voici le début: Un jeune géomètre ose vous présenter quelques découvertes faites dans la théorie des fonctions elliptiques, auxquelles il a été conduit par l'étude assidue de vos beaux écrits. C'est à vous, Monsieur, que cette partie brillante de l'analyse doit le haut degré de perfectionnement auquel elle a été portée, et ce n'est qu'en marchant sur les vestiges d'un si grand maître que les géomètres pourront parvenir à la pousser au delà des bornes qui lui ont été prescrites jusqu'ici. C'est donc à vous que je dois offrir ce qui suit, comme un juste tribut d'admiration et de reconnaissance.

L'hommage venait de Jacobi; il était digne de celui à qui il était offert; le jeune géomètre avait révélé son génie, par l'une des grandes découvertes analytiques du siècle, la théorie générale de la transformation des fonctions elliptiques. La science doit à notre confrère Mr Bertrand la publication de la série complète des lettres de Jacobi à Legendre. Depuis elles ont été reproduites, avec celles de Legendre à Jacobi, et forment, a dit leur savant éditeur Mr Borchardt, une des correspondances les plus mémorables qu'on trouve dans l'histoire des sciences exactes.

L'année suivante, c'est Abel qui écrit à Legendre pour mettre pareillement sous ses auspices les découvertes qui ont immortalisé son nom. Mais le fondateur de la théorie des fonctions elliptiques ne devait pas avoir seul l'honneur d'accueillir les nouvelles recherches qui agrandissaient tout le champ de l'analyse. L'Académie voulut donner le témoignage de son intérêt pour ces travaux; en 1830 elle partagea le grand prix des sciences mathématiques, entre la famille d'Abel et Jacobi. En 1849, elle accorda ce même grand prix à Mr Rosenhain, pour son mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre paires de périodes simultanées, qui sont les inverses des intégrales hyperelliptiques de première classe. Ce beau et savant travail ouvrait la voie en même temps qu'un travail semblable de Göpel, dans un ordre nouveau de recherches aussi difficiles qu'importantes. Mais il ne traitait qu'un cas particulier d'une question générale, et par une méthode dont le principe, dû à Jacobi, était exclusivement propre à ce cas. C'est à Mr Weierstrass qu'est entièrement due la découverte capitale des fonctions inverses des intégrales hyperelliptiques de classe quelconque, ainsi que l'expression des fonctions qu'on nomme de seconde et de troisième espèce, dont la nature analytique était restée complètement inconnue, même dans le cas traité par Mr Rosenhain, des intégrales de la première classe. Au delà enfin des intégrales de radicaux carrés, s'ouvre le champ plus vaste des intégrales de différentielles algébriques quelconques; elles ont été en même temps le sujet des recherches de Riemann et de Mr Weierstrass, qui sont arrivés par des voies différentes à la complète solution d'une des questions les plus vastes et les plus importantes qui se soient posées dans l'analyse. La science se trouve ainsi en possession de nouveaux éléments du calcul, de transcendantes analogues aux fonctions elliptiques, mais d'une nature plus complexe, comme les fonctions elliptiques sont elles-mêmes analogues aux sinus de la trigonométrie élémentaire. Cette analogie, Mr Weierstrass l'a fait ressortir d'une manière imprévue, dans d'admirables mémoires où il retrouve, par exemple, pour les fonctions abéliennes, la proposition de la théorie des fonctions elliptiques, à laquelle est attachée le nom de notre illustre confrère Mr Liouville, et qui consiste en ce que toute fonction uniforme à double période s'exprime en fonction rationnelle d'un sinus d'amplitude et de sa dérivée. Une appréciation même succincte des travaux du profond analyste, dans cet ordre de recherches, m'entraînerait bien loin; je préfère répondre à une question qui se présente d'elle-même au sujet de ses découvertes. Les transcendantes qui constituent de nouveaux éléments de calcul, reçoivent-elles effectivement des applications, et sont-elles des organes nécessaires et indispensables de l'analyse ? Les géomètres, il faut le dire, ne peuvent voir le plus souvent que le résultat immédiat de leurs inventions, et le temps est nécessaire pour juger du rôle et de l'importance d'une découverte, mais en ce qui concerne les fonctions abéliennes, de nombreuses et importantes applications se sont déjà offertes, dans la géométrie supérieure et dans la mécanique rationnelle. En analyse, un des plus éminents analystes dont l'Académie connait le beau talent, Mr Appell, a fait voir, dans un travail d'un grand intérêt, qu'elles servent à intégrer, sous forme entièrement explicite, une classe très étendue d'équations différentielles linéaires d'un ordre quelconque.

Nous pensons rester fidèles à une tradition qui honore l'Académie, en acceptant comme un héritage légué par nos devanciers cette théorie d'analyse fondée par Legendre, et dont les développements si féconds ont été encouragés depuis un demi-siècle, par les récompenses dont elle dispose. Mr Weierstrass a été placé sur notre liste, nous l'avons jugé on ne peut plus digne de recevoir la plus haute de ces récompenses, le titre d'associé étranger[1], comme le géomètre le plus éminent et l'auteur des plus grandes découvertes en analyse de notre époque.

Appendice VI

Henri Poincaré

Rapport sur les Titres de M. Méray

(Archives de l'Académie des Sciences de l'Institut de France)

L'enseignement de l'Analyse Infinitésimale s'est considérablement modifié depuis le commencement du siècle. Il y a cent ans les principes de cette analyse n'étaient sans doute contestés par personne, mais les raisonnements sur lesquels on voulait les appuyer étaient loin d'être rigoureux et ne satisfaisaient pas tous les esprits. On connait le mot plus ou moins authentique prêté à un grand géomètre de cette époque qui aurait dit à l'un de ses disciples: «Allez toujours, la foi vous viendra».

[1] Le 25 février 1895 WEIERSTRASS fut élu Membre Associé de l'Académie des Science de Paris en remplacement de KUMMER.

Le puissant effort fait par Lagrange pour mettre les fondements du Calcul Infinitésimal à l'abri de ces critiques n'aboutit pas en réalité à un succès complet. Tout était ramené aux séries, mais il aurait fallu démontrer la convergence de ces séries.

Aujourd'hui nous ne connaissons plus ces difficultés; la rigueur de nos démonstrations ne laisse plus rien à désirer; les notions les plus complexes et naguère les plus obscures se ramènent toutes en dernière analyse à la notion parfaitement claire du nombre entier. On est arrivé à ce résultat en réduisant au minimum le rôle de l'intuition.

Le principal auteur de cette révolution est le géomètre allemand Weierstrass; mais nous n'avons eu longtemps en France que de vagues échos de ses découvertes. Au lieu de les exposer dans des mémoires imprimés, il se contentait de les développer dans son enseignement. Elles se transmettaient entre ses disciples par tradition orale. Quelques-uns d'entre nous pouvaient les deviner d'après quelques rares écrits ou d'après les travaux de ses élèves; mais elles n'appartenaient pas au domaine public.

Pendant ce temps, dans une Faculté de province, devant un auditoire peu nombreux, un professeur encore peu connu exposait des idées analogues. C'était M. Méray. Lui aussi voulait tout ramener au nombre entier, lui aussi soumettait tous nos raisonnements à une critique sévère; lui aussi se défiait de l'intuition au point de douter de la possibilité de la division d'un angle en n parties égales. M. Méray a en somme atteint les mêmes résultats que Weierstrass et par des moyens presque identiques.

Il aurait donc pu nous familiariser avec ces méthodes nouvelles avant qu'elles nous arrivassent en franchissant le Rhin. Malheureusement il se servait d'une langue spéciale qu'il avait créée et qui rebutait la plupart des lecteurs; son influence fut en somme médiocre.

A qui maintenant attribuer la priorité de ces découvertes? Si l'on prend pour critère la publication des mémoires imprimés, cette priorité n'appartient certainement pas tout entière à Weierstrass. Y a-t-il lieu de rechercher dans le détail la part qui revient à chacun des deux travailleurs; ce serait là une besogne bien difficile, à cause de l'enchevêtrement des questions; cette besogne serait d'ailleurs oiseuse puisque les deux savants ont travaillé d'une façon aussi indépendante que s'ils avaient habité des planètes différentes.

S'attacher de trop près à ces questions de date, ce serait une façon mesquine et presque puérile de juger le mérite d'un savant. Il y a tel résultat que M. Méray a annoncé en 1864, que Weierstrass possédait depuis quelque temps, mais qu'il n'a publié que plusieurs années plus tard. Le mérite du géomètre français est-il plus grand que si le professeur de Berlin avait fait imprimer en 1863 un mémoire que M. Méray n'aurait certainement pas lu.

Je ne veux pas, bien entendu, égaler M. Méray à Weierstrass; celui-ci n'était pas seulement un logicien impeccable; il était un créateur; il ne se bornait pas à appuyer sur des fondements indestructibles les résultats obtenus par d'autres; il en trouvait de nouveaux. Sous ce rapport, il l'emporte infiniment sur M. Méray.

Et pourtant il ne faudrait pas croire que le professeur de Dijon n'a fait que redémontrer plus rigoureusement ce qui avait été mal démontré avant lui. Il a, lui aussi, trouvé du nouveau. Je me bornerai à citer ses travaux sur les équations algébriques simultanées, ou sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles.

Mais, je le répète, ce n'est là ni son principal mérite, ni sa véritable originalité. C'est par ses idées sur les fondements du calcul infinitésimal qu'il convient de le juger.

Les considérations qui précèdent suffisent, je l'espère, pour faire apprécier la grandeur de l'effort, l'unité de la pensée, l'importance du succès final; elles suffiront donc pour justifier la proposition de la Section de Géométrie qui présente M. Méray en première ligne pour la place vacante de Correspondant[1].

Appendice VII

Karl Weierstrass

Briefe an Hermann Amandus Schwarz

(Abschrift von Ludwig BIEBERBACH)

(Extraits)

16 Dezember 1874

...

Ich habe, um ein noch pikanteres Beispiel als das Ihrige[2] zu haben, vor einiger Zeit, mit Hilfe der Cantor'schen[3] Anordnung der algebraischen Zahlen in einer Reihe nur eine Funktion ersonnen, die überall — reelle Werthe des Arguments vorausgesetzt — stetig ist, kein Maximum oder Minimum hat, und gleichwohl so capriciös ist, daß der Quotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ bei unbegrenzt abnehmendem h beständig zwischen zwei *endlichen* Grenzen schwankt, so bald x einen algebraischen Werth hat, dagegen sich ganz vernünftig aufführt, wenn dieser Werth eine transcendente Zahl ist...

5 Mai 1875

...

Übrigens kann ich Ihnen sagen, wie sehr ich mich freue, daß mein langgehegter Wunsch, Sie wieder an einer ordentlichen deutschen Universität thätig zu sehen, nunmehr in Erfüllung gehen soll. Gerade *Göttingen* ist jetzt der rechte Platz für Sie. Die mathematischen Wissenschaften sind dort geachtet wie kaum anderswo, und an tüchtigen Studenten wird es nie fehlen, wenn nur geeignete Lehrer da sind, für die letzteren aber ist die Verbindung der Universität mit der Societät der Wissenschaften von der allergrößten Bedeutung und zugleich der Gedanke an die großen Vorgänge der mächtigste Antrieb zu wissenschaftlicher Thätigkeit. Sie haben mir oftmals gesagt, daß Sie auch über die Universitätsjahre

---

[1] Henri POINCARÉ a lu le 4 décembre 1899 son rapport au Comité secret de l'Académie des Sciences de Paris et MÉRAY, qui habitait Dijon, désigné en 1ère ligne pour une place vacante dans la Section de Géométrie, fut élu le 11 décembre 1899.

[2] H. A. SCHWARZ: Beispiel einer stetigen nicht differentiirbaren Function (Gesam. Math. Abhandlungen, tome II, Springer, Berlin 1890, 269—274). Cet article fut publié en 1873.

[3] G. CANTOR: Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen (Gesam. Abhandl., Springer, Berlin 1932, 115—118). CANTOR a publié cet article en 1874.

hinaus mein Schüler bleiben wollten. Ich acceptiere dies in dem Sinne, daß Sie einer der wenigen sind, welche in ihrer späteren Entwicklung niemals die Grundsätze verleugnet haben, in denen meine Schüler zu befestigen ich als meine Hauptaufgabe betrachte, und deren Wesen in der Forderung sich ausspricht, in der Wissenschaft Klarheit und Wahrheit als das Notwendigste zu betrachten, nichts aber mehr zu fliehen und zu hassen, als leere Rederei über Halbverstandenes, von dem schwindelhaften Treiben, das leider auch in der ernstesten und reinsten der Wissenschaften sich geltend zu machen sucht, ganz zu schweigen, beim eigenen Arbeiten aber durch die Überlegung sich leiten zu lassen, daß die Erlangung allgemeiner Resultate das Höchste, aber nur auf dem Wege gründlicher Durchforschung zu erreichen ist.

...

28 Mai 1885

...

Augenblicklich lasse ich drucken in zweiter verbesserter Ausgabe, die vier in den Jahren 1877—80 erschienenen funktionentheoretischen Abhandlungen, denen ich noch eine fünfte, mein funktionentheoretisches Glaubensbekenntnis überhaupt enthaltend, hinzukommen soll. Die letztere macht mir aber viel Mühe. Außerdem muß ich zum 25. k.M. die Arbeit über die Darstellung willkürlicher Funktionen durch trigonometrische Reihen fertigstellen. Es knüpfen sich daran wichtige Untersuchungen. So habe ich z.B. gefunden, daß die Riemannsche Definition von $\int_a^b f(x)\,dx$ die man als die denkbar allgemeinste anzusehen gewohnt ist, weder allgemein genug noch überhaupt zulässig ist. Sie muß vielleicht durch eine ganz andere ersetzt werden, bei deren Begründung mir Cantors neuere Untersuchungen (nicht die auf die transinfiniten Zahlen bezüglichen) wesentliche Dienste geleistet haben.

...

12 August 1885

...

Ich bin zu der Überzeugung gekommen, daß ich, was mir an Jahren noch beschieden sein mag und an Kräften geblieben ist, von jetzt an besser auf wissenschaftliche Arbeiten ausschließlich werde verwenden können. Die Thätigkeit an der Universität ist mir ohne dies durch mancherlei Umstände verleidet worden. An ein einträchtiges Zusammenwirken mit Kronecker ist nicht mehr zu denken. Sein Streben nach Einfluß ist nachgerade das beherrschende Prinzip seines Lebens geworden, und sein Selbstgefühl macht sich, ich möchte sagen, fast in naiver Weise dermaßen geltend, daß es ihn nicht nur zu den unverantwortlichsten Aussprüchen, sondern auch zu recht unüberlegten Handlungen verleitet. So hat er kürzlich an Hermite einen Brief gerichtet, in dem er sich über die „jetzige Analysis" in ähnlicher Weise wie Ihnen gegenüber ausgesprochen — wie Hermite dies in Ergüssen an seine Freunde verwerthet, können Sie sich denken. Noch schlimmer ist das Folgende. Daß ihn der König von Schweden[1] bei Stellung der — von ihm inspirirten — Preisfragen nicht zum Preisrichter ernannt hat,

[1] Mittag-Leffler, G.: Communication sur un prix de mathématiques fondé par le roi Oscar II (Acta Math. 7 (1885—1886), I—VI).

sondern Hermite und mich, hat ihn so irritirt, daß er einen Brief an den König geschrieben — ich hoffe noch immer, er hat ihn nicht abgeschickt — worin er sich nicht nur darüber beschwert, daß der einzige unter den lebenden Mathematikern, der in algebraischen Dingen ein Urteil habe, nicht zu Rathe gezogen sei, sondern auch mir und Hermite geradezu die Fähigkeit abspricht, eine algebraisch-funktionentheoretische Frage zu stellen, geschweige denn darüber zu Gericht zu sitzen. Es handelt sich um die 4te Frage, die Hermite gestellt hat, so daß ich eigentlich mit der Sache nichts zu thun habe, aber es schmerzt mich, zu sehen, wie verletzte Eitelkeit selbst einen Mann von so scharfem Verstande, wie K. zu derartigen Unbesonnenheiten verleiten kann. Es steht in dem Briefe noch, daß K. bereits vor 25 Jahren die Unmöglichkeit dessen, was in der Frage verlangt wird, bewiesen habe — mir ist absolut nichts davon bekannt und dies sei von der Commission dem Könige *verschwiegen*.

Auch heißt es von Hermite, Mittag-Leffler und *mir*, daß keiner von uns seine „Festschrift", dies grundlegende Werk, kenne; ich muß denn, was mich angeht, widersprechen, ich habe die Schrift, wie sich gebührt, nicht gelesen, sondern *studirt*.

Doch genug davon, ich kann nur sagen, daß mich ein wehmüthiges Gefühl überkommt, wenn ich mir K. vorstelle, wie er vor 30 Jahren war und der vielen genußreichen Stunden gedenke, die ich in wissenschaftlichen Gesprächen mit ihm verlebt habe...

Berlin, 12. juni 1888

Lieber Freund und College!

Empfangen Sie zunächst meinen besten Dank für die gütige Übersendung der von Ihnen angefertigten Abschriften meines Manuskripts aus dem Herbst 1884 und das alte Vorlesungsheft über Differentialrechnung, das ich Ihnen selbstverständlich zurückstellen werde.

... Ihre Frage indessen, den Herrn Biermann betreffend, will ich noch kurz beantworten.

Dr. Biermann, Privatdocent in Prag, besuchte mich am Tage vor oder nach meinem 70sten Geburtstag, jedenfalls zu einer Zeit, wo ich sehr in Anspruch genommen war und ihm nur wenige Minuten widmen konnte. Er theilte mir mit, daß er die Absicht habe, eine „allgemeine Funktionentheorie" auf der in meinen Vorlesungen gegebenen Grundlage zu schreiben und fragte mich, ob ich ihm die Benutzung meiner Vorlesungen für diesen Zweck gestatte. Ich antwortete ihm, daß er sich wohl eine zu schwierige Aufgabe gestellt habe, die ich selbst zur Zeit noch nicht zu lösen getraute, da ich über mehrere schwierige Punkte noch nicht völlig ins Reine gekommen sei u.s.w.

Da er mir aber erklärte, daß er bei seiner Absicht beharren müsse und die angegebene Frage wiederholte, sagte ich ihm zum Abschiede: „Wenn Sie aus meinen Vorlesungen etwas gelernt haben, so kann ich Ihnen nicht verbieten davon in angemessener Weise Gebrauch zu machen". Er hatte sich mir als früherer Zuhörer vorgestellt und ich nahm selbstverständlich an, daß er meine Vorlesung über Funktionenlehre gehört habe. Dies ist aber nicht der Fall, ich habe aus den Quästurlisten ermittelt, daß er nur zwei Semester hier sich aufgehalten und nur zwei math. Vorlesungen gehört hat, Zahlentheorie bei Kronecker und hyperelliptische Funktionen bei mir. Er hat also sein Buch nach dem Hefte eines anderen (über den ich eine bestimmte Vermuthung habe) gearbeitet, ohne beurtheilen zu können, ob und in wie weit das von mir Vorgebrachte getreu wiedergegeben ist. Eine derartige Buchmacherei kann nicht geduldet werden. Ich würde schon, als Teubner das Werk angekündigt hatte, dagegen protestirt haben, wenn mir die eben erwähnten Umstände damals schon bekannt gewesen wären und ich mir sagen mußte, daß meine angeführten Worte bei laxer Auslegung allerdings als eine Erlaubniss zur Benutzung des von mir Vorgetragenen gedruckt werden konnte. In der Vorrede hat mich besonders der recht jesuitisch ausgeklügelte Passus: „Der Plan dieses Werkes ist Herrn W. bekannt" (ich citire nach dem Gedächtnis) verdrossen; der unbefangene Leser glaubt, es sei mir ein Plan, d.h. ein Entwurf des Buches mitgetheilt worden, während es heißen soll, der Verfasser habe mir seine Absicht, ein solches Buch zu schreiben, bekannt gegeben. Indessen, da ich mich nicht vorsichtig genug ausgedrückt sondern von dem klugen Herrn in eine Falle hatte locken lassen, so habe ich zu allem geschwiegen. Jetzt liegt die Sache anders und habe ich allerdings die Absicht, den wahren Thatbestand klarzustellen. Übrigens kann ich das Buch als eine getreue Wiedergabe meiner Vorlesungen nicht anerkennen; ich habe Ausarbeitungen von Zuhörern, die weit besser sind.

Für den Augenblick aber habe ich nur für meine Gesundheit zu sorgen und darf mich nicht ärgern. Freilich fehlt es mir am Ärger durchaus nicht, Kroneckers Mittheilung „Über Dirichlets letzte Arbeiten" ist ein wohl schon lange vorbereiteter Angriff gegen mich, auch seine Arbeit über komplexe Zahlen soll zeigen, wie er doch in seiner Festschrift schon die wahre Grundlage dieser Theorie gegeben und alles weit besser zu machen im Stande sei als so schwache Algebraiker wie Weierstrass, Dedekind und Petersen, während er doch nichts weiter leistet als daß er eine höchst einfach zu erledigende Sache verdunkelt und schwierig macht. Aber genug von diesen widerwärtigen Dingen.

Freundlich grüßend
Ihr Weierstrass

Bitte, Herrn Hölder freundlichst von mir zu grüßen und für die sorgfältig ausgeführte Bearbeitung der Einleitung zu meiner Vorlesung über Abel'sche Funktionen (1879—80), worum ich ihn ersucht hatte, meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Appendice VIII

Hermann Amandus Schwarz

Briefe an Karl Weierstrass

(Abschrift von Ludwig BIEBERBACH)

(Extraits)

Hottingen bei Zürich, d. 20. Juni 1872

Hochverehrter Herr Professor!

Seit der Absendung meines letzten Briefes an Sie habe ich die Programmverhandlung des Herrn *E. Kossak*, „Die Elemente der Arithmetik" betitelt, kennen gelernt, in deren Vorrede auf Ihre Vorlesungen und auf Ihre Erlaubnis zur Veröffentlichung Bezug genommen wird. Gestatten Sie mir, einige Worte über diese Abhandlung zu schreiben, auf die Gefahr hin, daß ich Ihnen mit denselben nichts Neues sage.

Vor allem bemerke ich, daß es mir sehr leid tut, in diesem Programm Ihre Vorlesung so entstellt zu sehen. Von Herrn K., den ich persönlich zu kennen glaube, hätte ich Besseres erwartet, gar nicht erklären kann ich mir aber, wie Jemandem, der eine nur einigermaßen gute mathematische Bildung besitzt, ein Schnitzer von der Art desjenigen passieren kann, den Herr K. auf p. 25 des Programms sich hat zu Schulden kommen lassen. Gleich im Anfange vermisse ich die Aufstellung des Gesichtspunktes, durch welchen die Begrenzung des Zahlgebietes bestimmt wird, die Forderung der unbeschränkten Umkehrbarkeit der durch Addition und Multiplikation allgemein eingeführten Rechnungsoperationen, ebenso vermisse ich die Hervorhebung der Forderung, daß alle für das Rechnen mit ganzen Zahlen gültigen formalen Gesetze aufrecht erhalten bleiben sollen. Von den Bedingungen, die zwischen den Constanten des Multiplikationsgesetzes bestehen müssen, und welche aus der Forderung $a \cdot (b \cdot c) = b \cdot (a \cdot c)$ hervorgehen, scheint Herr K. keine Kenntnis zu haben, wenigstens erwähnt er an der Stelle, wo dieses hätte erwähnt werden müssen, hier nichts davon. Daß es für jedes Multiplikationsgesetz, welches eine Division im allgemeinen gestattet, solche Zahlen $e_0 = \frac{a}{a} = \frac{b}{b}$ gibt, welche die Rolle der absoluten Einheit spielen, scheint dem Werk unbekannt zu sein.

Die ungenügende Bekanntschaft des Herrn K. mit dem Gegenstande, den er behandelt, zeigt sich aber auf das Deutlichste durch die Argumentation auf pag. 25. Aus dem Umstande, daß eine quadratische Form von zwei Veränderlichen nur dann gleich Null werden kann, wenn beide Variabeln einzeln den Wert Null habe, kann doch nimmermehr geschlossen werden, daß dieselbe das Produkt der beiden Veränderlichen nicht enthält. Daher ist die ganze Untersuchung über die von zwei Grundelementen abhängenden Zahlen ungenau und ziemlich nachlässig wiedergegeben. Neues war ja auf diesem Gebiet nach Ihrer Vorlesung nicht mehr zu finden. Die Aufgabe, die der Verfasser zu lösen hatte, bestand ausschließlich in einer sorgfältigen und richtigen Darstellung der von Ihnen in jener Vorlesung veröffentlichen Gedanken; in dieser Beziehung scheint mir die K.sche Darstellung nicht einmal mäßigen Anforderungen genügen zu können. Die historischen Bemerkungen aus der *Humboldt*'schen Abhandlung und aus den arithmetischen Büchern des Euklid würde man dem Verfasser gern erlassen haben.

Vor kurzem habe ich auch von Herrn *Enneper* einen freundlichen Brief erhalten, der gleichzeitig mit Separatabzügen der bisher veröffentlichten Aufsätze des Herr E. ankam.

In einer der neuesten Hefte der Nouvelles Annales bringt ein gewisser *Gilbert*, wenn ich nicht irre, wieder den Unsinn vor, daß es ganz selbstverständlich sei, daß eine Funktion Differentialcoefficienten habe; aber freilich, wie kann man einem französischen Provinzialmathematiker daraus einen Vorwurf machen, wenn *Bertrand* mit dem angeblichen Beweise dieser Behauptung sein Lehrbuch eröffnet.

...

7 November 1881

... Die Aufgabe, welche Sie mir mittheilen, gehört meines Erachtens zu den schwierigsten, weil dieselbe sich auf höchst versteckte Eigenthümlichkeiten der Irrationalzahlen erstreckt; die Untersuchung, welche Darboux bezüglich meines Beispieles angestellt hat, wird Ihnen bekannt sein. Möglicherweise ist G. Cantor der geeignete Mann, eine solche Aufgabe zu behandeln ...

13. Mai 1883

...

Herr Bouquet interessierte sich sehr dafür, zu erfahren, ob in Deutschland von den Riemannschen Flächen viel Gebrauch gemacht würde, oder nicht.

...

16. März 1885[1]

...

Meinen angefangenen Brief habe ich nicht vollendet, ich bringe aber den Anfang mit. Das leidige Vorkommnis, welches mir am letzten Tage meiner Anwesenheit in Berlin im Hause des Herrn Prof. Kronecker begegnet ist, muß ich Ihnen mündlich ausführlicher mitteilen; es bedeutet einen vollständigen Bruch; Herr Professor Kronecker hat, wie ich durch Frau Professor Kronecker erfahren habe, gesagt, das Tischtuch zwischen ihm und mir sei durchgeschnitten, er würde einen ferneren Besuch meinerseits nicht annehmen, ich dürfe ihm auch nicht mehr schreiben. Und das Alles nach vierundzwanzigjähriger Freundschaft! Es würde unglaublich sein, wenn es nicht wahr wäre. Und was ist der Grund zu einem solchen schroffen Entgegentreten? Lediglich ein Brief, den ich in der letzten Stunde des alten Jahres an Herrn Professor Kronecker geschrieben habe, wie ich vor Jedermann sagen darf, den ich reines Herzens geschrieben habe, in dem ich meiner aufrichtigen Bewunderung Ihrer wissenschaftlichen Leistung Ausdruck gab. Ich brauche Niemandem gegenüber zu erröthen, wenn dieser Brief veröffentlicht werden sollte. Als ich mir diesen Brief ausbat, um ihn meinem Schwiegervater zu zeigen und dessen Urtheil einzuholen, verweigerte Frau Prof. Kronecker mit den Worten: „Nein, was geschrieben ist, ist geschrieben". Der Tenor meines Briefes war aufgefaßt worden als eine von mir unternommene Vergleichung der wissenschaftlichen Größe des Herrn Professor mit Ihnen. Ich habe mir niemals ein absprechendes Urtheil, über die wissenschaftliche Größe des bedeutendsten jetzt lebenden Forschers im Gebiete der Algebra angemaßt: eine Erinnerung an eine Gegenüberstellung oder Nebeneinanderstellung Ihrer Gestalt mit der Gestalt des Herrn Professor Kronecker, der von meinen Commilitonen im gemüthlichen Kreise fast immer „Der Kleine" genannt wurde — das Bild trug die Unterschrift „Wer den Kleinen nicht ehrt, ist des Großen nicht werth" — bezog sich auf eine Zeit, in welcher der Ruhm des Herrn Prof. Kronecker erst anfing, sich auszubreiten und in welcher jedenfalls die Zahl seiner Zuhörer noch recht klein war; jene

[1] Schwarz avait écrit à Weierstrass le 10 janvier 1885 qu'un «événement attristant» venait de lui arriver dans la maison de Kronecker, et promettait de lui donner des détails dans une lettre ultérieure. Comme pendant deux mois Weierstrass ne reçoit rien, il écrit le 14 mars 1885 à Schwarz, en revenant sur l'«événement», l'assurant que ce rappel ne constitue pas une demande, au cas où il «ne tiendrait pas pour nécessaire» de l'en informer.

Unterschrift hatte also einen im höchsten Grade ehrenden Sinn für den, der sich in seinen bei Gelegenheit von mathematischen Festen gehaltenen Reden selbst gern seiner kleinen Gestalt erinnerte . . .

Besonders freue ich mich auch darüber daß Sie jetzt Ihre Begründung der Theorie der analytischen Funktionen ausarbeiten wollen; ich stimme ganz mit Ihnen überein in der Überzeugung, daß es in hohem Grade wünschenswerth ist, daß dies bald geschieht. In dem letzten Briefe, den Herr Professor Kronecker an mich gerichtet hat, schreibt er am Schlusse wörtlich:

„Wenn mir noch Jahre und Kräfte genug bleiben, werde ich selber auch der mathematischen Welt zeigen, daß nicht bloß die Geometrie, sondern auch die Arithmetik der Analysis die Wege weisen kann — und sicher der *strengeren*. Kann ich's nicht mehr tun, so werden's die thun, die nach mir kommen, und sie werden auch die Unrichtigkeit aller jener Schlüsse erkennen, mit denen jetzt die sogenannte Analysis arbeitet".

„Die Unrichtigkeit *aller* jener Schlüsse, mit denen *jetzt* die *sogenannte* Analysis arbeitet" . . .

17. Juni 1888[1]

. . .

Dieses Packet enthält meine Ausarbeitung der Vorlesung über Differentialrechnung, welche Sie an dem Königlichen Gewerbeinstitute im Sommersemester 1861 gehalten haben. Meine Ausarbeitung enthält nicht die Anwendung auf die Untersuchung der Eigenschaften ebener Curven, insbesondere also auch nicht Ihre so befriedigende Theorie der Berührung von Curven. Dagegen wird meine Ausarbeitung wohl so manche Ungenauigkeit enthalten, ich bitte Sie, die etwaigen Fehler dem Anfänger zu gute halten zu wollen.

. . .

Vor einiger Zeit wandte sich Herr Professor Mach in Prag an mich mit der Bitte, ihm über Dr. O. Biermann und Dr. G. Pick Näheres mitzutheilen. Da ich nun bis jetzt nicht dazu gekommen bin, das Biermann'sche Buch „Theorie der analytischen Funktionen" so sorgfältig zu lesen, als dies nötig sein würde, um ein gerechtes Urteil abgeben zu können, und da Herr Professor Mach bei seiner Bitte den Zusatz machte, „falls es mir keine Umstände macht", so habe ich bis jetzt die Bitte des Herrn Prof. Mach unerfüllt gelassen. (Die Lobpreisung des Biermann'schen Buches in Schlömlich's Zeitschrift, welche von dem Direktor der Provinzial-Gewerbeschule in Hagen, Dr. Holtzmüller, herrührt, werden Sie kennen). Nun schreibt aber heute, genauer vor einigen Tagen, Herr Itzigsohn an Herrn Dr. Burkhardt hier folgendes:

„Bitte grüßen Sie Herrn Professor Schwarz. Es interessiert ihn vielleicht zu erfahren, daß Herr Biermann in nächster Zeit gründlich heimgeleuchtet werden (so!) soll, weil er bei den Leuten den Glauben erwecken wollte, er habe im Einverständnis mit Herrn Professor Weierstrass dessen Funktionen-Theorie veröffentlicht. Herr Prof. (so!) Biermann hat *niemals* Funktionentheorie bei Herrn Prof. Weierstrass gehört. Daß einem solchen Herrn die Erlaubnis zur Veröffent-

[1] Il doit y avoir une erreur de date, car la réponse de Weierstrass à cette lettre datée du 17 juin est du 12 juin.

lichung der Funktionentheorie nicht gegeben ist, wird wohl einleuchtend sein. Das Werk ist alles, nur nicht die Weierstrass'sche Funktionentheorie".

Soweit Herr Itzigsohn.

Allerdings war ich bisher der Meinung, daß Herr Dr. Biermann von Ihnen ermächtigt worden sei, Ihre Vorlesungen bei der Ausarbeitung seines Buches zu benutzen.

Sie würden mich zu Dank verpflichten, wenn Sie die Güte haben wollten, mir mitzutheilen, ob Herr Dr. Biermann mit oder ohne Ihre ausdrückliche Ermächtigung, Ihre Vorlesungen benutzt hat.

...

Göttingen, 26. Februar 1892

Hochverehrter Herr Professor!

Heute erhielt ich durch Herrn Geheimrat Althoff persönlich den Ruf an die Berliner Universität; ich habe denselben ohne Weiteres angenommen. Herr Geheimrat Althoff wird Ihnen wegen der Einzelheiten noch Mitteilung machen. In einigen Tagen wird, denke ich, die Versetzung durch den Herrn Minister verfügt werden; ich beabsichtige, sobald als es mir möglich sein wird, nach Berlin zu reisen, um wegen einer Wohnung das Erforderliche einzuleiten.

Nochmals sage ich Ihnen meinen herzlichen Dank.

Ihr ganz ergebener
H. A. Schwarz

Appendice IX

Sophus Lie

Lettre à Gaston Darboux[1]

(Archives de l'Institut de France, Paris)

Lieber Darboux!

Endlich bis ich soweit daß ich meine beiden Werke Ihnen schicken kann. Es war eine lange Arbeit und zuoft werden es sich wohl Spuren von Ermüdung zeigen. Selbst wenn man eine Sache vollständig beherrscht, ist es schwer eine ganz correkte Darstellung zu geben, besonders wenn man Mitarbeiter benützt, sie mögen so tüchtig sein, wie möglich. Ich hoffe indeß, daß meine Werke nützlich sein werden.

---

[1] Il est certain que Lie avait tendance, dans ses lettres, à porter des jugements qui dépassaient quelquefois sa pensée. De plus, il était préoccupé par des questions de priorité.

Ainsi, dans des lettres de 1882 à Felix Klein (Cod. Ms. Klein 10, Nieders. Staats- und Universitätsbibl. Göttingen, 681, 685), il accuse Darboux de publier, sans le citer, des résultats que, lui, Lie avait trouvés. Egalement dans une lettre à Klein (743) de 1888, où il inscrit en tête: «Dieser Brief ist natürlich *nur für Klein*. Ich protestire dagegen, daß derselbe Engel vorgelegt wird», il écrit que si Engel veut être son ami, «alors il doit être honnête. Il doit m'attribuer ce qui m'appartient». Dans une autre lettre (757) reçue par Klein le 5 mai 1892 il accuse Klein, cette fois-ci, de le plagier. Et la lettre (759) reçue par Klein le 3 octobre 1892 explique un peu la précédente, car Lie y affirme que son système nerveux est «encore délabré».

In der Widmung und der Vorrede[1] suchte ich Ausdruck zu geben für die *Liebe zu französischer Wissenschaft* die mich immer (und seit ich in Deutschland bin noch mehr) beseelt hat.

Es ist ein merkwürdig Phenomen, daß in Deutschland seit *1870* mit Ausnahme zweier Israeliten (Hilbert[2] und Hurwitz) kaum eine einzige bedeutende Begabung sich der Mathematik zugewendet hat. Ist das *Jahr 1870* für deutsche Politik glücklich gewesen, so ist es *für deutsche Mathematik verhängnisvoll* gewesen. Junge Kräfte treten hier nicht hervor. Die älteren Kräfte hören sich früh auf zu produzieren (Christoffel Cantor Schering Lipschitz ...) Nur Eins floriert hier in der Mathematik das ist die *Arrogance*: der sicherste Weg zur Decadence.

Frankreich bietet das entgegengesetzte Bild. In Jahre 1870 war es in Paris eine allgemeine Meinung, daß die französische Mathematik von der deutschen überflügelt war. Darin war wohl etwas wahres, doch aber lange nicht in dem Maße wie man meinte. Im Jahre 1870 war z.B. die deutsche Geometrie nicht übermäßig viel werth, während die metrische Geometrie zu dieser Zeit in Frankreich florierte. C. Jordans traité des substitutions ist gewiß, so viel auch Kronecker darüber schimpfte, ein monumentales Werk, wenn auch schwer zugänglich. Nur in der Funktionentheorie waren wahrscheinlich damals die Deutschen etwas voraus.

Wie ganz anders ist jetzt in der Funktionentheorie die Situation. Weierstrass' Einseitigkeit und Kleins Oberflächlichkeit und Leichtsinn haben keine ernste Schule machen können, während die französischen Funktionentheoretiker mit allen guten Mitteln vorwärts drängen.

Es ist mit eine besondere Freude gewesen, der Weierstrassschen und Kleinschen Schule (die jedenfalls die *Arrogance* gemein haben) zu erklären, daß sie alle beiden die größten Dummheiten in ihren Arbeiten über die Grundlagen der Geometrie gemacht haben.

Mein Traum ist es, ehe ich nach Christiania zurückkehr, in Leipzig eine gesunde mathematische Schule zu bilden. Leicht ist es nicht. Nous verrons!

Ihr ergebener
S. Lie

Appendice X

Gaston Darboux

Lettres à Jules Houël[3]

(Archives de l'Académie des Sciences de Paris)

(Extraits)

5 mars 1870

...

Hermite qui n'a pas de goût pour le professorat expose ce qui lui plaît et ne se préoccupe pas d'obtenir un ensemble satisfaisant. Tous nos géomètres d'ailleurs, quoique tous fort distingués, semblent appartenir à un autre âge.

[1] Le tomme III du livre «Theorie der Transformationsgruppen» «élaboré» par Sophus LIE avec le «concours» de Friedrich ENGEL, Teubner, Leipzig 1893, est dédié à son «pays natal la Norvège», à Friedrich ENGEL et à l'Ecole Normale Supérieure de Paris.

[2] Notons, en passant, que HILBERT n'était pas israélite.

[3] En 1870, commence à paraître le Bulletin des Sciences mathématiques rédigé par G. DARBOUX avec la collaboration de J. HOUËL. Mais, dès le tome 2, il est mentionné: rédigé par DARBOUX et HOUËL.

Ce sont des savants éminents restés à la science d'il y a vingt ou trente ans qu'ils perfectionnent, développent avec beaucoup de succès, mais toutes les branches modernes sont pour eux très accessoires. Serret ... est un élève distingué de Lagrange, mais il ignore bien des choses modernes. Mais, je vous en prie, ne communiquez ce jugement à personne, il pourrait attirer sur moi la foudre et la tempête et je n'y tiens nullement.

...

20 novembre 1872

...

Figurez-vous que le Méray[1] me cause bien des embarras. Faurie a su que j'avais sur cet ouvrage un article très élogieux de cet imbécile de Laurent, et il me supplie de le lui montrer. En sorte que me voilà obligé d'imprimer cet article et de le communiquer à Faurie, mais je l'adoucirai. Laurent compare simplement Méray à Lagrange. Chasles m'invite à diner exprès pour que je montre l'article en question à Faurie. Quelle scie.

Méray est un garçon qui a beaucoup de mérite, mais qui est poseur et prétentieux. Briot et Bouquet sont ses précurseurs, et il regarde tout le monde du haut de sa grandeur. Ce que je trouve de plus étonnant dans son livre, c'est encore sa théorie des incommensurables. Je vous la recommande.

...

22 novembre 1872

...

Vous avez raison. Je suis un abominable scélérat. Mais que voulez-vous? L'ouvrage de Méray est dédié au père Faurie[2]. Voilà le hic. Et puis Bouquet l'a déjà un peu secoué. Enfin je tacherai d'adoucir l'article et je prends tout sur moi. Accablez-moi. Vous êtes dans votre droit. Mais pour moi je crois simplement qu'on doit laisser à chacun la responsabilité de son opinion. Tant pis pour Laurent s'il se trompe.

...

5 décembre 1872

...

Vous voyez bien que l'article de Laurent[3] était acceptable, mais je l'avais un peu adouci, il (Laurent) comparait Méray à Lagrange pour mettre Lagrange au second rang. C'était curieux ...

Sans date[4]

...

Quant à Gilbert[5] le grand Belge, nous avons grand besoin d'agir avec prudence

[1] Charles MÉRAY: Nouveau précis d'analyse infinitésimale, Savy, Paris 1872.

[2] FAURIE était inspecteur général de l'enseignement secondaire.

[3] H. LAURENT: Méray Ch., Nouveau précis d'analyse infinitésimale (Bull. Sci. Math. **4** (1873), 24—28).

[4] Cette lettre doit être de 1872, car c'est cette année-là que WEIERSTRASS avait lu à l'Académie des Sciences de Berlin son mémoire sur la fonction continue sans dérivée.

[5] La revue Nouvelles Annales de Mathématiques (2) **12** (1873) signalait p. 231: « Nous avons reçu de M. Ph. Gilbert, professeur à l'Université de Louvain, un *Mémoire sur l'existence de la dérivée dans les fonctions continues*, où l'auteur critique un Mémoire de M. Hankel, professeur à l'Université de Tubingue, qui admet l'existence de fonctions continues n'ayant pas de dérivée. M. Darboux a récemment communiqué à ce sujet, à la Société mathématique de France, une Note *Sur les intégrales des fonctions discontinues et sur les fonctions qui n'ont pas de dérivées.* » Précisons que DARBOUX avait fait sa communication le 19 mars 1873 (Bull. Soc. Math. France **1** (1872—1873), 121).

et il faut bien choisir notre moment pour lui asséner un coup terrible et dont ce grand Belge ne puisse se relever. Il attaque Hankel. C'est bien. Hankel est de force à répondre. Ecrivez-lui puisque vous le connaissez et attendons. C'est là le premier point. Quand Hankel aura répondu d'une manière victorieuse, je n'en doute pas, nous arriverons à la rescousse et gare Gilbert. Nous aurons la partie d'autant plus belle qu'à Berlin il y a aussi des géomètres pointus et que Weierstrass a lu un article sur les fonctions qui n'ont pas de dérivée. Je reprendrai la démonstration de Gilbert que j'affirme être fausse, sans l'avoir vue ... je vous promets que nous l'assomerons.

...

Serret pousse Jordan et voudrait le présenter ex aequo avec Briot et Bouquet ... je trouve que Briot et Bouquet ont aussi un grand travail tout aussi comparable à celui de Jordan. Bertrand regarde leurs études sur l'intégration des équations différentielles comme un des plus grands progrès du Calcul intégral depuis longtemps.

...

18 mars 1873

...

J'ai commencé ma semaine en traduisant ce qu'il y a de plus dur dans le mémoire de Riemann Über die Darstellbarkeit ...

Ce mémoire de Riemann est un chef-d'oeuvre semblable à ces vieux tableaux dont quelques parties en pleine lumière vous font regretter ce que le temps a détruit ou ce que l'auteur a négligé.

...

30 mars 1873

...

Vous êtes bien aimable d'avoir fini le Riemann. Voilà un beau morceau et qui ne sera pas apprécié. Mais il y a une perle que tout le monde y découvrira, je l'espère. C'est la définition de l'intégrale définie. C'est de là que j'ai tiré une foule de fonctions qui n'ont pas de dérivés.

...

23 décembre 1873

...

Voici quel est le plan de mon travail sur les principes du calcul différentiel. J'approfondis d'abord l'idée de limite ...

Les séries dont les termes sont des fonctions de x donnent lieu à des distinctions que j'établis d'après les Allemands: il y a des séries également convergentes dans un intervalle donné (gleichmäßig) et celles qui ne le sont pas. Il y a une différence capitale entre ces séries. Après cela, j'étudie la définition de l'intégrale de Riemann en la rendant rigoureuse (c'est bien long) et j'en déduis directement l'existence d fonctions continues qui n'ont pas de dérivées.

...

J'ai l'intention de terminer par quelques remarques sur les intégrales définies es les conditions sous lesquelles on peut différentier sous le signe intégrale point qui est encore très difficile à élucider.

...

12 janvier 1874

. . .

Quant aux théorèmes du Calcul intégral, je crois de plus en plus que tout cela aurait besoin d'être repris à fond et que l'on devrait s'astreindre à une double loi: bien définir les hypothèses sur lesquelles on s'appuie, *ne donner que celles qui sont nécessaires pour l'exactitude du théorème.*

. . .

24 janvier 1874

. . .

En un mot, voulez-vous introduire dans le Calcul infinitésimal la rigueur de la géométrie . . . je pense qu'avant tout vous devez tenir à la rigueur.

. . .

Si je vous dis tout cela, c'est que j'ai la conviction qu'en vous attachant à la rigueur vous arriveriez à faire un traité de Calcul infinitésimal ayant un intérêt exceptionnel . . . Avec le théorème des accroissements finis tel qu'il est démontré dans Serret, vous pouvez élever un édifice solide. Ça et la définition de l'intégrale; il n'y a pas autre chose. C'est comme cela je crois que procède Weierstrass.

. . .

16 février 1874

. . .

Pour ce qui concerne les principes du Calcul Différentiel nous ne pouvons pas nous entendre . . . Quant aux démonstrations de Bonnet que je vous signale, elles sont plus simples que les vôtres et de plus elles résistent à toutes ces fonctions bizarres.

Vous pouvez mettre dans le premier quart de la première leçon de Calcul Différentiel le théorème des accroissements finis tel que le démontre Bonnet et il domine alors toute la théorie. Du reste ce cours de Weierstrass que vantent tant les Allemands me paraît taillé à peu près sur le même modèle et je crois qu'il y aurait eu un réel avantage pour vous à adopter cette nouvelle marche.

. . .

17 février 1874

. . .

Quant au fond du dissentiment, le voici très nettement expliqué en gros. Il y a à chaque instant dans le calcul différentiel des infiniments petits de cette forme $\varphi(x, h)$, fonctions de deux variables, l'une finie x, l'autre infiniment petite h. Par exemple

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x).$$

La seule chose qu'on connaisse sur ces infiniments petits, c'est qu'ils tendent vers zéro avec h quand x reste fixé; et l'on admet à tort qu'ils continuent encore à tendre vers zéro quand h tendant vers zéro x ne reste plus constant mais varie infiniment peu. Cela peut être bizarre, mais je n'admets pas au sujet de ces infiniment petits $\varphi(x, h)$, qui apparaissent dans toutes les questions fondamentales, que, pour cela seul qu'ils tendent vers zéro avec h quel que soit x fixe, ils tendent aussi vers zéro quand x varie. Remarquez du reste que je pourrais vous citer une foule d'autorités qui sont de mon avis: Weierstrass, Bonnet, Thomae etc. . . .

27 juillet 1874

. . .

A propos, j'ai reçu un véritable chef-d'oeuvre: La Géométrie de Méray[1]. Après l'Agésilas hélas, oui après son traité de Calcul Différentiel hélas, mais après l'Attila[2], après la Géométrie, il n'y a plus qu'à tirer l'échelle . . . Je vous aurais déjà envoyé le traité, mais je veux le montrer à Painvin qui aura l'honneur d'être le collègue de Méray à l'agrégation cette année. C'est Méray et Valson qui viennent, mais j'espère que ce sera la dernière année pour Méray après le traité de Géométrie qu'il vient de commettre ...

14 juin 1875

. . .

J'en ai aussi reçu une de du Bois-Reymond, celui de Tubingue. Il ne me dit pas grand chose de bon et me parle des fonctions qui n'ont pas de dérivée . . .

17 janvier 1876

. . .

Qu'est-ce que c'est que ce Bolzano dont vous me parlez à propos d'un théorème sur la continuité des fonctions? . . .

8 février 1881

. . .

La traduction . . . a été revue par Weierstrass lui-même. Nous avons envoyé au grand Berlinois, à celui qu'Hermite appelle toujours le grand législateur des Mathématiques, une traduction d'un travail plus étendu qui me sera incessamment renvoyé[3].

. . .

---

[1] Charles MÉRAY: Nouveaux éléments de Géométrie, Savy, Paris 1874. Dans la préface de l'édition de 1903 (Jobard, Dijon) MÉRAY écrit (p. V): «La première édition de cet ouvrage a paru en 1874, et pendant vingt-six ans, des approbations chaleureuses, mais isolées, se sont perdues dans le vide d'une indifférence générale mêlée de quelques railleries». Sur l'exemplaire de l'Institut Henri Poincaré de Paris, de l'édition de 1903, est écrit: «A Monsieur G. Darboux, hommage d'une sincère amitié. Charles Méray».

[2] Après la pièce de CORNEILLE «Agésilas» (1666), celui-ci écrivit «Attila» (1667), pièce qui était encore plus faible que la précédente. BOILEAU composa alors l'épigramme suivant:

«J'ai vu l'«Agésilas»,
Hélas!
Mais après l'«Attila»,
Holà!»

[3] Karl WEIERSTRASS: Remarques sur quelques points de la théorie des fonctions analytiques (Bull. Sci. Math. (2) 5 (1881), 157—183), traduit par J. TANNERY. Il s'agit de l'article «Zur Funktionenlehre», Math. Werke II, 201—223, 231—233, publié en 1880 et 1881. Jules TANNERY écrit p. 181: «Qu'il me soit permis de remercier ici l'illustre géomètre, qui a bien voulu prendre la peine de revoir cette traduction».

16 février 1881

. . .

J'ai proposé que l'on imprimât dans le Bulletin une nouvelle édition à laquelle Weierstrass ferait quelques changements. Nous pourrions donner ainsi tout ce qui a paru de Weierstrass dans ces derniers temps et nous rendrions un véritable service.

. . .

Appendice XI

Gösta Mittag-Leffler

Lettres à Charles Hermite

(Archives de l'Academie des Sciences de Paris)

(Extraits)

21 juin 1875

. . .

Monsieur Weierstrass a fait un cours très complet pendant 6^h de la semaine sur les fonctions elliptiques. Il me parait qu'on ne peut pas assez regretter dans l'intérêt de la science qu'il ne publie pas ses belles recherches dans ces théories, des recherches qui vous intéresseraient sans doute au plus haut degré. Il y a du reste une grande ressemblance entre vos idées et les siennes qui m'a plusieurs fois excessivement frappée.

Maintenant pendant l'été Monsieur Weierstrass fait un cours admirable sur le Calcul de variations et un autre cours sur les Applications des fonctions elliptiques . . .

Une chose étonnante, je trouve, c'est que Monsieur Weierstrass et Monsieur Kronecker peuvent trouver tant d'auditeurs — entre 15 et 20 — pour des cours si difficiles et si élevés . . .

Je saisis maintenant l'occasion de vous exprimer, Monsieur, ma profonde gratitude pour le mémoire sur la fonction exponentielle que vous avez eu la bonté de me faire parvenir . . . Monsieur Kronecker m'a dit que c'est un de ces travaux qui font une nouvelle époque dans l'histoire de la science.

. . .

13 juillet 1875

. . .

Je suis allé tout de suite à Monsieur Weierstrass après avoir reçu votre lettre. Vous pouvez facilement vous imaginer combien il était sensible à votre bonne opinion sur lui.

. . .

30 mars 1877

. . .

J'espère que vous avez reçu mon mémoire . . . Il fait partie d'un ouvrage plus grand que Monsieur Weierstrass m'a proposé et que je veux publier en français ou en allemand et qui sera intitulé: «Sur les méthodes différentes qui mènent à la possession analytique des fonctions elliptiques», ou quelque chose de ce genre.

Monsieur Weierstrass m'a donné une masse de renseignements précieux sur ce thème.

. . .

J'ai reçu . . . votre travail «Sur la fonction exponentielle»[1] . . . Monsieur Kronecker m'a dit que c'est un travail séculaire lequel seul ferait votre nom immortel . . .

14 octobre 1879

. . .

Je suis très sensible de votre bonté de vouloir bien vous informer chez M. Weierstrass sur l'opinion qu'il a sur le mémoire que je lui ai communiqué. Le grand analyste est tellement occupé par ses propres profondes pensées qu'il oublie quelquefois des mois et des années de lire les choses qui lui ont été confiées. Et c'est très naturel, il ne trouve pas le temps, comme vous le savez, de publier ses propres recherches.

. . .

9 décembre 1879

. . .

Je ne sais pas comment vous exprimer ma profonde gratitude de votre lettre du 10 novembre et des mots bons et bienveillants dans lesquels vous me communiquez l'opinion de Monsieur Weierstrass. Il va sans dire que je ne publie pas mon mémoire avant que Monsieur Weierstrass soit content avec la forme si bien qu'avec le fond de mes idées. Je veux donc refaire le tout, et je suis on ne peut plus reconnaissant si vous veuillez bien après faire imprimer mes recherches dans le journal de l'école normale.

Je trouve que Monsieur Weierstrass a parfaitement raison quand il dise que mon mémoire soit trop long et les calculs trop développés. Mais à côté des avantages énormes qu'il y a d'être l'élève de Monsieur Weierstrass il y a aussi de petits inconvénients que vous ne pouvez pas peut-être assez saisir. J'avais commencé d'écrire mon mémoire d'une manière bien plus courte et bien plus dans le genre du grand maître. Mais alors Monsieur Schering que je voyais en Suède chez Monsieur Malmsten me disait qu'il faut être Weierstrass lui-même pour être lu quand on écrit de cette manière. Les Allemands eux-mêmes ne sont pas en général assez au courant des idées de Monsieur Weierstrass pour pouvoir saisir sans difficulté une exposition qui soit faite strictement d'après le modèle classique qui a donné le grand géomètre. Regardez par exemple Monsieur Fuchs. Je connais certainement au fond les idées de Weierstrass et il n'y a pas de doute qu'il regarde la méthode de celui-ci comme bien supérieure à la méthode de Riemann. Et pourtant il écrit toujours dans le genre de Riemann. Tout le mal vient de ça que M. Weierstrass n'a pas publié ses cours. C'est vrai que la méthode de Weierstrass est enseignée maintenant dans plusieurs universités allemandes, mais tout le monde n'est pas pourtant l'élève de Weierstrass ou l'élève de quelqu'un de ses élèves . . .

---

[1] Charles HERMITE: Sur la fonction exponentielle (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **77** (1873), 18—24, 74—79, 226—233, 285—293). C'est à la page 77 que se trouve énoncé le résultat «séculaire» d'HERMITE: «le nombre e ne peut être racine d'une équation algébrique de degré quelconque à coefficients entiers».

19 février 1881

...

La série de M. Tannery[1] m'a extrêmement intéressé. Elle est admirablement simple et on voit tout de suite la démonstration...

Quant à la traduction des deux mémoires ... de M. Weierstrass ... si vous tenez à obtenir la permission de publier cette traduction, ne communiquez pas auparavant la série de M. Tannery à M. Weierstrass. C'est toujours après de longues hésitations que M. W. publie quelque chose et le moindre accident suffit pour lui décider de remettre tout à fait la publication d'un travail. Et maintenant après la mort de Borchardt c'est pire que jamais...

M. Darboux a toujours été un peu injuste envers M. Weierstrass ...

Si on compte pourtant les élèves vraiment bons que vous avez et qu'a M. W. alors je ne suis nullement persuadé que vous devez tenir le second rang ...

Je trouve que le succès que vous avez eu en si peu d'années est parfaitement comparable à celui qu'à eu M. Weierstrass...

22 février 1881

...

Vous savez peut-être que M. Weierstrass a la plus grande difficulté d'écrire. Le sang lui monte à la tête au même moment où il met la plume sur le papier. Cet état malheureux est une des causes pourquoi il a publié si peu. Mais du reste il est si peu pratique qu'il soit pénible même pour un mathématicien et il a la mauvaise habitude de remettre tout ce qui peut être remis. Borchard était une main droite qui l'aidait à s'arranger avec le monde extérieur mais maintenant il est seul sans un ami vraiment intime et sa position doit être assez triste, je crois. Qu'il n'a pas été mécontent de vous trouver sur son terrain j'en suis parfaitement sûr. Je sais au contraire quel vif plaisir qu'il éprouve chaque fois qu'il voit un autre géomètre s'occuper avec ses recherches. Et vous verrez comme vos nouvelles découvertes l'intéresseront. Pauvre M. Weierstrass il est de ces grands esprits qui sont des géants dans le monde de la pensée mais qui sont moindres que des petits enfants dans le monde extérieur!

...

15 mars 1881

...

La fonction de M. Poincaré me paraît fort intéressante mais pourtant je dois vous avouer que l'existence des fonctions avec des espaces lacunaires me paraît avoir été démontrée auparavant par les recherches de Monsieur Weierstrass. La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b^n x^{a_n}$ dans laquelle a est un nombre positif entier, b une quantité positive moindre que 1 et $a_n = a^n$ est une belle fonction. Elle existe partout en

---

[1] Tannery avait envoyé à Weierstrass sa série

$$\frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2x^2}{x^4-1} + \frac{2x^4}{x^8-1} + \cdots$$

qui a pour valeur $+1$ ou -1 selon que la partie réelle de x est positive ou négative et cette série fut publiée par Weierstrass en 1881 (Math. Werke II, 231—233).

dedans et sur la circonférence avec le point $x=0$ pour centre et le rayon 1 mais n'existe en aucun point au dehors de ce cercle. Vous trouverez quelques mots sur cette fonction à la fin du dernier article de M. Weierstrass dans le Berliner Monatsbericht.[1]

...

17 mai 1881

...

Vous êtes vraiment très heureux, cher Maître, d'avoir trois élèves comme Picard, Appell, Poincaré. Weierstrass a été professeur à Berlin pendant 30 ans et il n'a pas un seul élève qui soit comparable à un de ces trois. — Excepté M. Fuchs ça va sans dire — Avouez que vous avez eu tort quand vous prétendiez que les Français étaient moins doués pour les mathématiques que les Allemands!

Les recherches de Cantor sont très remarquables mais très difficiles.

...

7 juillet 1881

...

Vous me demandez quels sont les rapports entre M. Klein et les grands Berlinois. Je vous dois la vérité et je vous la dirai quoique je suis moi-même très bien avec M. Klein. M. Weierstrass trouve que M. Klein est un homme qui ne manque pas de talent mais qui est très superficiel et même quelquefois assez charlatan. M. Kronecker trouve qu'il est tout simplement un charlatan sans des mérites réels. Je crois que c'est aussi l'opinion de M. Kummer. M. Klein a fait ses études à Berlin mais il a été un élève peu reconnaissant et qui n'a guère profité ni des leçons de Weierstrass ni de celles de Kronecker. Je crois en réalité que vous risquez de vous brouiller un peu avec les Berlinois en acceptant avec empressement les avances de M. Klein. Mais je vous prie, cher Maître, de vouloir bien regarder cette communication comme étant une confidence à vous seul. Comme c'est malhonnête de M. Briot de ne pas vouloir reconnaître le talent éminent de vos trois élèves.

...

20 août 1881

...

Je sais du reste que M. Weierstrass regarde M. Poincaré comme étant un homme de talent. Un de mes élèves M. de Ramsey qui vient de Berlin où il a passé une année m'a raconté que M. Weierstrass dans un cours à l'université a loué le talent de M. Poincaré mais qu'il a dit en même temps que M. Poincaré dans ses Thèses[2] pour obtenir le grade de docteur n'a pas correctement expliqué le rôle de Cauchy dans le problème de l'intégration des équations différentielles et qu'il a eu tort de ne pas mentionner le travail de Weierstrass lui-même en «Analytische Facultäten».[3] Le travail de Weierstrass est antérieur à celui des Messieurs Briot

---

[1] Karl WEIERSTRASS, Math. Werke II, p. 223.

[2] Henri POINCARÉ: Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différentielles partielles. Thèse présentée le 1 août 1879 (H. POINCARÉ, Œuvres I, Gauthier-Villars, Paris 1928, XLIX—CXXIX).

[3] Karl WEIERSTRASS: Über die Theorie der analytischen Facultäten (Math. Werke I, 153—221), article publié dans le Journal de Crelle en 1856.

et Bouquet mais M. Poincaré qui devait savoir ça par le mémoire de Madame Kovalewsky — s'il n'a pas connu le travail «Analytische Facultäten» — n'en dit pas un mot. Monsieur de Ramsey m'a raconté qu'il a entendu par M. Molk — l'étudiant français qui suit le cours de M. Weierstrass à Berlin — que M. Poincaré déteste les Allemands, ce que je trouve fort naturel, et qu'il a pour principe de ne jamais citer un auteur allemand ce qui serait fort mal si c'était vrai ...

Mais je reviens au mémoire «Sur les fonctions à espaces lacunaires»[1] que vous envoie sous bande. M. Poincaré a bien voulu faire quelques corrections mais je trouve pourtant qu'il est injuste envers Weierstrass. C'est trop peu dit «une conception nouvelle des fonctions analytiques qui a son origine dans les travaux de Cauchy et que M. Weierstrass a si clairement exposée dans son mémoire ‹Zur Functionenlehre›» — voir page 3 — Je ne crois pas que Cauchy a jamais eu l'idée de définir une fonction analytique de la manière de Weierstrass expliquée par M. Poincaré. Et dans tous les cas les recherches de Weierstrass là-dessus sont antérieures à celles de Cauchy. On a toute raison à dire que les travaux de l'école de Riemann ont leur source chez Cauchy mais ce n'est pas vrai quant à la théorie des fonctions de Weierstrass. C'est ce qu'on peut voir déjà pour ses publications et ce qu'on verra bien plus clairement encore quand le cours qu'il fait depuis presque 30 années sera enfin publié.

...

20 septembre 1881

...

Je compte de lire[2] quatre heures par semaine une introduction dans la théorie des fonctions. Je commence avec le nombre entier et j'ai les prétentions d'établir l'arithmétique d'une manière parfaitement rigoureuse et tout à fait analytique sans des considérations géométriques quelconques. C'est surtout quant au nombre irrationnel où on manque de rigueur même chez les meilleurs auteurs. Mais M. Weierstrass a indiqué comment on peut construire une théorie rigoureuse et M. Cantor surtout et puis M. Heine et d'autres ont écrit plusieurs choses là-dessus. J'écris mon cours avec l'intention de le publier après si M. Weierstrass me donne comme je le pense son autorisation.

...

14 octobre 1881

...

Les choses que vous me dites sur l'enseignement des mathématiques m'ont donné beaucoup à penser. Je me suis dit que vous lisez 30 ou 40 heures pendant toute l'année et que M. Weierstrass lit 8 heures par semaine pendant les neuf mois de l'année. Vous avez créé en très peu d'années un nombre grand d'élèves vraiment supérieurs et M. Weierstrass n'a guère un seul élève qui soit vraiment un mathématicien hors de ligne. Alors c'est évident que vous avez plus de talent d'éveiller les génies mathématiques que M. Weierstrass. Mais il me paraît que votre méthode dans sa totalité soit tellement personnelle qu'elle ne peut pas être imitée par un autre. Sans votre génie c'est impossible de lire comme vous.

---

[1] H. Poincaré: Œuvres IV, Paris 1950, 28—35.

[2] Mittag-Leffler veut dire: faire un cours

Mais c'est très facile de lire comme M. Weierstrass si on a seulement suffisamment approfondi ses idées.

C'est vrai que les erreurs ont profité à la Science mais alors on a été naïf et on croyait à l'erreur. Mais comment voulez-vous enseigner une erreur quand vous savez que c'est une erreur. Comment voulez-vous démontrer par exemple que chaque fonction continue a une dérivée quand vous savez que c'est fautif? Monsieur Serret dans la nouvelle édition de son calcul intégral a tout un système de démonstrations qui sont toutes fautives. Et il n'en dit pas un mot. Mais ce n'est pas plus difficile de donner des démonstrations correctes. Je ne crois pas non plus qu'il soit juste de regarder le système de Weierstrass comme compliqué. C'est au contraire simple et naturel en même temps que rigoureux, mais c'est vrai qu'il faut beaucoup de temps pour le développer. En deux mots je crois qu'en ayant réellement approfondi la méthode de Weierstrass c'est impossible d'enseigner autrement mais je crois en même temps que votre méthode professée par vous soit décidément plus profitable pour éveiller les grands talents.

. . .

3 août 1882

. . .

Je suis resté trois jours à Berlin et ce séjour m'a consolé un peu dans la tristesse que j'éprouvais de voir les relations hostiles des géomètres allemands entre eux. Weierstrass est tellement grand et noble et simple qu'on n'ose pas venir à lui avec toutes ces querelles indignes à la science. J'ai demandé son opinion dans l'affaire Schwarz-Klein contre Poincaré-Fuchs et il m'a déclaré expressément qu'il trouve que M. Poincaré a parfaitement raison. La seule chose qu'il me paraissait pas approuver c'était le nom «fonctions kleiniennes». Et c'est vrai que le nom est drôle. M. Poincaré l'avait introduit à cause d'une lettre de M. Klein où M. Klein lui communiquait de certaines choses. Mais ces choses n'étaient pas de Klein. Elles étaient de M. Schottky ce que M. Klein avait oublié de dire. Je tiens cette histoire de M. Klein lui-même. Mais je veux vous raconter une autre affaire qui augmentera infiniment la fureur des géomètres allemands. C'est un secret encore et il ne faut pas que vous ayez l'air de le savoir. Monsieur Kummer donnera sa démission cet automne et il n'y a pas un seul mathématicien allemand non berlinois qui ne désire pas devenir son successeur. Et voici le secret qu'on brûle d'envie de connaître dans toutes les petites universités d'Allemagne mais qu'on est parvenu de garder très bien encore à Berlin. C'est déjà décidé que le successeur sera Fuchs. Je trouve qu'on a entièrement raison et que Monsieur Fuchs a mérité cet honneur avant tous les autres qui pouvaient être en question. Je crois vous avoir raconté une fois l'histoire de l'arrivée de M. Fuchs à Heidelberg. L'histoire doit être vraie mais il paraît que M. Fuchs est parvenu de se disculper d'une manière satisfaisante car il est maintenant dans les meilleurs relations avec Weierstrass. Mais tous ceux qui enviaient M. Fuchs ses succès scientifiques l'avaient regardé comme un homme fini d'après cette histoire et en se disputant la succession de Kummer on ne pensait pas du tout à Fuchs. Mais c'est surtout M. Schwarz qui sera blessé on ne peut plus. Il est le beau-fils de Kummer et il a toujours regardé comme un droit naturel de devenir son successeur.

Autant plus que l'influence de M. Kummer auprès du gouvernement est très grande si grande que c'est un cancan répandu en toute Allemagne que celui qui marie une fille de Kummer — les filles sont laides et disgracieuses à l'impossible — marie en même temps une chaire de mathématiques. Mais cette fois-ci Weierstrass s'en est mêlé et il a déclaré qu'il devait bien avoir le droit de choisir quand il s'agissait de prendre un de ses élèves ...

Mais il faut que je vous raconte une autre histoire qui vous fera du plaisir. Il y a quelques jours tous les géomètres Berlinois étaient réunis ensemble pour fêter M. Wangerin qui ira à Halle comme successeur de Heine. On parlait des géomètres français, de vous, et de Picard et Poincaré. Alors Weierstrass a déclaré «Wir müssen uns *teuflich zusammenraffen* wenn nicht Paris noch einmal der Hauptsitz der Mathematik werden wird». Je laisse à M. Picard de vous faire la traduction. Je tiens l'histoire de M. Hettner professeur extraordinaire à Berlin. Avec cette phrase Weierstrass a donné l'expression à l'inquiétude qui règne pour le moment en toute Allemagne. Il n'y a pas un seul des géomètres allemands qui promette de devenir un grand mathématicien et quand Weierstrass et Kronecker s'en iront la voie de grands géomètres sera extirpée en Allemagne pourvu que le ciel n'a pas pitié d'elle encore une fois. Weierstrass le sait très bien et Kronecker m'en a parlé ...

J'ai soumis à Monsieur Weierstrass ma dispute avec M. Schwarz. Il m'a déclaré que je devais publier tout de suite une correction de ma note et que je n'avais pas du tout à m'occuper avec Monsieur Schwarz. Il fera après, tout ce que lui plaira ...

8 août 1882

...

M. Weierstrass est un grand homme comme vous. Il ne tient pas du tout à ce qu'on pourra dire qu'une découverte est faite par lui. Je crois au contraire qu'il se réjouit presque plus d'une découverte faite par un autre ...

20 août 1882

...

M. Schwarz a déjà communiqué un opuscule à la Société des Sciences de Goettingue où il fait semblable d'ignorer tous mes travaux dans la théorie des fonctions à cause de ce malheureux ε que j'ai mis une seule fois constant où il devait être variable. C'est pourtant un peu dur, je trouve, car combien de mathématiciens se trouvent-ils qui ne sont jamais trompés dans des détails ...

Je suis sûr que M. Weierstrass prendra parti contre M. Schwarz ...

Mais M. Schwarz prémédite aussi une attaque contre vous ... C'est à cause d'un théorème qui se trouve dans votre cours qu'une surface est la limite du polygone inscrit qu'il veut publier quelque chose. Il paraît que ce théorème ne soit pas tout à fait exact et soit soumis à des exceptions[1]...

---

[1] H. A. SCHWARZ: «Sur une définition erronnée de l'aire d'une surface courbe. Communication faite à M. Charles Hermite. Cours de M. Hermite, professé pendant le 2e semestre 1881—1882, second tirage Paris 1883, p. 35—36.» (Gesam. Math. Abhandlungen, tome II, 309—311, Springer, Berlin 1890). Il s'agit d'une définition donnée par J. A. SERRET de l'aire d'une surface gauche et telle qu'il peut arriver que «l'aire de la surface du polyèdre inscrit peut surpasser une quantité donnée» (p. 309).

26 février 1883

...

Merci de votre bonté de me procurer une bonne traduction![1] Je trouve qu'il doit finir si tôt que possible la traduction de Cantor et après nous verrons. Peut il traduire Cantor alors il n'y a guère de traduction qui lui fera de difficulté. Je vous prie de vouloir bien m'envoyer la traduction du récent mémoire de Cantor sitôt qu'elle sera finie. On a déjà commencé avec les premiers et le récent doit être mis en travail sitôt que possible. Je vous envoie un beau et un nouveau mémoire qui doit finir le cycle et je vous prie de le faire donner au traducteur. M. Cantor m'a écrit qu'il vous a envoyé déjà un exemplaire pour vous-même. Je regrette que M. Cantor a employé tant de philosophie. La partie mathématique me paraît admirable et l'introduction de nouveaux nombres qui ont l'infini pour unité doit être d'une grande importance. Weierstrass en est très intéressé.

...

8 mars 1883

...

Je vous prie de ne pas faire traduire le dernier grand mémoire de M. Cantor. Je le prierai de rédiger ce mémoire d'une autre manière avec exclusion de toute philosophie et en se bornant à l'exposition de la question mathématique. Je suis persuadé pour ma part que cette partie mathématique est d'une grande importance et je crois que M. Poincaré même en tirerai une fois des avantages considérables. Mais nous verrons!

...

1 mai 1883

...

Les mémoires de Cantor ne sont pas très longs pourtant, et ils ne prendront pas beaucoup de place dans les Acta. C'était nésessaire de publier d'abord les traductions des mémoires antérieurs pour comprendre ses recherches actuelles. Je crois que vous êtes pourtant trop sévère envers lui et que vous trouverez une fois que ces recherches ont beaucoup d'importance pour la théorie des fonctions. M. Weierstrass n'est pas de votre opinion. Il estime beaucoup les travaux de M. Cantor, mais je dois avouer que la pluralité des géomètres allemands sont de votre opinion.

...

---

[1] Dans le tome 2 (1883) des Acta mathematica fut publiée une suite de mémoires de CANTOR en français («la traduction a été revue et corrigée par l'auteur» p. 305) et nous voyons ici qu'HERMITE servait d'intermédiaire. Les mémoires suivants furent traduits dans ce tome: «Sur une propriété du système de tous les nombres algébriques réels» (305—320); «Une contribution à la théorie des ensembles» (311—328); «Sur les séries trigonométriques» (329—335); «Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques» (336—348); «Sur les ensembles infinis et linéaires de points» (I: 349—356; II: 357—360; III: 361—371; IV: 372—380); «Fondements d'une théorie générale des ensembles» (381—408); «Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à N dimensions» (409—414). Dans le tome 4 (1884) fut publiée la traduction française du mémoire: «De la puissance des ensembles parfaits de points» (381—392).

18 février 1885

...

J'ai été très peiné de mes visites chez Weierstrass pendant la journée que nous étions à Berlin. Il est malade et il est triste et en partant j'avais une impression douloureuse que c'était ma dernière entrevue avec lui dans cette vie. J'ai vu très bien qu'il pensait la même chose. Il est tourmenté par la pensée qu'il n'a pas publié ses meilleures découvertes et que ce soin sera par la force des choses laissé à des hommes qui iront à cette tâche non par amour et piété pour lui, mais pour gagner des avantages personnels. Quoique ses élèves n'osent pas beaucoup parler devant lui de leurs luttes et de leur envie mutuelle, il se rend très bien compte de tout cela et il en souffre profondément. Il est aussi très tourmenté de voir Kronecker attaquer publiquement ses théories et de voir que ces attaques ont commencé maintenant quant il est devenu vieux et malade et n'a plus les forces de se défendre. Et après de voir tout ce monde qui pour plaire à Kronecker redisant des choses qu'ils ne peuvent pas croire. Lisez par exemple le dernier article de Fuchs[1] dans le «Berliner Monatsbericht» contre les fonctions analytiques. Les phénomènes qu'il expose sont vrais et intéressants, mais comme les conclusions sur la nature des fonctions analytiques sont faciles à réfuter! J'ai demandé à Mr. Fuchs de me rédiger un article sur cette matière pour les Acta. Je pense alors dans une note défendre la manière à voir de Weierstrass. Tout cela entre nous naturellement.

La lucidité d'esprit de Weierstrass est restée la même et il s'occupe toujours avec les problèmes les plus élevés et les plus difficiles. Comme vous savez il a eu toujours la difficulté de finir un travail de quelle nature que cela soit. Cette difficulté est devenue maintenant une impossibilité.

...

6 mars 1885

...

Il sera nécessaire de rédiger encore une fois les choses de Poincaré pour les faire vraiment accueillibles aux géomètres. Weierstrass me le disait il y a longtemps. Je croyais alors qu'il avait beaucoup exagéré, mais je trouve maintenant qu'il avait pleinement raison.

...

19 mai 1885

...

A Berlin la situation devient de plus en plus difficile à chaque jour. Kronecker attaque ouvertement dans son cours les idées de Weierstrass et il développe de plus en plus son idée qu'on ne doit pas accepter dans les Mathématiques d'autres points de vue que ceux de l'algèbre et de l'arithmétique. Weierstrass au contraire défend son cours d'analyse qu'il a enrichie avec tant de belles découvertes et de laquelle il a donné les fondements bien sûrs et indiscutables d'après ce qu'il me paraît. Kronecker m'a promis d'écrire un article dans les Acta où il développe ouvertement soi-même ses idées sur l'analyse et l'algèbre. Mais l'article ne devient

---

[1] L. Fuchs: Über den Charakter der Integrale von Differentialgleichungen zwischen complexen Variabeln (Sitzungsberichte Akad. Wiss. Berlin Mat. Nat. Mit. 1885, 1—8).

Weierstrass a écrit à ce propos à S. Kovalevskaya (Acta Math. **39** (1923), 194).

jamais prêt, ce qui est fort regrettable. Il serait donc bien plus préférable si la discussion devenait publique au lieu d'être aggravée comme maintenant par une masse de propos à vive voix qu'on cite et transforme d'après son goût individuel.
...

7 octobre 1886

... Je viens de Berlin où j'ai assisté au congrès des naturalistes ...

M. Kronecker emploie toutes les occasions à dire du mal de Weierstrass et de ses recherches. Il disait même l'autre jour en parlant de lui et Weierstrass que Gauss était peu connu et peu estimé de ses contemporains, tandis que Hindenburg était le grand géomètre populaire de ce temps en Allemagne. M. Kronecker de même a fait faire son buste par un sculpteur italien. Ce buste est placé dans son salon et tout le monde est invité à l'admirer. Au congrès M. Kronecker faisait une attaque qui n'était motivée de rien contre la première question du prix du roi de Suède. Il prétendait que Dirichlet était mal cité et il disait qu'il voulait publier quelque chose là-dessus. Mais comme il a dit la même chose pendant toute une année sans pourtant rien faire je suppose que cette publication ne viendra jamais. Tout le monde savait que la question était de Weierstrass et l'attaque de M. Kronecker n'a pas fait une bonne impression, je vous assure, surtout comme il ne pouvait pas expliquer en quoi Dirichlet était mal cité.
...

19 janvier 1888

...

M. Hurwitz qui n'écrivait pas auparavant dans les Acta à cause de ses relations avec M. Klein a aussi envoyé un article. Il y a donc maintenant très peu de géomètres vraiment distingués qui ne sont pas mes collaborateurs.
...

13 mai 1888

...

Avez vous vu la note[1] de M. Kronecker sur notre question I. Il me semble que la note n'était pas très nécessaire. C'est difficile de discuter sur l'opinion de Dirichlet avant que la question soit vraiment résolue. Si je ne me trompe pas M. Weierstrass en sait beaucoup plus qu'aucun autre géomètre maintenant vivant même M. Poincaré.
...

4 décembre 1888

...

Je vous renvoie ici votre rapport avec la prière que vous veuillez bien le faire copier sur un grand papier, le signer et après me l'envoyer sitôt que possible ... Parce que vous m'avez permis de faire des remarques je me permettrai d'observer les circonstances suivantes que vous veuillez peut-être prendre en considération avant de faire copier le rapport ...

2° Monsieur Weierstrass démontre dans son cours depuis 20 ans au moins qu'il est possible de donner de tels développements en séries trigonométriques

[1] Bemerkungen über DIRICHLET's letzte Arbeiten (Werke V, 473—476, Chelsea, New York 1968).

que M. Appell vient de trouver. Il me paraît donc que vous devez effacer de votre rapport les phrases qui se rapportent à cela que c'était inattendu que de tels développements existaient.

3º Je crois que vous avez rapporté à Riemann certaines choses qui sont publiées auparavant par Weierstrass dans un mémoire qui était imprimé quand il était encore professeur à Deutsch-Krona, qui est extrêmement rare et que vous n'avez jamais vu je suppose ...

30 janvier 1889

...

Quant à vous-même mon cher maître je dois vous confier sous le sceau du plus profond secret que j'avais obtenu du ministre des affaires étrangères de demander pour vous et M. Weierstrass la grande Croix. Mais il y a un traité avec l'Allemagne qu'on ne peut pas donner une décoration à un Allemand sans avoir obtenu auparavant la permission du gouvernement allemand et le gouvernement allemand a refusé.

...

28 mai 1890

...

J'ai eu une longue lettre de M. Weierstrass qui va un peu mieux maintenant. Mais il ne pourra guère plus d'une manière sérieuse s'occuper de la géométrie et il en souffre beaucoup. Il paraît aussi que M. Kronecker est très cruel pour lui. L'influence de M. Kronecker sur les affaires ministérielles quant aux chaires vacantes etc. est du reste nulle maintenant. Il a trop abusé de cette influence autrefois et il est juif. La dernière raison est sans doute très mauvaise, mais vous savez que cela compte pour beaucoup en Allemagne à ce moment.

...

27 janvier 1892

...

Je suis resté un seul jour à Berlin et je n'ai vu personne sauf M. Weierstrass. Le pauvre Weierstrass il mène une vie bien misérable. Il souffre de névralgies terribles, d'une toux chronique et il ne peut pas travailler. Il est rempli de tristesse et ne désire que la mort. Maintenant on le tourmente beaucoup pour la succession de Kronecker. Il paraît que Schwarz, Frobenius et Klein ont le plus de chance. Weierstrass trouve que Schwarz soit le plus mérite au point de vue scientifique mais qu'il est impossible au point de vue social. Pour Klein il ne veut pas du tout qu'il occupe une telle position. En cela il est entièrement de la même opinion qu'était Kronecker. Il regarde Klein comme un grand faiseur sans beaucoup de qualités sérieuses. Il dit «Klein est grand surtout par les travaux qu'il n'a pas fait mais qui ont été faits par les jeunes Français». Je crois que Weierstrass au fond aimerait le mieux de voir venir Frobenius à Berlin. S'il pourrait être amené à écrire lui-même son opinion au ministre on suivrait sans doute cette opinion, mais ce n'est pas probable qu'il puisse se décider de dire publiquement son opinion. En attendant presque tous les géomètres d'Allemagne et entre autres beaucoup M. Netto font des efforts pour obtenir la succession de Kronecker. Pour ma part je trouve que M. Hurwitz serait le meilleur candidat mais Fuchs le déteste et il est juif de religion.

...

13 mars 1892

...

Peut-être qu'il soit plus prudent d'attendre un peu pour la succession de M. Kronecker dans l'Académie de Paris. Sans doute que M. Lie sera un digne successeur peut-être même en réalité le plus digne. S'il n'était pas professeur allemand mais restait encore à Christiania la susceptibilité allemande ne serait non plus blessée. Maintenant c'est peut-être un peu autre. Il n'y aurait guère de politesse envers les pays scandinaves et non plus envers l'Allemagne de le choisir. Je suis très content que M. Schwarz soit venu à Berlin. C'était le plus juste je trouve. Mais M. Klein qui a été battu complètement reste furieux. C'était pourtant un bonheur que ce n'était pas M. Klein qui soit venu à Berlin. Une fois là il serait devenu tout puissant et une toute puissance à lui n'aurait nullement été à l'avantage des mathématiques sérieuses.

M. Fuchs comme rédacteur du journal de Crelle est un nom tout simplement. Le rédacteur actuel sera M. Lampe. Je pense que le journal sera de plus en plus insignifiant. On écrivait chez Kronecker parce qu'on voulait de cette manière gagner sa protection pour les chaires vacantes. Et Kronecker gardait toujours de l'influence. C'était moins dans les dernières années c'est vrai, mais on ne le savait pas en général. Pour M. Fuchs c'est autre chose, tout le monde sait qu'il n'a absolument rien à dire.

Je reçois tous les jours des lettres d'Allemagne où les plus doués entre les jeunes se mettent maintenant entièrement à ma disposition.

...

14 avril 1893

...

Il y a une place libre après M. Weierstrass parmi les correspondants de la classe de Géométrie à l'Académie des Sciences à Paris. Si je serais nommé à cette place, tout ici se changerait immédiatement. La guerre qu'on me fait pour les Acta ne vient pas de la Diète mais du soi-disant monde scientifique. Si l'Institut me faisait l'honneur dont je parle, on n'écouterait plus un instant aux arguments des envieux. On regarderait à la Diète une telle distinction comme preuve décisive de la valeur de l'entreprise de laquelle je suis en tête.

Je sais mieux que personne qu'il y a des géomètres d'une plus haute valeur par leurs travaux scientifiques que la mienne et qui ne sont pas encore à l'Institut. Mais je trouve que la position comme directeur des Acta que j'occupe depuis 13 ans maintenant et les rapports spéciaux que j'ai eu à la science française me donne le droit d'espérer qu'on parlera de moi dans cette occasion. J'en suis sûr aussi que M. Weierstrass me verrait moi avec plaisir être nommé son successeur et qu'il me préférerait aux autres candidats.

...

2 mai 1895

Mon cher et vénéré maître,

Agréez mes très vifs remerciements de la nouvelle épreuve de votre bonté que vous m'indiquez dans votre dernière lettre. La décoration donnée à une telle occasion et sur la proposition de tels hommes que vous, Poincaré et Darboux aura évidemment pour moi une très grande valeur et l'effet ici en Suède sera aussi je l'espère très favorable. Pourtant, vu que ce degré de la Légion d'honneur a été beaucoup distribué en Suède l'effet ne pourrait pas être comparé avec une élection comme correspondant à l'Académie des Sciences. J'ai un ami dans le Sénat qui le connaît comme sa propre poche et qui est du reste depuis beaucoup d'années le plus puissant dans la commission du budget. Il m'affirme que mon élection comme correspondant serait tout à fait décisive pour les Acta, et que ce serait fini après avec ces éternelles discussions qui me font tant de mal. Je m'imagine de connaître moi-même assez bien la Diète suédoise et je suis sûr qu'il a raison. Quant à l'effet en Allemagne de mon élection, l'effet sera bien plus déplorable si un Allemand est élu. Prenez un des trois Fuchs, Schwarz, Klein et les deux autres avec leurs amis deviendront bien sincèrement furieux. Prenez quelqu'un qui ne soit pas Allemand et on trouvera naturel qu'on ne veut pas encore une fois s'adresser en Allemagne après l'honneur qu'on vient de faire à M. Weierstrass.

Mais je sais bien que je ne suis nullement digne par mes travaux de faire la concurrence avec les hommes que vous me nommez et qui ont tout autres titres que moi. C'est seulement les services que j'ai pu faire d'une autre manière à la science qui peuvent me mettre en ligne. Et croyez-moi, mon très cher maître, je n'aurais jamais touché cette question si je n'étais pas dans la nécessité de faire mon possible pour sauver une entreprise que je tiens tellement au cœur.[1]

. . .

21 juillet 1898

. . .

Connaissez vous la tragédie qui s'est passée dans la famille de Weierstrass? Le 1 mars Mlle Elise[2] a été opérée pour une tumeur intérieure. Le même jour le petit Franz[3] qui se trouvait en pension à la campagne s'est tué par un coup de revolver. Il avait l'âge de 16 ans. Officiellement il est mort par un accident. Mais il existe une lettre de lui à Mlle Weierstrass dont elle n'a jamais eu connaissance et dans laquelle il dit vouloir se tuer «Je t'assure par Dieu que je ne peux pas te dire la cause» il écrit.

En allant et en venant à Gastein j'ai été chez Mlle Weierstrass mais en étant alitée elle n'a pas voulu me recevoir. Le frère Pierre qui était venu à Berlin s'installer près d'elle prétendait pourtant qu'elle n'était pas gravement malade. Mais je n'étais guère revenu à Stockholm quand je reçois la nouvelle de sa mort. J'ignore encore les détails. Comme Weierstrass a été heureux de mourir avant toute cette tragédie. Le petit Franz était le fils de Mme Borchardt je le sais, aussi bien que je sais qu'il n'était pas le fils de Weierstrass. L'explication principale de sa mort doit être qu'il souffrait d'hystérie d'enfant. Tout cela est bien triste et m'a profondement impressionné.

---

[1] L. Fuchs fut élu Membre Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris le 24 juin 1895, H. A. Schwarz le 1er juillet 1895, F. Klein le 17 mai 1897 et G. Mittag-Leffler le 29 janvier 1900.

[2] Sœur de Weierstrass.

[3] Fils adoptif de Weierstrass.

Sitôt que j'aurais fini mon travail sur la théorie des fonctions, je dois commencer sérieusement avec la biographie de Weierstrass qui m'a été commandée par la société royale de Londres. Je possède beaucoup de matériel pour cette biographie qui n'est pas connu et qui est d'un intérêt capital.

...

Appendice XII

Charles Hermite

Lettres à J. B. Dumas

(Archives de l'Académie des Sciences de Paris)

(Extraits)

19 mai 1882

Mon cher confrère,

Nous avons dans la section de Géométrie deux correspondants illustres Mr Weierstrass et Mr Kronecker que de grandes découvertes ont placé au premier rang des Analystes de notre époque. Une décision de gouvernement, en accordant à Mr Weierstrass la décoration de la Légion d'honneur, a témoigné à la fois de l'estime du Chef de l'Etat pour le grand géomètre, et de son haut intérêt pour le progrès des Sciences mathématiques. Je serais heureux, mon cher confrère, de devoir à votre bienveillance, d'appeler également l'attention de Mr le Président du Conseil sur les titres éminents de Mr Kronecker, qui dans une autre voie n'a pas moins mérité de la Science que Mr Weierstrass.

...

7 juillet 1882

Mon cher confrère,

Je viens de télégraphier à Mr Kronecker la nouvelle de sa nomination dans la Legion d'honneur, et je vais lui écrire qu'il la doit à votre bienveillante intervention.

...

Vous m'avez donné, mon cher confrère, l'un des meilleurs moments de ma vie scientifique.

...

Appendice XIII

Hermann Amandus Schwarz

Karl Weierstrass

(Zentrales Archiv der deutschen Akademie der Wissenschaft zu Berlin, DDR, Abt. Nachlässe, Bestand Schwarz: Weierstrass)

(Extraits)

(1)

Wernigerode im August 1888

Der Vater des Herrn Professor Weierstrass war Protestant. Da mit einem katholischen Geistlichen innig befreundet war, wurde er von diesem enthusiastisch für die katholische Kirche begeistert und trat zur katholischen Kirche über. Dies entfremdete ihn seiner Familie.

Dieser Vater hatte einen Bruder, welcher Protestant blieb und in erster Ehe mit einer nicht sehr gesunden Frau verheiratet war, von der er eine große Zahl Kinder erhielt, die jedoch größtenteils an der Schwindsucht starben.

Er selbst war 14 Jahre lang in einer Anstalt für Geisteskranke.

Ein Sohn war verheiratet mit der Tochter eines Malers aus Soest. Von den Nachkommen lebt jetzt nur noch eine kleine Zahl. Einer derselben, dessen Vorname *Oskar* ist, war in erster Ehe, welche nicht sehr glücklich war, verheiratet. Die Ehe blieb 7 Jahre kinderlos. Dann wurde ein Sohn *Franz* am 2ten Oktober 1882 auf dem Gute Asbeck bei Neviges in der Nähe von Jülich geboren. Diesen kleinen Jungen nahm, als seine Mutter gestorben war, und der Vater zu einer neuen Ehe schritt, Professor Weierstrass zu sich, um seine Erziehung zu leiten.

(2)

Cudowa, 29. August 1901

. . .

Ende Sommer 1856 nach Berlin gekommen.

Er wurde berufen durch den Direktor Nottebohm, dem er empfohlen war durch den Prof. Richelot in Königsberg.

. . .

Geb. 31 Oktober 1815 zu Ostenfelde.

. . .

Der Vater war in seiner Jugend Schullehrer gewesen; einer protestantischen Familie des Rheinlandes entsprossen, war er durch eine ihm befreundeten, für die katholische Kirche begeisterten französischen Abbée (welcher als Réfugié in Ostenfelde lebte) zur katholischen Kirche übergeführt worden.

. . .

Karl hatte den ersten Unterricht erhalten in Gütersloh in einer jüdischen Volksschule, deren Vorsteher ein guter Lehrer und namentlich tüchtig im Rechnen war.

. . .

Er ging zur Universität Bonn, um Jura und Commerzialwissenschaften, auf Veranlassung seines Vaters, zu studieren.

. . .

(3)

. . .

Auch hörte er mathematische Vorlesungen, namentlich bei Professor Plücker, auch widmete privatim er der Mathematik, namentlich der Analysis viel Eifer zu. In diese hatte er aber auf dem Gymnasium soviel es ihm möglich war, einzudringen gesucht.

. . .

(7)

Deutsch-Crona (1845—1846). Während seines Aufenthaltes in Deutsch-Crona erfuhr der junge Forscher eine schmerzliche Enttäuschung. Bei den jungen

Damen von D.C. war er sehr beliebt. In der Familie eines befreundeten Rechtsanwalts, hatte er ein junges Mädchen kennengelernt, eine Verwandte derselben, die Tochter eines Gutsbesitzers, die ihm so gefiel, daß er sich mit ihr verlobte. Weder er noch die Familie des Rechtsanwalts hatten eine Ahnung, daß dieses Mädchen ein Liebesverhältnis mit dem Inspektor ihres väterlichen Gutes gehabt hatte und von ihren Eltern in die Stadt gebracht worden war, um über dieses Verhältnis hinwegzukommen. Ungeachtet der Verlobung setzte aber das Mädchen im Geheimen dieses Liebesverhältnis fort und die Verlobung mußte aufgehoben werden. Diese Erfahrung hatte für den jungen Gelehrten die betrübende Folge, daß er in eine schwere Krankheit verfiel, von der er sich nur langsam wieder erholte, indem er sich angestrengt der Arbeit zuwendete. Man wird keinen Irrtum begehen, wenn mann annimmt, daß die traurige Erfahrung auf das ganze spätere Gemütsleben des Gelehrten einen Schatten geworfen hat.

...

In Gütersloh besuchte er eine jüdische Schule, deren Lehrer guten Rechnenunterricht gab und ihn außerdem im Lateinischen so gut vorbereitete, daß er auf dem Gymnasium zweimal zwei Klassen je in einem Jahre absolvierte.

...

Diese schmerzliche Erfahrung übte auf seine Gemütsstimmung für lange Zeit einen verstimmenden Einfluß aus und gab seinem ganzen Wesen etwas Scheues und Verschlossenes. Vielleicht war er sich überhaupt dunkel bewußt, daß er in vielen praktischen Hinsichten sehr unerfahren, ungewandt, ja ungeschickt war.

Appendice XIV

Paul du Bois-Reymond

Lettres à Georges Halphen

(Archives de l'Institut de France, Paris)

(Extraits)

22 juin 1879

...

Nous avons la «Naturforschersammlung» cette fois à Bade dans le mois de septembre.

...

Peut-être que cela vous amuserait de voir cette combinaison de bonne chère et de science. Moi je m'en tiens ordinairement à la première.

...

16 janvier 1883

Mon cher Monsieur,

Mr Hugoniot m'a réellement obligé, car c'est à lui que je dois le plaisir de recevoir une lettre de vous, et de pouvoir vous rendre un léger service.

La série dont il s'agit particulièrement est celle de Lagrange dite ordinairement de Fourier:

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sin x \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin t\,dt + \cos x \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos t\,dt$$
$$+ \sin 2x \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin 2t\,dt + \cos 2x \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos 2t\,dt + \text{etc.}$$

Avant 1873 c'était bien la conviction générale, entre autres de Lejeune-Dirichlet, de Riemann, de Weierstrass, que cette série converge toujours vers la limite $\pi f(x)$, quand $f(x)$ est continue entre les limites de l'intégration. Eh bien, à force d'essayer de trouver une démonstration pour ce théorème, je parvins à trouver un raisonnement, qui prouve le contraire: *La série peut être divergente pour des valeurs de x, pour lesquelles la fonction $f(x)$ est continue même avec toutes ses dérivées. Et ces points de divergence peuvent même être «pantachiquement» répandus dans l'intervalle $-\pi \ldots +\pi$, c'est-à-dire être rencontrés dans chaque espace de cet intervalle aussi petit que l'on voudra.*

J'ai communiqué la première fois ce résultat dans les Göttingen Nachrichten[1], 1873, N⁰ 21, mais ce n'est qu'en 1876[2], que j'ai développé en détail dans le mémoire que je vous envoie en même temps que cette lettre. J'ai ensuite formé une fonction non développable d'après un principe tout-à-fait différent dans les Annales de Leipzig, *X*[3]: Zusätze zur Abhandlung etc. Un autre exemple a été construit par Mr. Weierstrass à l'usage de Mr. Kronecker, que je compte publier prochainement, enfin Mr. Schwarz a donné un exemple assez maladroit dans la thèse de Mr A. Sachse traduit et réimprimé dans le bulletin de Darboux. Mais je crois que la préface et le Chapitre III, du Mémoire, que je vous envoie, suffisent complètement pour mettre la chose en évidence.

...

Bibliographie

[1] Abel, Niels Henrik, Oeuvres complètes, tome I, Christiania, 1881, Grøndahl.

[2] Abel, Niels Henrik, Mémorial, Kristiania, 1902, Dybward.

[3] Ahrens, W., Skizzen aus dem Leben Weierstrass'. Math.-Naturwiss. Blätter, **4**, 41—47 (1907).

[4] Behnke, Heinrich, & Klaus Kopfermann, éd.s, Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstrass 1815—1965. Köln: Westdeutscher Verlag 1966.

[5] Betti, Enrico, Opere matematiche I. Milano: Hoepli 1903.

[6] Bieberbach, Ludwig, Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen, Encycl. Math. Wissen., Analysis, Band II, Dritter Teil, 379—532. Leipzig: Teubner 1909—1927.

---

[1] Über die Fourier'schen Reihen (Göttingen Nachrichten 1873, 571—582).

[2] Beweis, daß die Coefficienten der trigonometrischen Reihe ... (1te Abt.) (München Akad. Abhandl. **12** (1876), 117—168).

Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln (2te Abt.) (München Akad. Abhandl. **12** (1876) 1—103).

[3] Zusätze zur Abhandlung: Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln (Math. Annalen **10** (1876), 431—445).

[7] BIERMANN, KURT-R., Urteile A. L. Crelles über seine Autoren. Journal reine angew. Math., **103**, 216—220 (1960).

[8] BIERMANN, KURT-R., Vorschläge zur Wahl von Mathematikern in die Berliner Akademie. Berlin: Akademie Verlag 1960.

[9] BIERMANN, KURT-R., Dirichlet über Weierstrass. Praxis der Mathematik, **7**, 309—312 (1965).

[10] BIERMANN, KURT-R., Karl Weierstrass. Ausgewählte Aspekte seiner Biographie. Journal reine angew. Math. **223**, 191—220 (1966).

[11] BIERMANN, KURT-R., Die Mathematik und ihre Dozenten an der Universität 1810—1920, Habilitationsschrift, Berlin, 1968, Manuscrit, Univ. Bibl. Berlin.

[12] BIERMANN, KURT-R., Zu Dirichlets geplantem Nachruf auf Gauss. NTM-Schriftenr. Gesch., Naturwiss., Technik, Med., Leipzig, **8**, 9—12 (1971).

[13] BIERMANN, OTTO, Theorie der analytischen Functionen. Leipzig: Teubner 1887.

[14] BOHLMAN, G., Übersicht über die wichtigsten Lehrbücher der Infinitesimal-Rechnung von Euler bis auf die heutige Zeit. Jahresbericht deutsch. Math. Verein. **6**, II. Teil, 91—110 (1899).

[15] DU BOIS-REYMOND, PAUL, Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Änderungen in den kleinsten Intervallen. Journal reine angew. Math. **79**, 21—36 (1875).

[16] BOLZANO, BERNARD, Démonstration purement analytique du théorème: entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposés se trouve au moins une racine réelle de l'équation. Revue d'Histoire des Sciences, **17**, 136—164 (1964).

[17] BOURBAKI, NICOLAS, Eléments d'histoire des mathématiques, 2ème éd. Paris: Hermann 1969.

[18] BRILL, A., & M. NOETHER, Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuer Zeit. Jahresbericht deutsch. Math. Verein. **3**, 107—566 (1892—93).

[19] BRIOT & BOUQUET, Théorie des fonctions doublement périodiques. Paris: Mallet-Bachelier 1859.

[20] BUKREEV, B., O razloženii transcendentnyh funkcij na častnije drobi. Univ. Izv. Kiev, **26**, 299—324 (1886).

[21] CANTOR, GEORG, Gesammelte Abhandlungen. Berlin: Springer 1932.

[22] CAUCHY, AUGUSTIN LOUIS, Excercices de Mathématiques. Paris: de Bure 1826.

[23] CAUCHY, AUGUSTIN LOUIS, Exercices de Mathématiques, tome II. Paris: de Bure 1827.

[24] CAUCHY, AUGUSTIN LOUIS, Excercices d'analyse et de physique mathématique, tome II. Paris: Bachelier 1841.

[25] CAUCHY, AUGUSTIN LOUIS, Mémoire sur l'application du calcul des résidus au développement des produits composés d'un nombre infini de facteurs. C.R. Acad. Sci. Paris, **17**, 572—581 (1843).

[26] CAUCHY, AUGUSTIN LOUIS, Mémoire sur les fonctions complémentaires. C.R. Acad. Sci. Paris, **19**, 1377—1384 (1844).

[27] CAVAILLES, JEAN, Philosophie mathématique. Paris: Hermann 1962.

[28] CHEVALLEY, C., Variations du style mathématique. Revue de Métaphysique et de Morale, **42**, 375—384 (1935).

[29] DANTSCHER, VICTOR, Bemerkung zur Theorie der irrationalen Zahlen. Berichte nat. med. Vereins Innsbruck, **17**, 1—5 (1887—88).

[30] DANTSCHER, VICTOR, Vorlesungen über die weierstrasssche Theorie der irrationalen Zahlen. Leipzig: Teubner 1908.

[31] DARBOUX, G., Mémoire sur les fonctions discontinues. Annales Ecole Norm. Sup., (2), 4, 57—112 (1875).

[32] DEDEKIND, RICHARD, Gesammelte mathematische Werke, Dritter Band. Braunschweig: Vieweg 1932.

[33] DINI, ULISSE, Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali. Pisa: Nistri 1878.

[34] DUGAC, PIERRE, Charles Méray (1835—1911) et la notion de limite. Revue d'Histoire des Sciences, **23**, 333—350 (1970).

[35] DUGAC, PIERRE, La notion de limite et les nombres irrationnels. Les conceptions de Charles Méray et de Karl Weierstrass, Actes du XIIIème Congrès international d'Histoire des Sciences, Moscou 1971 (à paraître).

[36] FRAENKEL, A., Georg Cantor. Jahresbericht deutsch. Math. Verein. **39**, 189—266 (1930).

[37] Frege, G., Grundgesetze der Arithmetik, Band II. Olms: Hildesheim 1962.

[38] FREGE, G., Nachgelassene Schriften. Hamburg: Meiner 1969.

[39] GERICKE, HELMUTH, Geschichte des Zahlbegriffs. Mannheim: Bibliograph. Institut 1970.

[40] GERVER, JOSEPH, The differentiability of the Riemann function at certain rational multiples of π. American Journal Math. **92**, 33—55 (1970).

[41] GRATTAN-GUINNESS, I., Materials for the History of Mathematics in the Institut Mittag-Leffler. Isis **62**, 363—374 (1971).

[42] HAMILTON, WILLIAM ROWAN, The mathematical Papers, vol. I. Cambridge: The University Press 1931.

[43] HARDY, G. H., Sir George Stokes and the concept of uniform convergence. Proceed. Cambridge Philos. Soc. **19**, 148—156 (1916—1919).

[44] HAWKINS, THOMAS, Lebesgue's theory of integration. Madison: The University of Wisconsin Press 1970.

[45] HEINE, E., Über trigonometrische Reihen. Journal reine angew. Math. **71**, 353—365 (1869).

[46] HEINE, E., Die Elemente der Functionenlehre. Journal reine angew. Math. **74**, 172—188 (1872).

[47] HERMITE, CHARLES, Notice sur M. Weierstrass. C.R. Acad. Sci. Paris **124**, 430—433 (1897).

[48] HERMITE, CHARLES, & THOMAS STIELTJES, Correspondance, tome I. Paris: Gauthier-Villars 1905.

[49] HILBERT, DAVID, Zum Gedächtnis an Karl Weierstrass. Nachrichten Kön. Gesel. Wiss. Göttingen, Geschäf. Mittheilungen, 1897, 60—69.

[50] HILBERT, DAVID, Sur l'infini, traduit par André Weil. Acta mathematica **48**, 91—122 (1926).

[51] HOBSON, E. W., The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, second ed. Cambridge: University press 1926.

[52] Hz. (HOLTZMÜLLER), O. BIERMANN, Theorie der analytischen Functionen. Jahrbuch Fortschritte Math. **19**, 361—365 (1887).

[53] HURWITZ, A., Über die Entwicklung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit. Verhandlungen ersten inter. Math. Kongr. Leipzig: Teubner 1898.

[54] HURWITZ, A., Mathematische Werke, 1er Band. Basel: Birkhäuser 1932.

[55] JOURDAIN, E. B. PHILIP, The Development of the theory of Transfinite Numbers, Part 2, Weierstrass (1840—1880). Archiv Math. Physik **14**, 289—311 (1909).

[56] KIEPERT, L., Persönliche Errinnerungen an Karl Weierstrass. Jahresbericht deutsch. Math. Verein. **35**, 56—65 (1926).

[57] KILLING, WILHELM, Karl Weierstrass. Natur und Offenbarung, **43**, 705—725 (1897).

[58] KLEIN, FELIX, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Teil I. New York: Chelsea 1950.

[59] KOENIG, ROB., «Weierstrass-Woche» in Münster. Jahresbericht deutsch. Math. Verein. **34**, 2. Abteilung, 106—108 (1925).

[60] KOENIGSBERGER, LEO, Weierstrass' erste Vorlesung über die Theorie der elliptischen Funktionen. Jahresbericht deutsch. Math. Verein. **25**, 393—424 (1917).

[61] KOENIGSBERGER, LEO, Mein Leben. Heidelberg: Winter 1919.

[62] KOSSAK, E., Die Elemente der Arithmetik, Programm Friedrichs-Werder. Gymn., Berlin, 1872.

[63] LAMPE, EMIL, Karl Weierstrass. Jahresbericht deutsch. Math. Verein. **6**, 27—44 (1899).

[64] LAMPE, EMIL, Zur hundertsten Wiederkehr des Geburtstages von Karl Weierstrass. Jahresbericht deutsch. Math. Verein. **24**, 416—438 (1915).

[65] LEBESGUE, HENRI, Notice sur la vie et les travaux de Camille Jordan. Paris: Gauthier-Villars 1923.

[66] LEBESGUE, HENRI, A propos de quelques travaux mathématiques récents. L'Enseignement mathématique, (2), **17**, 1—48 (1971).

[67] LINDEMANN, F., Ludwig Seidel. Jahresbericht deutsch. Math. Verein. **7**, 23—33 (1899).

[68] LISTING, JOHANN BENEDICT, Der census räumlicher complexe. Abhand. kön. Gesel. wisse. Göttingen **10**, 97—182 (1862).

[69] LOREY, WILHELM, Karl Weierstrass zum Gedächtnis. Zeit. math. naturwiss. Unterricht aller Schulgattungen **46**, 597—607 (1915).

[70] LOREY, WILHELM, Amtliche Urteile über Weierstrass als Lehrer. Zeit. math. naturwiss. Unterricht aller Schulgattungen **47**, 185—188 (1916).

[71] LOREY, WILHELM, Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts. Leipzig: Teubner 1916.

[72] MEDVEDEV, F. A., Razvitie teorii množestv v XIX veke. Moscou: Nauka 1965.

[73] MESCHKOWSKI, HERBERT, Ways of thought of great mathematicians. San Francisco: Holden-Day 1964.

[74] MESCHKOWSKI, HERBERT, Probleme des Unendlichen, Werk und Leben Georg Cantors. Braunschweig: Vieweg 1967.

[75] MITTAG-LEFFLER, G., Une page de la vie de Weierstrass, Compte rendu 2ème Congrès inter. math. 1900. 131—153. Paris: Gauthier-Villars 1902.

[76] MITTAG-LEFFLER, G., Sur les fondements arithmétiques de la théorie des fonctions d'après Weierstrass, Compte rendu Congrès math. Stockholm 1909, 10—31. Leipzig: Teubner 1910.

[77] MITTAG-LEFFLER, G., Die ersten 40 Jahre des Lebens von Weierstrass. Acta mathematica **39**, 1—57 (1923).

[78] MITTAG-LEFFLER, G., Weierstrass et Sonja Kowalewsky. Acta mathematica **39**, 133—198 (1923).

[79] PAPLAUSKAS, A. B., Trigonometričeskie rjady ot Ejlera do Lebega. Moscou: Nauka 1966.

[80] PICARD, EMILE, Karl Weierstrass. Revue générale des sciences pures et appl., **8**, 173—174 (1897).

[81] PINCHERLE, S., Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del prof. C. Weierstrass. Giornale di Matematiche **18**, 178—254, 314—357 (1880).

[82] PINCHERLE, S., Carlo Weierstrass. Rendiconto Sess. R. Acad. Sci. dell'Istituto di Bologna (2), **1**, 101—104 (1896—97).

[83] PIONCHON, J., Notice sur la vie et les travaux de Charles Méray. Revue Borguignone Ens. sup. **22**, No. 4, 1—158 (1912).

[84] POINCARE, HENRI, L'oeuvre mathématique de Weierstrass. Acta mathematica **22**, 1—18 (1899).

[85] POINCARE, HENRI, L'avenir des mathématiques, Atti IV Congresso inter. Matem. Roma 1908, vol. I, Academia dei Lincei, Roma 1909, 167—182.

[86] POKROVSKIJ, Pamjati Karla Veyerštrassa, Kiev, 1898.

[87] POLUBARINOVA-KOČINA, P. YA., Iz perepiski S. V. Kovalevskoy. Uspehi mat. nauk **7**, No. 4, 103—125 (1952).

[88] POLUBARINOVA-KOČINA, P. YA., Karl T. V. Vejerštrass. Uspehi mat. nauk **21**, No. 3, 213—224 (1966).

[89] PRINGSHEIM, A., & J. MOLK, Algorithmes illimités, Encyclopédie Sci. math. tome I, vol. 1, 209—328. Paris: Gauthier-Villars 1904.

[90] PRINGSHEIM, A., & J. MOLK, Principes fondamentaux de la théorie des fonctions, Encyclopédie Sci. math. tome II, vol. 1, 1—112. Paris: Gauthier-Villars 1909.

[91] ROTHE, RUDOLF, Bericht über die Herausgabe des siebenten Bandes der Mathematischen Werke von Karl Weierstrass. Jahresbericht deutsch. Math. Verein. **37**, 199—208 (1928).

[92] ROTHE, RUDOLF, Eine Bemerkung von Weierstrass. Deutsche Mathematik **2**, 17 (1937).

[93] RUNGE, C., Persönliche Erinnerungen an Karl Weierstrass. Jahresbericht deutsch. Math. Verein. **35**, 175—179 (1926).

[94] RUSSELL, BERTRAND, The Principles of Mathematics, vol. I, Cambridge: The University Press 1903.

[95] SACHSE, ARNOLD, Essai historique sur la représentation d'une fonction arbitraire d'une seule variable par une série trigonométrique. Bull. Sci. Math. (2), **4**, 43—64, 83—112 (1880).

[96] SCHUBERT, HERMANN, Zum Andenken an Karl Weierstrass. Zeit. math. naturwiss. Unterricht **28**, 228—231 (1897).

[97] SCHUBERT, H., J. TANNERY & J. MOLK, Principes fondamentaux de l'arithmétique, Encyclopédie Sci. Mat. tome I, vol. 1, 1—62. Paris: Gauthier-Villars 1904.

[98] SCHWARZ, H. A., Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Journal reine angew. Math. **74**, 218—233 (1872).

[99] SCHWARZ, H. A., Sur un nouvel exemple d'une fonction continue qui n'admet pas de dérivée. Archives Sci. phys. nat. **48**, 33—38 (1873).

[100] STOLZ, OTTO, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik nach den neueren Ansichten. Leipzig: Teubner 1885—1886.

[101] STURM, RUD., Gudermanns Urteil über die Prüfungsarbeit von Weierstrass (1841). Jahresbericht deutsch. Math. Verein. **19**, 160 (1910).

[102] THOM, RENÉ, Les mathématiques «modernes»: une erreur pédagogique et philosophique. L'âge de la science, **3**, 224—242 (1970).

[103] TIHOMANDRICKIJ, M. A., Karl Vejerštrass. Soobšč. harkov. matem. obšč. (2), **6**, 35—56 (1899).

[104] VALSON, C. A., La vie et les travaux du baron Cauchy. Paris: A. Blanchard 1970.

[105] VIVANTI, G., Über den gegenwärtigen Stand der Theorie der ganzen transzendenten Funktionen. Archiv Math. Physik **15**, 318—343 (1909).

[106] WEIERSTRASS, KARL, Mathematische Werke, Band I. Berlin: Mayer und Müller 1894.

[107] WEIERSTRASS, KARL, Mathematische Werke, Band II. Berlin: Mayer und Müller 1895

[108] WEIERSTRASS, KARL, Mathematische Werke, Band III. Berlin: Mayer und Müller 1903.

[109] WEIERSTRASS, KARL, Briefe an Paul du Bois-Reymond. Acta mathematica **39**, 199—225 (1923).

[110] WEIERSTRASS, KARL, Briefe an L. Fuchs. Acta mathematica **39**, 246—256 (1923).

[111] WEIERSTRASS, KARL, Zur Funktionentheorie. Acta mathematica **45**, 1—10 (1925).

[112] YOUNG, W. H., The progress of the mathematical analysis in the twentieth century. Proceed. London Math. Soc. (2), **24**, 421—434 (1926).

[113] YUŠKEVIČ, A. P., Istorija matematiki v Rossii do 1917 goda. Moskva: Nauka 1968.

[114] ZORETTI, L.: Les ensembles de points, Encyclopédie Sci. Math. tome II, vol. 1, fasc. 2, 113—170. Paris: Gauthier-Villars 1912.

Index des noms