Theoria nova phaenomenis electricis applicanda.

(*Auctore* CAROLO NEUMANN, *Tubingæ*).

Quomodo leges in phaenomenis electricis dominantes ex una fere suppositione eruere liceat, leviter hic adumbrare mihi proposui.

§ 1. Fundamentum quo theoria superstructa est conspicuum redditur.

Quod ad verborum usus attinet, optima mihi videtur eorum auctorum consuetudo loquendi, qui volunt, vim vivam appellandam esse semi-summam massarum respective multiplicatarum per velocitatum quadrata; porro potentiale appellandam esse eam coordinatarum functionem, cujus coefficientes differentiales negativi aequentur componentibus potentiarum.

Quibus positis, praeclarum vis vivae principium hanc induit formam:

$$[\text{Vis viva}] + [\text{Potentiale}] = \text{Const.},$$

principium autem gravissimum Hamiltonianum hancce:

$$\delta \int \Big([\text{Vis viva}] - [\text{Potentiale}] \Big) dt = 0,$$

ubi integrale extensum est in temporis spatium quodlibet, variatioque δ tali modo instituenda, ut positiones et velocitates in illius spatii limitibus pro constantibus habeantur.

Potentiis datis, datum esse potentiale, ac vice versa, potentiali dato, datas esse potentias, satis notum est. Unde apparet in traditam mechanices theoriam nil novi introduci statuendo, potentiale principalem esse causam, ab isto procreari potentias, scilicet potentiale significare veram causam motricem, potentias autem tantummodo formam vel speciem exprimere ab illa causa sibi paratam. Nova vero introducitur suppositio, statuendo, causam illam motricem, quam potentiale vocamus, ab altera massa ad alteram non subito sed progrediente tempore transmitti, atque — ad instar lucis — per spatium propagari celeritate quadam permagna et constante. Quam celeritatem denotabimus litera c.

Ista suppositio, conjuncta cum hac altera, principium Hamiltonianum normam exprimere supremam ac sacrosanctam nullis exceptionibus obviam, fit suppositio in theoria nostra fundamentalis, ex qua (absque ulla ulteriore suppositione) leges illae notissimae a cel.[is] AMPÈRE, NEUMANN, WEBER, conditae sua sponte emanabunt.

Facile perspicitur, fundamentalem suppositionem nostram, ponendo $c = \infty$, prorsus in vulgarem suppositionem, quod potentiale subito per spatium transmittatur ab altera ad alteram massam. Unde apparet, nostram, ut generaliorem, involvere suppositionem vulgarem.

§ 2. Pervenitur ad legem Weberianam.

Motum duorum tantum punctorum m et m_1, quorum alterum ab altero sollicitatur, intuentibus nobis ac recordantibus, quod de potentialis propagatione suppositum sit, duo potentialis genera discernenda sunt, potentiale emissivum et Potentiale receptivum.

Potentiale emissivum appellabimus id, quod ab utroque puncto emittitur tempore t, aliquanto postea ad alterum punctum perveniens. Designante r mutuam punctorum distantiam respectu temporis t, porro designante ω_0 potentiale emissivum respectu temporis ejusdem, leges notissimae a NEWTONO aliisque conditae docent, $\omega_0 = \frac{m m_1}{r}$, vel generalius fieri:

$$\omega_0 = m m_1 \phi, \tag{1}$$

ubi $\phi = \phi(r)$ denotet datam ipsius r functionem quamlibet.

Potentiale receptivum vocabimus id, quod utrumque punctum recipit tempore t, aliquanto antea ab altero puncto emissum. Unde elucet, potentiale receptivum respectu dati temporis cujuslibet formatum idem esse ac potentiale emissivum respectu temporis cujusdam prioris formatum.

Sit rursus r mutua punctorum distantia tempore t, et sit respectu ejusdem temporis ω potentiale receptivum; invenitur post calculos faciles:

$$\omega = w + \frac{d\pi}{dt}, \tag{2}$$

siquidem ponitur:

$$\left.\begin{aligned} w &= mm_1 \left[\varphi + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \right], \\ \pi &= mm_1 \left[\chi + \left(\frac{d\Phi}{dt}\right) \right]. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Quibus in formulis φ denotat eandem atque in potentiali emissivo functionem, denotantque ψ, χ, Φ alias quasdam solius r functiones, quae e data functione φ facile erui queunt per operationes plane elementares; est ex. gr.:

$$\psi = \frac{1}{c} \int \sqrt{-r \frac{d\varphi}{dr}} \cdot dr. \tag{4}$$

Expressio φ a propagationis celeritate vacua est, id quod patet ex ipsa functionis φ definitione. Expressiones autem ψ, χ factore $\frac{1}{c}$, et expressio Φ factore $\left(\frac{1}{c}\right)^2$ implicatae sunt.

Adnotandum est, in casu speciali $\varphi = \frac{1}{r}$ fieri $\psi = \frac{2\sqrt{r}}{c}$.

Potentiale receptivum ω est summa duorum terminorum w et $\frac{d\pi}{dt}$, quorum suo uterque ornetur nomine. Videlicet respectu investigationum sequentium terminus w appelletur potentiale effectivum, terminus $\frac{d\pi}{dt}$ potentiale ineffectivum.

Ex principio Hamiltoniano, quippe in quod summum imperium collatum sit, sequitur, punctorum m et m_1 motum fieri talem, qui praescribatur formula:

$$\delta \int (\tau - \omega)\, dt = 0,$$

denotante ω potentiale receptivum modo commemoratum, et denotante τ vim amborum punctorum vivam. Quae formula, substituendo pro ω ipsius valorem $w + \frac{d\pi}{dt}$, hanc induit speciem:

$$\delta \int \left(\tau - w - \frac{d\pi}{dt}\right) dt = 0,$$

vel (quod idem est) hancce:

$$\delta \int (\tau - w)\, dt = 0.$$

Inde, variatione δ peracta, proveniunt sex aequationes differentiales punctorum motum complete determinantes. Istae aequationes docent, quomodo causa illa motrix, quam potentiale vocamus, vim suam edat, docentque, quaenam ab illa causa procreentur potentiae; obtinentur haece propositiones;

I. Agatur de motu duorum punctorum m et m_1, sit r mutua punctorum distantia, porro sit $\frac{mm_1}{r}$ vel generalius $mm_1 \phi(r)$ potentiale punctorum emissivum; sollicitabuntur puncta potentia quadam R, quae semper ejusdem ac linea r directionis est.

II. Concipiatur R tanquam potentia repulsiva, porro sit w potentiale punctorum effectivum (ex dato potentiali emissivo sponte sua evadens et supra (3) commemoratum); valor ipsius R semper aequabitur coefficienti variatorio negativo ipsius w respectu r formato.

Unde computatione peracta provenit:

$$R = mm_1 \left[-\frac{d\varphi}{dr} + 2 \frac{d\psi}{dr} \frac{d^2\psi}{dt^2} \right]. \tag{4}$$

Quae formula in casu speciali $\varphi = \frac{1}{r}$, $\psi = \frac{2\sqrt{r}}{c}$ hanc induit speciem:

$$R = mm_1 \left[\frac{1}{r^2} + \frac{4}{c^2\sqrt{r}} \frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2} \right], \tag{4.a}$$

vel (quod idem est) hancce:

$$R = \frac{mm_1}{r^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2r}{c^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right]. \tag{4.b}$$

Statim elucet, formulam (4.a) seu (4.b) ipsam legis Weberianae expressionem esse. In transitu adnotare placet, formulam generaliorem (4) plane congruere cum ea lege, a qua ante decem annos equidem profectus sum in dissertatione inaugurali inscripta; « *Explicare tentatur quomodo fiat, ut lucis planum polarisationis per vires electricas vel magneticas declinetur* ».

Systema completum quaestionum illo tempore a me susceptarum in publicum edidi aliquanto postea in libello inscripto: « *Die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes* » (Halle, 1863).

Rebus modo addigitatis generaliores adjungere licet investigationes, quae perducunt ad hunc exitum:

I. Sit W potentiale effectivum systematis punctorum cujuslibet, sint x, y, z coordinatae puncti, cujus massa m; componentes potentiae punctum m sollicitantis semper aequabuntur coefficientibus variatoriis negativis potentialis W respectu x, y, z formatis.

II. Sit P ea illius potentiae componens, qua punctum impellitur in data directione p qualibet; valor ipsius P semper aequabitur coefficienti variatorio negativo potentialis W respectu p formato.

Tandem enuntiare debemus, quaenam sint quantitates, quas in antecedentibus vocavimus coefficientes variatorios.

Sint $u, v, \ldots w$ indeterminatae functiones unius variabilis (ex. gr. temporis) vel indeterminatae functiones complurium variabilium $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$; porro sit F data expressio composita ex $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, $u, v, \ldots w$ et ex coefficientibus differentialibus functionum $u, v, \ldots w$ respectu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ formatis, atque agatur de Variatione

$$\delta \int^{(n)} F \, d\alpha_1 \, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n \tag{A.}$$

i. e. de variatione

$$\int^{(n)} \delta F . d\alpha_1 \, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n \tag{B.}$$

respectu ipsorum $u, v, \ldots w$ instituenda. Notissimum est, integrale (B) semper transformari posse in duorum integralium summam, quorum alterum n^{tuplex} variationibus $\delta u, \delta v, \ldots \delta w$ implicatum, vacuum sit istarum variationum coefficientibus differentialibus, alterum autem $(n-1)^{tuplex}$ illis coefficientibus differentialibus affectum. Integrali priori designato per

$$\int^{(n)} (U\delta u + V\delta v + \cdots W\delta w) \, d\alpha_1 \, d\alpha_2 \cdots d\alpha_n , \tag{C.}$$

quantitates $U, V, \ldots W$ illae sunt, quae a nobis vocantur coefficientes variatorii ipsius F respectu ipsorum $u, v, \ldots w$ formati.

§ 3. De legibus in Repulsione atque Inductione electrica dominantibus.

Antecedentibus probavimus, suppositionem nostram fundamentalem sua sponte suppeditare legem universalem a cel.° Weber enuntiatam. Nil igitur dubium, quin ex eadem suppositione redundare debeant et ipsae illae speciales leges notissimae, quae de repulsione atque inductione electrica conditae sunt a cel.is Ampère, Neumann, Weber.

Attamen istam materiam accuratius examinabimus ac monstrabimus in derivandis illis legibus nil fere interesse, utrum ab hypothesi dualistica an unitaria proficiscamur. Monstrabimus enim quae ex utraque hypothesi consequantur, ubique inter se congruere, solis iis casibus exceptis, in quibus agatur de inductione fluminum electricorum non clusorum. More scilicet consueto flumen quodlibet electricum vocamus clusum aut non clusum, prout corpora ponderabilia flumen continentia rigide inter se cohaerent aut commoventur aliud respectu alius.

Sit ds elementum fluminis electrici, porro sint $+eds$ et $-eds$ quantitates fluidorum positive et negative electricorum in elemento ds contentorum, denique sint $s' = \frac{ds}{dt}$ et S' velocitates, quibus illae quantitates respectu ejusdem directionis s animantur.

Si ponitur $S' = -s'$, fluida illa aequa celeritate feruntur in directiones oppositas, id quod plane congruit cum hypothesi vulgari dualistica.

Sin ponitur $S' = 0$, fluidum negativum concipitur quiescens, quasi vinculis adstrictum ad materiam ponderabilem, vel idem atque ista materia. Posito igitur $S' = 0$, motu animatum est fluidum unum. Quae conjectura ea est, quam supra (brevitatis causa) hypothesin Unitariam appellavimus.

Utramque examinantes hypothesin ac respectu functionis ϕ cujuslibet, pervenimus ad hasce propositiones:

I. Teneant ds, eds, $s' = \frac{ds}{dt}$ significationes commemoratas, habeantque $d\sigma$, $\eta d\sigma$, $\sigma' = \frac{d\sigma}{dt}$ analogas significationes respectu alterius elementi cujuslibet, porro sit r mutua amborum elementorum distantia, denique sit W potentiale amborum elementorum effectivum; semper fit:

$$W = \frac{g^2 ds\, d\sigma . e s' \eta \sigma'}{2} \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}, \tag{5}$$

ubi est $g=4$ aut $=2$, prout ab hypothesi dualistica aut unitaria proficiscimur. Qui ipsius W valor universalis est, pertinens ad flumina electrica contenta in corporibus ponderabilibus seu quiescentibus seu ad arbitrium commotis.

In casu speciali $\phi=\frac{1}{r}$ fieri $\psi=\frac{2\sqrt{r}}{c}$, supra traditum est. Illo igitur casu fit:

$$W=\left(\frac{g}{c}\right)^2 \frac{ds\,d\sigma . es'\eta\sigma'}{2r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial \sigma} . \tag{5.a}$$

II. Mutua amborum elementorum potentia repulsiva R semper aequabitur coefficienti variatorio negativo potentialis W respectu r formato. Unde suppeditatur formula:

$$R=g^2 ds\,d\sigma . es'\eta\sigma' \frac{d\psi}{dr} \frac{\partial^2\psi}{\partial s \partial\sigma}, \tag{6}$$

quae, positis $\phi=\frac{1}{r}$, $\psi=\frac{2\sqrt{r}}{c}$, hanc induit speciem:

$$R=\left(\frac{g}{c}\right)^2 \frac{2\,ds\,d\sigma . es'\eta\sigma'}{\sqrt{r}} \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s \partial\sigma}, \tag{6.a}$$

vel (quod idem est) hancce:

$$R=\left(\frac{g}{c}\right)^2 \frac{ds\,d\sigma . es'\eta\sigma'}{r^2} \left(r\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial\sigma}-\frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\right). \tag{6.b}$$

Formulam (6.*a*) seu (6.*b*) ipsam legis Ampèrianae expressionem esse, primo intuitu elucet.

III. Sint ds, $d\sigma$ elementa fluminum electricorum *clusorum*; potentia electromotorica E ab $d\sigma$ in ds in directione s exercita semper aequabitur coefficienti variatorio negativo potentialis W respectu s formato. Unde eruitur formula:

$$E=\frac{d\overline{W}}{dt}, \tag{7}$$

siquidem $\overline{W}$ ipsius W valorem pro $s'=1$ denotat. Quae potentiae E expressio universalis est, aeque pertinens ad inductionem, quae oritur ex mutatis fluminum intensitatibus atque ad inductionem alteram, quae oritur ex mutatis positionibus.

Manifestum est, formulam (7) plane congruere cum lege Neumanniana.

§ 4. De Vis vivae principio.

Statuimus, principium Hamiltonianum habendum esse tanquam principium supremum ac sacrosanctum, permanens atque immutabile. Vel ex ipsa ista suppositione eruere licet, principium vis vivae et ipsum semper valere, at formam consuetam non semper tenere.

Si proponantur duo tantum puncta m et m_1, mutuum punctorum potentiale effectivum w exprimitur per

$$w = mm_1 \left[\phi + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right]. \tag{8}$$

Quae formula, jam supra (3) commemorata, sic exhibeatur:

$$w = u + v, \tag{9}$$

ubi

$$\left.\begin{aligned} u &= mm_1 \phi, \\ v &= mm_1 \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Terminorum u et v priorem constante c vacuum, posteriorem factore $\left(\frac{1}{c}\right)^2$ implicatum esse, facile eruitur ex iis, quae de functionibus ϕ, ψ supra tradita sunt.

Sponte elucet, quiescentibus punctis terminum v evanescere potentialeque w abire in terminum u. Itaque appellabimus u potentiale staticum et v potentiale motoricum. Occasione data, adnotandum est, potentiale staticum semper ejusdem ac potentiale emissivum valoris fieri, id quod vel a priori eruere licet ex ipsis istorum potentialium definitionibus.

Iam agatur de motu systematis punctorum cujuslibet, et sit W potentiale systematis effectivum. Istius W valor eodem modo, quo antea ipsius w valor, in duos terminos discerpatur:

$$W = U + V. \tag{11}$$

Quo peracto, alter terminus U, constante c vacuus, repraesentat potentiale systematis staticum; alter V, factore $\left(\frac{1}{c}\right)^2$ implicatus, potentiale systematis motoricum. Quod, investigatione instituta, de istis potentialibus et de systematis vi viva invenimus, sic pronuntiare licet:

Agatur de motu systematis punctorum cujuslibet; vis viva potentiali statico aucta et potentiali motorico diminuta valorem tenebit constantem.

Erit igitur:

$$T + U - V = \text{Const.}, \tag{12}$$

denotante T vim systematis vivam. Adnotandum videtur: expressionem T a solis velocitatibus, expressionem U a solis positionibus punctorum pendere; expressionem autem V functionem esse et velocitatum et positionum.

Secundum vulgarem suppositionem est $c = \infty$. Ponendo autem $c = \infty$ terminus V, quippe qui factore $\left(\frac{1}{c}\right)^2$ implicatus sit, evanescit, formulaque (12) abit in formulam illam notissimam $T + U = \text{Const.}$, cujus in § 1 mentionem fecimus.