JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

P. DUHEM

**Sur un Théorème d'Electrodynamique**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série*, tome 4 (1888), p. 369-406.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1888_4_4_A12_0>

# *Sur un théorème d'Électrodynamique;*

PAR M. P. DUHEM.

---

Ampère a montré que toutes les actions mutuelles des courants électriques uniformes pouvaient être embrassées par une loi unique donnant l'expression de l'action qu'un élément de courant uniforme exerce sur un autre élément de courant uniforme; cette force, d'après la loi proposée par Ampère, est dirigée suivant la droite qui joint les deux éléments; de plus, elle vérifie la règle de l'égalité entre l'action et la réaction.

Les expériences ne peuvent faire connaître l'action mutuelle de deux éléments de courant, mais seulement l'action d'un courant tout entier sur un élément de courant. Il en résulte que toute loi élémentaire qui conduit à la même expression que la loi d'Ampère pour l'action d'un courant fermé et uniforme sur un élément de courant uniforme peut être substituée à la loi d'Ampère. C'est ainsi que Grassmann a proposé une loi élémentaire susceptible de remplacer celle d'Ampère.

Si l'on suppose donnée l'action qu'un courant fermé et uniforme exerce sur un élément de courant uniforme, l'action élémentaire est susceptible d'une infinité d'expressions différentes. Mais, parmi cette infinité de lois élémentaires, une au plus est compatible avec la règle de l'égalité entre l'action et la réaction. Par conséquent, il est impossible de trouver une loi différente de la loi d'Ampère qui soit compatible avec cette règle, et qui conduise aux mêmes conséquences que la loi d'Ampère pour l'action d'un courant fermé et uniforme sur un élément de courant. C'est à Gauss [1] qu'est dû ce théorème, dont on a donné depuis plusieurs démonstrations.

Nous nous proposons de résoudre une question plus générale que celle que Gauss a résolue par le théorème précédent; cette question est la suivante :

*Si l'on connaît l'action qu'un courant fermé et uniforme exerce sur un élément de courant uniforme, et si, de plus, on assujettit la loi élémentaire à satisfaire à la condition que le travail produit dans le déplacement de deux éléments de courant par les actions mutuelles de ces deux éléments dépende uniquement du changement de position relative des deux éléments, la loi élémentaire est-elle complètement déterminée?*

Nous allons démontrer, en réponse à cette question, qu'*il existe au plus une loi élémentaire compatible avec les conditions imposées.*

**1.** Imaginons une première loi élémentaire, d'après laquelle l'action qu'un élément de conducteur de longueur $ds'$, traversé par un courant d'intensité $\mathcal{J}'$, exerce sur un élément de conducteur de longueur $ds$, traversé par un courant d'intensité $\mathcal{J}$, se compose d'une force, appliquée au milieu de l'élément $ds$, ayant pour composante

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{J}\mathcal{J}'\mathfrak{X}\,ds\,ds', \\ \mathcal{J}\mathcal{J}'\mathfrak{Y}\,ds\,ds', \\ \mathcal{J}\mathcal{J}'\mathfrak{Z}\,ds\,ds', \end{array}\right.$$

et peut-être aussi (comme il arrive dans la loi de M. H. von Helmholtz) d'un couple dont l'axe ait pour projections

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{J}\mathcal{J}'\mathfrak{L}\,ds\,ds', \\ \mathcal{J}\mathcal{J}'\mathfrak{M}\,ds\,ds', \\ \mathcal{J}\mathcal{J}'\mathfrak{N}\,ds\,ds'. \end{array}\right.$$

---

[1] GAUSS, *Werke*, Bd. V, p. 628.

Imaginons ensuite une seconde loi élémentaire dans laquelle les mêmes grandeurs aient pour valeurs

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathcal{J}\mathcal{J}'\mathcal{X}_1\,ds\,ds', \\ \mathcal{J}\mathcal{J}'\mathcal{Y}_1\,ds\,ds', \\ \mathcal{J}\mathcal{J}'\mathcal{Z}_1\,ds\,ds'; \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathcal{J}\mathcal{J}'\mathcal{L}_1\,ds\,ds', \\ \mathcal{J}\mathcal{J}'\mathcal{M}_1\,ds\,ds', \\ \mathcal{J}\mathcal{J}'\mathcal{N}_1\,ds\,ds'. \end{cases}$$

La loi représentée par les expressions (1) et (2) est supposée conduire aux mêmes conséquences que la loi représentée par les expressions (3) et (4) lorsqu'on calcule l'action qu'un conducteur fermé quelconque, auquel l'élément $ds'$ est supposé appartenir, traversé par un courant uniforme d'intensité $\mathcal{J}'$, exerce sur un élément de conducteur $ds$, traversé par un courant d'intensité $\mathcal{J}$. Cette première condition s'exprime par les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \mathcal{J}\mathcal{J}'\,ds\int\mathcal{X}\,ds' &= \mathcal{J}\mathcal{J}'\,ds\int\mathcal{X}_1\,ds', \\ \mathcal{J}\mathcal{J}'\,ds\int\mathcal{Y}\,ds' &= \mathcal{J}\mathcal{J}'\,ds\int\mathcal{Y}_1\,ds', \\ \mathcal{J}\mathcal{J}'\,ds\int\mathcal{Z}\,ds' &= \mathcal{J}\mathcal{J}'\,ds\int\mathcal{Z}_1\,ds', \\ \mathcal{J}\mathcal{J}'\,ds\int\mathcal{L}\,ds' &= \mathcal{J}\mathcal{J}'\,ds\int\mathcal{L}_1\,ds', \\ \mathcal{J}\mathcal{J}'\,ds\int\mathcal{M}\,ds' &= \mathcal{J}\mathcal{J}'\,ds\int\mathcal{M}_1\,ds', \\ \mathcal{J}\mathcal{J}'\,ds\int\mathcal{N}\,ds' &= \mathcal{J}\mathcal{J}'\,ds\int\mathcal{N}_1\,ds', \end{aligned}$$

l'élément $ds$ ayant une position et une orientation quelconques, et les intégrales s'étendant à un contour fermé quelconque.

Il en résulte que, si l'on pose

$$(5)\qquad \begin{cases} X = \mathcal{X}_1 - \mathcal{X}, & L = \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}, \\ Y = \mathcal{Y}_1 - \mathcal{Y}, & M = \mathcal{M}_1 - \mathcal{M}, \\ Z = \mathcal{Z}_1 - \mathcal{Z}, & N = \mathcal{N}_1 - \mathcal{N}, \end{cases}$$

on aura

$$\int X\,ds' = 0, \qquad \int L\,ds' = 0,$$
$$\int Y\,ds' = 0, \qquad \int M\,ds' = 0,$$
$$\int Z\,ds' = 0, \qquad \int N\,ds' = 0,$$

quelles que soient la position et l'orientation de l'élément $ds$, quelle que soit la position du circuit fermé dont fait partie l'élément $ds'$, et quelle que soit sa forme, *anguleuse ou non*. Ces égalités équivalent aux suivantes

$$(6)\quad \begin{cases} X = \dfrac{\partial}{\partial s'}\,\Phi\left(x', y', z', x, y, z, \dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}, \dfrac{dz}{ds}\right), \\ Y = \dfrac{\partial}{\partial s'}\,\Theta\left(x', y', z', x, y, z, \dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}, \dfrac{dz}{ds}\right), \\ Z = \dfrac{\partial}{\partial s'}\,\Psi\left(x', y', z', x, y, z, \dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}, \dfrac{dz}{ds}\right), \\ L = \dfrac{\partial}{\partial s'}\,\Lambda\left(x', y', z', x, y, z, \dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}, \dfrac{dz}{ds}\right), \\ M = \dfrac{\partial}{\partial s'}\,\Pi\left(x', y', z', x, y, z, \dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}, \dfrac{dz}{ds}\right), \\ N = \dfrac{\partial}{\partial s'}\,\Sigma\left(x', y', z', x, y, z, \dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}, \dfrac{dz}{ds}\right), \end{cases}$$

$x, y, z$ étant les coordonnées d'un point de $ds$ et $x', y', z'$ les coordonnées d'un point de $ds'$.

Ces égalités expriment simplement que la loi élémentaire représentée par les expressions (1) et (2) conduit aux mêmes conséquences que la loi élémentaire représentée par les expressions (3) et (4) pour l'action d'un courant fermé et uniforme sur un élément de courant uniforme.

**2.** Introduisons maintenant l'hypothèse que, dans chacune des deux lois élémentaires proposées, le travail produit pendant un déplacement quelconque des deux éléments $ds$ et $ds'$ par les actions mutuelles des deux éléments $ds$ et $ds'$ dépend uniquement du changement de position mutuelle des deux éléments $ds$ et $ds'$.

Dans la première loi, l'action de l'élément $ds$ sur l'élément $ds'$ se compose d'une force, appliquée à l'élément $ds'$, ayant pour composantes

$$ii'\mathcal{X}'\,ds\,ds',\quad ii'\mathcal{Y}'\,ds\,ds',\quad ii'\mathcal{Z}'\,ds\,ds'$$

et d'un couple dont l'axe a pour projections

$$ii'\mathcal{L}'\,ds\,ds',\quad ii'\mathcal{M}'\,ds\,ds',\quad ii'\mathcal{N}'\,ds\,ds'.$$

Dans un déplacement élémentaire de l'élément $ds$, les coordonnées du milieu de cet élément varient de $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$. Cet élément subit autour d'un axe passant par son centre une rotation dont les composantes sont $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$. De même, dans un déplacement élémentaire de l'élément $ds'$, les coordonnées du milieu de cet élément varient de $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$. Cet élément subit autour d'un axe passant par son centre une rotation dont les composantes sont $\delta\alpha'$, $\delta\beta'$, $\delta\gamma'$. Le travail effectué a pour valeur

$$\begin{aligned}ii'(&\mathcal{X}\,\delta x + \mathcal{Y}\,\delta y + \mathcal{Z}\,\delta z + \mathcal{L}\,\delta\alpha + \mathcal{M}\,\delta\beta + \mathcal{N}\,\delta\gamma\\ &+ \mathcal{X}'\,\delta x' + \mathcal{Y}'\,\delta y' + \mathcal{Z}'\,\delta z' + \mathcal{L}'\,\delta\alpha' + \mathcal{M}'\,\delta\beta' + \mathcal{N}'\,\delta\gamma')\,ds\,ds'.\end{aligned}$$

Cette quantité doit pouvoir se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}&\xi(\delta x' - \delta x) + \eta(\delta y' - \delta y) + \zeta(\delta z' - \delta z)\\ &\qquad + \lambda(\delta\alpha' - \delta\alpha) + \mu(\delta\beta' - \delta\beta) + \gamma(\delta\gamma' - \delta\gamma),\end{aligned}$$

quels que soient

$$\begin{array}{cccccc}\delta x, & \delta y, & \delta z, & \delta x', & \delta y', & \delta z',\\ \delta\alpha, & \delta\beta, & \delta\gamma, & \delta\alpha', & \delta\beta', & \delta\gamma'.\end{array}$$

Il faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$\begin{array}{ll}\mathcal{X} + \mathcal{X}' = 0, & \mathcal{L} + \mathcal{L}' = 0,\\ \mathcal{Y} + \mathcal{Y}' = 0, & \mathcal{M} + \mathcal{M}' = 0,\\ \mathcal{Z} + \mathcal{Z}' = 0, & \mathcal{N} + \mathcal{N}' = 0.\end{array}$$

La seconde loi élémentaire doit donner lieu à six égalités analogues.

Il en résulte que, si l'on désigne par

$$X', \quad Y', \quad Z', \quad L', \quad M', \quad N',$$

ce que deviennent

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad L, \quad M, \quad N,$$

lorsqu'on y remplace les lettres

$$x, \quad y, \quad z, \quad x', \quad y', \quad z', \quad s, \quad s'$$

respectivement par les lettres

$$x', \quad y', \quad z', \quad x, \quad y, \quad z, \quad s', \quad s,$$

on doit avoir

$$(7) \qquad \begin{cases} X + X' = 0, & L + L' = 0, \\ Y + Y' = 0, & M + M' = 0, \\ Z + Z' = 0, & N + N' = 0. \end{cases}$$

Désignons par $\Phi'$ ce que devient la fonction $\Phi$ lorsqu'on y permute les lettres

$$x, \quad y, \quad z, \quad s$$

avec les lettres

$$x', \quad y', \quad z', \quad s';$$

la première des égalités (7) pourra, en vertu de la première des égalités (6), s'écrire

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \frac{\partial \Phi'}{\partial s} = 0,$$

ou bien

$$\varphi_1 \frac{dx'}{ds'} + \varphi_2 \frac{dy'}{ds'} + \varphi_3 \frac{dz'}{ds'} + \varphi'_1 \frac{dx}{ds} + \varphi'_2 \frac{dy}{ds} + \varphi'_3 \frac{dz}{ds} = 0.$$

en posant

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x'} = \varphi_1, & \dfrac{\partial \Phi}{\partial y'} = \varphi_2, & \dfrac{\partial \Phi}{\partial z'} = \varphi_3, \\ \dfrac{\partial \Phi'}{\partial x} = \varphi'_1, & \dfrac{\partial \Phi'}{\partial y} = \varphi'_2, & \dfrac{\partial \Phi'}{\partial z} = \varphi'_3. \end{cases}$$

Cette égalité doit avoir lieu quelle que soit la position du point $(x', y', z')$ sur le circuit fermé dont fait partie l'élément $ds'$. On aura donc une nouvelle identité en différentiant celle-là par rapport à $s'$ :

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi_1}{\partial x'}\left(\frac{dx'}{ds'}\right)^2 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y'}\left(\frac{dy'}{ds'}\right)^2 + \frac{\partial\varphi_3}{\partial z'}\left(\frac{dz'}{ds'}\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z'} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial y'}\right)\frac{dy'}{ds'}\frac{dz'}{ds'} + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x'} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z'}\right)\frac{dz'}{ds'}\frac{dx'}{ds'} \\ &\quad + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y'} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x'}\right)\frac{dx'}{ds'}\frac{dy'}{ds'} \\ &\quad = -\left[\frac{\partial\varphi'_1}{\partial s'}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi'_2}{\partial s'}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\varphi'_3}{\partial s'}\frac{dz}{ds}\right]. \end{aligned}\right.$$

Dans cette identité,

$$x,\quad y,\quad z,\quad x',\quad y',\quad z'$$

sont six variables indépendantes;

$$\frac{dx}{ds},\quad \frac{dy}{ds},\quad \frac{dz}{ds},\quad \frac{dx'}{ds'},\quad \frac{dy'}{ds'},\quad \frac{dz'}{ds'}$$

sont six autres variables liées par les relations

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1, \\ &\left(\frac{dx'}{ds'}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{ds'}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{ds'}\right)^2 = 1. \end{aligned}\right.$$

$\Phi$ ne dépend pas de $\frac{dx'}{ds'}, \frac{dy'}{ds'}, \frac{dz'}{ds'}$; $\Phi'$ ne dépend donc pas de $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$; il en est de même de ses dérivées partielles par rapport à $x, y, z$, c'est-à-dire de $\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3$, et aussi de $\frac{\partial\varphi'_1}{\partial s'}, \frac{\partial\varphi'_2}{\partial s}, \frac{\partial\varphi'_3}{\partial s'}$. Par conséquent, le second membre de l'identité (9) est une fonction linéaire et homogène de $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$. Il doit en être de même du premier, quelles que soient les valeurs que puissent prendre $x, y, z, x', y', z', \frac{dx'}{ds'}, \frac{dy'}{ds'}, \frac{dz'}{ds'}$.

Laissant à $x, y, z, x', y', z'$ des valeurs quelconques, faisons

$$\frac{dx'}{ds'} = 1, \qquad \frac{dy'}{ds'} = 0, \qquad \frac{dz'}{ds'} = 0.$$

Le premier membre de l'identité (9) se réduit à $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x'}$. Donc, pour ces valeurs particulières de $\frac{dx'}{ds'}, \frac{dy'}{ds'}, \frac{dz'}{ds'}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x'}$ se réduit à une fonction linéaire et homogène de $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$. Mais $\Phi$, par conséquent $\varphi_1$, et par conséquent aussi $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x'}$, ne dépendent pas de $\frac{dx'}{ds'}, \frac{dy'}{ds'}, \frac{dz'}{ds'}$. On voit donc que $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x'}$ est, en toutes circonstances, une fonction linéaire et homogène de $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$. On démontrerait d'une manière analogue que $\frac{\partial \varphi_2}{\partial y'}$ et $\frac{\partial \varphi_3}{\partial z'}$ sont des fonctions linéaires et homogènes de $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$.

Ces résultats étant obtenus, l'identité (9) montre que

$$\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z'} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y'}\right)\frac{dy'}{ds'}\frac{dz'}{ds'} + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x'} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z'}\right)\frac{dz'}{ds'}\frac{dx'}{ds'} + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y'} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x'}\right)\frac{dx'}{ds'}\frac{dy'}{ds'}$$

est, en toutes circonstances, une fonction linéaire et homogène de $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$. En faisant alors successivement $\frac{dx'}{ds'} = 0$, $\frac{dy'}{ds'} = 0$, $\frac{dz'}{ds'} = 0$, et en raisonnant comme nous venons de le faire, on verra sans peine que

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z'} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y'},$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x'} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z'},$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y'} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z'}$$

sont des fonctions linéaires et homogènes de $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$.

Mais, d'autre part, d'après la définition des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, donnée par les égalités (8), on a

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial z'} = \frac{\partial\varphi_3}{\partial y'},$$
$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial x'} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial z'},$$
$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y'} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x'}.$$

On voit donc que les six quantités

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y'},\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial z'},\quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x'},\quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial z'},\quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial z'},\quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial y'}$$

sont, comme

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x'},\quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial y'},\quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial z'},$$

des fonctions linéaires et homogènes de $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$; ce qui, en se reportant aux égalités (8), peut s'énoncer ainsi : Toutes les dérivées partielles du second ordre de $\Phi$, envisagé comme fonction de $x'$, $y'$, $z'$, sont des fonctions linéaires et homogènes de $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$.

En conséquence, la fonction $\Phi$ peut s'exprimer de la manière suivante

$$(11)\qquad \Phi = \mathcal{A}_1 \frac{dx}{ds} + \mathcal{A}_2 \frac{dy}{ds} + \mathcal{A}_3 \frac{dz}{ds} + \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' + \alpha_4,$$

$\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ étant des fonctions des variables $x$, $y$, $z$, $x'$, $y'$, $z'$, et $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ des fonctions des variables $x$, $y$, $z$, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$.

En vertu de cette expression (11) de la fonction $\Phi$ et de la première des égalités (6), nous aurons

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} X = \frac{\partial\Phi}{\partial s'} = {} & \frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial s'}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\mathcal{A}_2}{\partial s'}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\mathcal{A}_3}{\partial s'}\frac{dz}{ds} \\ & + \alpha_1 \frac{dx'}{ds'} + \alpha_2 \frac{dy'}{ds'} + \alpha_3 \frac{dz'}{ds'}. \end{aligned}\right.$$

On peut toujours supposer que les fonctions $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ ne renferment aucun terme du premier degré en $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, car les termes du premier degré en $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, qui figureraient dans les expressions $\alpha_1 x'$, $\alpha_2 y'$, $\alpha_3 z'$, $\alpha_4$, pourraient toujours être réunis avec les quantités $\mathcal{A}_1 \frac{dx}{ds}$, $\mathcal{A}_2 \frac{dy}{ds}$, $\mathcal{A}_3 \frac{dz}{ds}$. Les fonctions $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ étant supposées ne contenir aucun terme du premier degré en $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, aucune réduction ne peut avoir lieu entre les divers termes de la quantité

$$\alpha_1 \frac{dx'}{ds'} + \alpha_2 \frac{dy'}{ds'} + \alpha_3 \frac{dz'}{ds'},$$

et les divers termes de la quantité

$$\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial s'} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial s'} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial s'} \frac{dz}{ds},$$

ces derniers étant tous du premier degré en $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$.

La force X, ne devant évidemment pas changer de grandeur lorsqu'on change l'origine des coordonnées sans changer la direction ni le sens des axes, ne peut dépendre des variables

$$x,\quad y,\quad z;\quad x',\quad y',\quad z'$$

que par les binômes

$$(x' - x),\quad (y' - y),\quad (z' - z).$$

D'après ce que nous venons de dire, il doit en être de même séparément de l'expression

$$\alpha_1 \frac{dx'}{ds'} + \alpha_2 \frac{dy'}{ds'} + \alpha_3 \frac{dz'}{ds'},$$

et de l'expression

$$\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial s'} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial s'} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial s'} \frac{dz}{ds}.$$

Mais $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, et par conséquent la première des deux expressions que nous venons d'écrire, ne dépendent pas des variables $x, y, z$. Il en résulte que

$$\alpha_1 \frac{dx'}{ds'} + \alpha_2 \frac{dy'}{ds'} + \alpha_3 \frac{dz'}{ds'}$$

ne dépend pas de $x', y', z'$. Cela doit avoir lieu, quels que soient $\frac{dx'}{ds'}$, $\frac{dy'}{ds'}$, $\frac{dz'}{ds'}$; et, comme $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ ne dépendent pas de ces dernières variables, on voit que $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ sont des quantités indépendantes de $x'$, $y'$, $z'$ comme de $x, y, z$. Ces quantités dépendent uniquement de $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, en sorte que nous pouvons écrire

$$(13)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_1\left(\dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}, \dfrac{dz}{ds}\right), \\ \alpha_2 = \alpha_2\left(\dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}, \dfrac{dz}{ds}\right), \\ \alpha_3 = \alpha_3\left(\dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}, \dfrac{dz}{ds}\right). \end{cases}$$

L'expression

$$\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial s'} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial s'} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial s'} \frac{dz}{ds}$$

ne doit également, comme nous l'avons vu, dépendre de $x, y, z$; $x'$, $y'$, $z'$ que par les binômes $(x'-x)$, $(y'-y)$, $(z'-z)$. On en conclut aisément que, si l'on pose

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x'} = \mathrm{A}_{11}, & \dfrac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial y'} = \mathrm{A}_{12}, & \dfrac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial z'} = \mathrm{A}_{13}, \\ \dfrac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x'} = \mathrm{A}_{21}, & \dfrac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial y'} = \mathrm{A}_{22}, & \dfrac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial z'} = \mathrm{A}_{23}, \\ \dfrac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial x'} = \mathrm{A}_{31}, & \dfrac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial y'} = \mathrm{A}_{32}, & \dfrac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial z'} = \mathrm{A}_{33}, \end{cases}$$

toutes les quantités $\mathrm{A}_{ij}$ seront fonctions simplement de $(x'-x)$, $(y'-y)$, $(z'-z)$.

Moyennant les notations (13) et (14), l'égalité (12) deviendra

$$
(15)\quad \left|\begin{aligned}
X = {} & A_{11}\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + A_{12}\frac{dx}{ds}\frac{dy'}{ds'} + A_{13}\frac{dx}{ds}\frac{dz'}{ds'} \\
& + A_{21}\frac{dy}{ds}\frac{dx'}{ds'} + A_{22}\frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + A_{23}\frac{dy}{ds}\frac{dz'}{ds'} \\
& + A_{31}\frac{dz}{ds}\frac{dx'}{ds'} + A_{32}\frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'} + A_{33}\frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'} \\
& + \alpha_1\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)\frac{dx'}{ds'} \\
& + \alpha_2\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)\frac{dy'}{ds'} \\
& + \alpha_3\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)\frac{dz'}{ds'}.
\end{aligned}\right.
$$

La quantité $X'$ est susceptible de s'exprimer d'une manière analogue.

Si l'on désigne par $A'_{ij}$ ce que devient $A_{ij}$ lorsqu'on y permute

$$x, \quad y, \quad z, \quad s$$

avec

$$x', \quad y', \quad z', \quad s',$$

la première des égalités (7)

$$X + X' = 0$$

deviendra

$$
(16)\quad \left|\begin{aligned}
& (A_{11} + A'_{11})\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + (A_{12} + A'_{21})\frac{dx}{ds}\frac{dy'}{ds'} + (A_{13} + A'_{31})\frac{dx}{dz}\frac{dz'}{ds'} \\
& + (A_{21} + A'_{12})\frac{dy}{ds}\frac{dx'}{ds'} + (A_{22} + A'_{22})\frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + (A_{23} + A'_{32})\frac{dy}{ds}\frac{dz'}{ds'} \\
& + (A_{31} + A'_{13})\frac{dz}{ds}\frac{dx'}{ds'} + (A_{32} + A'_{23})\frac{dz}{ds}\frac{dy'}{ds'} + (A_{33} + A'_{33})\frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'} \\
& + \alpha_1\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)\frac{dx'}{ds'} + \alpha_1\left(\frac{dx'}{ds'}, \frac{dy'}{ds'}, \frac{dz'}{ds'}\right)\frac{dx}{ds} \\
& + \alpha_2\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)\frac{dy'}{ds'} + \alpha_2\left(\frac{dx'}{ds'}, \frac{dy'}{ds'}, \frac{dz'}{ds'}\right)\frac{dy}{ds} \\
& + \alpha_3\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)\frac{dz'}{ds'} + \alpha_3\left(\frac{dx'}{ds'}, \frac{dy'}{ds'}, \frac{dz'}{ds'}\right)\frac{dz}{ds} = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Cette identité doit avoir lieu quelles que soient la position et l'orientation de chacun des deux éléments $ds$ et $ds'$, c'est-à-dire quelles que soient les quantités

$$x,\quad y,\quad z;\quad x',\quad y',\quad z',$$
$$\frac{dx}{ds},\quad \frac{dy}{ds},\quad \frac{dz}{ds},\quad \frac{dx'}{ds'},\quad \frac{dy'}{ds'},\quad \frac{dz'}{ds'},$$

les six dernières étant liées seulement par les relations (10).

La valeur des diverses quantités $A_{ij}$ ne varie pas si, en laissant quelconques les six premières variables, nous donnons aux six dernières des valeurs particulières. Or, si nous faisons

$$\frac{dx}{ds}=1,\quad \frac{dy}{ds}=0,\quad \frac{dz}{ds}=0,$$
$$\frac{dx'}{ds'}=1,\quad \frac{dy'}{ds'}=0,\quad \frac{dz'}{ds'}=0,$$

l'identité (16) nous donne la première des relations

$$(17)\qquad \begin{cases} A_{11}+A'_{11}=0,\\ A_{22}+A'_{22}=0,\\ A_{33}+A'_{33}=0.\end{cases}$$

Les deux dernières s'obtiennent d'une manière analogue.

Laissons encore quelconques les valeurs de $x, y, z, x', y', z'$, et faisons

$$\frac{dx}{ds}=1,\quad \frac{dy}{ds}=0,\quad \frac{dz}{ds}=0,$$
$$\frac{dx'}{ds'}=0,\quad \frac{dy'}{ds'}=1,\quad \frac{dz'}{ds'}=0.$$

Nous aurons

$$(A_{12}+A'_{21})+\alpha_1(0,\ 1,\ 0)+\alpha_2(1,\ 0,\ 0)=0.$$

Posons

$$(18)\quad \begin{cases} \alpha_1(1,\ 0,\ 0)=a_{11}, & \alpha_2(1,\ 0,\ 0)=a_{21}, & \alpha_3(1,\ 0,\ 0)=a_{31},\\ \alpha_1(0,\ 1,\ 0)=a_{12}, & \alpha_2(0,\ 1,\ 0)=a_{22}, & \alpha_3(0,\ 1,\ 0)=a_{32},\\ \alpha_1(0,\ 0,\ 1)=a_{13}, & \alpha_2(0,\ 0,\ 1)=a_{23}, & \alpha_3(0,\ 0,\ 1)=a_{33},\end{cases}$$

et l'égalité précédente deviendra la première des égalités

$$(19)\qquad \begin{cases} A_{12}+A'_{21}+a_{12}+a_{21}=0, \\ A_{13}+A'_{31}+a_{13}+a_{31}=0, \\ A_{21}+A'_{12}+a_{21}+a_{12}=0, \\ A_{23}+A'_{32}+a_{23}+a_{32}=0, \\ A_{31}+A'_{13}+a_{31}+a_{13}=0, \\ A_{32}+A'_{23}+a_{32}+a_{23}=0. \end{cases}$$

Les cinq autres s'établissent d'une manière analogue.

Moyennant les identités (17) et (18), l'identité (16) devient

$$\begin{aligned} (a_{23}+a_{32})\left(\frac{dy}{ds}\frac{dz'}{ds'}+\frac{dz}{ds}\frac{dy'}{ds'}\right)+(a_{31}+a_{13})\left(\frac{dz}{ds}\frac{dx'}{ds'}+\frac{dx}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right) \\ +(a_{12}+a_{21})\left(\frac{dx}{ds}\frac{dy'}{ds'}+\frac{dy}{ds}\frac{dx'}{ds'}\right) \\ = \alpha_1\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)\frac{dx'}{ds'}+\alpha_1\left(\frac{dx'}{ds'},\frac{dy'}{ds'},\frac{dz'}{ds'}\right)\frac{dx}{ds} \\ +\alpha_2\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)\frac{dy'}{ds'}+\alpha_2\left(\frac{dx'}{ds'},\frac{dy'}{ds'},\frac{dz'}{ds'}\right)\frac{dy}{ds} \\ +\alpha_3\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)\frac{dz'}{ds'}+\alpha_3\left(\frac{dx'}{ds'},\frac{dy'}{ds'},\frac{dz'}{ds'}\right)\frac{dz}{ds}. \end{aligned}$$

Laissons $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ quelconques et faisons

$$\frac{dx'}{ds'}=1, \qquad \frac{dy'}{ds'}=0, \qquad \frac{dz'}{ds'}=0;$$

nous aurons la première des égalités

$$(20)\qquad \begin{cases} \alpha_1\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)=-a_{11}\frac{dx}{ds}+a_{12}\frac{dy}{ds}+a_{13}\frac{dz}{ds}, \\ \alpha_2\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)=\quad a_{21}\frac{dx}{ds}-a_{22}\frac{dy}{ds}+a_{23}\frac{dz}{ds}, \\ \alpha_3\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)=\quad a_{31}\frac{dx}{ds}+a_{32}\frac{dy}{ds}-a_{33}\frac{dz}{ds}; \end{cases}$$

les deux autres s'obtiennent d'une manière analogue.

Mais les fonctions $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ sont supposées ne contenir aucun terme du premier degré en $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$. On a donc

$$\begin{array}{lll} a_{11}=0, & a_{12}=0, & a_{13}=0, \\ a_{21}=0, & a_{22}=0, & a_{23}=0, \\ a_{31}=0, & a_{32}=0, & a_{33}=0, \end{array}$$

moyennant quoi les identités (20) deviennent

$$(21)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)=0, \\ \alpha_2\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)=0, \\ \alpha_3\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)=0, \end{array}\right.$$

et les identités (19) deviennent

$$(22)\qquad \left\{\begin{array}{ll} A_{23}+A'_{32}=0, & A_{32}+A'_{23}=0, \\ A_{31}+A'_{13}=0, & A_{13}+A'_{31}=0, \\ A_{12}+A'_{21}=0, & A_{21}+A'_{12}=0. \end{array}\right.$$

En réunissant les résultats contenus dans les égalités (14), (15), (17), (21) et (22), on trouve que l'expression la plus générale de X est la suivante :

$$(23)\qquad \left\{\begin{array}{rl} X= & A_{11}\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'}+A_{12}\frac{dx}{ds}\frac{dy'}{ds'}+A_{13}\frac{dx}{ds}\frac{dz'}{ds'} \\ & +A_{21}\frac{dy}{ds}\frac{dx'}{ds'}+A_{22}\frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'}+A_{23}\frac{dy}{ds}\frac{dz'}{ds'} \\ & +A_{31}\frac{dz}{ds}\frac{dx'}{ds'}+A_{32}\frac{dz}{ds}\frac{dy'}{ds'}+A_{33}\frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}, \end{array}\right.$$

dans laquelle les quantités $A_{ij}$ sont des fonctions de $(x'-x)$, $(y'-y)$, $(z'-z)$, qui vérifient les égalités suivantes :

$$(24)\qquad \left\{\begin{array}{lll} A_{11}+A'_{11}=0, & A_{23}+A'_{32}=0, & A_{32}+A'_{23}=0, \\ A_{22}+A'_{22}=0, & A_{31}+A'_{13}=0, & A_{13}+A'_{31}=0, \\ A_{33}+A'_{33}=0, & A_{12}+A'_{21}=0, & A_{21}+A'_{12}=0; \end{array}\right.$$

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial A_{13}}{\partial y'} = \frac{\partial A_{12}}{\partial z'}, &\quad &\frac{\partial A_{13}}{\partial z'} = \frac{\partial A_{13}}{\partial x'}, &\quad &\frac{\partial A_{12}}{\partial x'} = \frac{\partial A_{11}}{\partial y'},\\ &\frac{\partial A_{23}}{\partial y'} = \frac{\partial A_{22}}{\partial z'}, &\quad &\frac{\partial A_{21}}{\partial z'} = \frac{\partial A_{23}}{\partial x'}, &\quad &\frac{\partial A_{22}}{\partial x'} = \frac{\partial A_{21}}{\partial y'},\\ &\frac{\partial A_{33}}{\partial y'} = \frac{\partial A_{32}}{\partial z'}, &\quad &\frac{\partial A_{31}}{\partial z'} = \frac{\partial A_{33}}{\partial x'}, &\quad &\frac{\partial A_{32}}{\partial x'} = \frac{\partial A_{31}}{\partial y'}.\end{aligned}\right.$$

Y, Z, L, M, N s'expriment d'une manière semblable.

**3.** Les grandeurs L, M, N, X, Y, Z sont encore soumises à une condition que nous n'avons pas invoquée jusqu'ici. Dans chacune des deux lois, la force qui sollicite l'élément $ds$ et l'axe du couple qui agit sur le même élément doivent être indépendants en grandeur et en direction du choix des axes coordonnés. Par conséquent, les deux grandeurs géométriques qui ont pour projections sur les axes, l'une les longueurs X, Y, Z, l'autre les longueurs L, M, N, doivent être en grandeur et direction indépendantes du choix des axes. Elles doivent dépendre uniquement des paramètres qui fixent la position relative des deux éléments $ds$, $ds'$.

La position relative des deux éléments $ds$ et $ds'$ dépend de quatre paramètres : la distance $r$ d'un point $m(x, y, z)$ de l'élément $ds$ à un point $m'(x', y', z')$ de l'élément $ds'$; l'angle $\theta$ que l'élément $ds$ fait avec la droite $mm'$; l'angle $\theta'$ que l'élément $ds'$ forme avec la même droite $mm'$, enfin l'angle $\omega$ des deux directions $ds$, $ds'$.

Les relations

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial s} &= \frac{x-x'}{r}\frac{dx}{ds} + \frac{y-y'}{r}\frac{dy}{ds} + \frac{z-z'}{r}\frac{dz}{ds} = -\cos\theta,\\ \frac{\partial r}{\partial s'} &= \frac{x'-x}{r}\frac{dx'}{ds'} + \frac{y'-y}{r}\frac{dy'}{ds'} + \frac{z'-z}{r}\frac{dz'}{ds'} = \phantom{-}\cos\theta',\\ \frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} &= -\frac{1}{r}\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right)\\ &\quad -\frac{1}{r}\left(\frac{x-x'}{r}\frac{dx}{ds} + \frac{y-y'}{r}\frac{dy}{ds} + \frac{z-z'}{r}\frac{dz}{ds}\right)\\ &\quad \times\left(\frac{x'-x}{r}\frac{dx'}{ds'} + \frac{y'-y}{r}\frac{dy'}{ds'} + \frac{z'-z}{r}\frac{dz'}{ds'}\right)\\ &= -\frac{1}{r}(\cos\omega - \cos\theta\cos\theta')\end{aligned}\right.$$

montrent que la position relative des deux éléments $ds$ et $ds'$ est fixée par les quatre paramètres $r, \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}$.

La longueur absolue de la grandeur géométrique, dont X, Y, Z sont les projections, est

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

L'orientation de cette grandeur est fixée, lorsqu'on connaît, d'une part, le cosinus de l'angle qu'elle forme avec la droite $mm'$, cosinus qui a pour valeur

$$\frac{X(x'-x) + Y(y'-y) + Z(z'-z)}{r\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}};$$

d'autre part, le cosinus de l'angle qu'elle fait avec l'élément $ds$, cosinus qui a pour valeur

$$\frac{X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{dz} + Z\frac{dz}{ds}}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

On doit avoir

$$(27) \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = \lambda\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}\right),$$

$$(28) \qquad X(x'-x) + Y(y'-y) + Z(z'-z) = \mu\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}\right),$$

$$(29) \qquad X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} = \nu\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}\right).$$

En vertu des égalités (12) et (21), nous avons

$$X = \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial s'}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial s'}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial s}\frac{dz}{ds}$$

et, d'une manière analogue,

$$Y = \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial s'}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \mathcal{B}_2}{\partial s'}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \mathcal{B}_3}{\partial s'}\frac{dz}{ds},$$

$$Z = \frac{\partial \mathcal{C}_1}{\partial s'}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \mathcal{C}_2}{\partial s'}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \mathcal{C}_3}{\partial s'}\frac{dz}{ds}.$$

Appliquons à ces expressions l'identité (29). Le premier membre de cette identité est linéaire et homogène entre $\frac{dx'}{ds'}$, $\frac{dy'}{ds'}$, $\frac{dz'}{ds'}$; il est entier, homogène et du second degré en $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$. Le second membre doit donc être aussi une forme linéaire et homogène en $\frac{dx'}{ds'}$, $\frac{dy'}{ds'}$, $\frac{dz'}{ds'}$, et une forme quadratique homogène en $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$. Mais, $\frac{\partial r}{\partial s}$ est linéaire et homogène en $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$; $\frac{\partial r}{\partial s'}$ est linéaire et homogène en $\frac{dx'}{ds'}$, $\frac{dy'}{ds'}$, $\frac{dz'}{ds'}$; $\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}$ est linéaire et homogène d'une part en $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, d'autre part en $\frac{dx'}{ds'}$, $\frac{dy'}{ds'}$, $\frac{dz'}{ds'}$. On doit donc avoir

$$\nu\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right) = f(r)\frac{\partial r}{\partial s'}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 + g(r)\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}.$$

En introduisant cette valeur de la fonction $\nu$ dans l'identité (29), et en y faisant

$$\frac{dx}{ds} = 1, \qquad \frac{dy}{ds} = 0, \qquad \frac{dz}{ds} = 0,$$
$$\frac{dx'}{ds'} = 1, \qquad \frac{dy'}{ds'} = 0, \qquad \frac{dz'}{ds'} = 0,$$

on trouve la première des identités

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x'} &= \left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(x'-x)^3}{r^3} + \frac{g(r)}{r}\frac{x'-x}{r},\\ \frac{\partial \mathcal{B}_2}{\partial y'} &= \left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(y'-y)^3}{r^3} + \frac{g(r)}{r}\frac{y'-y}{r},\\ \frac{\partial \mathcal{C}_3}{\partial z'} &= \left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(z'-z)^3}{r^3} + \frac{g(r)}{r}\frac{z'-z}{r}; \end{aligned}\right.$$

les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

En faisant dans l'identité (29)

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \frac{dz}{ds} = 0,$$
$$\frac{dx'}{ds'} = 1, \qquad \frac{dy'}{ds'} = 0, \qquad \frac{dz'}{ds'} = 0,$$

on trouve la première des identités

$$
(31)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x'} + \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial x'} &= 2\left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(x'-x)^2(y'-y)}{r^3} + \frac{g(r)}{r}\,\frac{y'-y}{r},\\
\frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial x'} + \frac{\partial \mathcal{C}_1}{\partial x'} &= 2\left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(x'-x)^2(z'-z)}{r^3} + \frac{g(r)}{r}\,\frac{z'-z}{r},\\
\frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial y'} + \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial y'} &= 2\left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(y'-y)^2(x'-x)}{r^3} + \frac{g(r)}{r}\,\frac{x'-x}{r},\\
\frac{\partial \mathcal{B}_3}{\partial y'} + \frac{\partial \mathcal{C}_2}{\partial y'} &= 2\left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(y'-y)^2(z'-z)}{r^3} + \frac{g(r)}{r}\,\frac{z'-z}{r},\\
\frac{\partial \mathcal{C}_1}{\partial z'} + \frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial z'} &= 2\left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(z'-z)^2(x'-x)}{r^3} + \frac{g(r)}{r}\,\frac{x'-x}{r},\\
\frac{\partial \mathcal{C}_2}{\partial z'} + \frac{\partial \mathcal{B}_3}{\partial z'} &= 2\left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(z'-z)^2(y'-y)}{r^3} + \frac{g(r)}{r}\,\frac{y'-y}{r};
\end{aligned}\right.
$$

les cinq autres s'obtiennent d'une manière analogue.

En faisant dans l'identité (29)

$$
\frac{dx}{ds} = 0, \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{dz}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{2},
$$
$$
\frac{dx'}{ds'} = 1, \qquad \frac{dy'}{ds'} = 0, \qquad \frac{dz'}{ds'} = 0,
$$

on obtient la première des identités

$$
(32)\quad \left\{
\begin{aligned}
&2\left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(x'-x)(y'-y)(z'-z)}{r^3}\\
&\quad = \frac{\partial \mathcal{B}_3}{\partial x'} + \frac{\partial \mathcal{C}_2}{\partial x'} = \frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial y'} + \frac{\partial \mathcal{C}_1}{\partial y'} = \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial z'} + \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial z'};
\end{aligned}\right.
$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

Parmi les identités (31) et (32) se trouvent les suivantes :

$$
\frac{\partial}{\partial x'}[\mathcal{A}_2 + \mathcal{B}_1] = 2\left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(x'-x)^2(y'-y)}{r^3} + \frac{g(r)}{r}\,\frac{y'-y}{r},
$$
$$
\frac{\partial}{\partial y'}[\mathcal{A}_2 + \mathcal{B}_1] = 2\left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(y'-y)^2(x'-x)}{r^3} + \frac{g(r)}{r}\,\frac{x'-x}{r},
$$
$$
\frac{\partial}{\partial z'}[\mathcal{A}_2 + \mathcal{B}_1] = 2\left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(z'-z)(x'-x)(y'-y)}{r^3}.
$$

Au moyen de ces égalités, exprimons l'une des conditions nécessaires

$$\frac{\partial^2}{\partial y' \partial z'}[\mathcal{A}_2 + \mathcal{B}_1] = \frac{\partial^2}{\partial z' \partial y'}[\mathcal{A}_2 + \mathcal{B}_1],$$
$$\frac{\partial^2}{\partial z' \partial x'}[\mathcal{A}_2 + \mathcal{B}_1] = \frac{\partial^2}{\partial x' \partial z'}[\mathcal{A}_2 + \mathcal{B}_1],$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x' \partial y'}[\mathcal{A}_2 + \mathcal{B}_1] = \frac{\partial^2}{\partial y' \partial x'}[\mathcal{A}_2 + \mathcal{B}_1],$$

la dernière, par exemple; nous trouverons

$$\begin{aligned} &2\left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(x'-x)^2}{r^3} + \frac{d}{dr}\left[\frac{g(r)}{r^2}\right]\frac{(y'-y)^2}{r} \\ &= 2\left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(y'-y)^2}{r^3} + \frac{d}{dr}\left[\frac{g(r)}{r^2}\right]\frac{(x'-x)^2}{r}, \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\frac{2}{r^2}\left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right] = \frac{d}{dr}\,\frac{g(r)}{r^2},$$

ou bien

$$f(r) = \frac{1}{2}\,\frac{dg(r)}{dr}. \tag{33}$$

Désignons par F la grandeur géométrique qui a pour composantes X, Y, Z; par (F, $ds$) l'angle que la direction de cette grandeur géométrique fait avec la direction de l'élément $ds$; en vertu de l'égalité (33), l'égalité (29) deviendra

$$\mathrm{F}\cos(\mathrm{F}, ds) = g(r)\frac{\partial r}{\partial s}\,\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} + \frac{1}{2}\,\frac{dg(r)}{dr}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\frac{\partial r}{\partial s'},$$

ou bien, en posant

$$\mathcal{G}(r) = \int g(r)\,dr,$$

$$\mathrm{F}\cos(\mathrm{F}, ds) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \mathcal{G}(r)}{\partial s\,\partial s'}\,\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{1}{2}\,\frac{d^2 \mathcal{G}(r)}{dr^2}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\frac{\partial r}{\partial s'}.$$

Mais on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathcal{G}(r)}{\partial s\,\partial s'}\frac{\partial r}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s'}\left[\frac{\partial \mathcal{G}(r)}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s}\right] - \frac{\partial \mathcal{G}(r)}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial s'}\left[g(r)\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\right] - \frac{1}{2}\frac{dg(r)}{dr}\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s'}\left[g(r)\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\frac{dg(r)}{dr}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\frac{\partial r}{\partial s'}.
\end{aligned}$$

On a donc

$$(34)\qquad \mathrm{F}\cos(\mathrm{F}, ds) = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial s'}\left[g(r)\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\right] + \frac{3}{4}\frac{dg(r)}{dr}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\frac{\partial r}{\partial s'}.$$

On peut, tout en laissant fixe l'élément $ds$, faire varier l'élément $ds'$ tout le long d'une courbe fermée. Dans ces conditions, la somme des projections des grandeurs géométriques $\mathrm{F}\,ds'$ sur une direction fixe quelconque, par exemple sur la direction de l'élément $ds$, doit être égale à o. On doit donc avoir

$$\int \mathrm{F}\cos(\mathrm{F}, ds)\,ds' = 0,$$

l'intégrale s'étendant à un circuit fermé quelconque. Si l'on se reporte à l'identité (34), cela signifie que l'on doit avoir, quelle que soit la position des deux éléments $ds$ et $ds'$, c'est-à-dire quels que soient $r$, $\frac{\partial r}{\partial s}$, $\frac{\partial r}{\partial s'}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}$, une identité de la forme

$$\begin{aligned}
\frac{dg(r)}{dr}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\frac{\partial r}{\partial s'} &= \frac{\partial}{\partial s'}\mathfrak{F}\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}\right) \\
&= \frac{\partial \mathfrak{F}\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{\partial \mathfrak{F}\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)}\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}.
\end{aligned}$$

Il est aisé de voir qu'une semblable identité n'est possible que si l'on a

$$\frac{dg(r)}{dr} = 0,$$

c'est-à-dire

$$g(r) = \gamma, \tag{35}$$

$\gamma$ désignant une constante quelconque.

L'identité (33) devient alors

$$f(r) = 0. \tag{36}$$

Les identités (30) et (31) deviennent alors

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x'} &= \frac{\gamma}{r}\frac{x'-x}{r}\left[1 - \frac{(x'-x)^2}{r^2}\right], \\ \frac{\partial \mathcal{B}_2}{\partial y'} &= \frac{\gamma}{r}\frac{y'-y}{r}\left[1 - \frac{(y'-y)^2}{r^2}\right], \\ \frac{\partial \mathcal{C}_3}{\partial z'} &= \frac{\gamma}{r}\frac{z'-z}{r}\left[1 - \frac{(z'-z)^2}{r^2}\right], \end{aligned}\right. \tag{37}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x'} + \frac{\partial \mathcal{B}_1}{\partial x'} = \frac{\gamma}{r}\frac{y'-y}{r} - 2\frac{\gamma}{r}\frac{(x'-x)^2(y'-y)}{r^3}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{38}$$

La première des identités (38) peut s'écrire

$$A_{21} + B_{11} = -\frac{\gamma}{r}\frac{y'-y}{r} - \frac{2\gamma}{r}\frac{(x'-x)^2(y'-y)}{r^3}.$$

Intervertissons les lettres $x$, $y$, $z$ avec les lettres $x'$, $y'$, $z'$. $A_{21}$ se change en $A'_{21}$, $B_{11}$ en $B'_{11}$ et nous avons

$$A'_{21} + B'_{11} = \frac{\gamma}{r}\frac{y'-y}{r} + \frac{2\gamma}{r}\frac{(x'-x)^2(y'-y)}{r^3}.$$

Nous avons donc

$$A_{21} + B_{11} + A'_{21} + B'_{11} = 0.$$

Mais, en vertu des égalités (24) et des égalités analogues relatives aux quantités $B_{11}$, nous avons

$$A_{12} + A'_{21} = 0,$$
$$B_{11} + B'_{11} = 0.$$

Nous obtenons donc la première des identités

$$(39)\qquad \begin{cases} A_{12} = A_{21}, & B_{21} = B_{12}, & C_{31} = C_{13}, \\ A_{13} = A_{31}, & B_{23} = B_{32}, & C_{32} = C_{23}; \end{cases}$$

les autres s'établissent d'une manière analogue.

Remarquons maintenant que les identités (37) peuvent s'écrire

$$\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x'} = -\frac{\gamma}{2}\frac{\partial}{\partial x'}\frac{(y'-y)^2+(z'-z)^2}{r^2},$$

$$\frac{\partial \mathcal{B}_2}{\partial y'} = -\frac{\gamma}{2}\frac{\partial}{\partial y'}\frac{(z'-z)^2+(x'-x)^2}{r^2},$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}_3}{\partial z'} = -\frac{\gamma}{2}\frac{\partial}{\partial z'}\frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{r^2},$$

et donnent

$$\mathcal{A}_1 = -\frac{\gamma}{2}\frac{(y'-y)^2+(z'-z)^2}{r^2} + \mathfrak{A}(y', z'),$$

$$\mathcal{B}_2 = -\frac{\gamma}{2}\frac{(z'-z)^2+(x'-x)^2}{r^2} + \mathfrak{B}(z', x'),$$

$$\mathcal{C}_3 = -\frac{\gamma}{2}\frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{r^2} + \mathfrak{C}(x', y').$$

De là, nous déduisons

$$(40)\qquad \begin{cases} A_{12} = \dfrac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial y'} = -\dfrac{\gamma(y'-y)}{r^2} + \dfrac{\gamma}{r^4}[(y'-y)^2+(z'-z)^2](y'-y) + \dfrac{\partial \mathfrak{A}(y', z')}{\partial y}, \\ B_{21} = \dfrac{\partial \mathcal{B}_2}{\partial x'} = -\dfrac{\gamma(x'-x)}{r^2} + \dfrac{\gamma}{r^4}[(z'-z)^2+(x'-x)^2](x'-x) + \dfrac{\partial \mathfrak{B}(z', x')}{\partial x'}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

La première des identités (38) peut s'écrire

$$A_{21} + B_{11} = -\frac{\gamma(y'-y)}{r^2} + \frac{2\gamma}{r^4}[(y'-y)^2+(z'-z)^2](y'-y).$$

Retranchons aux deux membres $A_{12}$ qui est donné par la première égalité (40), et qui, en vertu de la première égalité (39), est identique à $A_{21}$, et nous aurons

$$B_{11} = \frac{\gamma}{r^4}[(y'-y)^2+(z'-z)^2](y'-y') - \frac{\partial \mathfrak{A}(y',z')}{\partial y'}.$$

De là, nous déduisons

$$\frac{\partial B_{11}}{\partial y} = \frac{\gamma}{r^4}[(z'-z)^2-(y'-y)^2] + \frac{4\gamma(x'-x)^2(y'-y)^2}{r^6} - \frac{\partial^2 \mathfrak{A}(y',z')}{\partial z'^2}.$$

D'autre part, de la deuxième égalité (40), nous déduisons

$$\frac{\partial B_{21}}{\partial x'} = -\frac{\gamma}{r^4}(y'-y)^2 + \frac{4\gamma(x'-x)^2(y'-y)^2}{r^6} - \frac{\partial^2 \mathfrak{B}(z',x')}{\partial x'^2}.$$

Mais, en vertu de la troisième égalité (39), on a

$$\frac{\partial B_{21}}{\partial x'} = \frac{\partial B_{12}}{\partial x'}.$$

D'ailleurs, on doit avoir, d'après des égalités analogues aux égalités (25),

$$\frac{\partial B_{11}}{\partial y'} = \frac{\partial B_{12}}{\partial x'} = \frac{\partial^2 \mathfrak{W}_1}{\partial x' \partial y'}.$$

En exprimant cette égalité, on trouve

$$\frac{\gamma}{r^4}(z'-z)^2 - \left[\frac{\partial^2 \mathfrak{A}(y',z')}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{B}(x',z')}{\partial x'^2}\right].$$

Si l'on observe que $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ ne dépendent de $x$, $y$, $z$ que par les différences $(x'-x)$, $(y'-y)$, $(z'-z)$, ceci peut s'écrire

$$\frac{\gamma}{r^4} = \varphi[(x'-x),(z'-z)] + \psi[(y'-y),(z'-z)],$$

$\varphi$ et $\psi$ étant deux fonctions convenablement choisies.

Je vais démontrer que ceci ne peut avoir lieu que si l'on a

$$(41) \qquad \gamma = 0.$$

Supposons en effet $\gamma$ différent de o.

Si on laisse à $(x'-x)$ et à $(y'-y)$ des valeurs quelconques, et si l'on donne à $(z'-z)$ la valeur o, les deux fonctions

$$\varphi[(x'-x, (z'-z)],$$
$$\psi[(y'-y, (z'-z)]$$

peuvent être ou toutes deux finies, ou toutes deux infinies; mais l'une ne peut devenir infinie tandis que l'autre demeurerait finie, car, dans l'égalité

$$\frac{\gamma}{r^4} = \varphi[(x'-x), (z'-z)] + \psi[(y'-y), (z'-z)],$$

pour $(z'-z) = 0$, $(x'-x)$ et $(y'-y)$ ayant des valeurs quelconques, le premier membre serait fini et le second infini.

Supposons en premier lieu que les deux fonctions

$$\varphi[(x'-x), (z'-z)], \quad \psi[(y'-y), (z'-z)]$$

demeurent finies pour $(z'-z) = 0$. Posons

$$\Phi(x'-x) = \varphi[(x'-x), 0],$$
$$\Psi(y'-y) = \psi[(y'-y), 0];$$

nous aurons

$$\frac{\gamma}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2]^2} = \Phi(x'-x) + \Psi(y'-y).$$

Le premier membre devient infini pour $(x'-x) = 0$, $(y'-y) = 0$ si $\gamma$ n'est pas nul. Je dis qu'il n'en peut être de même du second. En effet, l'une au moins des deux fonctions $\Phi$, $\Psi$ deviendrait infinie pour la valeur o de son argument. Supposons que ce soit la fonction $\Phi$. Alors, si l'on faisait $(x'-x) = 0$, en laissant $(y'-y)$ quelconque, dans l'égalité précédente, le premier membre serait fini et le second infini.

Supposons en second lieu que $\varphi$ et $\psi$ deviennent tous deux infinis pour $(z'-z) = 0$.

Remarquons que l'on a

$$\frac{\gamma}{[(x'-x)^2+(y'-y^2)^2+(z'-z)^2]^2}$$
$$= \varphi[(x'-x), (z'-z)] + \psi[(y'-y), (z'-z)],$$
$$\frac{\gamma}{[(x'_1-x_1)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^2}$$
$$= \varphi[(x'_1-x_1), (z'-z)] + \psi[(y'-y), (z'-z)],$$

ou, en retranchant,

$$\gamma\left\{\frac{1}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^2} - \frac{1}{[(x'_1-x_1)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^2}\right\}$$
$$= \varphi[(x'-x), (z'-z)] - \varphi[(x'_1-x_1), (z'-z)].$$

Pour $(z'-z)=0$, le premier membre est fini; il en est donc de même du second; ainsi, bien que l'on ait

$$\varphi[(x'-x), 0] = \infty,$$

la différence

$$\varphi[(x'-x), 0] - \varphi[(x'_1-x_1), 0]$$

est finie. Si donc on désigne par $a$ une valeur déterminée de $(x'-x)$, et si l'on pose

$$\Theta(z'-z) = \varphi[a, (z'-z)],$$

on pourra écrire

$$\varphi[(x'-x), (z'-z)] = \Theta(z'-z) + \varphi_1[(x'-x), (z'-z)],$$

$\varphi_1$ demeurant fini pour $(z'-z)=0$.

En se reportant alors à l'égalité

$$\frac{\gamma}{r^4} = \varphi[(x'-x), (z'-z)] + \psi[(y'-y), z'-z)],$$

qui peut s'écrire

$$\frac{\gamma}{r^4} - \varphi_1[(x'-x), (z'-z)] - \Theta(z'-z) = \psi[(y'-y), (z'-z)]$$

on voit que l'on doit avoir

$$\psi[(y'-y),(z'-z)] = -\Theta(z'-z) + \psi_1[(y'-y),(z'-z)],$$

$\psi_1$ demeurant fini pour $z'-z=0$.

On aura alors

$$\frac{\gamma}{r^3} = \varphi_1[(x'-x),(z'-z)] + \psi_1[(y'-y),(z'-z)],$$

égalité dont on démontrera l'impossibilité comme on a démontré l'impossibilité de l'égalité

$$\frac{\gamma}{r^3} = \varphi[(x'-x),(z'-z)] + \psi[(y'-y),(z'-z)]$$

dans le cas où les deux fonctions $\varphi$ et $\psi$ demeureraient finies pour $(z'-z)=0$.

On a donc, comme nous l'avions annoncé, l'égalité

$$(41) \qquad \gamma = 0.$$

De cette identité (41), nous déduisons deux conséquences; en premier lieu, les identités (37) deviennent

$$(42) \qquad \begin{cases} A_{11} = \dfrac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x'} = 0, \\ B_{22} = \dfrac{\partial \mathcal{B}_2}{\partial y'} = 0, \\ C_{33} = \dfrac{\partial \mathcal{C}_3}{\partial z'} = 0. \end{cases}$$

En second lieu, l'identité (34) devient

$$F\cos(F, ds) = 0.$$

La grandeur géométrique F est donc perpendiculaire à l'élément $ds$, ou identiquement nulle. Dans cette dernière hypothèse, la proposition à laquelle nous voulions parvenir serait établie. Nous attachant donc à la première hypothèse, nous remarquerons que la grandeur géométrique $F'(X', Y', Z')$ doit être semblablement perpendiculaire à l'élément $ds'$. Mais les égalités (7) signifient que les deux grandeurs F et F' sont égales, parallèles et de sens contraire. La grandeur géométrique F est donc dirigée comme la perpendiculaire commune aux deux éléments.

Cela posé, faisons choix d'un système d'axes coordonnés ainsi composé. L'axe des $x$ est parallèle à la perpendiculaire commune aux deux éléments; l'axe des $y$ est parallèle à l'élément $ds$. Nous avons alors

$$x'-x=r, \qquad y'-y=0, \qquad z'-z=0,$$
$$\frac{dx}{ds}=0, \qquad \frac{dy}{ds}=1, \qquad \frac{dz}{ds}=0,$$
$$\frac{dx'}{ds'}=0, \qquad \frac{dy'}{ds'}=\cos\omega, \qquad \frac{dz'}{ds'}=\sin\omega.$$

Si nous observons en outre que X devient F, que $A_{11}$ est égal à 0, d'après l'une des identités (42), et que $A_{23}$, qui est en général une fonction de $(x'-x)$, $(y'-y)$ et $(z'-z)$, devient une fonction de $r$ que nous pouvons désigner par $\mathfrak{A}(r)$, nous trouverons

$$F=\mathfrak{A}(r)\sin\omega. \tag{43}$$

Envisageons un circuit fermé plan dont fasse partie l'élément $ds'$, et un élément $ds$ situé dans le plan de ce circuit. Toutes les grandeurs géométriques $F\,ds'$ seront dirigées suivant la même droite, savoir suivant la perpendiculaire au plan de l'élément et du circuit. La somme de ces quantités devra par conséquent être égale à 0

$$\int \mathfrak{A}(r)\sin\omega\, ds'=0. \tag{44}$$

Appliquons cette égalité au cas particulier suivant.

Le circuit auquel appartient l'élément $ds'$ est un rectangle ABCD (*fig.* 1), de base $DA=b$, de hauteur $AB=h$.

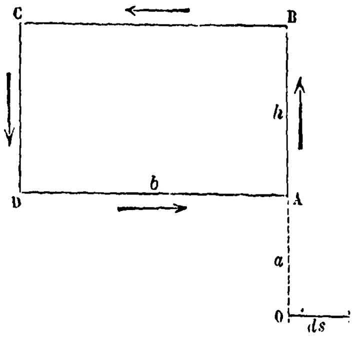
L'élément $ds$ est parallèle à DA et situé sur le prolongement de BA, à une distance OA du point A.

Évaluons l'intégrale

$$J = \int \mathcal{R}(r) \sin\omega \, ds$$

étendue à ce contour.

Fig. 1.




Le long de AB, on a

$$\sin\omega = 1, \qquad ds' = dr;$$

les limites de l'intégration sont $a$ et $a + h$. La partie correspondante de l'intégrale J a pour valeur

$$\int_a^{a+h} \mathcal{R}(r)\, dr.$$

Le long de BC, on a $\sin\omega = 0$. La partie correspondante de l'intégrale J est égale à 0.

Le long de CD, on a

$$\sin\omega = -1, \qquad ds = -\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - b^2}};$$

les limites de l'intégration sont $\sqrt{(a+h)^2 + b^2}$ et $\sqrt{a^2 + b^2}$. La partie correspondante de J a pour valeur

$$-\int_{\sqrt{a^2+b^2}}^{\sqrt{(a+h)^2+b^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2 - b^2}} \mathcal{R}(r)\, dr.$$

Le long de DA, on a $\sin\omega = 0$. La partie correspondante de l'intégrale J est égale à o. On a donc

$$J = \int_a^{a+h} \mathfrak{R}(r)\,dr - \int_{\sqrt{a^2+b^2}}^{\sqrt{(a+h)^2+b^2}} \mathfrak{R}(r)\,\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-b^2}}.$$

L'identité (44) nous donne alors

$$\int_a^{a+h} \mathfrak{R}(r)\,dr - \int_{\sqrt{a^2+b^2}}^{\sqrt{(a+h)^2+b^2}} \mathfrak{R}(r)\,dr = 0,$$

quels que soient $a$, $b$, $h$. Différentions cette identité par rapport à $h$. Elle nous donnera la nouvelle identité

$$\mathfrak{R}(a+h) - \frac{h}{(a+h)}\,\mathfrak{R}\left[\sqrt{(a+h)^2+b^2}\right] = 0,$$

ou bien, en posant

$$a+h = x,$$

$$\sqrt{(a+h)^2+b^2} = y,$$

$$\mathfrak{R}(x) = \frac{x-a}{\sqrt{y^2-b^2}}\,\mathfrak{R}(y).$$

Il suffit de faire dans cette identité, qui doit avoir lieu quels que soient $a$, $b$ et $h$, $x = a$, c'est-à-dire $h = 0$, pour reconnaître qu'elle entraîne

$$\mathfrak{R}(x) = 0.$$

L'identité (43) devient alors

$$F = 0.$$

Un calcul tout semblable montrerait que la grandeur géométrique dont les projections sont L, M, N est identiquement nulle.

La proposition que nous avions énoncée est donc démontrée : *si l'on suppose connue l'action qu'un courant fermé et uniforme exerce sur un élément de courant uniforme, et si de plus on astreint la loi élémentaire à cette condition que le travail produit dans le dépla-*

*cement de deux éléments par les actions mutuelles de ces éléments ne dépende que de leur changement de positions relative, cette loi élémentaire est susceptible au plus d'une détermination.*

4. Ce théorème renferme comme cas très particulier celui que Gauss avait donné; si en effet la loi élémentaire est conforme à la règle de l'égalité entre l'action et la réaction, le travail produit dans le déplacement de deux éléments dépend uniquement de la variation de la distance mutuelle.

La loi d'Ampère et la loi de Grassmann conduisent à la même loi pour l'action d'un courant fermé et uniforme sur un élément de courant. Dans le cas où l'on adopte la loi d'Ampère, le travail élémentaire dépend uniquement du changement de position relative de deux éléments. D'après le théorème que nous venons de démontrer, il n'en peut être de même dans le cas où l'on adopte la loi de Grassmann. Il est aisé de le vérifier.

La loi d'Ampère et la loi du potentiel électrodynamique élémentaire, proposée par M. H. von Helmholtz, sont toutes deux telles que le travail élémentaire ne dépende que du déplacement relatif des deux éléments. Ces deux lois élémentaires ne peuvent donc conduire aux mêmes formules pour représenter l'action d'un courant fermé et uniforme sur un élément de courant uniforme; elles conduisent, en effet, pour ce problème à des résultats différents.

5. Le théorème que nous venons de démontrer est susceptible d'être étendu aux actions des courants qui ne sont pas fermés et uniformes.

Dans tout courant linéaire *réalisable,* l'intensité du courant doit varier d'une manière continue d'un point à l'autre du conducteur; de plus, si le conducteur traversé par le courant n'est pas fermé, l'intensité du courant doit être égale à o aux deux extrémités du conducteur.

Si l'on suppose donnée l'action d'un courant réalisable quelconque dont fait partie l'élément $ds'$, et dont l'intensité en un point de cet élément est $\mathfrak{I}'$, sur un élément de courant quelconque, de longueur $ds$ et d'intensité $\mathfrak{I}$, et si l'on veut de plus que le travail élémentaire ne dépende que du changement de position relative des deux éléments, la loi élémentaire est-elle complètement déterminée? Le théorème précédent ne le démontre pas, car on pourrait fort bien imaginer qu'il existe deux lois élémentaires distinctes, différant l'une de l'autre par des termes en $\frac{d\mathfrak{J}}{ds}$ et $\frac{d\mathfrak{J}'}{ds'}$, et se réduisant l'une à l'autre lorsque l'on a

$$\frac{d\mathfrak{J}}{ds} = 0, \qquad \frac{d\mathfrak{J}'}{ds'} = 0.$$

Nous allons démontrer qu'il n'en est pas ainsi, et que la loi élémentaire est encore, dans ce cas, complètement déterminée. Développons cette démonstration pour la force élémentaire; le couple élémentaire donnerait lieu aux mêmes considérations.

Soient

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{X}\, ds\, ds', \\ \mathfrak{Y}\, ds\, ds', \\ \mathfrak{Z}\, ds\, ds'; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{X}_1\, ds\, ds', \\ \mathfrak{Y}_1\, ds\, ds', \\ \mathfrak{Z}_1\, ds\, ds' \end{array}\right.$$

les valeurs, dans chacune des deux lois, des composantes de la force exercée par l'élément $ds'$ sur l'élément $ds$. Posons

$$\begin{aligned} X &= \mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}, \\ Y &= \mathfrak{Y}_1 - \mathfrak{Y}, \\ Z &= \mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{Z}. \end{aligned}$$

Pour que les deux lois conduisent à la même action d'un courant réalisable quelconque sur un élément de courant quelconque, il faut et il suffit que l'on ait

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial s'}\mathfrak{J}'\Phi\left(\mathfrak{J}', x', y', z', \mathfrak{J}, \frac{d\mathfrak{J}}{ds}, x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right), \\ Y &= \frac{\partial}{\partial s'}\mathfrak{J}'\Theta\left(\mathfrak{J}', x', y', z', \mathfrak{J}, \frac{d\mathfrak{J}}{ds}, x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right), \\ Z &= \frac{\partial}{\partial s'}\mathfrak{J}'\Psi\left(\mathfrak{J}', x', y', z', \mathfrak{J}, \frac{d\mathfrak{J}}{ds}, x, y. z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right). \end{aligned}\right.$$

Pour que le travail élémentaire dépende uniquement du déplacement relatif des deux éléments de courant, il faut et il suffit que l'on ait

$$(46)\qquad \begin{cases} X + X' = 0, \\ Y + Y' = 0, \\ Z + Z' = 0. \end{cases}$$

En vertu de la première des identités (45), la première des identités (46) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(47)\qquad \begin{cases} \left(\Phi + \mathfrak{I}'\dfrac{\partial\Phi}{\partial\mathfrak{I}'}\right)\dfrac{d\mathfrak{I}'}{ds'} + \mathfrak{I}'\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x'}\dfrac{dx'}{ds'} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y'}\dfrac{dy'}{ds'} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial z'}\dfrac{dz'}{ds'}\right) \\ \quad = -\left[\left(\Phi' + \mathfrak{I}\dfrac{\partial\Phi'}{\partial\mathfrak{I}}\right)\dfrac{d\mathfrak{I}}{ds} + \mathfrak{I}\left(\dfrac{\partial\Phi'}{\partial x}\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{\partial\Phi'}{\partial y}\dfrac{dy}{ds} + \dfrac{\partial\Phi'}{\partial z}\dfrac{dz}{ds}\right)\right]. \end{cases}$$

Les quantités

$$\Phi + \mathfrak{I}'\frac{\partial\Phi}{\partial\mathfrak{I}'},\quad \mathfrak{I}'\frac{\partial\Phi}{\partial x'},\quad \mathfrak{I}'\frac{\partial\Phi}{\partial y'},\quad \mathfrak{I}'\frac{\partial\Phi}{\partial z'},$$

qui figurent au premier membre sont, comme $\Phi$, indépendantes de

$$\frac{d\mathfrak{I}'}{ds'},\quad \frac{dx'}{ds'},\quad \frac{dy'}{ds'},\quad \frac{dz'}{ds'}.$$

Les quantités

$$\Phi' + \mathfrak{I}\frac{\partial\Phi'}{\partial\mathfrak{I}},\quad \mathfrak{I}\frac{\partial\Phi'}{\partial x},\quad \mathfrak{I}\frac{\partial\Phi'}{\partial y},\quad \mathfrak{I}\frac{\partial\Phi'}{\partial z},$$

qui figurent au second membre, sont, comme $\Phi'$, indépendantes de

$$\frac{d\mathfrak{I}}{ds},\quad \frac{dx}{ds},\quad \frac{dy}{ds},\quad \frac{dz}{ds}.$$

Le second membre est donc une fonction linéaire et homogène de ces quantités. Il doit en être de même du premier, et cela quels que soient

$$\frac{d\mathfrak{I}'}{ds'},\quad \frac{dx'}{ds'},\quad \frac{dy'}{ds'},\quad \frac{dz'}{ds'}.$$

Faisons

$$\frac{d\mathfrak{I}'}{ds'} = 0,\qquad \frac{dx'}{ds'} = 1,\qquad \frac{dy'}{ds'} = 0,\qquad \frac{dz'}{ds'} = 0.$$

Le premier membre se réduit à

$$\mathfrak{z}' \frac{\partial \Phi}{\partial x'},$$

qui doit ainsi être une fonction linéaire et homogène de

$$\frac{d\mathfrak{z}}{ds}, \quad \frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}.$$

On démontrerait d'une manière analogue que $\mathfrak{z}' \frac{\partial \Phi}{\partial y'}$, $\mathfrak{z}' \frac{\partial \Phi}{\partial z'}$ sont des fonctions linéaires et homogènes des mêmes quantités. Dès lors, tous les termes qui figurent dans l'identité (47), sauf le premier, étant des fonctions linéaires et homogènes de ces quatre quantités, il doit en être de même du premier.

Les quatre quantités

$$\Phi + \mathfrak{z}' \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{z}'}, \quad \mathfrak{z}' \frac{\partial \Phi}{\partial x'}, \quad \mathfrak{z}' \frac{\partial \Phi}{\partial y'}, \quad \mathfrak{z}' \frac{\partial \Phi}{\partial z'},$$

c'est-à-dire les quatre dérivées partielles de $\varphi = \mathfrak{z}'\Phi$ par rapport à $\mathfrak{z}'$, $x'$, $y'$, $z'$, étant des fonctions linéaires et homogènes de

$$\frac{d\mathfrak{z}}{ds}, \quad \frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds},$$

on a

$$\mathfrak{z}'\Phi = \mathrm{A}\mathfrak{z}' \frac{dx}{ds} + \mathrm{B}\mathfrak{z}' \frac{dy}{ds} + \mathrm{C}\mathfrak{z}' \frac{dz}{ds} + \mathrm{D}\mathfrak{z}' \frac{d\mathfrak{z}}{ds} + \mathrm{F}\mathfrak{z}',$$

A, B, C, D, F étant cinq fonctions des seules variables

$$\begin{matrix} x, & y, & z, & \mathfrak{z}, \\ x', & y', & z', & \mathfrak{z}'. \end{matrix}$$

dont le produit par $\mathfrak{z}'$ s'annule pour $\mathfrak{z}' = 0$.

Si nous supposons $\frac{d\mathfrak{z}}{ds} = 0$, $\frac{d\mathfrak{z}'}{ds'} = 0$, nous trouvons

$$\mathfrak{z}'\Phi = \mathrm{A}\mathfrak{z}' \frac{dx}{ds} + \mathrm{B}\mathfrak{z}' \frac{dy}{ds} + \mathrm{C}\mathfrak{z}' \frac{dz}{ds} + \mathrm{F}\mathfrak{z}'.$$

Mais nous trouvons ainsi la valeur de $\mathfrak{s}'\Phi$ qui convient à deux éléments de courant uniforme. Or, d'après le théorème démontré pour ce cas, toutes les dérivées partielles de $\Phi$, qui sont les divers coefficients $A_{ij}$ qui figurent dans l'expression (23) de la force X, sont égales à o. Donc $\mathfrak{s}'\Phi$ doit se réduire à une constante, lorsque l'on fait $\mathfrak{s} = \text{const.}$, $\mathfrak{s}' = \text{const.}$, ce qui exige que l'on ait

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0.$$

$$F = \mathfrak{F}(\mathfrak{s}, \mathfrak{s}'),$$

et, par conséquent

$$\mathfrak{s}'\Phi = D(\mathfrak{s}', x', y', z', \mathfrak{s}. x, y, z)\mathfrak{s}' \frac{d\mathfrak{s}}{ds} + \mathfrak{s}'\mathfrak{F}(\mathfrak{s}\mathfrak{s}').$$

L'identité (47) deviendra alors

$$\begin{aligned}
&\left(D + \mathfrak{s}' \frac{\partial D}{\partial \mathfrak{s}'}\right) \frac{d\mathfrak{s}}{ds} \frac{d\mathfrak{s}'}{ds'} \\
&\quad + \left(\mathfrak{F} + \mathfrak{s}' \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{s}'}\right) \frac{d\mathfrak{s}'}{ds'} + \frac{\partial D}{\partial x'} \frac{dx'}{ds'} + \frac{\partial D}{\partial y'} \frac{dy'}{ds'} + \frac{\partial D}{\partial z'} \frac{dz'}{ds'} \\
&= - \left[\left(D' + \mathfrak{s} \frac{\partial D'}{\partial \mathfrak{s}}\right) \frac{d\mathfrak{s}'}{ds'} \frac{d\mathfrak{s}}{ds} \right. \\
&\quad \left. + \left(\mathfrak{F}' + \mathfrak{s} \frac{\partial \mathfrak{F}'}{\partial \mathfrak{s}}\right) \frac{d\mathfrak{s}}{ds} + \frac{\partial D'}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial D'}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial D'}{\partial z} \frac{dz}{ds}\right].
\end{aligned}$$

Le second membre est indépendant de $\frac{dx'}{ds'}, \frac{dy'}{ds'}, \frac{dz'}{ds'}$. Il doit en être de même du premier. On a donc

$$\frac{\partial D}{\partial x'} = 0, \qquad \frac{\partial D}{\partial y'} = 0, \qquad \frac{\partial D}{\partial z'} = 0.$$

D'ailleurs D ne devant dépendre que des différences $(x' - x)$, $(y' - y)$, $(z' - z)$, on voit que D est indépendant des variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad x', \quad y', \quad z';$$

on a ainsi

$$D = \mathfrak{D}(\mathfrak{s}, \mathfrak{s}'),$$

et, par conséquent,

$$X = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{I}'}[\mathfrak{I}'\Phi(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')]\frac{d\mathfrak{I}}{ds}\frac{d\mathfrak{I}'}{ds'} + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{I}'}[\mathfrak{I}'\mathfrak{F}(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')]\frac{d\mathfrak{I}'}{ds'}.$$

La quantité X est la projection sur l'axe des $x$ d'une grandeur géométrique qui doit dépendre uniquement, en grandeur et position, des intensités $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{I}'$, de leurs dérivées $\frac{d\mathfrak{I}}{ds}$, $\frac{d\mathfrak{I}'}{ds'}$, et de la position relative des deux éléments $ds$, $ds'$. Or cette projection est indépendante de la position des deux éléments par rapport à l'axe des $x$. Il en résulte qu'elle ne peut être qu'identiquement nulle, ainsi que la grandeur dont elle est la projection. Ce résultat démontre le théorème que nous avions énoncé.

Par conséquent, il est démontré que, *si l'on connaît l'action d'un courant réalisable quelconque sur un élément de courant quelconque, et si l'on veut ramener cette action à une action élémentaire telle que le travail produit par cette action dans le déplacement des deux éléments entre lesquels elle agit dépende uniquement de leur changement de position relative, la loi élémentaire est susceptible au plus d'une détermination.*

Nous avons démontré ailleurs [1] que la loi de l'action d'un courant réalisable quelconque sur un élément de courant était connue, ou, du moins, ne renfermait plus qu'une constante inconnue (*constante d'Helmholtz*) dont la valeur devra être demandée à l'expérience. Nous avons montré en outre que cette action pouvait être ramenée à une action élémentaire donnée par la loi suivante :

*L'élément ds' exerce sur l'élément ds une attraction dirigée suivant la droite qui joint les deux éléments et ayant pour valeur*

$$\frac{\mathcal{A}\,\mathfrak{I}\mathfrak{I}'\,ds\,ds'}{r^2}(2\cos\omega - 3\cos\theta\cos\theta') + \frac{\mathcal{A}\,ds\,ds'}{r}\left(\mathfrak{I}\frac{d\mathfrak{I}'}{ds'}\cos\theta - \mathfrak{I}'\frac{d\mathfrak{I}}{ds}\cos\theta'\right)$$
$$+ \mathcal{A}\frac{1+\lambda}{2}\frac{d\mathfrak{I}}{ds}\frac{d\mathfrak{I}'}{ds'}ds\,ds',$$

(1) *Applications de la Thermodynamique aux actions mutuelles des courants électriques* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ,* t. XV. Helsingfors; 1887).

*$\mathcal{A}$ étant la constante fondamentale de l'Électrodynamique, et $\lambda$ la constante d'Helmholtz.*

Cette action vérifie la règle de l'égalité entre l'action et la réaction; le travail produit par cette action par l'effet d'un déplacement des deux éléments entre lesquels elle agit dépend uniquement du changement de position relative des deux éléments; il résulte alors du théorème précédent qu'elle représente la seule action élémentaire jouissant de cette propriété et compatible avec la loi que nous avons démontrée par l'action d'un courant quelconque sur un élément de courant quelconque.