

Riemann, Betti and the Birth of Topology

ANDRÉ WEIL

Communicated by C. TRUESDELL

This *Archive* has recently published a conscientious study ([1]) of the relations between RIEMANN and his Italian contemporaries. Unfortunately the writer missed what might otherwise have been the gem of his collection – two letters from BETTI to his colleague and friend TARDY, describing in detail his conversations with RIEMANN on “analysis situs”. They seem to be almost unknown, in spite of having been duly quoted by BOURBAKI in one of the historical notes to his *Topology* (cf. [2]); they were originally published by G. LORIA, as one of the appendices to his obituary notice on TARDY ([3]). They are as follows (I have merely corrected obvious misprints):

Firenze, 6 ottobre 1863.

Mio caro Placido,

Ho nuovamente parlato con Riemann della connessione degli spazii, e me ne sono fatto una idea esatta.

Uno spazio si dice semplicemente connesso quando ogni superficie chiusa, contenuta in esso, ne limita da sé sola completamente una parte, e ogni linea chiusa contenuta contemporaneamente in esso limita completamente una superficie contenuta interamente nello stesso, ossia può riguardarsi da sé sola come il contorno completo di una superficie contenuta interamente nello spazio stesso.

Lo spazio racchiuso da un ellissoide è uno spazio semplicemente connesso. Lo spazio racchiuso da due sfere concentriche non è semplicemente connesso, perché una terza sfera concentrica compresa fra le due, sebbene chiusa e contenuta nello spazio, non limita da sé sola una parte dello spazio stesso. In questo spazio però una linea chiusa qualunque può riguardarsi come l'intero contorno di una superficie, tutta contenuta nello spazio stesso. Questo spazio può ridursi semplicemente connesso per mezzo di una sezione lineare, cioè di una linea che va dalla superficie esterna a un punto della sfera interna. Dovendo i punti di questa sezione riguardarsi allora come esterni allo spazio, le sfere concentriche comprese fra le due non sono più comprese interamente nello spazio, perché attraversano la sezione, e quindi lo spazio, coll'aggiunta di una sezione lineare, è ridotto semplicemente connesso.

Lo spazio racchiuso in un anello pieno non è semplicemente connesso, perché una linea come l'asse non può riguardarsi come il contorno completo di una superficie contenuta tutta intera nello spazio. Ogni superficie chiusa, però, contenuta interamente in questo spazio, ne limita da sé sola completamente una parte. Questo spazio si riduce semplicemente connesso mediante una sezione superficiale semplicemente connessa, che taglia l'anello normalmente a l'asse interno dell'anello stesso.

Uno spazio racchiuso da un anello vuoto non è semplicemente connesso, perché una superficie chiusa, che racchiude l'asse interno ed è dentro la parte piena dell'anello, non limita da sé sola una parte di spazio, e una linea parallela all'asse interno contenuta nella parte piena dello spazio non può formare il contorno completo di una superficie contenuta tutta quanta nello spazio stesso. Si riduce semplicemente connesso mediante una sezione lineare che va da un punto della superficie esterna ad uno della interna, e mediante una sezione superficiale che unisca tra loro la superficie esterna, l'interna e la sezione lineare, e che è semplicemente connessa.

I tre spazii che ho considerati hanno differenti ordini di connessione, perché l'ordine di connessione dipende dal numero delle sezioni superficiali semplicemente connesse, e dal numero delle sezioni lineari mediante le quali si riduce semplicemente connesso. Questo numero rimane lo stesso, comunque si facciano queste sezioni. L'ordine di connessione è quindi rappresentato da due numeri; denotiamolo con (m, n) quando sono m le sezioni superficiali e n le lineari che lo rendono semplicemente connesso. Sarà $(0, 1)$ l'ordine di connessione dello spazio racchiuso da due sfere, una interna all'altra. Sarà $(1, 0)$ l'ordine di connessione di un anello pieno. Sarà $(1, 1)$ l'ordine di connessione d'un anello vuoto. La generalizzazione per più dimensioni è facile; e l'importanza, per gli integrali multipli, di tutta questa teorica, è evidente. La nozione delle sezioni è venuta in mente a Riemann per una definizione che gliene ha dato Gauss in un colloquio familiare, parlando di altro soggetto. Nei suoi scritti si trova che egli dice che l'analisi di sito, cioè questa considerazione delle quantità indipendentemente dalla loro misura, è "wichtig", e negli ultimi anni della sua vita si è occupato molto di un problema di analisi di situazione: cioè, dato un filo che si avvolge più volte e conoscendo, nei punti dove s'interseca, la parte che rimane sopra e la parte che rimane sotto, determinare se potrà svolgersi senza annodarlo; problema che non è riuscito a risolvere altro che in casi particolari ...

Firenze, 16 ottobre 1863.

Mio caro Placido,

Riemann dimostra, con molta facilità, che si può ridurre uno spazio qualunque ad essere semplicemente connesso, mediante sezioni lineari e sezioni superficiali semplicemente connesse.

Uno spazio connesso non muta l'ordine della sua connessione se si restringono e distendono le superficie che lo limitano, facendone muovere i loro punti verso l'interno dello spazio stesso sino a far perdere allo spazio una o più dimensioni, purché questo restringimento e questa diffusione avvenga con continuità e senza rotture. Affinché uno spazio sia semplicemente connesso, è necessario che così si

possa ridurre a un sol punto. Una superficie che così può ridursi a un punto, è semplicemente connessa senza potersi ridurre a un punto senza che si faccia in essa un punto di sezione; per esempio una superficie sferica, dove, se vuoi ridurla a un punto, devi fare un buco che estendi continuamente sinché la superficie si riduca a un punto.

Per maggior chiarezza riprenderò gli esempi dell'altra volta.

Una sfera cava, se tu restringi la superficie esterna e distendi l'interna sino a renderle infinitamente vicine, perde una dimensione e si riduce ad una superficie sferica, la quale, mediante un punto di sezione, può ridursi ad un sol punto. Questo punto di sezione, che ha una dimensione di meno di quella che aveva nello spazio, corrisponde ad una sezione lineare. Dunque una sfera cava si riduce semplicemente connessa mediante una sezione lineare; il suo ordine di connessione è $(1, 0)$.

Un anello pieno, se tu restringi continuamente la superficie esterna fino a che le sue pareti interne siano infinitamente vicine, perde due dimensioni e si riduce a una linea circolare, la quale con un sol punto di sezione si riduce a un sol punto. Questo punto di sezione, che ha due dimensioni di meno che non nello spazio primitivo, corrisponde ad una sezione superficiale che, potendo ridursi a un punto, è semplicemente connessa. Dunque l'ordine di connessione di un anello pieno è $(0, 1)$.

Un anello vuoto, se tu restringi la superficie esterna e distendi la interna fino a ridurle infinitamente vicine perde una dimensione e si riduce ad una superficie anulare, la quale, per essere ulteriormente ridotta, richiede un punto di sezione corrispondente ad una sezione lineare. Allargando questo buco indefinitamente sinché i suoi bordi risultano dalle parti opposte infinitamente vicine, la superficie anulare perde un'altra dimensione e si riduce a due linee circolari, una delle quali ha il centro comune coll'anello, l'altra ha il centro sull'asse interno all'anello, e i piani loro puoi immaginarli perpendicolari tra loro. Per ridurre uno di questi cerchi al solo punto che hanno comune, occorre un punto di sezione; poi un altro punto di sezione per ridurre ad un punto il circolo rimasto. A questi due punti di sezione, che hanno due dimensioni di meno che non nello spazio, corrispondono, in quello, due sezioni superficiali semplicemente connesse. Dunque l'ordine di connessione dell'anello vuoto è $(1, 2)$, e non $(1, 1)$ come per inavvertenza ti aveva scritto l'altra volta.

Una sfera con un vuoto anulare nell'interno, se tu restringi la superficie sferica, perde una dimensione e si riduce ad una superficie piana che unisce i bordi interni della superficie anulare. Con un punto di sezione si riduce questa superficie a una linea circolare che ha il centro nell'asse interno dell'anello, e a una superficie circolare piana che ha il centro comune coll'anello. Con un altro punto di sezione la linea circolare si riduce a un punto del bordo della superficie circolare piana, che senza altre sezioni puoi ridurre a un punto. Dunque una sfera con un vuoto anulare si riduce semplicemente connessa con una sezione lineare e con una sezione superficiale semplicemente connessa. Il suo ordine di connessione è $(1, 1)$.

Generalizzando, si vede che una varietà a n dimensioni si può, sempre con restringimenti continuati e senza rotture, ridurre a sole $n-1$ dimensioni. Mediante punti di sezione si potrà ridurre a $n-2$ dimensioni, mediante altri punti di sezione a $n-3$ dimensioni; e così di seguito, sino a ridurla a un punto. Ai primi punti di sezione corrispondono sezioni lineari; ai secondi sezioni superficiali semplicemente connesse; ai terzi, sezioni di tre dimensioni semplicemente connesse, ...; agli ultimi, sezioni di $n-1$ dimensioni semplicemente connesse.

Il numero delle sezioni lineari è eguale al numero dei moduli di periodicità di un integrale $(n-1)$ -uplo; il numero delle sezioni superficiali semplicemente connesse al numero dei moduli di periodicità di un integrale $(n-2)$ -uplo ...; il numero delle sezioni di $(n-1)$ dimensioni semplicemente connesse, al numero dei moduli di periodicità di un integrale semplice, presi tutti nello spazio considerato. Quindi, essendo determinato il numero dei moduli di periodicità, devono essere sempre gli stessi i numeri delle differenti sezioni a ridurre lo spazio semplicemente connesso, comunque si facciano ...

Any comment would seem superfluous. At first I had planned, for the convenience of some readers, to append a literal translation; but BETTI's style in those letters not only lacks precision, but is so diffuse that a free translation, somewhat abridged, seems preferable. "Contorno" has been rendered by "boundary", "bordo" by "edge", "sezione" by "cut". For "punto di sezione", "sezione lineare", "sezione superficiale", "sezione di n dimensioni", I have written "point-cut", "1-cut", "2-cut", " n -cut", respectively; for "ordine di connessione", "order of connectivity"; for "moduli di periodicità", simply "periods". Finally, SC stands for "semplicemente connesso" ("simply connected", obviously in the sense of "homologically trivial").

(First letter) I have newly talked with Riemann about the connectivity of spaces, and have formed an accurate idea of the matter.

A space is called SC when every closed surface contained in it makes up the whole boundary of part of the space, and every closed line contained in it is the whole boundary of a surface also contained in it.

The interior of an ellipsoid is an SC space. The space bounded by two concentric spheres is not SC, since a third concentric sphere, comprised between those two, is not the complete boundary of part of the space, while it is closed and wholly contained in it. In that space, however, every closed line may be regarded as the entire boundary of a surface contained in the space. This space can be reduced to an SC space by a 1-cut, *viz.*, by a line going from the outer to the inner sphere. After that cut is made, its points have to be regarded as being outside the space, and the concentric spheres between the two given ones are no more contained in the space, since they intersect the cut.

The space making up a solid ring is not SC, since a line, such as the axis, is not the boundary of a surface inside the space. However, every closed surface contained in it does bound part of it. One reduces it to an SC space by an SC 2-cut, cutting the ring normally to the axis inside the ring itself.

The space making up a hollow ring is not SC, since a closed surface within the solid portion of the ring, containing its inner axis, does not bound any part of the space, and a line parallel to the axis, within that same space, is not the boundary of a surface inside the space. One reduces it to an SC space by a 1-cut going from the outer to the inner surface, and by an SC 2-cut joining together the outer surface, the inner surface and the 1-cut.

The three spaces just considered have different orders of connectivity, this being (m, n) if the numbers of SC 2-cuts, and of 1-cuts, needed to make it SC are m and n respectively. The order of connectivity of the space between two spheres

is $(0, 1)$; that of the solid ring is $(1, 0)$, and that of the hollow ring is $(1, 1)$. The generalization to higher dimensions is easy; the importance of this theory, for the theory of multiple integrals, is obvious. What gave Riemann the idea of the cuts was that Gauss defined them to him, talking about other matters, in a private conversation. In his writings one finds that *analysis situs*, that is, this consideration of quantities independently from their measure, is “wichtig”; in the last years of his life he has been much concerned with a problem in *analysis situs*, namely: given a winding thread and knowing, at every one of its self-intersections, which part is above and which below, to find whether it can be unwound without making knots; this problem he did not succeed in solving except in special cases ...

(Second letter) Riemann proves quite easily that every space can be reduced to an SC space by means of 1-cuts and SC 2-cuts.

A connected space does not change its order of connectivity if one extends or retracts the surfaces of its boundary, their points being moved towards the inside of the space until it loses one or more dimensions, provided this happens continuously and without breaks. For a space to be SC, it must be possible to reduce it to a point in this manner. A surface which can be thus reduced to a point is SC; but it may happen that it cannot be reduced to a point unless one makes in it a point-cut; for instance, the surface of a sphere, where, in order to reduce it to a point, one must make a hole and extend it continuously until the surface is so reduced.

For greater clarity I will take up again the examples of last time.

A hollow sphere, if you retract the outer surface and extend the inner one until they become infinitely close to each other, loses one dimension and is reduced to a spherical surface, which, by means of a point-cut, can be reduced to a single point. This point-cut has one dimension less than it had in the space [before the deformation], so that it corresponds [there] to a 1-cut. The order of connectivity is $(1, 0)$.

A solid ring, if you retract the outer surface until its inside walls become infinitely close to one another, loses two dimensions and gets reduced to a circular line, which, by means of a point-cut, can be reduced to a point. The point-cut, having two dimensions less than it had in the original space, corresponds to a 2-cut in that space, which is SC since it can be reduced to a point. Therefore the order of connectivity is $(0, 1)$.

A hollow ring, if you retract the outer surface and extend the inner one until they become infinitely close, loses one dimension and gets reduced to a ring-shaped surface, which, to be further reduced, requires a point-cut, corresponding to a 1-cut [in the original space]. By a dilatation of this hole, one can make its edges come infinitely near to one another; then the ring-shaped surface loses one further dimension and is reduced to two circular lines, one of which has the same center as the ring, while the other has its center on the inner axis of the ring; you may imagine them as having their planes perpendicular to one another. In order to reduce one of these circles to the one point they have in common, a point-cut is needed, and then another point-cut in order to reduce the remaining circle to a point. These two point-cuts correspond to two SC 2-

cuts in the original space, so that its order of connectivity is $(1, 2)$, and not $(1, 1)$ as I wrote inadvertently the other day.

Take now a sphere from whose inside a ring has been hollowed out; retracting its outer surface, it loses one dimension and is reduced to a plane surface joining together the inner edges of the ring-shaped surface [plus the latter surface]. With a point-cut this is reduced to a circular line with its center on the inner axis of the ring, and a plane circular surface with its center at the center of the ring. With another point-cut the circular line is reduced to a point on the edge of the circular surface, which can then be reduced to a point without further cuts. Therefore the space can be made SC with a 1-cut and an SC 2-cut. Its order of connectivity is $(1, 1)$.

Generalizing this, one sees that a variety with n dimensions can always, by means of continuous retractions without breaks, be reduced to only $n-1$ dimensions, then, by means of point-cuts, to $n-2$ dimensions, then, again by means of point-cuts, to $n-3$ dimensions, and so on, until it is reduced to a point. The first point-cuts correspond to 1-cuts; the next, to SC 2-cuts; ...; the last ones, to SC $(n-1)$ -cuts.

The number of 1-cuts is equal to the number of periods of an $(n-1)$ -uple integral; the number of SC 2-cuts, to the number of periods of an $(n-2)$ -uple integral; ... the number of SC $(n-1)$ -cuts, to the number of periods of a simple integral, all these being taken inside the space under consideration. Therefore, as the number of periods is well-determined, the numbers of cuts of the various kinds needed to make the space an SC space must always be the same, in whichever way they are made ...

References

1. U. BOTTAZZINI, Riemanns Einfluss auf E. Betti und F. Casorati, Arch. Hist. Ex. Sc. **18** (1977), pp. 27–37.
2. N. BOURBAKI, *Topologie Générale* Chap. I, 2^e éd., Note historique, p. 127 (cf. n° III de la bibliographie, p. 130) = *Éléments d'histoire des mathématiques*, Paris 1960, p. 148 (cf. n° [187c] de la bibliographie, p. 272).
3. G. LORIA, Commemorazione del compianto Socio prof. Placido Tardy, Rend. Acad. Lincei, (V) 24 (1^o semestre) 1915, pp. 505–521 (v. Appendice II, pp. 517–519).

Institute for Advanced Study
Princeton, New Jersey

(Received November 12, 1978)