

**IV. Ein Beitrag zur Elektrodynamik;
von Bernhard Riemann.**

[Der hier mitgetheilte Aufsatz des leider der Wissenschaft viel zu früh (1866 Jul. 20) entrissenen Verfassers ist der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 10. Februar 1858 überreicht, wie aus einer dem Titel des Manuscriptes hinzugefügten Bemerkung des damaligen Secretärs der Gesellschaft hervorgeht, später aber aus unbekanntem Gründen wieder zurückgezogen.]

Der Königlichen Societät erlaube ich mir eine Bemerkung mitzutheilen, welche die Theorie der Electricität und des Magnetismus mit der des Lichts und der strahlenden Wärme in einen nahen Zusammenhang bringt. Ich habe gefunden, daß die elektrodynamischen Wirkungen galvanischer Ströme sich erklären lassen, wenn man annimmt, daß die Wirkung einer elektrischen Masse auf die übrigen nicht momentan geschieht, sondern sich mit einer constanten (der Lichtgeschwindigkeit innerhalb der Gränzen der Beobachtungsfehler gleichen) Geschwindigkeit zu ihnen fortpflanzt. Die Differentialgleichung für die Fortpflanzung der elektrischen Kraft wird bei dieser Annahme dieselbe, wie die für die Fortpflanzung des Lichts und der strahlenden Wärme.

Es seyen S und S' zwei von constanten galvanischen Strömen durchflossene und gegen einander nicht bewegte Leiter; ε sey ein elektrisches Massentheilchen im Leiter S , welches sich zur Zeit t im Punkte (x, y, z) befinde, ε' ein elektrisches Massentheilchen von S' und befinde sich zur Zeit t im Punkte (x', y', z') . Ueber die Bewegung der elektrischen Massentheilchen, welche in jedem Leitertheilchen für die positiv und negativ elektrischen entgegengesetzt ist, mache ich die Voraussetzung, daß sie in jedem Augenblicke so vertheilt sind, daß die Summen

$$\sum \varepsilon f(x, y, z), \quad \sum \varepsilon' f(x', y', z')$$

über sämtliche Massentheilchen der Leiter ausgedehnt gegen dieselben Summen, wenn sie nur über die positiv elektrischen oder nur über die negativ elektrischen Massentheil-

chen ausgedehnt werden, vernachlässigt werden dürfen, sobald die Function f und ihre Differentialquotienten stetig sind.

Diese Voraussetzung kann auf sehr mannigfaltige Weise erfüllt werden. Nimmt man z. B. an, daß die Leiter in den kleinsten Theilen krystallinisch sind, so daß sich dieselbe relative Vertheilung der Electricitäten in bestimmten gegen die Dimensionen der Leiter unendlich kleinen Abständen periodisch wiederholt, so sind, wenn β die Länge einer solchen Periode bezeichnet, jene Summen unendlich klein, wie $c\beta^n$, wenn f und ihre Derivirten bis zur $(n - 1)$ ten

Ordnung stetig sind, und unendlich klein wie $e^{-\frac{c}{\beta}}$, wenn sie sämmtlich stetig sind.

Erfahrungsmäßiges Gesetz der elektrodynamischen Wirkungen.

Sind die specifischen Stromintensitäten nach mechanischem Mafz zur Zeit t im Punkte (x, y, z) parallel den drei Aven u, v, w , und im Punkte (x', y', z') u', v', w' , und bezeichnet r die Entfernung beider Punkte, c die von Kohlrausch und Weber bestimmte Constaute, so ist der Erfahrung nach das Potential der von S auf S' ausgeübten Kräfte

$$-\frac{2}{cc} \iint \frac{uu' + vv' + ww'}{r} dS dS',$$

dieses Integral über sämmtliche Elemente dS und dS' der Leiter S und S' ausgedehnt. Führt man statt der specifischen Stromintensitäten die Producte aus den Geschwindigkeiten in die specifischen Dichtigkeiten und dann für die Producte aus diesen in die Volumelemente die in ihnen enthaltene Massen ein, so geht dieser Ausdruck über in

$$\sum \sum \frac{\epsilon \epsilon'}{cc} \frac{1}{r} \frac{dd}{dt} \frac{d(r^2)}{dt}$$

wenn die Aenderung von r^2 während der Zeit dt , welche von der Bewegung von ϵ herrührt, durch d , und die von der Bewegung von ϵ' herrührende durch d' bezeichnet wird.

Dieser Ausdruck kann durch Hinwegnahme von

$$\frac{d \sum \sum \frac{\epsilon \epsilon'}{cc} \frac{1}{r} \frac{d'(r^2)}{dt}}{dt}$$

welches durch die Summirung nach ϵ verschwindet, in

$$- \sum \sum \frac{\epsilon \epsilon'}{cc} \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt} \frac{d'(r^2)}{dt}$$

und dieses wieder durch Addition von

$$\frac{d' \sum \sum \frac{\epsilon \epsilon'}{cc} r r \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt}}{dt}$$

welches durch die Summation nach ϵ' Null wird, in

$$\sum \sum \epsilon \epsilon' \frac{r r}{cc} \frac{d d' \left(\frac{1}{r}\right)}{dt dt}$$

verwandelt werden.

Abtheilung dieses Gesetzes aus der neuen Theorie.

Nach der bisherigen Annahme über die elektrostatische Wirkung wird die Potentialfunction U beliebig vertheilter elektrischer Massen, wenn ρ ihre Dichtigkeit im Punkte (x, y, z) bezeichnet, durch die Bedingung

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} - 4\pi \rho = 0,$$

und durch die Bedingung, daß U stetig und in unendlicher Entfernung von wirkenden Massen constant sey, bestimmt. Ein particulares Integral der Gleichung

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = 0$$

welches überall aufser dem Punkte (x', y', z') stetig bleibt, ist

$$\frac{f(t)}{r}$$

und diese Function bildet die vom Punkte (x', y', z') aus erzeugte Potentialfunction, wenn sich in demselben zur Zeit t die Masse — $f(t)$ befindet.

Statt dessen nehme ich nun an, daß die Potentialfunction U durch die Bedingung

$$\frac{d^2 U}{dt^2} - \alpha \alpha \left(\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} \right) + \alpha \alpha 4 \pi \rho = 0$$

bestimmt wird, so daß die vom Punkte (x', y', z') aus erzeugte Potentialfunction, wenn sich in demselben zur Zeit t die Masse $-f(t)$ befindet,

$$= \frac{f\left(t - \frac{r}{\alpha}\right)}{r}$$

wird.

Bezeichnet man die Coordinaten der Masse ε zur Zeit t durch x_t, y_t, z_t , und die der Masse ε' zur Zeit t' durch $x_{t'}, y_{t'}, z_{t'}$, und setzt zur Abkürzung

$$\left((x_t - x_{t'})^2 + (y_t - y_{t'})^2 + (z_t - z_{t'})^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r(t, t')} = F(t, t'),$$

so wird nach dieser Annahme das Potential von ε auch ε' zur Zeit t

$$= -\varepsilon \varepsilon' F\left(t - \frac{r}{\alpha}, t\right).$$

Das Potential der von sämtlichen Massen ε des Leiters S auf die Massen ε' des Leiters S' von der Zeit 0 bis zur Zeit t ausgeübten Kräfte wird daher

$$P = -\int_0^t \sum \sum \varepsilon \varepsilon' F\left(\tau - \frac{r}{\alpha}, \tau\right) d\tau,$$

die Summen über sämtliche Massen beider Leiter ausgedehnt.

Da die Bewegung für entgegengesetzt elektrische Massen in jedem Leitertheilchen entgegengesetzt ist, so erlangt die Function $F(t, t')$ durch die Derivation nach t die Eigenschaft, mit ε , und durch die Derivation nach t' die Eigenschaft, mit ε' ihr Zeichen zu ändern. Bei der vorausgesetzten Vertheilung der Elektricitäten wird daher, wenn man die Derivationen nach t durch obere und nach t' durch untere Accente bezeichnet, $\sum \sum \varepsilon \varepsilon' F_{\varepsilon \varepsilon'}^{(\prime)}(\tau, \tau)$, über sämtliche elektrische Massen ausgedehnt, nur dann nicht unendlich

klein gegen die über die elektrischen Massen einer Art erstreckte Summe, wenn n und n' beide ungerade sind.

Man nehme nun an, daß die elektrischen Massen während der Fortpflanzungszeit der Kraft von einem Leiter zum anderen nur einen sehr kleinen Weg zurücklegen, und betrachte die Wirkung während eines Zeitraums, gegen welchen die Fortpflanzungszeit verschwindet. In dem Ausdrucke von P kann man dann zunächst

$F\left(\tau - \frac{r}{\alpha}, \tau\right)$ durch

$$F\left(\tau - \frac{r}{\alpha}, \tau\right) - F(\tau, \tau) = - \int_0^{\frac{r}{\alpha}} F'(\tau - \sigma, \tau) d\sigma$$

ersetzen, da $\sum \sum \varepsilon \varepsilon' F(\tau, \tau)$ vernachlässigt werden darf. Man erhält dadurch

$$P = \int_0^t d\tau \sum \sum \varepsilon \varepsilon' \int_0^{\frac{r}{\alpha}} F'(\tau - \sigma, \tau) d\sigma,$$

oder wenn man die Ordnung der Integrationen umkehrt und $\tau + \sigma$ für τ setzt,

$$P = \sum \sum \varepsilon \varepsilon' \int_0^{\frac{r}{\alpha}} d\sigma \int_{-\sigma}^{t-\sigma} d\tau F(\tau, \tau + \sigma).$$

Verwandelt man die Grenzen des innern Integrals in 0 und t , so wird dadurch an der obern Gränze der Ausdruck

$$H(t) = \sum \sum \varepsilon \varepsilon' \int_0^{\frac{r}{\alpha}} d\sigma \int_{-\sigma}^0 d\tau F(t + \tau, t + \tau + \sigma)$$

hinzugefügt, und an der untern Gränze der Werth dieses Ausdrucks für $t=0$ hinweggenommen. Man hat also

$$P = \int_0^t d\tau \sum \sum \varepsilon \varepsilon' \int_0^{\frac{r}{\alpha}} d\sigma F(\tau, \tau + \sigma) - H(t) + H(0).$$

In diesem Ausdruck kann man $F'(\tau, \tau + \sigma)$ durch $F'(\tau, \tau + \sigma) - F'(\tau, \tau)$ ersetzen, da

$$\sum \sum \varepsilon \varepsilon' \frac{r}{\alpha} F'(\tau, \tau)$$

vernachlässigt werden darf. Man erhält dadurch als Factor von $\varepsilon \varepsilon'$ einen Ausdruck, der sowohl mit ε als mit ε' sein Zeichen ändert, so daß sich bei den Summationen die Glieder nicht einander aufheben, und unendlich kleine Bruchtheile der einzelnen Glieder vernachlässigt werden dürfen. Es ergibt sich daher, indem man

$$F'(\tau, \tau + \sigma) - F'(\tau, \tau) \text{ durch } \sigma \frac{d d' \left(\frac{1}{r} \right)}{d t d t}$$

ersetzt und die Integration nach σ ausführt, bis auf einen zu vernachlässigenden Bruchtheil

$$P = \int_0^t \sum \sum \varepsilon \varepsilon' \frac{r r'}{2 \alpha \alpha'} \frac{d d' \left(\frac{1}{r} \right)}{d t d t} d \tau - H(t) + H(0).$$

Es ist leicht zu sehen, daß $H(t)$ und $H(0)$ vernachlässigt werden dürfen; denn es ist

$$F'(t + \tau, t + \tau + \sigma) = \frac{d \left(\frac{1}{r} \right)}{d t} + \frac{d^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{d t^2} \tau + \frac{d d' \left(\frac{1}{r} \right)}{d t d t} (\tau + \sigma) + \dots,$$

folglich:

$$H(t) = \sum \sum \varepsilon \varepsilon' \left(\frac{r r'}{2 \alpha \alpha'} \frac{d \left(\frac{1}{r} \right)}{d t} - \frac{r^2}{6 \alpha^3} \frac{d^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{d t^2} + \frac{r^2}{6 \alpha^3} \frac{d d' \left(\frac{1}{r} \right)}{d t d t} + \dots \right).$$

Hierin aber ist nur das erste Glied des Factors von $\varepsilon \varepsilon'$ mit dem Factor in dem ersten Bestandtheile von P von gleicher Ordnung, und dieses liefert wegen der Summation nach ε' nur einen zu vernachlässigenden Bruchtheil desselben.

Der Werth von P , welcher sich aus unserer Theorie ergibt, stimmt mit dem erfahrungsmäßigen

$$P = \int_0^t \sum \sum \varepsilon \varepsilon' \frac{r r'}{c c'} \frac{d d' \left(\frac{1}{r} \right)}{d t d t} d \tau$$

überein, wenn man $\alpha \alpha = \frac{1}{2} c c$ annimmt.

Nach der Bestimmung von Weber und Kohlrausch ist

$$c = 439450 \cdot 10^6 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}$$

woraus sich α zu 41949 geographischen Meilen in der Secunde ergibt während für die Lichtgeschwindigkeit von Busch aus Bradley's Aberrationsbeobachtungen 41994 Meilen, und von Fizeau durch directe Messung 41882 Meilen gefunden worden sind.

V. *Ueber die Identität der Schwingungen des Lichts mit den elektrischen Strömen;*
von L. Lorenz.

(Aus dem »Oversigt over det K. Danske Vidensk. Selsk. Forhandl.« 1867. No. 1, vom Hrn. Verfasser übersandt.)

Bekanntlich ist es der Wissenschaft unseres Jahrhunderts gelungen, so viele Beziehungen zwischen den verschiedenen Kräften, zwischen Elektrizität und Magnetismus, zwischen Wärme, Licht, molecularen und chemischen Kräften, nachzuweisen, daß man mit einer gewissen Nothwendigkeit dahin geführt wird, sie alle als *Aeusserungen einer und derselben Kraft* zu betrachten, die nach den Umständen unter verschiedenen Formen auftritt. Allein während dieses der leitende Gedanke bei den größten Forschern unserer Zeit gewesen, ist es doch bei weitem nicht gelungen, denselben in der Theorie durchzuführen, und wenn auch durch Versuche die Beziehungen zwischen den verschiedenen Kräften dargethan worden sind, so hat man sie doch nur an ganz einzelnen Punkten erklären können. So hat Ampère die Verwandtschaft zwischen Elektrizität und Magnetismus theoretisch erklärt, obwohl ohne Beweis für die Möglichkeit der von ihm angenommenen molecularen, durch eigene Kraft