

MÉLANGES.

RÉSOLUTION D'UNE QUESTION RELATIVE AUX DÉTERMINANTS;

PAR M. J. HADAMARD.

1. Étant donné un déterminant

$$(1) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & l_n \end{vmatrix},$$

dans lequel on sait que les éléments sont inférieurs en valeur absolue à une quantité déterminée A , il y a souvent lieu de chercher une limite que le module de Δ ne puisse dépasser.

On voit immédiatement que $|\Delta|$ est inférieur à $1.2.3\dots nA^n$. Mais il est clair que cette limite est trop élevée; car elle ne pourrait être atteinte que si tous les termes du déterminant avaient le même signe, ce qui est manifestement impossible.

Je me propose en conséquence de rechercher le maximum du déterminant Δ dans les conditions indiquées.

2. Sans rien supposer d'abord sur les modules des éléments a_1, \dots, b_1, \dots , désignons par $a_1^0, \dots, b_1^0, \dots$ leurs conjugués dont le déterminant Δ_0 sera le conjugué de Δ . Prenons, dans le déterminant Δ , p lignes quelconques pour en former un tableau rectangulaire (T) , (T_0) étant le tableau correspondant du déterminant Δ_0 ; considérons le produit

$$P_p = (T)(T_0).$$

Si $p = n$, ce produit donnera $\Delta\Delta_0$, c'est-à-dire le carré du module de Δ ; pour $p < n$, il fournira de même la somme des carrés des modules des différents déterminants que l'on déduit du tableau (T) . Dans tous les cas, la quantité ainsi obtenue sera essentiellement réelle et positive (¹).

(¹) Nous n'avons pas à prendre en considération le cas de $P_p = 0$, le détermi-

Pour former le produit P_p , d'après les règles de la multiplication des déterminants, il faudra multiplier chaque ligne de (T) par chaque ligne de (T_0) . Si l'on a choisi deux lignes correspondantes, par exemple les deux lignes de rang h , le résultat s_h donnera la somme des carrés des modules des éléments a_h, b_h, \dots, l_h . Si au contraire on a pris deux lignes de rangs différents h et h' , on trouvera l'expression

$$(2) \quad s_{h,h'} = a_h a_{h'}^0 + b_h b_{h'}^0 + \dots + l_h l_{h'}^0.$$

Nous remarquerons que $s_{h,h'}$ est conjugué de $s_{h',h}$.

Les quantités s_h et $s_{h,h'}$ seront les éléments du déterminant P_p . Si, par exemple, les lignes qui composent le tableau (T) sont les p premières, on aura

$$P_p = \begin{vmatrix} s_1 & s_{1,2} & \dots & s_{1,p} \\ s_{2,1} & s_2 & \dots & s_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{p,1} & s_{p,2} & \dots & s_p \end{vmatrix}$$

et, si nous isolons la partie qui contient en facteur un élément principal, le dernier par exemple, nous pouvons écrire

$$(3) \quad P_p = s_p P_{p-1} + Q_p,$$

où Q_p sera le déterminant

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_{1,2} & \dots & s_{1,p-1} & s_{1,p} \\ s_{2,1} & s_2 & \dots & s_{2,p-1} & s_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{p-1,1} & s_{p-1,2} & \dots & s_{p-1,p-1} & s_{p-1,p} \\ s_{p,1} & s_{p,2} & \dots & s_{p,p-1} & 0 \end{vmatrix}$$

Le mineur de ce déterminant, relatif à la h ^{ième} ligne et à la h' ^{ième} colonne, étant désigné par $\frac{\partial Q_p}{\partial(h, h')}$, nous constatons que les mineurs principaux sont des expressions Q_{p-1} , sauf le dernier qui est une expression P_{p-1} . Quant aux autres mineurs, nous remarquerons seulement que $\frac{\partial Q_p}{\partial(h, h')}$ est conjugué de $\frac{\partial Q_p}{\partial(h', h)}$.

nant Δ étant alors nul et, par suite, ne présentant aucun intérêt dans la question actuelle.

3. Cela posé, il est facile de démontrer que le déterminant Q_p est négatif ou nul, le dernier cas ne pouvant se présenter que si tous les éléments de la dernière colonne sont égaux à zéro.

Il suffit pour cela (h étant un quelconque des nombres $1, 2, \dots, p-1$) de considérer les quatre mineurs $\frac{\partial Q_p}{\partial(h, h)}$, $\frac{\partial Q_p}{\partial(p, p)}$, $\frac{\partial Q_p}{\partial(h, p)}$, $\frac{\partial Q_p}{\partial(p, h)}$. L'identité bien connue qui existe entre ces mineurs nous donne une relation de la forme

$$Q_p P_{p-2} = Q_{p-1} P_{p-1} - \left[\frac{\partial Q_p}{\partial(h, p)} \right]^2.$$

Les P étant positifs, nous voyons donc bien que Q_p est nécessairement négatif ou nul si cette conclusion a été démontrée pour Q_{p-1} . Nous pouvons dès lors l'admettre pour toute valeur de p , car elle est évidente pour Q_1 , égal à 0, et Q_2 , égal à $-|s_{1,2}|^2$.

De plus, Q_p ne saurait être nul que si Q_{p-1} l'est, c'est-à-dire (en admettant toujours que notre conclusion est établie pour Q_{p-1}) si tous les éléments de la dernière colonne sont nuls à l'exception du $h^{\text{ième}}$. Mais comme h est variable dès que p est au moins égal à 3, il ne peut y avoir aucun élément de la dernière colonne différent de zéro.

4. Revenons maintenant au déterminant P_p : nous sommes en mesure d'établir que ce déterminant est inférieur ou au plus égal à son terme principal $s_1 s_2 \dots s_p$, l'égalité n'ayant lieu que si tous les éléments non principaux sont nuls.

En effet, nous pouvons admettre que le fait est vrai pour P_{p-1} , et dès lors l'équation (3) démontre l'inégalité $P_p < s_1 s_2 \dots s_p$, puisque Q_p est négatif.

De plus, P_p ne peut être égal à $s_1 s_2 \dots s_p$ que si, d'une part, P_{p-1} est égal $s_1 s_2 \dots s_{p-1}$, et que, d'autre part, on ait $Q_p = 0$. D'après ce que nous avons vu plus haut, cette double condition exige que tous les éléments non principaux soient nuls.

En particulier, pour $p = n$, on a

$$|\Delta|^2 \leq s_1 s_2 \dots s_n.$$

Lorsque les modules des éléments sont au plus égaux à 1, les s_h

ont pour valeur maximum n , et par suite $|\Delta|$ est au plus égal à $n^{\frac{n}{2}}$.

On voit que la valeur maximum du déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre est loin d'augmenter aussi rapidement que le produit $1.2\dots n$. D'après la formule d'approximation de la fonction Γ , elle croît un peu plus vite que la racine carrée de ce produit.

5. Pour que Δ atteigne son maximum, il faut, en premier lieu, que tous les éléments aient pour module 1; puis que tous les $s_{h,h'}$ soient nuls ($h \neq h'$).

En écrivant l'équation $s_{h,h'} = 0$ pour toutes les valeurs de h' , l'entier h restant fixe, on a un système d'équations linéaires et homogènes par rapport aux éléments de la $h^{\text{ième}}$ ligne, d'où résulte que chaque élément est proportionnel à la quantité conjuguée du mineur correspondant. Les formules relatives aux déterminants adjoints montrent même que les mineurs d'ordre k sont proportionnels aux mineurs complémentaires d'ordre $n - k$.

Nous sommes ainsi conduit aux déterminants appelés *inversement orthogonaux* par M. Sylvester (1) et dont un exemple simple est fourni, pour une valeur quelconque de n , par le déterminant de Vandermonde formé avec les racines de l'équation binôme $x^n = 1$.

6. Pour $n = 3$, ainsi que l'a encore remarqué M. Sylvester, toutes les autres solutions se réduisent à celle-là, à des changements près que l'on peut appeler insignifiants, à savoir : permutation des lignes ou des colonnes; multiplication de tous les éléments d'une même ligne ou d'une même colonne par un même facteur. Mais il n'en est plus de même pour les valeurs de n supérieures à 3 et la formation d'un déterminant maximum comporte même beaucoup plus d'arbitraire que ne l'a supposé le géomètre anglais.

Reprenons en effet la méthode indiquée dans son Mémoire (2) pour construire un déterminant maximum d'ordre $n_1 n_2$ quand on

(1) *Philosophical Magazine*, t. XXXIV, p. 461-475; 1867.

(2) P. 465, n° 6.

suppose connus deux déterminants maximum Δ_1 et Δ_2 , d'ordre n_1 et n_2 respectivement : on écrit n_2^2 fois le déterminant Δ_1 , savoir n_2 fois en ligne horizontale sur n_2 fois en ligne verticale, formant ainsi un tableau (C). Puis dans le déterminant Δ_1 qui occupe dans ce tableau le $h^{\text{ème}}$ rang en ligne horizontale et le $k^{\text{ème}}$ en ligne verticale, on multiplie tous les éléments par l'élément du déterminant Δ_2 dont les indices sont h et k . Le tableau (C) ainsi modifié donne un déterminant maximum, car les relations $s_{h,h} = 0$ sont vérifiées.

Mais ces relations ne cessent pas d'avoir lieu si, dans tous les déterminants Δ_1 de la première colonne, on multiplie une ligne déterminée par un certain nombre de module 1. Or le nouveau déterminant obtenu par cette opération (que l'on peut évidemment varier de plusieurs façons) n'est pas réductible au précédent par les changements insignifiants dont nous avons parlé.

Par exemple, pour $n = 4$, M. Sylvester indique les deux types

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

et

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & 1 & i \end{vmatrix}$$

Notre méthode conduit au déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a & -a \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -a & a \end{vmatrix} \quad (a = e^{i\theta}),$$

lequel donne bien les déterminants (4) et (5) pour $a = 1$ et $a = i$, mais en est essentiellement distinct pour une valeur quelconque de θ .

7. Lorsque n est une puissance de 2, le procédé dont nous venons de parler permet d'obtenir un déterminant maximum à élé-

ments réels. Peut-on trouver de tels déterminants pour d'autres valeurs de n ?

Dans ce cas, chaque élément devra être égal à ± 1 , et cela de telle façon que, considérant deux lignes quelconques et comparant les éléments correspondants, il y ait autant de concordances que de discordances de signes ⁽¹⁾.

On voit aisément que ceci ne peut avoir lieu que pour n multiple de 4. En effet, si l'on ramène les éléments de la première ligne à être des 1, la seconde ligne devra contenir autant de $+1$ que de -1 , ce qui exige déjà que n soit pair : $n = 2n'$. Si l'on suppose alors dans la seconde ligne les n' premiers éléments positifs et les autres négatifs, la somme des n' premiers éléments de la troisième ligne devra être nulle; donc n' doit être à son tour un nombre pair.

D'ailleurs il existe en effet des déterminants maximum réels pour des valeurs de n non puissances de 2. Pour $n = 12$, par exemple, on arrivera au résultat de la façon suivante :

On groupera les colonnes 3 par 3 en quatre séries.

La première ligne étant composée de 1, la seconde comprendra des 1 dans les deux premières séries et des -1 dans les deux dernières; la troisième ligne aura ses quatre séries composées alternativement de $+1$ et de -1 . Dans les 9 lignes suivantes, la première et la dernière série comprendront chacune 2 éléments positifs et 1 négatif; la seconde et la troisième 2 éléments négatifs et 1 positif, d'après le Tableau suivant :

1	1	1	1
1	2	2	2
1	3	3	3
2	1	2	3
2	2	3	1
2	3	1	2
3	1	3	2
3	2	1	3
3	3	2	1

les numéros indiquant dans chaque série le rang de l'élément qui est seul de son signe.

(1) SYLVESTER, *Échiquier anallagmatique*.

Il existe aussi un déterminant maximum réel pour $n = 20$. Pour l'obtenir, ayant encore partagé les colonnes en 4 séries de 5 chacune, on composera les trois premières lignes comme dans le cas précédent. La quatrième ligne aura, dans la première et la dernière série, tous ses éléments positifs, sauf le premier; dans la deuxième et la troisième, tous ses éléments négatifs, sauf le premier. Chacune des seize lignes qui restent comprendra, dans la première et la dernière série, deux éléments négatifs; dans la deuxième et la troisième, deux éléments positifs, d'après le Tableau suivant :

	12	23	23	23
	13	23	45	45
	14	45	23	45
	15	45	45	23
	45	12	24	24
	45	13	35	35
	23	14	24	35
	23	15	35	24
	35	35	12	25
	35	24	13	34
	24	35	14	34
	24	24	15	25
	34	34	34	12
	34	25	25	13
	25	34	25	14
	25	25	34	15

Il y a donc lieu de se demander quelles sont les valeurs de n pour lesquelles existent des déterminants maximum à éléments réels (1).

De plus, on peut rechercher, pour les autres valeurs, quel est le plus grand module que puisse atteindre le déterminant lorsqu'on impose aux éléments la condition d'être réels.

(1) Les déterminants maximum que nous venons de former pour $n = 12$ et $n = 20$ mettent encore une fois en évidence l'arbitraire que comporte la question actuelle; car il est clair que ces nouveaux déterminants maximum ne peuvent se déduire des procédés donnés au n° 6.