COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 2 SEPTEMBRE 1901,

PRÉSIDÉE PAR M. BOUQUET DE LA GRYE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

PHYSIQUE. — *Sur l'application des équations de Lagrange aux phénomènes électrodynamiques et électromagnétiques.* Note de M. E. SARRAU.

« 1. Lorsque l'état dynamique d'un système à liaisons indépendantes du temps est défini par r paramètres indépendants $(q_1, q_2, \ldots, q_r)$, sa force vive T est une fonction quadratique homogène des dérivées q', dont les coefficients sont fonctions des variables q. Celles-ci sont déterminées en fonction du temps par les *équations de Lagrange*, dont le nombre est égal à celui des paramètres et dont l'une quelconque est de la forme

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} = \mathrm{Q}.$$

» Le second membre Q est défini par cette condition que $Q\,dq$ représente le travail des forces directement appliquées correspondant à la variation dq du paramètre q; le travail de ces forces, pour une modification infiniment petite du système, est ainsi $\Sigma Q\,dq$.

» 2. Des applications de ces équations ont été faites par Helmholtz aux phénomènes thermiques, par Maxwell aux phénomènes électrodynamiques. Dans ces recherches, où les phénomènes sont considérés, au fond, comme les manifestations de mouvements internes inappréciables autrement à nos sens, on suppose que l'état physique d'un système peut être défini par des paramètres analogues à ceux qui, dans la Mécanique ordinaire, définissent les mouvements sensibles. On conçoit alors l'état le plus général d'un système comme défini par deux catégories distinctes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de paramètres se rapportant, les premiers aux mouvements sensibles, les seconds aux mouvements internes. Ces deux catégories de variables forment l'ensemble des paramètres q de la théorie générale.

» 3. La force vive T est une fonction quadratique des dérivées (x', y') dont les coefficients devraient être considérés *a priori* comme fonctions des (x, y). Les hypothèses restrictives que l'on fait à ce sujet sont les suivantes :

» 1° La forme T est la somme de deux autres T_x, T_y ne contenant, la première que les x', la seconde que les y';

» 2° Les coefficients de cette forme ne dépendent pas des y.

» Pour justifier sommairement ces hypothèses, il suffit de supposer que les y ont des variations rapides avec des valeurs moyennes constantes. Alors, en effet, la valeur moyenne des termes tels que $Ax'y'$ est sensiblement nulle, de sorte que la forme bilinéaire qu'il faudrait ajouter à $T_x + T_y$ pour avoir la valeur complète de T, disparaît dans tous les calculs où les valeurs moyennes sont seules considérées.

» D'autre part, on s'explique ainsi l'absence des y dans les coefficients de T, car les valeurs moyennes de ces coefficients dépendent principalement des valeurs moyennes des y, lesquelles sont supposées constantes.

» 4. Les équations de Lagrange, relatives à un paramètre x et à un paramètre y, se présentent sous la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x'}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = X,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = Y,$$

et comme on a, d'après les hypothèses admises,

$$\frac{\partial T}{\partial x'} = \frac{\partial T_x}{\partial x'} \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial x}$$
$$\frac{\partial T}{\partial y'} = \frac{\partial T_y}{\partial y'} \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = 0,$$

on obtient ces deux groupes d'équations

$$\text{(2)} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_x}{\partial x'}\right) - \frac{\partial T_x}{\partial x} = X + \frac{\partial T_y}{\partial x},$$

$$\text{(3)} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_y}{\partial y'}\right) = Y.$$

» Les équations du premier groupe ne diffèrent, de celles qui régiraient les mouvements sensibles s'il n'y avait pas de mouvements internes, que par la présence, dans chaque second membre, du terme $\frac{\partial T_y}{\partial x}$.

» L'effet qui en résulte est le même que si, aux forces *effectives* dont le travail est $X\,dx$, s'adjoignaient d'autres forces dont le travail fût $\frac{\partial T_y}{\partial x}\,dx$. Le travail élémentaire du système de ces forces *apparentes* est la somme

$$\sum \frac{\partial T_y}{\partial x}\,dx$$

étendue à tous les paramètres x, c'est-à-dire la différentielle partielle δT_y prise en ne faisant varier que ces paramètres. Ce travail est ainsi, en grandeur et signe, la variation partielle de l'énergie interne.

» 5. *Électrodynamique.* — Considérons maintenant un système mobile de courants fermés à chacun desquels corresponde un paramètre y en supposant, avec Maxwell, que la dérivée y' de ce paramètre par rapport au temps soit l'intensité i de ce courant.

» L'énergie cinétique T_y est alors une fonction quadratique des variables i que l'on peut mettre sous la forme

$$\text{(4)} \qquad \varphi = \frac{1}{2}\sum \lambda i^2 + \sum \mu i i'$$

de notre précédente Communication, et la variation δ de cette fonction, dont les coefficients (λ, μ) ne dépendent que des paramètres x, donne le travail élémentaire des forces apparentes qui correspondent aux forces électrodynamiques d'Ampère.

» La formule (3), qui caractérise les équations du second groupe, devient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial i}\right) = \mathrm{Y},$$

et le second membre Y est tel que Y dy est le travail correspondant à la variation dy; ce travail peut encore s'écrire $\mathrm{Y}y'\,dt$. Or, sur le circuit correspondant, ce travail se compose du travail électromoteur $ei\,dt$ fourni par la pile et du travail résistant $-ri^2\,dt$ équivalent à la chaleur dégagée par l'effet Joule; on a donc $\mathrm{Y}i\,dt = ei\,dt - ri^2\,dt$, c'est-à-dire $\mathrm{Y} = e - ri$. Les équations (3) deviennent, par suite,

$$e - ri = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial i}\right), \tag{5}$$

et elles s'accordent avec celles qui régissent les phénomènes d'induction électrodynamique.

» 6. *Électromagnétisme.* — Ces résultats s'étendent immédiatement aux systèmes formés par des courants et des aimants si l'on considère, avec Ampère et Maxwell, les aimants comme des systèmes de courants particulaires fermés.

» Si, désignant, comme précédemment, par i l'intensité de l'un des courants proprement dits du système, on appelle j celle de l'un des courants élémentaires magnétiques, l'énergie cinétique interne $\mathrm{T}y$ est une fonction quadratique des variables (i, j), que l'on peut considérer comme la somme :

» 1° D'une fonction quadratique φ des variables i;

» 2° D'une fonction bilinéaire φ_1 des variables (i, j);

» 3° D'une fonction quadratique φ_2 des variables j.

$$\mathrm{T}_y = \varphi + \varphi_1 + \varphi_2. \tag{6}$$

Les coefficients de ces fonctions ne dépendent que des paramètres x, et la différentielle $\delta\mathrm{T}_y$ relative à ces paramètres donne le travail élémentaire des actions mutuelles apparentes.

» Le terme φ_1 se rapportant aux actions réciproques des courants et des aimants n'est pas égal à zéro, comme dans la théorie ordinaire; c'est, au contraire, ce terme qui, par sa différentielle δ, donne le travail élémentaire des forces électromagnétiques.

» Ce même terme intervient également dans les équations qui régissent l'induction dans les circuits; en effet, en le supposant ordonné par rapport aux variables i, sous la forme $\varphi_1 = \Sigma ai$, on a $\frac{\partial \varphi_1}{\partial i} = a$ et, par suite, d'après (6), en observant que φ_2 ne dépend pas des variables i,

$$\frac{\partial T_y}{\partial i} = \frac{\partial \varphi}{\partial i} + a.$$

» La formule (3) conduit ainsi à l'équation

$$e - ri = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial i} + a\right) \tag{7}$$

et le système des équations similaires se rapportant aux circuits est bien celui que l'on admet comme régissant dans ces circuits l'induction électrodynamique et électromagnétique.

» 7. Tous ces résultats s'accordent naturellement avec le *principe de l'énergie,* puisque ce principe n'est qu'une forme du théorème de la force vive et que celui-ci est une conséquence des équations générales (1); mais, pour que cet accord existe, il semble nécessaire d'admettre que l'énergie interne d'un système de courants et d'aimants est purement *cinétique,* sans partie *potentielle,* et d'attribuer par suite le caractère de *forces d'inertie* aux actions mutuelles du système. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la transformation quadratique des fonctions abéliennes.* Note de M. **Georges Humbert.**

« La représentation géométrique, sur une surface de Kummer, de la transformation quadratique des fonctions abéliennes conduit à d'intéressantes propriétés de la surface; inversement, elle fournit, pour les trois équations modulaires de la transformation, une expression remarquablement simple qui forme l'objet de cette Note.

» Soit un premier système de fonctions abéliennes à deux variables, u et v, de périodes normales $(1, 0)$, $(0, 1)$, (g, h), (h, g'); désignons par (k) une surface de Kummer pour laquelle les coordonnées homogènes d'un point sont proportionnelles à quatre fonctions thêta normales d'ordre deux et de caractéristique nulle; ces fonctions sont nécessairement paires, de sorte qu'à un point de (k) répondent, à des périodes près, deux couples u, v et $-u$, $-v$.

» Soit, de même, un second système de fonctions abéliennes, aux