ANALYSE DE L'ÊTRE MATHÉMATIQUE

L'être mathématique est distinct de son fondement.

Il nous faut donc maintenant préciser la situation ontologique de l'être mathématique. Nous avons montré qu'il s'établit de lui-même en relation nécessaire avec le réel; et c'est l'analyse de cette relation qui seule pourra nous éclairer.

Il est fort important de marquer d'abord qu'il s'agit bien d'une relation, ou en d'autres termes que la réalité mathématique se distingue formellement du fondement qu'elle requiert, c'est-à-dire ne conserve pas la portée ontologique des faits auxquels elle est liée. Encore que ceci soit assez évident, nous ne pensons pas inutile d'insister un peu eu égard à certains excès du réalisme. Rappelons tout d'abord quelques cas où semblable supposition entraînerait absurdité pure et simple; les vicissitudes du zéro sont à ce titre fort instructives. Il n'a été admis qu'assez tard dans la série des nombres, et les objections d'Aristote ne laissent d'être assez divertissantes; elles se ramènent en substance à ceci : un être peut surpasser un autre être, mais on ne peut pas dire qu'un être surpasse le néant. Le zéro qui exprimerait le néant est donc à rejeter de l'ensemble des nombres. Rien de plus juste, mais précisément le zéro mathématique n'est pas le néant, pas plus que le un ou le deux mathématiques ne sont les multitudes qui leur donnent naissance. Ces multitudes ne se muent en nombre mathématique qu'après une série d'opérations assez complexes que nous avons essayé d'indiquer. Et si le zéro se distingue des autres nombres par des propriétés particulières, il est un nombre comme les autres au moins pour avoir des propriétés. Celles-ci se présentent assez naturellement comme les images de celles que nous prêtons au néant; mais le néant en rigueur n'a aucune propriété.

Il est des cas plus nuancés : certains êtres mathématiques déjà constitués peuvent recevoir un accroissement d'objectivité indépendamment de celle qu'ils possèdent, de par la relation globale que nous avons établie. La théorie des nombres complexes peut se développer en un algorithme abstrait qui a sa réalité mathématique parfaitement authentique; l'interprétation vectorielle d'ailleurs si importante ne change rien à cet être premier; elle est un nouveau lien et d'une autre nature au concret; elle peut jouer le rôle d'un nouveau fondement, mais le nombre complexe s'en distingue formellement et n'en tire pas l'essentiel de sa réalité. L'identification serait purement arbitraire qui impliquerait du métaphysique au mathématique une rigueur de concomittance qu'on ne vérifie pas. Le nombre transfini montre d'une façon plus nette encore que les deux ordres demeurent et doivent demeurer distincts. Russell fait dépendre l'existence du nombre transfini de celle de multitude actuellement infinie; cette relation de dépendance pour relative qu'elle soit est fort exagérée. Car le nombre transfini trouve dans la réalité un fondement suffisant par l'intermédiaire des principes qui lui sont communs avec tout être mathématique, et n'y a aucune raison de rechercher pour lui un répondant réel qu'on n'exige pas dans les autres cas; on ne peut que compromettre son existence déjà précaire en la faisant dépendre de constatations invérifiables.

A un autre point de vue les transfinis offrent un cas assez typique d'une distinction qui prolonge celle que nous indiquons et pénètre plus intimement l'être mathématique. Ils sont conçus en fonction d'une réalité antécédente dont ils se distinguent; c'est ainsi que le nombre produit de deux autres ne se définit pas directement au moyen de ces nombres, mais comme le nombre de la multitude produit. Il y a là au moins un signe de ce fait que les êtres mathématiques sont voués par nature à être séparés ou mieux distingués de cela même à quoi ils se rattachent. Et c'est dans cette opposition que se trouvent précisément le fondement de leur tendance vers l'objectivité; c'est par elle qu'ils disent autre chose que ce qu'ils sont. Cette distinction s'impose avec une telle nécessité que c'est sur elle que repose en définitive les interpolations qui sont à la base des constructions transfinies. Interpolations qualitatives d'abord, prenons un exemple : si l'on considère l'ensemble de type ω : 1, 2..., n, ..., la réalité objective qui se trouve impliquée sous cet ensemble est une suite de collections d'objets. Mais on peut encore arriver à la notion du type ω en considérant l'ensemble des nombres inférieurs à ω; la réalité dont on part est alors constituée par les nombres eux-mêmes et une sorte d'abstraction joue pour ne pas considérer leur qualité de nombre, mais cette seule formalité par où ils deviennent éléments d'un ordre, en sorte que l'ordre lui-même, le type ω demeure comme dans le premier cas inchangé. Ce qui change d'un point de vue à l'autre, c'est la matière plus ou moins ténue de la réalité objective, et corrélativement la nature des démarches qui font passer de cette réalité à l'ordre dont elle est le support. En d'autres termes les nombres qui sont déjà des abstraits peuvent jouer le rôle d'objet en regard d'une réalité nouvelle évidemment plus abstraite. Interpolation quantitative aussi : car cette distinction d'une actualité objective d'avec l'actualité mathématique permet de répéter une même opération sur l'ensemble infini chaque fois qu'on le considère, non plus dans sa composition intrinsèque, mais comme un tout et comme de l'extérieur. Cette itération échelonnée est l'un des éléments de la loi de formation des cardinaux. Et si, appliqué au transfini, ce procédé souffre discussion, il fait ses preuves en d'autres domaines, il marque les étapes d'une genèse qui du réel concret au réel mathématique interpose une élaboration conceptuelle toujours plus affinée. Nous reviendrons sur le critère de sa légitimité; un autre exemple nous montrera du moins qu'il possède un minimum de validité. Les nombres complexes se sont présentés sous forme de nombres imaginaires dans la généralisation de la résolution des équations; leurs propriétés opératoires pouvaient alors sembler liées aux conditions que leur impose le rôle qu'ils doivent jouer en cette théorie particulière. Une abstraction simple, prenant comme point de départ cette symbolique d'ailleurs déjà abstraite conduit à des définitions à priori. C'est-à-dire qu'un même être mathématique est susceptible de définitions qui sont de types logiques différents, et pourrait-on dire superposés : les unes plus descriptives, qui le mettent en relation nécessaire avec d'autres êtres; les autres plus essentielles qui le saisissent en lui-même. Et si l'on commet une erreur assez manifeste en identifiant un être avec ses propriétés, on commet une erreur grave en confondant des types plus généraux qui ne sont pas moins essentiellement distincts.

Les analyses précédentes décèlent d'ailleurs des divergences plus profondes concernant l'unité et la diversité réalisées aux degrés échelonnés que parcourt une abstraction progressive : Rappelons brièvement que la multitude transcendantale, affectée d'un ordre ontologiquement déterminé et par conséquent unique, devient, comme support du nombre, une multiplicité homogène; que le nombre n'est pratiquement obtenu qu'au moyen d'un ordre requis à sa représentation. L'ordre, unité dans la diversité, subit donc dans le dynamisme de l'abstraction une sorte d'éclipse; il se retrouve au terme non pas comme une reproduction transposée, mais comme un reflet et un mode de l'ordre transcendantal; il peut n'être que la condition d'appréhension de l'être mathématique et pourrait être autre sans que rien soit changé. Cette simple circonstance suffit à montrer combien serait illégitime l'identification de ces ordres divers qui s'articulent cependant les uns aux autres. Il y a donc des principes des êtres mathématiques à ces êtres une potentialité qu'on ne saurait supprimer sans compromettre ou bien la valeur ontologique de ces principes ou bien la véritable nature de l'être mathématique. Cette même potentialité se traduit encore d'une façon un peu différente. Plus conceptualisée que ses principes, la réalité mathématique ne possède plus ni leur détermination ontologique, ni leur amplitude d'interprétation; elle a, pour se constituer, estompé l'une et réduit l'autre. Elle inclut cependant encore certaines lois de construction qui ne sont autres que des possibilités de former des êtres nouveaux, mais une telle possibilité c'est déjà une actualité parfaitement adéquate à l'actualité ultérieure; celle-ci n'ajoutera rien si non une représentation et nous verrons que la réalité mathématique n'est pas sa représentation. Quand à la pure possibilité qui n'est pas même formulée, elle n'est rien, et doit, à notre sens, être tenue pour mathématiquement inexistante.

Ces possibilités si différenciées constituent comme le répondant objectif des abstractions hétérogènes qui les actualisent; la notion de potentialité pourrait les recouvrir toutes, mais plus encore elle récapitule des écarts successifs que leur accumulation rend plus sensibles; c'est dire qu'on ne trouve pas en mathématique l'équivalent de la véritable notion de puissance. La rigueur et la précision qui caractérisent cette discipline ne peuvent rien laisser subsiste de la forme conceptuelle nécessairement indéterminée qui accompagne la puissance réelle. On doit se défier ici de l'équivoque. L'ensemble des procédés qui élaborent l'être mathématique lui communiquent des propriétés nouvelles et ils ne peuvent ni se substituer aux fondements premiers, ni autoriser qu'on supprime arbitrairement l'écart qu'ils créent et qui est l'une des conditions du progrès de la science. On pourrait rappeler ici toutes les spéculations grecques sur le nombre, et le réalisme un peu naïf qui les exposait à de faciles critiques. Sans aller jusqu'à des excès auxquels portaient naturellement des préoccupations plus métaphysiques que celles de notre siècle, toute tentative de réduction demeure bien dans le sens du nombre substance et paraît être pour le moins une faute de méthode. Aristote qu'on ne suspectera pas de s'opposer au réalisme conservait plus de mesure par la distinction restée classique du nombre nombré et du nombre nombrant. Le nombre n'est formellement mathématique qu'en tant que nombrant. C'est seulement sous cet aspect qu'il possède à la fois la détermination imputable à sa simplicité et l'indétermination qui lui permet de demeurer lui-même en quelque multitude nombrée qu'on le retrouve. Si on nous permet une comparaison, le nombre mathématique est du type formel et non du type transcendantal; il ne tient pas toute sa réalité de l'esprit, et c'est ce point qui nous paraissait faire le plus difficulté, mais il est d'ailleurs trop évident qu'il n'est pas non plus une propriété objective que les choses posséderaient sans être à l'état pensé. Nous sommes donc assurés à priori de ne bien comprendre le nombre et toute la réalité mathématique qu'en la reliant à autre chose, et à autre chose dont elle se distingue : c'est ce double point de vue qui doit commander toute la recherche ultérieure, nous adopterons nécessairement tantôt l'un, tantôt l'autre, mais nous sommes assez prévenus que nous nous écarterions de la vérité en accordant à l'un ou à l'autre une valeur exclusive qu'il n'a pas. Nous tenterons d'abord de caractériser ontologiquement la réalité mathématique en marquant ses ressemblances et ses différences avec des êtres de même ordre; puis nous reviendrons sur la relation de l'être mathématique avec ses fondements, puisque c'est par leur intermédiaire qu'il s'insère dans une synthèse organique, et qu'il reçoit sa valeur intrinsèque de réalité.

La relation de l'être mathématique à son fondement comparée à des relations analogues.

Les analogies sont évidentes entre l'être mathématique et l'être de raison au sens technique de ce mot. Ni l'un ni l'autre ne sont construction pure, nous le savons déjà. Marquons plus positivement par deux exemples que les êtres mathématiques jouissent, comme les êtres de raison, d'une unité objective qui loin d'être une création de l'esprit mesure et contraint son activité avec une singulière nécessité. Qu'on envisage la notion de fonction : quand dira-t-on qu'une loi de correspondance demeure la même, quand dira-t-on qu'elle change ? D'une part elle embrasse une infinité de termes distincts et on ne peut avoir recours à l'un d'entre eux pour caractériser une permanence qui doit jouer d'un terme à l'autre; d'autre part la même série de correspondances peut être représentée de façons fort diverses, en sorte qu'il est impossible de prendre l'expression d'une telle loi comme un critère nécessaire de son identité. Riemann a supplanté Cauchy, mais la querelle demeure ouverte dans le champ plus étendu des fonctions de variables complexes. M. Borel a fait de précieuses remarques, mais qui ne sont qu'un début et qui ne résolvent pas encore la véritable difficulté : trouver des conditions qui ne soient ni trop restrictives, ni trop larges et qui saisissent sous un ensemble de formulations différentes une unité réelle.

Les difficultés qui concernent l'axiome du choix ne sont pas d'autre nature : quel sera ici le principe de permanence, l'unité qui doit s'imposer comme la propriété essentielle de tout être réel ? C'est précisément parce que rien ne le fait pressentir que l'axiome du choix est si discuté. Nous dirons plus loin pourquoi il ne nous paraît pas acceptable si on ne précise rien. Il y faudrait voir comme une inépuisable possibilité de définition, mais s'il y a des définitions qui mettent en valeur des propriétés nouvelles et qui s'insèrent dans le développement de la science, il y a aussi des définitions artificielles qui ne subsistent pas. En fait il est d'ailleurs difficile de distinguer immédiatement les unes des autres; et si le seul développement de la science y suffit, il reste que leur qualité opposée tient plus profondément à l'unité et à l'être qu'elles possèdent ou ne possèdent pas et qui seul pourra s'imposer à l'esprit. C'est cela et cela seulement qui fait qu'elles se révèlent ultérieurement fécondes ou insuffisantes ou même contradictoires. Une définition telle que celle que propose M. Sierpinski : « le nombre est un produit libre de l'esprit humain indépendant des notions d'espace et de temps », n'est pas acceptable sans interprétation. La part créatrice de l'esprit déjà circonscrite comme nous l'a révélé la structure de l'être mathématique se heurte encore à une nécessité, et les attitudes psychologiques qui correspondent à cette double phase de la pensée mathématique complète sont fort différentes. Il y a là des vérifications d'un autre ordre que nous renvoyons à une étude ultérieure. -

Notre comparaison demeurerait incomplète si nous ne rappelions ici qu'il n'y a pas de l'être réel à l'être mathématique l'étroite correspondance qui caractérise l'être de raison. La nécessité d'un fondement réel atteint bien chaque être mathématique, mais elle l'atteint globalement, par l'intermédiaire de ses principes constitutifs. Cette sorte de nécessité demeure la même quel que soit le rôle plus ou moins actif de l'esprit : c'est une nécessité à priori qui touche tous les cas singuliers parce qu'elle informe par le dedans le domaine qui leur est commun. D'autres liens peuvent s'ajouter, s'ajoutent en fait, et ils ont pu jouer un rôle prépondérant dans une genèse psychologique, mais ce lien premier peut aussi demeurer seul; nous ne répétons pas ce que nous avons dit du zéro et du transfini en général. Quelques remarques sur le cardinal Θ de l'ensemble de tous les ensembles. Il est bien clair qu'on ne peut le rattacher qu'à une multitude de raison; il n'y a aucun sens à rechercher une multitude réelle qui y correspondrait. Mais cela même est selon nous illusoire, car une telle multitude est une création de l'esprit, au même titre que le cardinal Θ; à tout le moins faudrait-il donner une loi permettant de la faire dériver d'une multitude réellement appréhendée, et qui jouerait vis à vis de Θ le rôle qu'elle doit jouer. Les définitions cantoriennes des opérations sur les cardinaux ne posent pas cette difficulté et on ne la résout nullement en la transcrivant en termes de multitude. Le lien avec la réalité demeure dans ce cas le lien commun et la discussion de l'existence du nombre Θ doit demeurer de type logico-mathématique. Or la définition de Θ donne prise de toute évidence aux critiques bien connues qu'on peut adresser à toutes les définitions appelées par Poincaré non prédicatives. Remarquons d'ailleurs que la désignation « ensemble de tous les ensembles » est fort impropre. Le mot ensemble y est employé nécessairement en deux sens différents, à moins qu'il n'y ait là simplement une contradiction. On montre bien comme nous l'avons déjà rappelé qu'il n'y a pas d'entier plus grand que tous les autres, ni de fonction croissant plus rapidement que toutes les fonctions d'une suite donnée. Et on conclut : si l'ensemble des nombres existe on ne peut le représenter par un nombre de même espèce; on aura un nombre transfini. Si l'ensemble des suites croissantes existe, on aura un transfini de seconde classe. Mais on ne peut évidemment dire « nombre de tous les nombres » en attribuant deux fois au mot nombre la même signification. Dans ce cas on a l'avantage de posséder la notion générique d'ensemble, et on dit « ensemble des nombres »; on obtient une définition qui est au moins logiquement correcte. Nous ne voyons pas de terme générique contenant « ensemble » et en fait pour que la désignation « ensemble de tous les ensembles » fût correcte c'est bien ce qu'il faudrait. En bref, dans ce dernier cas, non seulement on ne saisit pas la réalité sous-jacente, mais on ne voit pas même de quoi on parle; nous n'avons aucun point de départ qui nous permette d'inférer ce que serait cette réalité générique qui ne peut être un ensemble. Un être de raison qui serait dans ce cas ne serait rien. Et si on peut laisser un point d'interrogation en faveur de l'existence du nombre Θ, c'est justement parce que les lois d'élaboration de l'être mathématique et de l'être de raison sont distinctes.

Rappelons encore dans le même ordre d'idées que l'être de raison ne s'accommode pas de ces abstractions superposées qui sont nécessairement impliquées par la genèse de l'être mathématique, et qui demeurent par conséquent en une mesure compatibles avec lui : qu'on se souvienne du principe de formation des cardinaux transfinis. Notons enfin qu'en général l'être mathématique est plus construit que l'être de raison. Ils ne le sont entièrement ni l'un ni l'autre, par quoi ils se rapprochent; mais s'ils se distinguent objectivement en leur état constitué, leur relation au réel n'étant pas de même espèce, ils se distinguent encore dans leur élaboration; fidèles à notre point de vue, nous essayerons de saisir cette nuance sous la lumière de l'objet plutôt que par son revers psychologique, de caractériser la contribution plutôt que l'attitude de l'esprit dans l'un et l'autre cas. Si la nécessité d'un fondement réel atteint tous les êtres mathématiques, mais ne les atteint que globalement; et si à l'inverse chaque être trouve de la sorte un fondement réel suffisant, c'est qu'il y a dans nombre de cas une réimposition à l'être mathématique considéré des notions fondements acquises une fois pour toutes et acquises comme réelles; conséquence pour ainsi dire réciproque de ce que nous notions de la disjonction possible entre l'être mathématique et son correspondant réel. Pareille réimposition au contraire n'est pas valide en ce qui concerne l'être de raison dont les échantillons reproduisent beaucoup plus immédiatement chaque groupe concret, dont la fonction propre d'intermédiaire doit faire abstraction au maximum de toute accommodation conceptuelle, à plus forte raison de fallacieuse superposition d'images. Il conviendrait d'ailleurs d'examiner si la réimposition intramathématique ne relève pas elle aussi de l'imagination; nous aurons à y revenir un peu plus loin. Quant à l'origine psychologique de cette réimposition, nous nous contentons ici de la rattacher à cette tendance de l'esprit vers l'unité que le comportement de la science impose comme un fait. L'unification s'exerce ici à un autre plan; il ne s'agit plus de construire une synthèse plus organisée et plus explicative, mais de lui assurer du point de vue de l'être l'homogénéité qu'elle possédait au seul plan mathématique, de garantir ses prolongements les plus techniques de l'envahissement toujours redoutable de la pure symbolique, d'accrocher à une structure réelle ses équilibres logiquement satisfaisants.

Nous concluons donc d'une part que l'être mathématique se tient formellement du côté de l'être de raison, c'est-à-dire que le fondement réel qu'il requiert et la nécessité objective qui est sa loi le rapprochent beaucoup plus de la notion d'être de raison telle que la présente une logique réaliste, que de pures constructions dialectiques où la possibilité s'identifie avec la non-contradiction; que d'autre part des divergences demeurent : le réel mathématique apparaît par certains côtés comme un ensemble de signes indéterminés et mobiles en regard de ce qu'ils signifient, encore qu'en eux mêmes, ils soient fort déterminés et portent inscrite une quasi nécessité de signifier. On pourrait le considérer comme un être intermédiaire qui n'est ni l'être de raison, ni la pure possibilité logique, qui emprunte à l'un et à l'autre, mais qui ajoute encore des caractères irréductibles, lesquels empêchent de le considérer comme une espèce de l'un ou de l'autre. Essayons de voir maintenant le comment de ce rapprochement en comparant les structures de ces êtres divers, d'examiner, en d'autres termes, l'être mathématique comme être de raison ou comme construction logique, de l'examiner enfin comme mathématique.

La nature de l'être mathématique précisée par comparaison aux entités logiques.

Nous passons brièvement sur les deux premiers points dont nous avons déjà indiqué les éléments. Rappelons tout d'abord que la composition n'est pas la même en ces différents cas. La composition logique est bien plutôt une juxtaposition, juxtaposition ordonnée d'ailleurs, mais dont tous les éléments reçoivent, chacun pour soi, un caractère de détermination qui les empêche de se fondre. Ils ne conservent pas la structure de l'être. Ils l'imitent imparfaitement par une unité artificielle et reconstruite : unité d'un ordre qui moins exact que rigoureux suppose des termes distincts. Que l'on songe par exemple à la fragmentation indéfinie d'un genre au plan purement logique, expression la plus adéquate du processus intellectuel le plus sûr; aucune nécessité que l'esprit ne puisse réduire, puisqu'il domine toujours la division qu'il introduit, mais aucun ordre vraiment privilégié qui impose la nécessité de certaines affinités. L'être purement logique présente, il est vrai, une autre sorte de composition, qui ne fait que transcrire les résultats de l'analyse métaphysique. L'hylémorphisme, par exemple, pénètre jusqu'à l'intérieur du genre. Mais même de ce point de vue une séparation demeure entre les éléments. Les modes réels de leur détermination respective ne se prolongent pas de la même façon au plan logique; la matière indéterminée reçoit sous l'emprise du genre une détermination de cette indétermination elle-même, elle échappe en un sens au plus et au moins et devient à son tour comme une forme logique. L'esprit marque l'être de son empreinte et résout une composition intime en déploiements successifs. Que ces emboîtements ne soient pas tous de la même sorte, et que matière et forme d'un genre ne composent pas comme genre et différence, on pourrait encore chercher à le préciser, mais il nous suffit de retenir que par leur commun caractère de morcellement, propre aux êtres irréels, les deux groupes se tiennent dans la même ligne. Toute autre est la composition intrinsèque de l'être mathématique : nous l'appellerions volontiers diversité. Nous avons déjà indiqué qu'on ne pouvait pas dans un être mathématique séparer ce qui serait ordre et ce qui serait nombre pur; le faire revient à prendre l'être mathématique lui-même comme matière d'une classification qui ne l'épuise pas. C'est un procédé de description que nous avons employé tout en montrant qu'il est voué à l'échec si on y veut voir une analyse exhaustive. Et l'application des catégories à l'être mathématique ne fait que manifester la profonde analogie de la structure de ce dernier et de celle de l'être réel. Il y a dans l'un et l'autre cas une diversité qui ne se laisse enserrer par aucune coupure artificielle. Pour autant qu'on le divise, l'être sera toujours composé, et l'être mathématique mérite bien à ce point de vue le nom d'être; les éléments qu'on veut abstraire laissent leur empreinte en ceux que l'on retient et y renaissent analogiquement. Si donc les êtres logiques ont avec l'être mathématique ce trait commun de dériver d'une activité d'esprit, d'une abstraction plus ou moins créatrice, leur nature interdit de pousser trop loin ce parallèle, et la divergence que nous venons de relever indiquerait au contraire comment il convient de caractériser ces modes de construction différents.

A l'inverse on ne doit pas non plus identifier la composition de l'être mathématique et celle de l'être réel; sans prendre deux cas aussi distincts dont la comparaison serait peu instructive, considérons un nouvel intermédiaire et marquons que la composition de l'être mathématique n'est pas exactement la composition de l'espèce, celle-ci étant entendue non plus au sens purement logique que nous attribuions au genre, mais avec toute la réalité des caractères réels qu'elle emprunte aux êtres. A considérer son origine il pourrait paraître que la composition propre à l'espèce se rapprochât davantage du type successif que ne fait la composition de l'être mathématique.

L'espèce en effet ne peut retenir de compositions que celle des réalités qui la fondent. Elle n'est composée qu'au terme d'une abstraction. N'y a-t-il pas là un passage dont la composition nécessairement immatérielle de l'être mathématique ne peut offrir l'analogue ? Observons en premier lieu que ce passage n'est pas l'effet d'un mouvement de l'esprit laissé à lui-même, mais qu'il est objectivement commandé par l'être; il ne s'apparente à la pure succession conceptuelle des genres logiques que parce que l'espèce offre à l'esprit, à la faveur d'une diversité plus accusée, un champ de division plus étendu. De plus les éléments qu'intègre cette composition spécifique s'appellent d'une façon plus nécessaire encore que ne font le nombre cardinal et la limite par exemple. Les êtres mathématiques se prêtent comme nous l'avons vu à des abstractions successives qui les font naître les uns des autres et qui distendent leur structure sans la briser. Leurs éléments composants ont une subsistance propre. Si la discontinuité de l'espèce, métaphysiquement entendue, n'autorise rien de semblable, c'est précisément que les différentes notes essentielles sont rigoureusement inséparables et qu'elles donnent lieu à une composition moins successive et plus diverse que la composition mathèmatique. Celle-ci est donc une étape entre la composition purement logique et la composition spécifique qui reflète celle de l'être; elle est le signe propre de la réalité intermédiaire qui caractérise l'être mathématique. Notons encore qu'on ne peut pas parler en mathématique de composition réelle, si réel veut dire existant. Plus intime à l'essence la composition mathématique conserve quelque chose de la potentialité de celle-ci et c'est précisément ce qui l'a fait moins achevée dans l'être et en une façon moins nécessaire que la composition spécifique.

Corrélativement, nous pourrions examiner l'unité qui convient à ces manifestations hiérarchisées de l'être : unité conceptuelle qui résout la juxtaposition en un seul tout logique, unité réelle de l'espèce et unité intermédiaire de l'être mathématique, en laquelle prend source une diversité d'éléments inséparables. Nous le ferons tout en marquant un caractère qui appartient en propre à l'être mathématique et qui est en lui comme un reflet du monde des formes pures. L'unité de la composition logique et l'unité de la composition spécifique ont ce trait négatif commun de ne jamais atteindre la singularité si non en tant que concepts. La première demeure une unité plus ou moins construite, la seconde ne rencontre jamais cette unité de l'individu qui est comme une limite en direction de laquelle elle supporte toujours l'insertion de termes nouveaux. L'unité de l'être mathématique est tout à la fois singulière et universelle. Elle est bien l'unité d'un être, mais elle est au même titre et sans aucune distinction possible l'unité de tout être formellement identique à celui-là. L'être mathématique ne présente plus la marge d'indétermination qui est l'inévitable rançon de la matière et il ne la présenterait pas, même si on le soumettait à l'analyse logique : sa composition et son unité sont trop simples. Ce point n'avait pas échappé aux « mystiques du nombre », ils ont eu seulement le tort de verser dans des interprétations trop réalistes; mais il reste bien vrai que toute réalité mathématique possède à son plan tous les caractères de l'universel et du concret : propriétés dont elle se revêt évidemment pour notre esprit et dont il conviendra de distinguer à nouveau la double conséquence touchant d'une part l'adéquate rigueur d'appréhension intellectuelle que permet l'être mathémamathique, d'autre part son degré de réalité.

Cette analyse comparée de l'unité et de la diversité nous ramène en effet naturellement à l'être. Elle n'a fait que le saisir par le biais où il commande davantage à la pure intellectualité. La juxtaposition — et l'unité conceptuelle qui lui fait face — ne sont de soi le signe d'aucune valeur réelle; elles peuvent n'être qu'une pure construction, une détermination dont certains objets fournissent l'occasion, un simple procédé; elles ne peuvent franchir le seuil de l'être qu'en se greffant sur une complexité dont elles ne sont respectivement que l'image ou le signe extrinsèque. Mais il y a plus : la juxtaposition s'explique suffisamment sans qu'il soit besoin de sortir de son domaine propre; elle est bien multiplicité, mais multiplicité homogène; elle est bien réductible à l'unité mais à une unité qui ne la dépasse pas, qui ne dit rien de plus qu'elle, et qui se trouve épuisée par elle. Des unités que commanderaient des juxtapositions diverses se trouveraient elles-mêmes comme juxtaposées sans autre progrès réel qu'une complication croissante; ces sortes de compositions peuvent donc bien s'insérer dans un complexe logique plus vaste, mais elles ne sortent pas de ce même champ; elles ne caractérisent pas l'être réel et ne disent pas non plus nécessairement référence à aucun être réel. La composition du type diversité au contraire appelle une autre unité, terme simple et indivisible, ou composition entièrement évoluée qui ne peut plus rien recevoir. Et tout de même que cette unité réalisée n'appartient qu'à l'être, les principes de cette unité sont, partout où on les rencontre distingués, une tendance nécessaire à l'être. Nous avons déjà indiqué pourquoi au moins dans le cas mathématique. Nous voyons mieux maintenant le comment. C'est la nature de chaque composition qui commande cette relation. Les compositions dont la formation s'explique le plus aisément, les plus successives sont normalement celles dont la relation à l'être est le moins nécessaire; à ce point de vue moins subjectif et plus métaphysique, on peut dire que les compositions les plus multiples, et qui sont comme indéfiniment multiples se séparent de l'être et que leurs relations même à l'être s'exténue, car elles sont trop pauvres pour la soutenir. Les compositions diverses sont irréductibles, mais déjà unes par la nécessaire corrélation de leurs termes; et elles ne peuvent pas n'avoir pas relation à l'être puisque déjà elles sont de l'être.

Concluons donc que les entités purement logiques ni ne sont de l'être, ni ne font appel sur l'être : ordres arbitraires et toujours inachevés qui tirent leur valeur de la réimposition qu'on en peut faire aux objets réels, quel que soit d'ailleurs l'étiage de cette réalité : cette adéquation n'est pas négligeable, mais elle demeure en elle-même indéterminée. Elle se trouve également satisfaite soit par divers ordres possibles du même ensemble, soit par diverses réalisations du même ordre conceptuel. En sorte que ces entités sont de pures possibilités dont il est loisible de changer ce qu'on pourrait appeler la supposition ontologique en les mettant ou non en regard de l'être. Ce rapprochement demeure facultatif et n'autorise nullement à voir en ses termes éventuels un point de départ ou un aboutissant réels. Il y a là des fonctions surajoutées qui ne modifient intrinsèquement ni ne relient avec continuité réelle des entités qui demeurent séparées par nature, comme sont séparés leurs types respectifs d'unité ou de composition. Les entités de raison, par tout ce qu'elles sont et notamment par la diversité indivise qui caractérise leur composition disent, dans une vue sagement réaliste, être anticipé. Elles font appel sur l'être, et demeurent contradictoires sans lui : elles s'y préadaptent, non plus avec l'indétermination des genres, mais avec une souple rigueur, un accommodement et une nécessité qui sont le signe de leur réalité. Elles sont potentialité, et non plus possibilité, diversité de termes corrélatifs et non plus multiplicité ordonnée; et partant déterminées, aussi bien en elles-mêmes que dans leurs relations à l'être. Les entités mathématiques enfin dont le type de composition est mixte mais où prédomine la diversité sont comme l'être de raison relation au réel, nous n'avons pas à y revenir, mais c'est à préciser par différentiation cette relation plus ténue que nous nous attachons maintenant. Nous avons déjà marqué que d'une part, les déterminations intrinsèques de la composition mathématique et de la composition spécifique jalonnent un ordre croissant de nécessité, que d'autre part des deux séries de relations des essences mathématiques et des espèces aux êtres concrets, la première était plus lâche, la seconde assujettie à un parallélisme plus rigoureux. C'est cette même vue, — qui s'impose au mathématicien beaucoup plus qu'elle ne se démontre, — que nous reprenons en termes d'être.

En vertu même de leur inépuisable possibilité génératrice, les êtres mathématiques qui sont passifs en cette opération n'arrivent pas à se résoudre dans l'existence : et nous l'entendons même de cette résolution antécédente qui affecte d'un mode ultime, sensible à l'intelligence seule, les entités qui comme les essences métaphysiques disent ordre réel à l'existence. L'essence mathématique est, comme telle, toujours susceptible d'un devenir, ses principes constitutifs autorisent un certain jeu et ne se groupent sous des modes déterminés que pour rebondir en possibilités nouvelles; ils disent ordre à l'être parce qu'ils en dérivent, et non parce qu'ils en reproduisent fidèlement la structure, et c'est pourquoi ils laissent croire qu'ils possèdent tout au long d'un développement original une indépendance qu'il faut se garder d'hypostasier. Plus séparée et moins nécessitante au regard de l'être, tel est le premier trait qui distingue l'essence mathématique de l'essence métaphysique.

La seconde différence découle de la première en même temps qu'elle la précise. Car il est deux nécessités qui se rejoignent dans la seule essence qui est. Nécessité abstraite détournée de l'existence qui trouve dans les êtres mathématiques son type le plus pur, et qui retombe comme indifféremment sur telle ou telle classe d'existants, nécessité de l'acte qui s'impose, qui est logiquement dépendante de la première sans lui être aucunement réductible. Et tandis que le crédit ouvert sur l'être par les essences métaphysiques met en œuvre indivisiblement ce double mode de nécessité, les essences mathématiques même déterminément constituées, ne rencontrent l'existence que par accident, au moins en ce sens que cette rencontre, qui d'ailleurs ne peut manquer de se produire, est tout à fait accidentelle à leur nature. Cette sorte d'indifférence de l'essence mathématique à l'endroit de l'existence n'est d'ailleurs que la conséquence normale et le mode actualisé du jeu intime des principes de toute essence mathématique comme telle et de l'irrésolubilité renaissante qui en résulte. L'essence mathématique est donc en regard de l'être tout à la fois nécessitante et moins déterminée, en ce sens très précis où la détermination n'est qu'un mode de l'actualité conçue en fonction de l'unité. L'être mathématique est un peu comme une pure essence, mais qui au lieu de répondre à la totalité de l'être ferait seulement face à la quantité et à l'ordre sous leurs multiples aspects. Nous ne voulons pas dire qu'il y ait une réalité mathématique qui correspondrait globalement et indistinctement à toute quantité et à tout ordre; une telle conception saisirait cependant de façon abrégée et approximative la réalité qui concerne toute quantité et tout ordre, mais à condition expresse de l'étendre à tout le champ du possible. On peut donc ne voir dans ces fondements des êtres mathématiques que l'aboutissant d'une réalité logiquement antécédente, réalité qui se distingue progressivement de ces êtres, — comme au plan mathématique l'essence se distingue des essences —, réalité qui ne peut, nous y avons insisté, être entièrement coupée du réel, mais qui demeure si indéterminée vis-à-vis de ses supports qu'elle se présente en quelque façon à notre appréhension comme un terme objectif. Et on peut concevoir les êtres mathématiques comme des possibilités ouvertes sur l'être; ils s'insèrent normalement dans un dynamisme qui part de l'être et qui y fait retour; mais les points de contact peuvent se déplacer à l'intérieur de larges zones d'indétermination : le dynamisme métaphysique offre plus de sécurité, il élimine l'indétermination non pas en réduisant ces zones, mais en prenant appui sur tout l'être. Il remplace par la rigueur, dans une synthèse plus haute, ce que les conséquences d'une séparation prédicamentale contraignait de regarder comme imprécis, mais bien évidemment il ne répond pas au même objet. C'est au fond cette distinction que notre analyse rejoint, et qui d'un point de vue plus métaphysique sépare l'essence mathématique de l'essence spécifique. Ceci acquis, ayant en d'autres termes envisagé l'être mathématique faisant fonction d'être de raison, ne convient-il pas de préciser encore en le considérant comme mathématique dans sa fonction propre. Nous compléterons par là les comparaisons qui précèdent : l'être purement logique est indéterminé en ce sens qu'il est toujours susceptible d'achèvements nouveaux. Comment l'être mathématique se comporte-t-il de ce point de vue et l'indétermination qui le distingue, avons-nous vu, de l'être de raison, revêt-elle un nouvel aspect qui nous rapprocherait bien davantage de l'être purement logique. Il est clair que là encore la seule analyse de l'objet peut nous répondre.

Le critère propre de la réalité mathématique.

Rappelons que les êtres mathématiques ont en commun cette propriété de pouvoir être envisagés comme des symboles d'opération; elle leur appartient d'ailleurs en tant précisément qu'ils sont mathématiques et leur confère une homogénéité semblable à celle que possède toute symbolique. Ceci nous écarte de l'être de raison et nous rapproche de l'être purement logique. C'est donc sur ce point que doit porter maintenant notre comparaison, et nous abandonnons provisoirement les autres groupes de propriétés à tendance plus objective qui viennent de nous servir. Nous ne faisons d'ailleurs que suivre la marche indiquée par le développement de toute connaissance qui, partant de l'être, devient progressivement plus technique; la critique correspondante doit sans perdre contact avec son objet emprunter en chacune de ses phases les critères appropriés qui marqueront par conséquent une gradation ontologique semblable. Faut-il donc réduirela réalité des entités mathématiques, prises formellement comme mathématiques, à n'être que la pure possibilité, la non-contradiction, ou bien le développement symbolique ne livre-t-il qu'un aspect assez superficiel de la question. La réalité mathématique, n'est-elle qu'un développement logiquement impeccable de définitions correctes, ou bien possède-t-elle un autre caractère qui lui soit propre. Nous n'avons pas à revenir sur une première série d'interprétations de cette difficulté ni sur le type de solution correspondant : les êtres mathématiques tireraient leur réalité de leur continuité avec les notions de sens commun; ils seraient une adaptation plus maniable, une élaboration intelligible de ces mêmes notions; ou encore seraient réelles les entités mathématiques qui conduiraient à des résultats vérifiables. Les points ou les droites de Hilbert seraient réels, parce qu'abstraits d'approximations correspondantes offertes par le monde physique, soit encore parce que replacés dans le monde de l'expérience ils s'y montreraient féconds. Nous ne négligeons rien de cela, encore que nous l'ayons envisagé d'un point de vue un peu différent; mais nous recherchons quelque chose de plus précis : non pas un coefficient nouveau de cette réalité, mais une modalité plus exclusivement mathématique du même être.

On pourrait abandonner le critère utilitaire pour un critère subjectif et ne tenir pour réel mathématiquement que ce sur quoi les mathématiciens s'accordent. M. Borel se tient strictement à ce point de vue et nous croyons en effet qu'il ne faut pas s'en écarter dans les vérifications techniques mais ce n'est pas exactement ce qui nous occupe ici. D'ailleurs nous ne pensons pas qu'un exclusivisme aussi radical tienne compte de tout. La question demeure bien en suspens de savoir si la suite des nombres entiers renferme quelque chose de plus que ceci « après chaque nombre il y en a un autre ». M. Borel semble bien penser qu'il y a effectivement quelque chose de plus; mais il serait difficile d'en donner une définition précise et sur laquelle tout le monde s'accordât. N'y a-t-il pas là l'exemple d'une réalité mathématique reconnue par un « subjectiviste » et que le critère subjectif écarte indûment. Signalons en passant que le cas des nombres transfinis n'est pas très différent, la question est de savoir si on peut considérer leur suite comme s'actualisant, c'est-à-dire si elle est autre chose qu'une pure succession. La difficulté qu'il y a en ce cas encore à définir ce « quelque chose de plus, » ne démontre pas que ce quelque chose n'existe pas. Rappelons enfin que ce critère subjectif, appliqué en rigueur réduit l'être mathématique à sa partie purement construite; et c'est ce que nous croyons avoir montré impossible, du moins si on tente de dépasser la pure technique. Il y a il est vrai une autre forme du même critère qui paraît plus près de la vérité mais qui demeure par contre fort imprécise : certaines recherches expriment ou développent des intuitions, elles ont un dynamisme qu'il faut bien contenir et orienter pour préciser un résultat, mais que ce résultat n'épuise pas; d'autres sont comme une fin, le terme d'un effort qui a livré toute sa vitalité; d'autres enfin tournent sur elles-mêmes comme les mauvais syllogismes qui ne démontrent rien. On ne retiendrait que les premières comme vraiment mathématiques. Toute la difficulté est de distinguer de laquelle de ces trois catégories relève une théorie qui se construit. Là encore peut jouer une certaine intuition, mais tout porte à croire qu'elle ne sera pas identique pour tous, et que les exigences subjectivistes, même en ce qu'elles ont de légitime, ne trouveront pas ici satisfaction.

Ceci du moins nous met sur la voie d'un autre critère qu'on pourrait appeler pour le distinguer du premier : critère d'utilité spéculatif : l'être réel serait celui qui est capable de développement. C'est l'aspect le plus objectif de la valeur accordée à l'intuition au cours de la recherche; et il est nécessaire de retenir ces deux contours, l'un plus extérieur, l'autre plus intime de la réalité mathématique; leur comparaison elle-même ne conduit pas toujours à une certitude absolue. Mais une intuition qui paraît riche et commence de se montrer féconde correspond très probablement à du réel : c'est-à-dire que tout à la fois elle conservera son caractère dynamique et étendra le champ de son développement. Or il y a là un aspect nouveau du fait mathématique : cette présomption de réalité ne dérive pas au moins directement de la liaison au réel : elle est d'essence mathématique, elle est donnée, encore qu'imparfaitement, par des intuitions et des résultats formellement mathématiques; elle ne se confirme définitivement que par le développement de la science. Et si la discrimination des êtres réels est parfois délicate, il reste au moins qu'elle s'impose; indiquons en passant qu'il y aurait là un motif très suffisant de l'orientation des sciences vers un certain « faire » fût-il tout à fait immatériel, au détriment de la contemplation qui n'a en aucune façon à discuter son objet. Il convient cependant de souligner que dans le cas qui nous occupe, le tâtonnement qui accompagne cette discussion décèle une nécessité sous-jacente; il enserre la frontière plus déterminée mais difficilement saisissable du réel. L'être purement logique n'offre pas à la recherche cette frange d'indétermination parce qu'il ne possède pas la nécessité objective qui en est le support indispensable. Nous avons vu en effet que, se précisant d'une façon toujours homogène, il est par nature indéfini et objectivement indéterminé. Il faut donc, par une sorte de renversement, voir dans la nuance d'incertitude dont nos critères mathématiques ne peuvent se défaire, le signe le plus net de la nécessité interne qui distingue l'être mathématique de l'être purement logique.

L'être mathématique et sa représentation.

L'être mathématique que l'homogénéité de sa symbolique rapproche de l'être logique possède donc une détermination qui le distingue radicalement. Nous en retrouverons un signe en revenant sur un autre aspect de notre critère subjectif. L'accord que requièrent les « subjectivistes » porte au fond, non pas sur l'être lui-même, mais sur sa représentation. Et c'est bien parce qu'on ne peut identifier l'un et l'autre que nous avons dû élargir un peu et faire moins indûment restrictif cet accord matériellement entendu. Il est hors de conteste que la mathématique connote la représentation claire et ceci la distingue encore de l'être de raison, qui n'a pas de représentation parce qu'il est directement lié au réel; conclu à titre de potentialité il tient à l'être trop profondément pour avoir à lui réemprunter des images. Les représentations mathématiques sont, il est vrai, des symboles déjà fort abstraits, des images fort élaborées, mais il faut reconnaître qu'elles jouent un rôle essentiel. Si on préfère légitimement la démonstration directe à la démonstration dite par l'absurde, c'est sans doute parce que la première indique une raison nouvelle, un « medium propre », mais c'est bien aussi parce que la seconde ne fournit qu'une proposition d'existence sans donner aucune *description* de l'être correspondant. Il sera plus satisfaisant d'établir que N est rationnel en démontrant l'égalité $N = \frac{p}{q}$ qu'en montrant qu'il est impossible que N soit irrationnel, en admettant qu'un pareil détour soit irréductible à une démonstration directe. Encore dans ce cas avons-nous la représentation connue du nombre rationnel à laquelle nous nous raccrochons sans y prendre garde. Les cas où toute représentation fait défaut sont toujours suspects. Ce sont ces cas-là que le critère subjectif écarte résolument, à tort croyons-nous, non pas sans fondement et c'est l'un des aspects de la discussion sur le transfini. On peut bien justifier philosophiquement ce dernier, et lui assigner un répondant métaphysique, il n'a pas pour autant droit de cité en mathématiques. Nous voulons dire que si on lui reconnaît une existence mathématique réelle ce ne peut être seulement en vertu d'une théorie de la puissance et de l'acte : il n'y a pas coupure entre les deux domaines, nous avons vu comment, mais les vues métaphysiques ne sont pas susceptibles de transcriptions assez précises pour accréditer à elles seules les réalités mathématiques qui d'ailleurs en dépendent. Il faut à tout le moins cette détermination formellement mathématique qui n'est ni du type métaphysique ni tu type logique, et il convient normalement que cette détermination se laisse effectivement saisir dans une représentation. Appliquant notre distinction au cas transfini nous dirions que la multitude objective n'est pas encore mathématique et qu'on ne peut voir en sa potentialité réelle le fondement suffisant du nombre transfini; nous ajouterions que la multitude pensée coïncide sans doute avec le transfini, mais que celui-ci ne s'imposerait absolument que si cette multitude pensée se prolongeait en une multitude représentée. Il est nécessaire de franchir cette dernière étape si on veut être assuré de dépasser l'être de raison et d'aboutir à l'être mathématique authentique. Nous disons bien « si l'on veut être assuré » il s'agit moins d'une propriété essentielle de l'être mathématique que d'un signe à quoi on le reconnaît. Ce signe devient ici beaucoup plus nécessaire que dans le cas de l'être de raison par cela seul que l'être réel se tient dans une perspectiv plus lointaine et qu'il faut bien transposer la constante vérification que celui-ci permet. De l'absence de multitude transfinie représentée résulte le refus que certains opposent au transfini jusqu'à plus ample information. Les arguments philosophiques peuvent constituer une présomption favorable, mais l'évidence ne peut venir que du développement de la science, développement qui repose nécessairement sur des représentations.

Nous retrouvons ainsi une propriété de la seule abstraction qui soit capable de toucher l'être mathématique : elle est créatrice, non que les êtres mathématiques n'existent que par elle, nous leur avons reconnu et leur maintenons une potentialité objective, mais ils lui doivent du moins une propriété que leur être même n'implique pas essentiellement : ils sont représentés; et cette propriété paraît si normale que nous sommes tentés de conclure que les êtres n'existent pas dont la représentation nous fait défaut. Le finitisme n'est au fond en l'un de ses aspects que cette tendance érigée en principe et en principe ayant une portée objective. Nous ne raisonnons que sur l'effectivement énumérable que M. Borel oppose même au dénombrable; nous cherchons toujours à raisonner sur le fini, et le critère de Cauchy pour les suites infinies permet simplement de ne considérer qu'un nombre fini de leurs termes : les propriétés des fonctions holomorphes ou méromorphes sont singulièrement précisées par la donnée d'un nombre fini des coefficients de leur développement; le succès répété de ces interpolations conduit tout naturellement à conclure : rien dans l'infini qui ne soit dans le fini. Et plus avant : le fini est toute réalité mathématique. « Dieu fit le nombre entier, le reste est l'œuvre de l'homme », disait Kronecker. Ce dernier passage ne s'impose pas mathématiquement; mais le besoin de représentation l'explique parfaitement. Le grief que l'on peut faire à l'infini c'est que, sous quelque forme qu'il se présente, il n'est pas représentable; quelle utilité y aurait-il donc de le conserver s'il n'apporte par ailleurs aucune propriété nouvelle. Il faut reconnaître la force de cette position; elle exprime d'ailleurs à sa façon que nous ne raisonnons que sûr de l'actuel; et s'il arrive que nous pensions raisonner sur des êtres infinis, c'est que nous les avons actualisés de quelque manière; nous raisonnons sur une loi de formation ou bien sur un cas quelconque auquel tous les autres sont identiques, du point de vue choisi; les théorèmes sur l'intégration valent bien pour l'ensemble des fonctions mais c'est parce qu'ils valent pour *toute* fonction; il n'en résulte pas que l'ensemble de toutes les fonctions soit quelque chose d'actuel. Le point de vue finitiste pourrait d'ailleurs se réclamer de l'une des objections traditionnelles opposées à l'existence du transfini : une suite infinie ne peut avoir d'actualité parce que chaque terme nouveau apporte avec soi, non seulement une actualité, mais une potentialité nouvelle. Il serait donc contradictoire d'admettre qu'il n'y ait plus dans cette suite que de l'acte. Sous sa forme subjective, cette assertion veut dire : nous raisonnons sur l'actuel et l'ensemble infini possède nécessairement comme tel une potentialité qui nous échappe. Si nous nous rappelons que les ensembles infinis ne constituent pas de ce point de vue un cas singulier, et que l'être mathématique est en lui-même potentialité, nous comprenons bien le rôle de la représentation, intermédiaire actuel nécessaire entre l'esprit et la réalité, un peu comme les êtres concrets sont intermédiaires entre l'esprit et la forme pure qu'ils réalisent. Que l'absence de représentation claire soit si incommode, et entraîne de soi une incertitude irréductible; que d'autre part elle semble coexstensive à l'être mathématique parce qu'elle en embrasse les cas les plus réels, — et aux yeux de certains, les seuls réels —, il n'y a là qu'une vérification de notre procédé de connaissance. Mais il s'agit d'un procédé, et il serait aussi arbitraire de réduire l'être mathématique à sa représentation que de voir dans les catégories logiques une expression adéquate et complète de la réalité. La distinction est plus subtile dans le cas de l'être mathématique parce qu'il est déjà apparenté à l'être logique; nous y insisterons un peu.

Et d'abord, les cas de coïncidence ne permettent pas de conclure malgré leur fréquence plus grande; ils sont en effet susceptibles de deux interprétations opposées : si on admet que la réalité mathématique dépend essentiellement des symboles, toute symbolique nouvelle constituera un fait mathématique nouveau, même si elle ne fait qu'exprimer sous une autre forme un fait déjà connu. Si on requiert au contraire d'autres signes de cette réalité, il y aura tendance à rejeter toute symbolique dont on n'aura pu contrôler la portée; or il paraît aussi illégitime d'accorder à priori à toute symbolique une valeur absolue que de lui refuser toute signification mathématique. Il faudrait du moins rattacher ce nouveau critère à ceux que nous avons déjà examinés et qui, bien qu'incomplets, s'imposent en première approximation. Le cas de disjonction entre la représentation et l'être lui-même est donc plus éclairant, et il se rencontre : exemples élémentaires des représentations impropres dont le nom même indique qu'elles ne recouvrent toutes qu'un seul fait mathématique réel : correspondance ponctuelle qui, outre sa représentation propre, en possède une infinité d'autres qui n'ajoutent rien sinon une complication qu'on doit parfois éliminer; exemple déjà cité des fonctions analytiques et des expressions analytiques : on sait qu'une même fonction est susceptible de plusieurs représentations, et qu'inversement un même développement peut représenter des fonctions différentes; exemples enfin dans lesquels la réalité déborde la représentation qui ont été premièrement mis en lumière par les plus positifs des mathématiciens : défini et calculable, dénombrable et effectivement énumérable. Si l'on est conduit à distinguer défini et calculable, c'est bien que certains êtres sont réels qui échappent actuellement à toute représentation et c'est ce dernier point qui nous intéresse. La symbolique est faite pour soulager l'esprit qui n'appréhende que difficilement d'une manière continue des réalités aussi abstraites et dont l'essence est même de consister en abstractions croissantes. La représentation n'épuise pas l'objet, elle permet de raisonner sur lui; elle le rend en un sens plus concret et à portée directe de l'esprit. C'est ce qui fait sa valeur inaliénable. Les « empiristes » ont raison de réclamer au titre de condition de validité de la spéculation mathématique la démonstration de l'existence d'une loi. Car c'est uniquement par cette loi que nous pouvons nous rendre compte de l'existence des êtres eux-mêmes. Et c'est pour tenir beaucoup à l'objectivité de cette existence qu'on en exige un signe assuré, lui-même objectif et imposant par conséquent à l'esprit une certaine contrainte. L'empirisme ne se comdamne qu'en refusant de voir au delà de l'idée la réalité idéale, et l'idéalisme, enclin à négliger l'importance notionnelle de la représentation théorique, montre en certains cas la piètre estimation qu'il fait de la réalité de ce qu'il croit défendre. Mais il reste bien que la représentation n'a de valeur que si elle est la représentation de quelque chose qui la dépasse. Nous obtenons cette conclusion sous une forme purement négative, mais nous devions l'attendre : encore une fois, nous ne définissons avec certitude que par des représentations et la réalité, toujours émergente par nature, s'y dérobe. Nous avons du moins, dans la représentation claire, l'évidence d'un point de départ et d'un dépassement. Si la réalité mathématique dans son fond requiert un fondement réel, la symbolique ne se conçoit pas séparée d'un être mathématique qui la dépasse. Et de ce dépassement l'être logique au développement toujours homogène et indéterminé n'offre à aucun titre l'analogue : l'être mathématique conserve de sa tendance vers l'être une marque qui se retrouve en toutes et en chacune de ses propriétés. Mesuré par l'être, il devient mesure objective de l'esprit et c'est cette dernière mesure que la symbolique exprime adéquatement à chaque moment du développement de la science.

Récapitulons l'ensemble de cette analyse : l'être mathématique est en tant qu'être potentialité, non certes potentialité à la façon d'un genre qui se développe, mais potentialité pure, potentialité par essence, un peu semblable à celle de l'être de raison, qui est tendance à l'être; il n'est que cela mais il est un indicateur réel de l'être, et il en porte inscrite en soi analogiquement la structure. Puisant aux mêmes sources que l'être de raison, il prend néanmoins son chemineme propre, il se lie tour à tour aux différents types que présente celui-ci, mais sans jamais se confondre avec aucun. Plus abstrait en un sens que les notions métaphysiques, il se pose sur l'être plutôt qu'il ne le pénètre, il possède, en contre-partie de l'inachèvement et de l'indétermination qui lui valent sa réalité, une sorte d'actualité artificielle qui épuise à un tout autre plan, moins riche et plus précis la tendance de tout être à se réaliser. Il se branche sur les types spécifiques un peu comme la quantité sur l'être, puis il assume, en la tirant à soi l'actualité nouvelle d'une représentation; il touche là un maximum d'homogénéité qui le rapprocherait singulièrement des êtres purement logiques, mais il s'en distingue aussitôt en dépassant cette représentation qu'il mesure comme l'être mesure l'esprit. La diversité de ces contacts immatériels autorise à voir dans l'être mathématique essentiellement un intermédiaire. Intermédiaire par l'étendue de sa structure qui se prolonge en un symbolisme dont il est difficile de dire qu'il soit subjectif ou objectif parce qu'il est l'un et l'autre; intermédiaire par la nature de la composition propre à son essence qui n'est ni pure liaison qualitative ni pure succession ordonnée, mais le plus souvent l'un dans l'autre; intermédiaire par sa potentialité qui, avec une quasi-nécessité, réfère l'esprit à l'être réel; intermédiaire enfin par la multiple qualification de sa situation ontologique : singulier sans avoir la réalité du singulier parce qu'il déborde la singularité de sa représentation, universel d'un troisième type qui n'est essentiellement ni déterminé ni indéterminé, mais en puissance nécessaire à la détermination; matériel et immatériel il n'est cependant rien ce qui n'est pas lui, il s'insère nécessairement dans l'enchaînement des êtres, et demeure cependant tellement lui-même qu'il demeure toujours réfractaire par quelque côté à toute identification avec ses pareils. C'est à cette intuition très simple du même et de l'autre que nous sommes ramenés : elle est au point de départ des notions constitutives des réalités mathématiques et elle ferme aussi en un sens cette réalité sur elle-même : en quoi il faut voir non pas une séparation irréelle d'avec les réalités étrangères, mais l'expression d'une unité imprescriptible. Il nous reste maintenant à étudier les liens de l'existence desquels nous sommes assurés. L'être mathématique est au fond une potentialité qui prend corps sous un mode très particulier. Nous avons même pu préciser un peu quelle était sa nature en consultant les cas qui se présentaient à priori comme le plus semblables au sien; il serait maintenant fort éclairant d'examiner cette potentialité en son principe et en son terme : c'est même ce qu'aurait commandé de faire une méthode métaphysique à priori. Mais conservant notre point de vue c'est en partant de la réalité mathématique que nous essayerons d'explorer un peu ses propres marches. Au lieu de nous borner à une analyse statique de la réalité mathématique, nous tenterons d'en saisir le déroulement objectif non par le progrès technique intrinsèquement mathématique que nous avons déjà utilisé, mais par ces gradations insensibles d'ordre ontologique qu'on trouve toujours au principe et au terme d'une discipline; ces données que l'on conclut ou ces applications que l'on déduit font passer sans séparation toujours bien nette aux branches contiguës du savoir. Nous savons bien que la réalité mathématique dit relation à l'être, qu'elle répond à une pluralité ordonnée d'éléments métaphysiquement distincts. Une analyse plus poussée et plus concrète de ces points d'insertion ne peut que préciser encore la situation relative de l'être mathématique et aider à en donner une définition plus métaphysique par là même qu'elle l'isolera moins de l'être, plus complète aussi puisqu'elle tiendra compte de prolongements qui demeurent en quelque façon mathématiques.

Rappelons encore, avant de poursuivre notre enquête, qu'il est légitime de traiter à forfait la relation de l'être mathématique à l'être réel. Nous pouvons dire que toutes les propositions d'un certain ensemble mathématique n'ont pas nécessairement et individuellement leur répondant réel; ce qui importe ici, ce n'est point l'enchaînement envisagé en lui-même, mais la façon dont il se raccorde à l'être. Et ce lien se trouve suffisamment assuré même s'il ne se vérifie que de quelques principes simples. D'ailleurs des éléments auxquels est attribuée une valeur ontologique fort différente donnent lieu aux mêmes formalités et à la même réalité mathématique. Les droites et plans du sens commun, les droites et plans de Hilbert ne jouent pas de rôle différent en regard des théorèmes de géométrie élémentaire. Et il serait d'assez maigre profit d'examiner dans le détail des propositions la portée de chacun d'eux : ce serait reposer autant de fois la même question; on pourra la résoudre ou du moins l'éclairer d'un seul coup en étudiant au principe la signification des éléments les plus simples et en vérifiant sur tel cas privilégié la portée de cette signification. Remarquons d'ailleurs que ce sont généralement des catégories d'esprit assez différents qui interprètent et qui élaborent le développement mathématique. Que la chose soit simplement possible suffit à indiquer que nous pouvons, pour notre objet, nous borner à envisager le discursus mathématique à son principe et à son terme. Ce point nous paraît important parce qu'il introduit une certaine souplesse dans la conception de la réalité mathématique.

Tout problème comporte la vérification d'un résultat : il est assez banal que si la science se construit déductivement elle ne progresse pas de cette façon : on déduit ce qu'on a déjà deviné. Les hypothèses ne jouent pas un rôle moins important, elles doivent être en mathématique assez générales pour conserver à la solution une portée réelle, et assez précises cependant pour sérier les difficultés : il y a là deux pôles dont il convient de se tenir à distance également convenable, et il y faut une sorte d'intuition qui est une forme très particulière du génie mathématique. Mais ni le résultat fixé, ni les hypothèses ne sont le discursus mathématique lui-même. On ne peut le réduire ni à la seule intuition simple de l'évidence, ni à l'art de poser les problèmes. On pourrait faire pour la physique des observations parallèles : conditions d'expérience, observations, résultats, constituent trois plans distincts dont le premier s'avère de plus en plus comme particulièrement délicat. Ces distinctions qu'offre intrinsèquement chaque discipline se retrouve plus accusées à un point de passage : et de même que la discrimination du résultat, le choix des hypothèses, la recherche, tout en demeurant liés ont néanmoins leur caractère propre, ainsi la mathématique n'est ni une axiomatique, ni une construction synthétique de lois de l'univers, encore qu'elle étende ses ramifications jusqu'en ces deux domaines. Établir une dépendance trop étroite entre ces trois phases de l'analyse reviendrait à accorder aux mathématiques un rôle subordonné qu'elles n'acceptent pas ou à leur reconnaître une hégémonie dont rien encore n'a établi le bien fondé. On retrouverait par là tous les écueils de la méthode à priori. Il n'en reste pas moins que c'est par l'axiomatique et par l'appui qu'elle prête aux représentations physiques que la mathématique se relie aux existences concrètes et se trouve ainsi mieux expliquée dans sa potentialité. Ce sont ces deux points que nous examinerons brièvement.

Mathématique et métaphysique.
L'élaboration de l'axiomatique.

Il semble bien que le développement de la science ait posé la question de l'axiomatique en des termes nouveaux et mis en évidence son caractère mixte. Il est fort satisfaisant, d'un point de vue logique d'adopter, de l'ensemble des sciences, une construction de type purement déductif : toute discipline reçoit en partage comme une octave dont chaque touche extrême est à la fois terme et principe. Il y a là une harmonie qui, flattant un peu la paresse par son enchaînement exclusivement linéaire, s'arrogerait facilement en retour une rigueur qu'elle n'a pas. Elle voudrait que l'intelligibilité et l'ordre vinssent seulement d'en haut. On peut et on doit apporter quelque perfectionnement, et se garder de considérer comme une pure succession une diversité essentielle, d'attribuer au mouvement qui traverse cet organisme un sens privilégié et exclusif; on négligerait un peu trop la collaboration effective qu'apportent les disciplines subalternes à la mise au point de leurs propres principes. Le continu et la quantité par exemple ne pourraient être pour le mathématicien que des notions à priori, une trame intangible qu'il taillerait en nombre ou en êtres géométriques. Cet ordre impeccable paraît un peu sommaire, trop simple au fond pour répondre à la réalité. Nous ne disons certes pas que la mathématique puisse à elle seule échafauder son axiomatique, ce serait laisser inexpliquée cette potentialité dont nous avons reconnue l'existence, mais nous voudrions souligner que ces notions communes sans lesquelles les notions mathématique seraient privées de substances sont encore fort éloignées de ces dernières. Il y a là une marge dans laquelle il serait illégitime de ne voir qu'une dépendance métaphysique : les discriminations proprement mathématiques y ont leur répercussion. Il n'estpour s'en convaincre que d'examiner les comportements différenciés des notions principes en regard d'un développement éventuel selon qu'on les envisage sous l'un ou l'autre aspect. Le nombre, ou l'espace ou le temps métaphysiquement entendus demeurent identiques, et il le faut, quelles que soient les observations concrètes qui en appuient la réalité : les degrés d'abstraction ne sont pas ici un vain mot. Les éléments qui sont le plus intimement mêlés au mouvement reçoivent à la lumière de l'être une impassibilité qui est comme le reflet d'une substantialité permanente. Les entités mathématiques jouissent bien de ces mêmes propriétés mais à leur façon; elles conservent certaines déterminations dont les entités métaphysiques font abstraction. En d'autres termes, les notions métaphysiques s'appuient sur l'êxpérience, et meme sur l'expérience mathématique mais elles font abstraction de toute expérience y compris l'expérience mathématique; c'est hien pourquoi elles demeurent identiquement elles-mêmes, quels que soient les progrès des sciences.

L'espace d'Euclide, l'espace de Riemann et l'espace de Hilbert sont bien trois types en lesquels se retrouve la notion commune d'espace; l'étendue est un peu comme un genre qui ne fait pas acception des différences propres à chaque espèce; la mathématique au contraire présente une différentiation progressive, différentiation qui ne vise pas seulement le développement de la science, mais plus profondément, les principes. C'est réellement la conception mathématique d'étendue qui se trouve affectée quand on substitue à l'espace euclidien l'espace riemannien. Le premier peut se concevoir comme une relation en fonction des entités dont il devient peu à peu la condition logique et le cadre à priori; le second se définit par des propriétés intrinsèques. Rien n'empêche évidemment de concevoir à la façon de Riemann un espace euclidien ou à la façon d'Euclide un espace non euclidien. Le point important c'est que la notion philosophiquement abstraite d'étendue qui s'accorde bien à la relation dans la conception euclidienne s'infléchit sur elle-même avec la conception rimannienne. Si l'on continue à employer le même langage, il faudra dire que l'espace de Riemann, c'est la relation d'un corps à soi-même. C'est là d'ailleurs ce qui le rend comme tel irreprésentable. L'étendue, que nous appelons pour faire bref : « métaphysique » ne communique donc pas du tout son mode permanent à l'étendue mathématique. Celle-ci présente d'ailleurs encore un autre type de différentiation, suivant au nombre des dimensions de l'espace envisagé : la réalité mathématique de l'espace c'est d'être le support d'un ordre, or il est bien clair que nous ne définissons le support que par l'ordre : en quelle mesure sera-t-il légitime de prendre effectivement cette conception comme point de départ de nouvelles recherches sur l'espace, la notion de quantité antérieurement acquise au plan métaphysique n'en dira rien; elle dit bien *de* l'ordre, mais cet ordre demeure beaucoup trop vague, et la mathématique dès son principe requiert une précision beaucoup trop poussée pour qu'on puisse voir dans l'apport philosophique un point de départ adéquat. En sorte que s'il n'y a évidemment pas opposition entre les deux formes du même principe, l'une plus métaphysique l'autre plus mathématique, il y a néanmoins disjonction : la métaphysique ne peut pas à elle seule, redescendre suffisamment pour donner à la mathématique les principes réels dont celle-ci a besoin et dont elle part effectivement. Si donc on tentait d'assurer à la métaphysique un rôle exclusif en la constitution de l'axiomatique, on risquerait de priver la mathématique du fondement qu'elle réclame, d'annihiler le rôle de la métaphysique pour l'avoir fait trop rigide et incapable de composer avec l'expérience concrète. C'est l'un des points où la différence de méthode dont nous parlions au début de cette étude est le plus sensible : si on analyse l'être pour en faire sortir la mathématique — sans préjudice du reste, bien entendu — on ne risque pas de conclure que cette analyse unilatérale ne suffit pas, on ne dit rien de faux et on peut même énoncer des conditions suffisantes, mais rien ne prouve qu'elles le soient; on apporte d'utiles précisions, mais on n'est assuré en aucune façon d'aboutir au fondement réel dont part la mathématique et dont elle requiert explication.

Nous sommes donc amenés à penser que la mathématique concourt à l'élaboration de son axiomatique. Précisons un peu les rôles respectifs. Il est à peine besoin de rappeler que la philosophie, et derrière elle la métaphysique, est nécessairement requise, un exemple nous montrera comment. Certaines réalités mathématiques sont en liaison trop directe avec des notions philosophiques pour en abstraire complètement. Si un ensemble est autre chose que la loi qui le décrit, ce quelque chose est fort apparenté à l'être de raison particulier que l'on peut appeler collection; il semble qu'en ce cas, la marge philosophico-mathématique que nous avons dilatée à dessein, se réduise singulièrement, et c'est ce qui a pu faire un moment espérer, en ce qui concerne ces théories, un contact fécond entre les deux disciplines. Si la simple appréhension mathématique repose sur une perception extra-mathématique, les lois de construction, disons plus généralement les algorithmes, qui sont exclusivement mathématiques ne se trouveraient pas, laissés à eux-mêmes, en bonne situation. Ils doivent satisfaire à cette condition de former un tout exempt de contradiction, et suffisant par ailleurs à trancher les alternatives qui pourront se présenter : une bonne axiomatique doit au moins permettre de distinguer les cas dont elle assure implicitement la solution d'avec ceux qui constitueront de véritables cas de biffurcation donnant lieu par conséquent à de nouveaux axiomes. La mathématique est évidemment ici incompétente : si elle démontre, il n'y a plus de question mais si elle ne démontre pas, et ne montre pas non plus qu'elle ne peut pas démontrer — et c'est bien le cas le plus fréquent — la question demeure entière; la philosophie peut alors avoir son mot à dire. Les attitudes diverses se séparent en définitive par le plus ou moins d'optimisme dont elles témoignent vis à vis de la pensée : en quelle mesure pouvons-nous appréhender une réalité, qu'elle s'appelle collection ou ensemble, matière ou continu; en quelle mesure d'autre part pouvons-nous fixer des groupes de caractères tels que toutes les propriétés non actuellement connues en puissent être déduites sans contradiction? Y a-t-il une détermination objective que nos symboles convenablement choisis doivent rejoindre, tel est le débat; et on aperçoit immédiatement que si le cas mathématique autorise à le formuler en des termes plus précis et lui donne par là un aspect plus aigu, il est d'une portée beaucoup plus générale. La position qu'on adoptera, touchant le problème de la connaissance, commandera d'une façon presque immédiate le parti à prendre. Ajoutons que la vérification mathématique, repose elle-même sur des principes d'essence métaphysique et dans certains cas sur les principes qui font difficulté. Leur nécessité n'étant au plan mathématique qu'une nécessité dérivée, il serait vain de rechercher exclusivement dans la cohérence de la vérification mathématique une justification des principes eux-mêmes. Ce serait pousser hors de portée la réalité mathématique et si cette attitude va au rebours de celle que nous avons indiquée comme moins compréhensive, elle n'est pas plus heureuse, incapable qu'elle est d'aboutir à une justification même partielle.

Puis donc que les mêmes principes envisagés au plan philosophique et au plan mathématique se distinguent, que d'autre part la philosophie est requise à l'élaboration des principes premièrement mathématiques, il nous reste à voir en quoi elle est insuffisante. Nous ne rappelons pas ce qu'on appellerait assez justement l'écart fonctionnel que subit une même notion du fait de son insertion dans l'un ou l'autre domaine : il est des cas plus typiques, dans lesquels la possibilité d'interprétation que la philosophie laisse ouverte peut conduire en mathématiques à des vues opposées. Reprenons notre exemple de la suite des entiers. Si cette suite renferme quelque chose de plus qu'une pure loi de succession, comme est enclin à l'admettre l'idéaliste, le transfini perd du coup sa réalité séparée : il n'est qu'une expression de ce quelque chose de plus, une propriété extrapolée et non pas une réalité entièrement nouvelle comme le conçoit la même attitude idéaliste. Nous ne donnons nullement à cette remarque la portée d'une critique de l'idéalisme. Elle montre non que l'idéalisme est contradictoire — quoi qu'il en soit par ailleurs — mais que, même en un cas aussi près de la philosophie, le choix proprement philosophique d'une attitude intellectuelle déterminée n'entraîne aucune détermination mathématique certaine. On songera, à titre de comparaison, à la déduction hardie qui permettait à Descartes de conclure de l'immutabilité divine à la conservation de la quantité de mouvement. Ce dernier élément a subi en sa forme et en son fond les nombreuses vicissitudes que chacun sait, cependant que Dieu est toujours immuable. L'idée de Descartes n'est d'ailleurs pas si absurde qu'il peut paraître : et la quantité de mouvement, la force vive, l'impulsion d'univers ont ce trait commun d'affirmer quelque chose qui est constant. Descartes eût été plus avisé en se gardant de le formuler. Les principes philosophiques, toute proportion gardée, se trouvent un peu en cette situation. Étais très sûrs s'ils demeurent en leur lieu, point de départ d'inférences précieuses à l'intérieur d'un domaine judicieusement circonscrit, ils conduisent aux confusions les plus inattendues s'ils prétendent régenter. Et contre toute attente cette remarque vaut même pour le principe d'identité. Il nous induit bien à croire qu'un être est déterminé en lui-même, mais cette affirmation fort utile ne suffit pas : elle demeure incapable de donner les principes généraux qui permettraient d'identifier les êtres mathématiques. Une correspondance réelle doit être déterminée. Mais quelles conditions doit remplir une correspondance pour être déterminée : la philosophie ne peut pas et n'a pas à le dire : quelle sorte de permanence sera requise à cette détermination, et peut-on accepter une loi qui soit « n'importe laquelle » : le développement de la théorie répond partiellement à ces questions, dans l'exacte mesure où il conserve en adoptant soit l'un soit l'autre point de vue sa cohésion intime. Mais le principe d'identité se trouve évidemment ici fort déraciné, même au regard des généralités. Aussi ne pensons-nous pas que l'on puisse donner une classification philosophique des êtres mathématiques : on en pourra bien classer les principes constitutifs au sens général qui a été précisé, mais le revêtement mathématique relève de principes d'ordre différent, de l'ordre mathématique qui est, comme on le voit, formellement irréductible.

Impuissante à créer l'être mathématique, la philosophie ne l'est pas moins à constituer l'axiomatique. Et d'abord cette insuffisance est un fait. Nous rappelions combien il est difficile quand on tente de franchir une nouvelle étape, de fixer un ensemble convenable d'hypothèses, mais la tâche devient surtout délicate dans deux cas : soit qu'il s'agisse d'une terre tout à fait inconnue on n'a alors aucun résultat, et donc aucune raison de faire un choix : le maximum de simplicité est cependant alors un principe réflexe généralement suffisant; soit au contraire, qu'il y ait trop de résultats, c'est-à-dire des résultats qu'on n'a pas encore pu coordonner sous des hypothèses assez hospitalières et cependant assez simples. Si précisément l'axiomatique n'apparaît qu'à un stade assez avancé du développement de la science, il est à présumer qu'elle exige pour se constituer la contribution de cette science, et non pas une contribution quelconque, mais la contribution d'une science qui a suffisamment travaillé sur elle-même pour éprouver un besoin critique et qui est suffisamment maîtresse d'elle-même pour projeter sur ses propres principes une lumière que rien ne peut remplacer. L'axiome du choix, pour raisonner encore sur un exemple, n'est axiome et son cas n'est encore l'objet de controverses que parce que la théorie des ensembles n'est pas assez évoluée pour permettre cette auto-critique. Il y a évidemment philosophiquement des indices favorables, mais ils demeurent à notre sens insuffisants. En bonne méthode il faut ne conclure en mathématique qu'avec une certitude mathématique; il faut si l'on veut conclure « ex propriis » et non « ex communibus ». L'axiome du choix ne donne pas cette certitude aux démonstrations qui le font intervenir, à moins que les choix en question ne demeurent essentiellement indéterminés, encore faut-il en chaque cas démontrer ce dernier point. D'un point de vue plus technique encore, nous avons vu le rôle capital de la représentation qui n'épuise certes pas la réalité mathématique, mais qui est notre seul moyen assuré de l'appréhender. Or cette représentation, la philosophie se doit de ne pas la donner; on ignore donc toujours en quelle mesure la certitude philosophique a son correspondant mathématique c'est-à-dire que le mathématicien ne saurait en faire état sans autre précaution. Est-ce à dire qu'il n'y ait jamais d'existence mathématique réelle sans une représentation correspondante : non, mais il faut au moins la possibilité d'une telle description : un tas de pierres est un ensemble réel, non un ensemble mathématique, à moins qu'on indique précisément un principe qui permette d'introduire une permanence et une nécessité. Les principes philosophiques partent des réalités concrètes et ont toujours pour eux la nécessité du « ce qui est »; les principes mathématiques sont potentialité pure, on ne saurait conclure d'un domaine à l'autre ni dépouiller sans précaution l'être mathématique de son actualité de représentation : cette actualité, si l'on permet ce jeu de mot peut devenir elle-même potentielle, mais elle est toujours requise de quelque façon. On a brisé le cadre qui restreignait une fonction à sa représentation analytique, mais on n'adopte pas pour autant cette outrance du point de vue riemannien qui consisterait à ne voir dans une fonction que deux successions de valeurs. Il faut une correspondance et une correspondance qui demeure la même. Ce point souvent si difficile à préciser est toujours implicitement admis. En bref c'est le discursus mathématique qui seul donne la dernière touche à l'axiomatique et c'est encore à l'intérieur du domaine mathématique qu'il faut placer, à la limite, les êtres qui sans être définis existent potentiellement, qui, sans pouvoir encore jouer le rôle que seul leur permettra une représentation ultérieure, sont déjà au principe d'inductions fécondes. Seul le développement de la science permet de fixer dans les différentes catégories de cas la permanence et la nécessité que la philosophie indique comme lois de l'être; elle y ajoute une autre nécessité qui n'est plus la propriété du « ce qui existe », mais l'expression d'une condition d'existence. La philosophie n'ignore pas cette sorte de nécessité, mais elle ne la prend pas au même stade et ne l'exprime pas en termes mathématiquement recevables. Un philosophe à qui on voulait exposer une démonstration interrompit : « le résultat que vous énoncez n'a rien d'extraordinaire, il tient à la nature des choses ». Il avait parfaitement raison, mais la mathématique veut, même en ses principes les plus abstraits, expliciter un peu cette nature des choses, faire rendre aux principes philosophiques des évidences qu'ils ne contiennent qu'implicitement.

Ce retour de la mathématique sur ses principes qui paraît briser l'enchaînement continu d'une intelligibilité toujours dérivée est bien facile à comprendre, si on admet que les principes doivent pour le moins être susceptibles d'application, c'est-à-dire susceptibles de guider effectivement le développement de la science qu'ils sont supposés commander. Supprimé ce lien, nous dirons plus volontiers cette immanence, il n'y a plus que des fantômes de principes, qui peuvent bien être des conclusions intéressantes d'une autre discipline, mais qui manquent à leur rôle fonctionnel. Cette propriété d'applicabilité n'est pas accessoire, elle n'est pas seulement l'empreinte de l'investigation laborieuse qui conduit aux vérités les plus universelles, elle est la marque propre de leur degré d'être ou si l'on veut du caractère authentique de leur universalité, et à ce titre une condition sine qua non de leur réalité. Une axiomatique qui laisse le champ ouvert à une diversité d'interprétation; voire à des interprétations opposées, se situe par là même en dehors de l'être mathématique. Or cette propriété générale et essentielle, cette applicabilité ne prend corps que dans des développements techniques. Ceux-ci se trouvent du fait même, entièrement intéressés à la construction axiomatique. Ils ne sont jamais le sommet et pourtant un peu plus qu'un point de départ ou d'arrivée, c'est en eux seulement que l'axiomatique prend sa valeur : elle les contient implicitement et ils en sont l'actualisation. Mais l'ontologie mathématique ne peut voir là que des temps logiques; les axiomes mathématiques sont dans l'application, ils sont aussi dans les conclusions philosophiques; ils y sont diversément tantôt d'une façon immanente et tantôt d'une façon implicite; ils nouent par cette diversité de fonction l'unité véritable entre la mathématique et la métaphysique. On ne saurait distinguer entre les axiomes : les uns de type métaphysique, les autres de type mathématique. Les exemples de la théorie des ensembles, particulièrement suggestifs à ce point de vue, nous ont montré la dualité des fonctions, persistante alors même que tout portait à croire qu'elles se résorbaient l'une dans l'autre. Tout est mathématique et tout est métaphysique, et cependant rien de l'un n'est l'autre. C'est par cet intermédiaire — autant que l'image convienne — que la potentialité propre à l'être mathématique trouve son appui sans cesser de demeurer ce qu'elle est. La zone qui est aux confins des deux disciplines ne doit être conçue ni comme une ligne de partage ni comme une dépendance exclusive de l'une ou de l'autre. C'est un champ commun d'interférence; chaque science y apporte sa méthode propre qu'elle doit seulement assouplir sans l'abandonner. La mathématique reçoit ses principes ou plutôt la possibilité d'établir de tels principes, et elle les refait à sa façon, la métaphysique trouve un nouveau champ d'expérience auquel elle doit être attentive. Ce sont bien des mathématiciens qui ont donné une réfutation de l'axiomatique de Brouwer, encore qu'ils utilisent pour le faire les principes philosophiques d'identité et de non contradiction. M. P. Lévy et le R. P. Garrigou-Lagrange ont chacun leur part, parts nécessaires et non interchangeables, à la fois successives et liées par le dedans; diversité exigée de contributions qui ne fait que manifester la riche complexité de ce domaine.

Tout ceci d'ailleurs est parfaitement cohérent et en parfaite continuité avec le réel si on se souvient de la nature des différentes compositions propres à la mathématique et à la méthaphysique; formellement distinctes, elles s'appellent néanmoins comme s'attachant à des diffusions progressives de l'être. Notons en outre, que les degrés d'abstraction, les lumières propres et leur compénétration, ou les distinctions auxquelles nous a conduit notre analyse avec la zone d'interférence où elles se raccordent, sont choses assez semblables. Il est toujours rassurant d'obtenir un même résultat par des méthodes qui paraissent opposées et qui se raccordent elles aussi sur la réalité.

Concluons donc, du point de vue plus particulier de la situation ontologique de l'être mathématique. Il n'est pas question de l'isoler plus ou moins, et ce qui précède montre bien qu'il s'insère nécessairement dans l'être. Mais on peut l'y concevoir plus ou moins autonome. Une mathématique qui eût reçu ses principes tout faits eût été évidemment en la dépendance directe de la science qui les eût élaborés, mais tel n'est pas le cas. La philosophie n'a pas en cette affaire la majesté idéale du moteur non mû. Un être est ce qu'il est : il est fort utile de le savoir, mais il n'est pas moins utile d'avoir un être et un être véritable, achevé, en un mot réel au plan de réalité qui nous occupe. Cet achèvement n'est pas donné par la philosophie. La mathématique inclut dès son principe et aussi sous la dépendance la plus directe de la philosophie une vie proprement mathématique qui assimile, transforme les données premières et c'est en ce sens que nous pouvons conclure à une relative autonomie. Que cette autonomie ne place pas les deux sciences sur le pied d'égalité, nous le savons déjà, mais leurs cas respectifs demeurent divers par cela seul que la mathématique n'a avec aucune autre discipline un contact qui soit l'équivalent de sa compénétration par la métaphysique. Celle-ci au contraire se campe plus avant dans l'être et domine toutes les autres sciences. Mais elle ne les domine pas sans en rien recevoir : elle se construit par elles, un peu comme l'axiomatique par la technique. De même que cette dernière ne peut se concevoir sans l'axiomatique et lui apporte cependant les signes et les expressions d'une nécessité nouvelle, ainsi la mathématique ne subsiste pas sans fondements métaphysiques, et possède cependant une sorte d'auto-déterminisme que l'on peut bien appeler une autonomie relative. Ni opposition ni écart; dès le principe un mode nouveau qui ne constitue pas un élément de plus, mais qui donne à tous ceux qu'il qualifie d'être mathématiques.

Mathématiques et physique.
Dépendances concrètes de la mathématique.

Et nous devons maintenant passer à l'autre bout, retrouver l'être réel au travers d'expériences un peu plus perfectionnées que celles qui suffisent à fonder la métaphysique, mais qui, en retour, n'auraient plus le bénéfice de l'information substantielle. Là encore il y a un contact au moins possible : comment les entités mathématiques réagissent-elles, débordent-elles de leur champ propre et deviennent-elles à leur tour principes intangibles, ou bien doivent-elles, pour pénétrer en ce domaine nouveau, subir une transformation profonde, et si oui peut-on encore dire qu'elles demeurent elles-mêmes. L'importance prise par le développement mathématique dans toutes les théories physiques peut laisser croire à un rapprochement : la mathématisation et plus encore la tendance à mathématiser décèle du moins un terrain d'entente — ou de conflit, mais plus rarement — et on pourrait rappeler en retour la possibilité d'application de tout résultat mathématique à des faits observables d'ailleurs encore inconnus. Mais cette communauté d'expansion, ne doit pas faire illusion. Si les mêmes notions reçoivent on mathématique et en métaphysique, une acception différenciée, la même technique mathématique prend dans l'esprit du mathématicien et au regard du physicien une portée différente. C'est ce que manifestent clairement les protestations de certains physiciens contre l'emploi excessif d'algorithmes mathématiques. Ils peuvent craindre qu'à ce jeu, la physique ne se détache de son objet et devienne une simple illustration de théories purement mathématiques. Ont-ils tort ou raison, il faudrait considérer la fin; il faudrait surtout se mettre d'accord sur le but de la physique et nous ne voulons pas ici entrer en cette querelle. Mais soit qu'on assujetisse le monde matériel, soit qu'on tente de l'expliquer, ce qui est au vrai la plus belle conquête qu'on en puisse faire, il est certain qu'il s'agit toujours bien du monde matériel, d'un quelque chose qui tombe sous le microscope où les rayons X s'il ne se voit et ne se mesure directement. Les représentations mathématiques prétendent bien atteindre toujours quelque chose de cette réalité. Les plus mathématiciens des physiciens n'accepteraient évidemment pas qu'on vidât leurs formules de tout contenu objectif; il y a là un procédé facile dont on a peut être un peu abusé ces derniers temps. Le même développement mathématique à qui pouvait suffire une réalité potentielle, indéterminée au regard de tel ou tel correspondant concret exige, en devenant une théorie physique, un parallélisme beaucoup plus constant. C'est parce qu'on ne le trouve pas toujours vérifié que les physiciens peuvent s'inquiéter. Il ne leur suffit pas de savoir que la symbolique mathématique doit avoir une portée, ils désirent encore voir quelle elle est. Et de leur point de vue ils ont parfaitement raison; observons simplement que les dernières nées des théories ne font que rendre plus aiguë une difficulté déjà rencontrée : là aussi, nous avons une zone intermédiaire : est-elle régie par la mathématique ou la physique ?

Il faut bien reconnaître que dans nombre de cas, on n'a aucun renseignement précis sur la portée réelle d'une loi établie mathématiquement. La loi des grands nombres résulte d'une analyse élégante et rigoureuse, mais elle ne tire aucune valeur nouvelle de sa forme perfectionnée. On doit avoir présentes à l'esprit les hypothèses qu'on fait pour l'établir et qui en commandent la portée : « tous les cas possibles sont également probables » c'est ce que le le calcul ne démontrera jamais, et grâce à quoi on peut construire avec des hypothèses différentes et dont on ignore la diversité réelle, des calculs semblables. Ceux-ci pourront trouver applications en d'autres cas, mais pourquoi applique-t-on tels calculs à telle catégorie de cas ? Cela réussit, voilà tout, et l'hypothèse précédente n'a elle-même aucun sens sinon qu'elle réussit. Il y a objectivement toutes sortes de raisons pour que Pierre meure maintenant, et non pas Paul. Nous les ignorons et nous décrétons qu'il n'y en a aucune. C'est très commode, pas d'autre moyen d'éliminer les « probabilités à priori » qui empêcheraient même l'évaluation du nombre des cas que de les supposer toutes égales : il n'y a là aucune démonstration. Les épreuves indéfiniment répétées ajouteraient à cette difficulté celle du discernement des cas. Mais nous n'en retiendrons qu'une troisième. On énonce généralemnet le théorème de Bernouilli « le rapport des nombres observés de cas favorables et de cas défavorables tend vers la valeur théorique lorsque le nombre des épreuves augmente indéfiniment ». Mais on sous-entend une hypothèse essentielle : les nombres observés demeurent dans un certain voisinage de ceux qui correspondant à la probabilité maximum. Si on admettait que les nomhres qui correspondent à la probabilité maximum sont justement les nombres observés, le théorème serait *démontré* mais se réduirait à une tantologie. Le calcul ne fait que préciser une marge autour de l'état le plus probable, marge telle que l'expérience qui la franchirait mettrait en échec la loi des grands nombres. Ce que l'on constate et qu'on ne démontre pas, c'est que pour autant qu'on la prolonge, l'expérience reste dans cette marge; ce que l'on conclut et qu'on ne peut même plus constater, c'est qu'on peut interpoler à l'infini cette même loi de probabilité, ou en d'autres termes qu'il est possible d'envisager une série de cas suffisamment étendue pour que toute série ultérieure rentre sous la même loi. A quoi réellement correspond cette permanence? Quel en est le support matériel puisqu'elle peut viser un ensemble constamment renouvelé. Il y a là un fait que la mathématique reçoit sans le démontrer et qu'elle restitue inchangé en son fond. Dire qu'il y a une loi de distribution des cas et que cette loi demeure la même, c'est bien dire qu'elle restera la même encore pour une infinité d'épreuves; la mathématique ne fait que préciser cette intuition d'ordre extra-mathématique. Il y a évidemment là beaucoup de problèmes que nous ne faisons qu'effleurer pour retenir ce qui nous intéresse : la mathématique traite le réel approximativement : elle passe indemne au travers des contingences qu'elle schématise pour les plier à des lois rigoureuses. C'est-à-dire qu'elles sont mathématiquement fort rigoureuses et qu'elles ont expérimentalement une exactitude suffisante pour qu'on leur attribue une portée réelle, qu'il faut d'ailleurs se garder de confondre avec leur rigueur mathématique.

Faut-il rappeler que beaucoup de lois physiques sont très probablement des lois d'ensemble,et que par conséquent nous ignorons complètement en tous ces cas, l'interprétation exacte qu'il convient de donner aux êtres mathématiques qu'elles mettent en œuvre. Il est d'ailleurs des lois empiriques qui manifestent clairement cette disjonction. Nous appelons loi empirique celle qui lie deux observations sans donner d'indication sur le « médium »; c'est une démonstration par l'absurde avec la certitude en moins : qu'on songe par exemple à la loi de Moseley. A quelle relation physique réelle correspond la formule qui l'exprime : elle peut bien n'être elle aussi qu'une totalisation simplifiée d'un grand nombre de relations plus complexes : et les éléments qu'elle fait intervenir, mathématiquement simples, puisque ce sont des nombres, que sont-ils physiquement; ces fréquences ne sont-elles pas elles-mêmes composées comme une analyse plus approfondie l'a montré en d'autres cas; quelle est alors la portée de cette formule : elle fixe les idées et c'est quelque chose, mais enfin on est en droit d'attendre un peu plus, ce plus la mathématique est absolument inapte à le fournir. Nous n'avons cité que des cas très simples; la nouvelle théorie des quanta, par exemple, introduirait des complications d'une autre nature. La difficulté d'interprétation ne porte plus seulement sur un fait isolé par l'expérience, et qui comme tel conservera au moins une valeur approximative, mais sur toute expérience, sur la possibilité même de l'observation. On pourrait évidemment objecter qu'indépendamment de *nos* expériences, indépendamment de *nos* formulations de loi, il y a des lois que nous subissons d'ailleurs au même titre que les objets de nos observations, mais une double question demeure alorsconcernant les rapports de ces lois réelles avec notre symbolique qui en vise une reconstitution rigoureuse d'une part, avec les lois empiriques construites sur l'expérience d'autre part. La philosophie pourra éclairer le débat, et dire également son mot au sujet d'autres séries de relations : celle de la symbolique avec les lois empiriques; en particulier elle pourra conclure à un certain déterminisme, mais en se gardant bien de le préciser au plan qui justement nous occupe. Si donc la mathématique touche ces lois réelles, c'est en quelque sorte par l'intermédiaire de la métaphysique et on ne peut l'affirmer qu'à priori; ceci n'ajoute rien d'essentiellement nouveau, c'est l'envers du lien axiomatique. Et si elle touche les lois physiques observées, ce n'est pas non plus en tant que formellement mathématique, mais dans la mesure où l'optimisme philosophique et la vérification expérimentale se corroborent mutuellement. On dirait en vocabulaire scolastique que la « supposition » de la réalité mathématique change en chacun de ces cas. Or ce changement n'est pas et ne peut pas être l'œuvre de la mathématique. Si nous avions à conclure pour la physique, nous devrions redire qu'elle exploite elle-même cette zone intermédiaire, analogue à celle que laissent entre elles mathématique et métaphysique; nous devrions aussi marquer entre les deux cas certaines différences, et notamment l'autonomie plus grande de la physique, parce qu'elle se rattache à l'être par des voies plus directes que la mathématique.

Mais attachons-nous aux conséquences nouvelles de ce rapprochement, touchant l'être mathématique et sa réalité. La présentation physique des algorithmes mathématiques leur communique évidemment une puissance d'explication accrue. Et cela est d'autant plus sensible qu'il s'agit d'une théorie plus ample, qui emprunte à la mathématique une force unificatrice capable d'ordonner un plus grand nombre de faits sous des lois plus dépouillées. Les symboles de Riemann et le calcul absolu trouvent certainement dans la relativité une belle illustration. Et la théorie n'eût-elle d'autre valeur que celle de présenter harmonieusement des lois connues, qu'elle serait un beau témoignage rendu à la mathématique. Mais la représentation dont la mathématique assume la charge présente deux caractères importants. Elle demeure inadéquate, c'est ce que nous venons de constater, mais aussi elle demeure à la fois ouverte et fermée, indéterminée et trop déterminée, et c'est pourquoi elle est inadéquate. Ouverte au plan mathématique en ce sens que les transcriptions de l'expérience n'épuisent pas les possibilités infinies d'une théorie; fermée parce qu'elle tend inévitablement à imposer à l'expérience un cadre tout fait dont celle-ci ne s'accommode pas toujours.

Il en résulte premièrement des déformations, et bientôt une apparente incompatibilité entre l'explication adoptée et des expériences nouvelles. La ressource mathématique n'est pas épuisée pour autant, et offre d'autres types, avec lesquels la même série d'alternatives se reproduit. C'est-à-dire que les entités mathématiques ne s'adaptent pas, ou s'adaptent mal à l'expérience physique; elles ont une valeur représentative qui est, comme leur portée et leur dépendance ontologiques, globale et approximative. Et il est permis de voir là une nouvelle conséquence de la différence de structure entre l'être mathématique et l'être de raison qui, lui, est pleinement fait pour s'adapter à l'être réel. La réalité mathématique n'est pas du réel représenté, c'est une représentation en tendance vers le réel, et qui est aussi assurée de ne pouvoir en abstraire complètement que de ne jamais l'enserrer exactement. Il y a là une marge que la physique doit combler par ses propres moyens, par un labeur constant qui ne peut être fait une fois pour toutes et tire éventuellement d'une même donnée mathématique, des interprétations différentes. Einstein et Lorentz sont bien partis des mêmes équations; Einstein n'a pas reculé devant l'apparence d'un paradoxe : si la physique ne lui donne pas définitivement raison, la mathématique peut se féliciter sans arrière-pensée et laisser ouvertes toutes les querelles; elle n'acquiert sa valeur représentative en tel cas particulier qu'au pris d'une réimposition qui n'est plus de son ressort et qui d'ailleurs ne lui ajoute que peu. Les résultats de Fredholm touchant les équations intégrales ont en eux-mêmes toute leur beauté; qu'ils reçoivent ou non application en la nouvelle théorie quantas, c'est au fond assez indifférent, simple illustration contingente et peut-être demain désavouée d'une nécessité qui demeure. On ne peut donc pas dire que son contact d'ailleurs assez lâche avec la physique apporte beaucoup à la mathématique : nous l'entendons à notre point de vue; nous ne songeons pas à mettre en doute la fécondité d'une constante collaboration qui est pour chacune des deux disciplines l'occasion sans cesse renouvelée de dévelpopements nouveaux. Mais une fois acquis, ces progrès deviennent indépendants de leur origine : le problème des trois corps, l'équation de la chaleur sont bien questions réelles physiques; les théories mathématiques dont ils ont provoqué la genèse se justifient ensuite d'elles-mêmes. Elles ont indépendamment de toute application leur validité et leur être mathématique propres. La mathématique puise des cas nouveaux dans un champ d'ailleurs privilégié; elle les tire à soi et leur restitue de ce fait des possibilités d'interprétation qu'ils n'avaient pas; mais elle empêche du même coup qu'ils lui assurent avec l'être un contact plus étroit.

Nous devons donc conclure qu'à quelque étape de son développement qu'on le considère, l'être mathématique est d'abord lui-même. Il a son existence assez singulière, celle d'une pure potentialité, qui n'est d'ailleurs aucune autre potentialité, comme la dichotomie que présente sa structure n'est aucune autre dichotomie. Il est autonome en ses principes propres, parce qu'il les critique dans la mesure où ils sont formellement mathématiques et ne peuvent avoir comme critère que son propre développement. Il est autonome dans ses résultats, lesquels abstraient en leur fond d'être ou non en connexion avec l'expérience, d'être ou non l'expression invariable et nécessairement approximative de lois en constante évolution. Et cet être qui est lui-même n'est pas séparé : il soutient avec l'être une relation d'ensemble nécessaire, encore qu'indéterminée dans l'individualité de chaque cas. Et ceci de trois façons : son irréductible composition le porte vers l'unité simple de ce qui est; ses éléments déjà conceptualisés requièrent le constant support de notions plus exactement adéquates au réel; sa possibilité indéfinie de représentation enfin tombe sur les cas concrets de la physique théorique qui viennent illustrer sa pure idéalité.

La situation relative des êtres mathématiques confirmée par leur genèse psychologique.

Avant de terminer en donnant de l'entité mathématique une définition plus métaphysique, nous indiquerons rapidement le schéma de quelques considérations psychologiques qui iraient, croyons-nous, à confirmer les résultats précédents. L'abstraction du mathématicien est subalternée à celle du métaphysicien, en ce sens qu'elle en épouse au moins le mode conceptuel; mais elle implique une contribution de l'esprit plus active et plus personnelle, c'est cette différence que nous voudrions souligner; nous avons même vu dans la constante tendance de l'être mathématique à l'unification l'expression adéquate de l'activité de l'esprit. Séparer n'a pas ici de sens si on s'en tient là : on sépare et on isole pour reconstruire et la fonction intellectuelle de reconstruction est aussi importante que la fonction d'analyse, on ne détermine utilement d'hypothèse que par référence à l'ensemble des faits qui en dépendent, et c'est l'ensemble de ces démarches qui prend un sens, tandis que chaque opération, isolée, n'en avait pas. La recherche est constamment tendue entre ces deux pôles : quelles hypothèses faire pour sérier les cas, quelles conséquences ont ces hypothèses nouvelles : toutes les hypothèses sont donc à priori encore qu'aucune ne soit sans raison. Elles ne font qu'expliciter progressivement un travail continuellement latent et essentiellement reconstructif. La création de théories nouvelles ne va pas sans la mise en œuvre — quoi que sur une échelle plus grande — d'une semblable activité. Composition originale de propositions déjà obtenues ou organisation d'éléments eux-mêmes découverts, elles ne laissent pas que d'être avant tout des constructions. Mais il y a plus qu'un assemblage quelconque, voire cohérent, il y a une genèse de cet ordre qui est nécessitée et que l'esprit se voit contraint de suivre; le sens de cette nécessité et implicitement la discrimination rapide des écarts qui ne manquent pas de s'introduire en toute recherche est une des fonctions les plus importantes de l'habitus mathématique. Or choisir de deux orientations celle qui sera féconde, n'est pas autre chose que pressentir et suivre cette nécessité, accommodante et qui se laisse de la sorte saisir plus aisément par une intuition plus libre. L'esprit n'y peut atteindre que par des reconstructions partielles quelquefois implicites, seules capables d'indiquer l'écart entre la mesure mouvante qu'impose la ligne idéale et l'état, l'orientation actuelle de la recherche. En sorte que le processus mathématique — tel du moins qu'il se présente réellement, — si docile à une nécessité objective qu'on le suppose, ne peut jamais abstraire d'une activité reconstructrice qui est en quelque sorte la condition nécessaire et concomitante de toute information idéale.

L'attitude métaphysique est bien différente : on n'en peut pas dire qu'elle divise pour reconstruire parce qu'elle ne peut se reposer ni dans ces divisions, ni dans ces reconstructions. Ni les choses ni les idées n'offrent en fait d'élément dernier, il n'en est donc pas qu'on puisse considérer comme tels au moins parmi ceux que nous atteignons immédiatement. L'analyse ici n'est jamais achevée et ne peut pas l'être à moins qu'on n'y inclue des termes inférés qui nous échappent; alors elle se ferme et devient définitive; elle pourra bien trouver de multiples vérifications, elle ne se prolongera plus en elle-même. Quant à la construction, elle n'est plus ici à faire : elle est faite objectivement, et réalise tout à la fois une unité et une complexité que ni l'analyse la plus poussée, ni la synthèse la plus savante ne peuvent atteindre, si du moins on veut l'entendre de procédés du type logico-mathématique. L'attitude métaphysique ne réussit ici que parce qu'elle est autre, beaucoup plus passive et contemplative, indifférente d'ailleurs aux représentations claires qu'exige l'élaboration mathématique. La rigueur, qualité par excellence de tout raisonnement, prend des formes différentes, et même psychologiquement opposées en mathématique et en métaphysique : la précision devient erronnée qui n'affecte en une synthèse réelle que certains éléments qu'elle isole sans appel : et la déduction n'est pas mathématiquement authentique qui suspecte dans le symbolisme l'intervention de l'imagination, qui se place résolument assez près des sources de l'être pour n'en rien perdre, assez loin aussi de ce que nous en connaissons pour en respecter le mystère. Faut-il ajouter que la démonstration métaphysique, en dépit de la forme logique d'ailleurs fort utile qu'elle revêt, consiste beaucoup plus en une série d'intuitions et de regards sans contour qu'en un enchaînement de syllogismes. Chacun conserve indépendamment de tout agencement didactique la valeur originale d'un reflet de l'être, chacune indique un progrès, progrès qui n'est pas le même s'ajoutant au même, mais le constant retour d'une complexité croissante vers une unité enrichie. Les équivalences mathématiques s'articulent généralement sans offrir semblable diversité. Chacune ne prend toute sa valeur que comme l'un des contacts successifs qui relient entre elle deux vérités. Et c'est au fond dans l'équivalence nécessaire des deux extrêmes que se résolvent d'une façon homogène les équivalences échelonnées qui la construisent. L'esprit se repose autant ici dans la cohérence intime de ses démarches que dans l'intuition d'un objet donné.

Nous n'insisterons pas ici, signalons qu'on pourrait de ce même point de vue comparer le procédé intellectuel du mathématicien à celui du physicien. On trouverait la différence moins accusée car si le physicien doit se plier comme le métaphysicien à l'expérience il reste qu'il considère l'être seulement en ses propriétés, plus loin de sa source et peut fixer à ce plan des définitions et hypothèses qui cessent d'être incompatibles avec la précision mathématique. Reproduisant des traits de l'un et l'autre type, mathématique et métaphysique, le raisonnement du physicien est plus voisin de chacun d'eux, mais il utilise plutôt qu'il n'assimile le procédé mathématique, il s'en rapproche et demeure fondamentalement distinct. Le physicien ne saurait toujours s'encombrer d'une inutile rigueur mathématique, il est toujours débordé par la contingence qui lui échappe. L'erreur correspondante reçoit bien une limitation mathématique rigoureuse, mais la divergence reparaît à ce plan, toujours aussi essentielle; l'interprétation indispensable des calculs d'erreur ne pouvant s'appuyer que sur des raisons d'ordre physique. Trois attitudes d'esprit, trois sortes de certitude aussi, suffiraient à marquer trois branches autonomes du savoir : trois procédés susceptibles entre eux d'emprunt mutuel marquent aussi les dépendances multiples qu'une analyse plus objective a déjà mises en évidence.

Essai de définition de l'être mathématique.

Terminons en rassemblant les conclusions partielles auxquelles nous a conduit l'examen des propriétés de l'être mathématique, et en indiquant, à partir de la définition plus métaphysique que nous obtiendrons, quelques conséquences qui élargiront et transposeront l'harmonie dans laquelle les perceptions mathématiques jouent leur rôle en liaison avec toutes les autres. Nous avons en effet situé le domaine mathématique en le mettant en relation avec d'autres, mais il est clair qu'il n'y a là qu'une étape, et le sens même de notre enquête nous amène à préciser comment on pourrait la dépasser et lui donner sa véritable portée. Nous tentons donc d'abord une définition de l'être mathémathique en faisant correspondre à chacun des caractères que nous avons observés, un mot qui le désigne aussi adéquatement que possible, c'est-à-dire qui écarte tout caractère voisin.

L'ordre à l'être est l'expression la plus profonde des structures mathématiques, c'est donc de lui que nous devons partir et il incline à voir dans le réel mathématique une propriété. Les propriétés communiquent un mode nouveau, sans cependant rendre raison pour elles-mêmes d'une existence qu'elles empruntent; tel est bien l'une des fonctions de la mathématique, la dernière que nous ayons relevé. Mais « propriété » est évidemment beaucoup trop vague, et la philosophie, dont le point de départ est plus étendu que celui de la mathématique, accorde à ce mot des interprétations multiples entre lesquelles il faudra choisir, et auxquelles peut-être il faudra ajouter. Les propriétés sont à un autre point de vue les intermédiaires nécessaires qu'empruntent les substances pour entrer en communication les unes avec les autres, et il y aurait là un autre motif pour rapprocher l'être mathématique de cette catégorie. Il naît bien d'une rencontre de l'être et de l'esprit, de la substance qui est et de la substance qui pense, et nulle part cette rencontre n'est davantage une collaboration. Si les propriétés ne sont jamais absolues en ce sens qu'elles relèveraient d'un seul principe, il semble bien que la mathématique pousse cette loi à son extrême limite et qu'elle transpose en direction de la pure intellectualité, l'identité d'acte en laquelle Aristote faisait consister à bon droit toute sensation. Des propriétés faisant corps avec les substances aux sensations, la différence provient surtout du contexte; l'être mathématique se tient tout à la fois en cette double perspective se référant par nature à l'être, et ne s'achevant formellement que par une activité intellectuelle. Nous corrigeons donc immédiatement ce que « propriété » pouvait avoir de trop exclusif en ajoutant : propriété qui affecte l'être au regard de l'esprit. Et nous préciserons en tenant compte constamment de ce double principe. Ce que nous avons dit des fondements métaphysiques nous permet d'ajouter qu'il s'agit de l'être en tant qu'un et multiple : par quoi il faut sous-entendre : multitude transcendantale ou continu si on se place au pôle de l'être, multiplicité pensée et représentée ou support d'ordre, si on fixe le regard d'esprit. L'un et le multiple se révèlent, en ce cas comme en tout autre, transcendants; et ils affectent de la même façon l'être mathématique, en quelque phase de son développement qu'on le considère.

Remarquons encore que l'être mathématique échappe en un sens à toute contingence, la quantité qui pourrait l'introduire, étant dans son rôle de principe, conçue indépendamment de la matière; en d'autres termes l'appréhension par l'esprit de l'être en tant qu'un et multiple aboutit nécessairement à une formulation de type mathématique; on ne peut évidemment parler de nécessité absolue, parce que la conjonction de l'esprit et de l'être demeure du moins au plan créé, soumise à des conditions extrinsèques; mais il s'agit d'une nécessité qui dans son essence relève de l'immatérialité et qu'il faut simplement interpréter en fonction de l'esprit, et des conditions d'activité de celui-ci. Il est enfin un dernier caractère sur lequel nous avons insisté et dont notre définition doit tenir compte. L'être mathématique possède une certaine autonomie : son développement apporte une contribution effective à l'élaboration de ses principes, en sorte que les grandes lois de l'être qu'utilise la mathématique se trouvent qualifiées mathématiquement et sont plus qu'elles n'étaient avant qu'elles ne pénètrent dans le champ mathématique. D'autre part cette autonomie relative ne modifie en rien le fait dichotonomique qui est immanent à toute essence mathématique et qui est de type transcendantal. C'est dans leur dualité que les principes simples apportés par la métaphysique reçoivent le mode ultime qui permet leur utilisation au plan mathématique et qui transforme notamment la nature de leur composition. La critique que la mathématique porte sur elle-même n'échappe donc pas à la loi générale d'économie qui commande tout l'être, et l'être mathématique en particulier; elle travaille en sa dépendance, et s'applique, pour la transformer, à une composition qui déjà lui est donnée. Le mode nouveau ne modifie donc en rien la qualification ontologique de l'être mathématique qui demeure une propriété, mais elle le pose au regard de l'esprit comme un objet nouveau. Nous dirons donc « propriété objective » en entendant par là que l'être mathématique fait fonction de propriété vis-à-vis de l'être et d'objet vis-à-vis de l'esprit. Il dérive de l'être et assume une forme nouvelle qui est comme le type affermi et objectivé des lois de la pensée. C'est un être intermédiaire qui dépend tout à la fois de valeurs d'esprit et de valeurs réelles, mais qui suspendues à ces dernières impose à l'esprit le schéma de leur nécessité. Nous récapitulons : L'être mathématique est une propriété objective qui affecte nécessairement au regard de tout esprit l'être en tant qu'un et multiple.

Il n'est pas inutile de remarquer que cette définition distingue l'être mathématique des notions qui peuvent se rapprocher davantage de lui : soit qu'elles explicitent métaphysiquement les fondements objectifs de la mathématique, soit qu'elles opèrent une transcription, métaphysique encore, d'une saisie plus conceptuelle. La quantité est bien une propriété de l'être en tant qu'un et multiple et elle n'est que cela, mais elle s'insère nécessairement en tout être, et on n'en peut dire qu'elle soit relation à l'être, car elle n'existe précisément qu'en lui, elle en est un aspect intrinsèque et non détaché, elle est *objectivement* principe d'ordre ou de multiplicité et se voit attribuer une nature différente suivant la diversité de ses fonctions.

L'être mathématique est plus séparé. Parce qu'il est ontologiquement intermédiaire, il peut être relation, il s'applique à l'être comme de l'extérieur; il est le cadre de la quantité et s'en distingue en la précisant; il la réclame en son dedans pour trouver la plénitude de son sens. Inséparable et distinct, il récapitule donc en soi, en une essence nouvelle toutes les multiples fonctions et propriétés de la quantité réelle. Il en est un reflet intelligible, unité immatérielle en laquelle s'estompe toute multiplicité et où la riche diversité de l'être quantifié s'épanouit en composition homogène.

La vérité d'autre part est bien, elle aussi, une propriété qui naît de l'appréhension de l'être, elle affecte l'esprit se mesurant à l'être, à moins qu'elle ne soit l'être même, ou enfin la mesure de l'être. Remarquons tout d'abord qu'on pourrait étendre ces distinctions à la vérité mathématique elle-même, essayant de l'opposer à l'être mathématique. Nous nous bornons à dessein à l'être ou à la vérité mathématique sous leur forme la plus objective, la plus contraignante pour l'esprit, la plus extérieure à lui. Ce n'est donc pas envisagée sous l'un de ses premiers aspects que la vérité risque de se confondre avec l'être mathématique. Parle-t-on de vérité objective, cette vérité c'est l'être même, et non pas relation à l'être, il y a de l'être réel à l'être mathématique l'écart d'un devenir immatériel, tandis qu'il n'y a pas objectivement de différence entre la vérité et l'être et l'on ne pourrait dire que la vérité fût une propriété, au sens fort que nous avons attribué à ce mot. Parle-t-on de vérité formelle, cette vérité, non seulement est relation à l'être, mais elle vise une représentation trop fidèle et trop adéquate pour conserver un sens à l'état purement abstrait. L'écart dont nous parlions se trouve seulement franchi par une abstraction reconstructrice : l'être mathématique subsiste comme potentialité et comme représentation. Mais il ne se détermine actuellement à aucun type particulier de représentation; s'il ne trouve pas dans le mode séparé de sa subsistance sa plus grande valeur de réalité, il y revêt une sorte d'objectivité étrangère à celle que possède la vérité. En sorte que l'être mathématique n'est ni l'une ni l'autre de ces deux vérités, il tient l'entre deux. Ontologiquement la vérité ne souffre pas de position intermédiaire : pur concept, elle n'est rien, représentation elle s'identifie formellement avec l'être. L'être mathématique est susceptible de cette réalité intermédiaire : il n'est qu'une propriété, mais une propriété objective; il serait plus vrai de dire qu'il donne lieu à une vérité nouvelle, — vérité qui par lui rejoint l'être —, et non pas que la vérité impliquée dans l'être ou dans un de ses modes s'identifie à l'être mathématique. La vérité enfin, est mesure des choses, et c'est cette mesure que les choses, simples intermédiaires de l'idée à l'idée renvoient à l'esprit. Cette sorte de vérité est bien une propriété objective de l'être et une propriété essentiellement pensée. Comment donc ne coïncidera-t-elle pas avec l'être mathématique. Il nous suffira de rappeler que la mathématique ne concerne l'être qu'en tant qu'un et multiple, et que si cette propriété est première, elle n'implique pas toutes les autres; la vérité entend mesurer l'être en toute son amplitude, c'est-à-dire dans la multiplicité des modes que l'esprit y distingue. La mathématique est mesure d'une propriété plutôt que mesure de l'être. Elle vise moins, parce que d'ailleurs elle va moins profond, et ceci nous amène au second chef de distinction. L'unité en tant que mesure de l'être ne recèle pas encore ce germe proprement conceptuel, qui du point de vue strict de la mesure réelle, entraînerait des développements parasites et qui est cependant indispensable au développement mathématique. Le fait que la mathématique peut n'être qu'une mesure extrinsèque chevauchant sur le réel trouve ici sa cause cachée. L'être même en tant qu'un et multiple se prête, comme nous l'observions et comme nous devions l'attendre, aux éliminations et aux précisions progressives qui en font le point de départ de la métaphysique ou de la mathématique, de la mesure adéquate des êtres réels, ou de la mesure rigoureuse des êtres nécessairement possibles.

Ces réserves faites on ne saurait trop insister sur une similitude : l'être mathématique est bien un aspect de cette vérité mesure, il ne se réserve qu'un degré inférieur mais qui présente du moins l'avantage de pouvoir être exploré avec une rigueur et une précision qui n'ont nulle part leurs semblables. Et c'est sans doute par l'exactitude idéale d'appréhension vers laquelle il tend que l'être mathématique touche le meilleur de son objectivité : les vérifications expérimentales qui demeurent cependant approximatives imposent d'une façon plus tangible ce fait qui les dépasse de beaucoup; tout de même que les formes échappent à la potentialité matérielle qu'elles n'épuisent pas, la mathématique mesure sans cesse un champ d'application indéfiniment renouvelé. L'être mathématique préforme l'être et devient l'abrégé intelligible de ses propriétés.

L'être mathématique comme affectant l'être.

Ce rôle intermédiaire du complexe au simple, cet effort d'émergence hors le plan accidentel amorce un dépassement que notre analyse positive devait s'interdire, mais qu'elle n'exclut pas. Le principal des fondements de l'être mathématique est, avons-nous vu, la multitude transcendantale qui abstrait précisément de la matière et qui intervient simplement par là qu'elle laisse à l'état pur l'essence de la multitude. Si la pluralité se réalise à des degrés divers, si elle prend nom : multiplicité, multitude, diversité plus simple encore, ne pourra-t-il y avoir à chacun de ces échelons une réalité mathématique dont nous ne saisissons, comme de toutes choses, que les dernières dégradations, mais qui s'étend à l'octave de l'être. Et cette objectivité que l'on perçoit si différente du niveau subjectif moyen des mathématiciens, n'est-elle pas, elle aussi, la manifestation assez pauvre du mode particulier qui au regard de tout esprit capable de le penser affecte tout être considéré en son unité et en sa pluralité. C'est bien objectivement que l'être est à la fois un et divers; nos transcriptions conceptuelles malgré leur gaucherie prétendent être davantage que de purs procédés d'explication. Il n'y a pas de raison de les penser moins objectives dans les cas où elles ne peuvent que conclure, les expériences plus directes laissent entière cette question philosophique; et il n'y a pas de raison non plus pour les penser plus adéquates, lorsque les constatations ne nous apportent plus même l'apparence d'une vraisemblance. Il n'est donc nullement contradictoire de dépasser le domaine de l'être matérialisé qui paraissait circonscrire la mathématique. L'être mathématique n'est-il pas d'ailleurs intermédiaire : intermédiaire de l'être matériel à l'esprit, représentation privilégiée qui aspire sans y atteindre à un être séparé, et qui par ces tendances marque encore un autre aspect du rôle qui lui est dévolu. L'existence se purifie progressivement de la contingence, à mesure qu'elle se dématérialise; mais elle ne la dépouille jamais toute, aussi longtemps qu'elle demeure mesurée même immatériellement. C'est à l'intérieur de cet écart qui se réduit progressivement quand on remonte la hiérarchie des êtres que s'insère au plan quantitatif l'être mathématique. Il échappe à la contingence, et il conserve une potentialité, immatérielle comme celle de l'essence, et qui lui permet en son domaine d'être mesure. Mais l'être mathématique, vérité mesure concernant les êtres matériels, ne se transposerait-il pas en une vérité mesure jouant pour tout être un rôle que nous pressentons sans pouvoir le définir, mesure qui participant progressivement à l'actualisation et à la nécessité des êtres qu'elle affecterait, conserverait néanmoins une nécessité essentielle inchangée ? Vérité mesure toujours intermédiaire entre l'être réel et ce même être supposé adéquatement réalisé; vérité mesure enfin qui notionnellement, et sous un mode transposant celui que nous avons observé refléterait la composition de l'être auquel elle s'attache. Cette métamathématique, si on peut ainsi l'appeler, demeurerait bien une mesure pensée, puisqu'elle perdrait du coup sa raison d'être si on la supposait réalisée à un plan si immatériel qu'il fût, et elle serait moins simple que la pure pensée de l'essence; mais procédant d'une réalité et d'une pensée également transposées et se faisant face, elle serait toujours du point de vue très précis de l'un et du multiple une mesure de l'être envisagé. Ceci n'apportera bien certainement aucune contribution à notre mathématique terrestre; nous voulions simplement signaler qu'il pourrait y avoir pour elle possibilité d'un dépassement sous un mode qui d'ailleurs nous échappe. Le fait que nous soyons assujettis à la construire par le bas ne préjuge pas plus de sa véritable nature que l'expérience n'autorise à conclure que l'être sensible soit tout l'être.

L'être mathématique n'est donc pas un prolongement conceptuel de l'être concret : il est cela et bien autre chose. Il est, avant d'être soutenu par l'être, une préformation des propriétés de l'être. Et son être, c'est de faire appel sur l'être. Même conçu abstraitement l'être mathématique ne se réduit pas à une catégorie logique de l'expérience; il conserve par structure une possibilité actuelle capable de ramener l'esprit à tout moment à un réel dématérialisé réduit à un ordre et à une nécessité purs. Doit-on dire que l'être mathématique soit séparé ? Non puisqu'il est à priori toute forme sensible, toute loi, tout ordre, en un mot le schème universel de l'être expérimenté. Oui, puisqu'il est précisément tout ordre et que l'ordre qui le réalise et s'offre à l'observation n'en est qu'une sorte d'illustration défaillante puisqu'elle exclut en se réalisant les possibilités opposées que la mathématique conserve simultanément. L'être mathématique est la loi des choses dont il paraît dépendre, et c'est pourquoi la légende est qu'il en naît, mais comme l'esprit naît d'un corps. Il est lui-même en polarisant tout. Ni il n'épuise le tout, ni ce tout ne le réalise : la contingence n'est pas l'ordre, un ordre n'est pas tout ordre. La composition intime qui le caractérise le rattache au monde changeant, sa nécessité est comme un reflet d'éternité. En son contenu le plus sûr, il peut n'être qu'un degré fait pour nous d'une mathématique plus compréhensive. Intermédiaire en toute façon, dans l'explication de l'univers comme dans son mystère. De l'expérience à ses représentations comme de ces représentations aux lois éternelles, c'est l'être mathématique qui est l'instrument du progrès intelligible; de la contingence irréductible de l'être matériel à la nécessité simple et insondable de l'acte pur, la nécessité mathématique marque un jalonnement : incapable de réduire la contingence, elle y échappe cependant en même temps qu'à l'existence; entre l'ordre de l'univers matériel dégradé par les éléments qu'il organise et l'ordre subsistant qui est aussi être subsistant, le cheminement de l'esprit rencontre l'ordre de type mathématique qui plie devant soi une symbolique parfaitement adaptée; entre l'être qui inflige à l'observation le mystère réel de son existence et le principe de son explication l'être mathématique pose le point de départ nécessaire et irrécusable de références ordonnées dont l'échelle ne s'arrête que là où l'ordre et la nécessité sont l'être. C'est sur ce sommet et en ce point que s'achève la dichotomie fondamentale dont nous sommes partis.

Le Saulchoir.

M. L. GUÉRARD DES LAURIERS, O. P.