Rôle de la notion de stabilité en physique,

par JEAN-LOUIS DESTOUCHES (*).

A la suite d'une note de M. Bouligand [1] sur la notion de stabilité en logique, nous avons donné une forme très générale de la stabilité logique [2]. Puis M. Bouligand [3] en a souligné l'utilité en physique classique. Nous voulons montrer dans ce travail qu'elle revêt encore une plus grande importance en physique quantique : C'est la notion de stabilité qui permet de fixer la forme générale d'une équation d'évolution. De plus, par les conditions de raccordement qu'elle impose, elle permet, quand on connait un cas particulier d'évolution, d'en déduire des renseignements pour le cas général. Ce cas se présente pour la mécanique ondulatoire relativiste des systèmes, que nous nous efforçons actuellement de construire, et cet exemple met bien en valeur l'utile rôle de la notion générale de stabilité.

1. LOI GÉNÉRALE D'ÉVOLUTION

Considérons un observateur qui étudie un système physique déterminé; nous le supposerons muni de tous les instruments nécessaires pour les observations et en particulier d'une horloge. Nous supposerons que les mesures qu'il peut faire à un certain instant se divisent en deux classes : Celles dont les résultats feront connaître le maximum de connaissances qu'il est possible d'acquérir à la

(*) Présenté par M. De Donder.

(1) G. BOULIGAND, *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, n° 3, mars 1935, p. 277.

(2) J.-L. DESTOUCHES, *Ibid.*, n° 8-9, août 1935, p. 780.

(3) G. BOULIGAND, *Ibid.*, n° 8-9, août 1935, p. 776.

fois sûr le système et celles qui ne donnent que des connaissances partielles. Les premières seront dites des *mesures complètes*, les secondes des *mesures incomplètes*.

Dans toute théorie physique construite jusqu'à maintenant on a toujours supposé qu'il existait des mesures complètes et des mesures incomplètes et la différence entre les théories classique et quantique se traduit par une différence entre les mesures complètes. Une mesure complète au sens quantique est incomplète au sens classique. Une mesure complète au sens classique est impossible en physique quantique.

La connaissance du résultat d'une mesure complète peut être considérée comme caractérisant un *état du système*. A un état, c'est-à-dire au résultat d'une mesure complète, on peut associer biunivoquement un certain élément X_0 qu'on appellera *élément figuratif de l'état* et l'ensemble des états possibles sera représenté par l'ensemble $\mathfrak{X}$ des éléments X_0.

S'il existe des lois physiques, à partir du résultat d'une mesure complète, on doit pouvoir faire des prévisions pour le résultat d'une mesure que l'on effectuera à un instant postérieur. Ces prévisions pour l'instant t pourront être représentées par un élément $X(t)$ qui sera déterminé par l'élément X_0 et par les lois d'évolutions du système. Si X est déterminé à partir de X_0, il existe une transformation $\mathcal{U}_{t_0}(t)$ qui transforme l'élément X déterminé par les mesures faites à l'instant t_0 en $X(t)$ caractérisant les prévisions pour l'instant t :

$$X(t) = \mathcal{U}(t_0, t)\, X_0. \tag{1}$$

Lorsqu'il n'y a pas d'actions extérieures dépendant du temps agissant sur le système, la condition d'homogénéité du temps conduit à ce que les prévisions ne dépendent que de $t - t_0$ et non pas que de t et t_0 séparément, d'où, dans ce cas,

$$X(t - t_0) = \mathcal{U}(t - t_0)\, X(o) \tag{2}$$

L'opérateur $\mathcal{U}$ étant indépendant de X_0 traduit la loi physique d'évolution et l'on devra avoir $\mathcal{U}(o) = 1$.

Un principe de relativité fixera l'ensemble des systèmes de référence auxquels seront attachés les observateurs pour qui les lois sont les mêmes, c'est-à-dire pour qui tous les opérateurs $\mathcal{U}$ sont identiques.

Acceptons les postulats : 1° qu'on peut faire à tout instant t postérieur au moins une mesure dont, à partir de X_0, on puisse prévoir le résultat avec certitude ; 2° que si à un instant t_1 on fait une mesure, on aurait pu, à n'importe quel instant antérieur, faire une mesure qui aurait permis de prévoir avec certitude le résultat de la mesure faite à l'instant t_1 ; 3° qu'effectuer une mesure dont le résultat est prévu avec certitude n'altère pas l'évolution ultérieure du système.

Moyennant ces trois hypothèses, qui se sont toujours trouvées remplies dans les théories physiques construites jusqu'à maintenant et en particulier en mécanique ondulatoire, il est facile de démontrer que les opérateurs $\mathcal{U}$ forment un groupe. En effet, si $\mathcal{U}(o) = 1$, le second postulat démontre l'existence de $\mathcal{U}^{-1}$ le premier et le troisième conduisent à la relation

$$\mathcal{U}(t+t_1) = \mathcal{U}(t-t_1) \cdot \mathcal{U}(t_1). \tag{3}$$

2. CONDITIONS DE STABILITÉ

Pour aller plus loin, il faut faire intervenir des considérations de stabilité. Les erreurs expérimentales peuvent conduire à des erreurs dans la détermination de l'état, c'est-à-dire dans la détermination de X_0. Il faut donc se fixer des voisinages pour les éléments X_0 ; ils seront tels qu'à des résultats de mesure voisins correspondent des éléments X_0 voisins. Les trois postulats admis conduisent à ce que tout élément $X(t_1)$ peut être pris comme X_0 ; par conséquent, l'ensemble des X possédera des voisinages aussitôt que les X_0 en posséderont, puisque l'ensemble des X est identique à l'ensemble $\mathfrak{X}_0$ des X_0.

Cet ensemble $\mathfrak{X}$ constituera un espace abstrait $(\mathfrak{X})$.

Pour que les erreurs expérimentales sur la détermination de X_0 n'influencent pas sensiblement les prévisions, ce qui est absolument nécessaire si l'on veut faire des prévisions véritables, *il faut que l'élément* $X(t)$ *soit stable sur l'ensemble des* X *par rapport à l'élément* X_0, la stabilité étant prise au sens de la stabilité des propositions que nous avons définie dans une communication antérieure (1). Cette condition conduit à ce que la transformation $\mathcal{U}(t)$ soit une transformation continue dans l'espace des X.

Mais, d'autre part, l'instant où l'on effectue une expérience se mesure expérimentalement. Il faut donc que l'on ait encore *stabilité de* $X(t - t_0)$ *par rapport à la valeur de l'intervalle de temps* $t - t_0$. Ceci nous oblige à ce que la transformation $\mathcal{U}(t)$ soit une fonction continue du temps. Dans le cas d'actions extérieures dépendant du temps, $\mathcal{U}_{t_0}(t)$ devrait être une fonction continue de t et de t_0.

Considérons alors l'accroissement de $\mathcal{U}(t)$ pendant un petit intervalle de temps Δt : On a

$$\Delta \mathcal{U} = \mathcal{U}(t+\Delta t) - \mathcal{U}(t),$$

en vertu du premier postulat

$$\mathcal{U}(t+\Delta t) = \mathcal{U}(\Delta t)\cdot\mathcal{U}(t).$$

$\mathcal{U}(o)$ étant égal à 1, la transformation $\mathcal{U}(\Delta t)$ est voisine de la transformation identique et dépend de Δt. Si la transformation est différentiable (au sens de Frechet) par rapport au temps, à un terme de l'ordre de Δt^2 près, on peut assimiler $\mathcal{U}(\Delta t)$ à la transformation $(1 + \mathcal{H}\,\Delta t)$.

En supposant Δt infiniment petit, soit dt, on en tire

$$d\mathcal{U} = \mathcal{H}\,\mathcal{U}\,dt. \tag{4}$$

(1) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, n° 8-9, août 1935, p. 780.

Ces transformations sont à appliquer à un X_0 et comme $X(t) = \mathcal{U} X_0$ et ne dépend de t que par $\mathcal{U}$, on a

$$dX = \mathcal{H} X \, dt. \tag{5}$$

Si à l'ensemble des X on adjoint des éléments de façon à donner un sens à la somme et à la multiplication par un nombre des éléments X, c'est-à-dire qu'à l'espace ($\mathfrak{X}$) des X on adjoint des éléments pour qu'il devienne un espace affine, on peut diviser par *dt*, d'où la loi d'évolution des X :

$$\frac{dX}{dt} = \mathcal{H} X. \tag{6}$$

Il en est de même pour l'équation en $\mathcal{U}$:

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = \mathcal{H} \mathcal{U}, \tag{7}$$

qui est une équation différentielle abstraite. $\mathcal{H}$ est un certain opérateur dont le domaine opérable contient l'ensemble des X. Si $\mathcal{U}$ est donné, $\mathcal{H}$ est déterminé et réciproquement.

Cette forme d'équation d'évolution se rencontre dans un grand nombre de théories, en particulier en mécanique ponctuelle : c'est l'équation de Jacobi ; dans la théorie du mouvement Brownien : c'est l'équation de diffusion ; dans toutes les mécaniques ondulatoires : c'est l'équation d'ondes. On voit que c'est par des conditions de stabilité qu'on y est conduit, alors que sans elles on devrait se borner à la relation

$$X = \mathcal{U} X_0.$$

L'équation (6) a l'avantage d'être générale et de ne plus faire intervenir l'élément X_0, qui n'apparaîtra que comme une constante d'intégration. Nous verrons plus loin que les conditions de stabilité nous serviront encore pour déterminer l'opérateur $\mathcal{H}$ dans différents cas.

3. STABILITÉ ET MÉCANIQUE ABSTRAITE

On peut considérer l'équation (6) comme définissant une mécanique ponctuelle abstraite [1] dans l'espace des X. A un X_0 correspond à chaque instant un $X(t)$, qui est une fonction biunivoque et bicontinue de t. On peut alors appeler l'ensemble des éléments $X(t)$ *la trajectoire du point mobile* X qui, à l'instant initial, était un X_0. Cette trajectoire est une courbe de Jordan. Si à l'instant initial on considère un élément X_1 voisin de X_0, à l'instant t, il lui est associé un élément $X_1(t)$ qui, en vertu des conditions de stabilité imposées, sera voisin de $X(t)$. Ainsi à des conditions initales voisines correspondent des mouvements voisins dans l'espace des X ; il y a à la fois voisinage des trajectoires et voisinage des positions correspondantes au même instant. Ceci définit une *stabilité des mouvements* pour la mécanique abstraite de l'espace des X et étend à cette mécanique abstraite la stabilité à la Liapounow. En somme, ce sont les conditions de stabilité par rapport aux résultats expérimentaux qui entraînent la stabilité des mouvements dans la mécanique abstraite de l'espace des X.

En particulier, en mécanique ondulatoire, les X sont les fonctions d'ondes ψ, l'équation (6) est dite équation d'ondes ; elle définit une mécanique dans l'espace des fonctions ψ et l'on constate qu'il y a bien stabilité des mouvements dans le sens que nous venons de définir. Ceci résulte immédiatement du fait que dans ce cas l'opérateur $\mathcal{H}$ est linéaire.

4. STABILITÉ ET CONDITIONS DE RACCORDEMENT

Les conditions de stabilité peuvent servir encore à déterminer la classe des éléments X et l'opérateur $\mathcal{H}$ lorsqu'on connaît cet opérateur dans un cas particulier, soit $\mathcal{H}_0$.

(1) J.-L. DESTOUCHES, Les Principes de la Mécanique générale. (*Actualités scient.*, fasc. **140** [1934].)

Dans ce cas elles prennent l'aspect de conditions de raccordement.

Supposons que nous ayons un système de corpuscules dont nous connaissons l'évolution lorsqu'il n'y a pas d'interaction entre ces différents corpuscules, c'est-à-dire en supposant connus l'opérateur $\mathcal{H}_0$ et l'ensemble des X dans ce cas. Cherchons à déterminer l'opérateur $\mathcal{H}$ qui correspond au cas de l'interaction. La stabilité nous fixe une condition pour $\mathcal{H}$ qui est le *raccordement avec $\mathcal{H}_0$ lorsque l'interaction s'évanouit*. En effet, l'interaction aura pour conséquence de changer l'évolution de nos prévisions par rapport au cas de l'absence d'interaction. Réciproquement, on peut dire que c'est une erreur systématique sur les prévisions faites, en supposant qu'il n'y a pas d'interaction qui prouvera qu'il en existe une. L'interaction sera dite faible lorsque cette erreur systématique sera très faible ou inapparente, donc une interaction faible devra permettre des prévisions voisines du cas de l'absence d'interaction. On peut toujours écrire

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathfrak{R}.$$

$\mathfrak{R}$ sera dit le terme d'interaction ; il sera négligeable lorsque l'interaction sera très faible.

Nous avons vu, en vertu des deux postulats du début, que l'ensemble des X est identique à l'ensemble des X_0 ; or les X_0 ne dépendent pas de l'opérateur $\mathcal{H}$, puisqu'ils traduisent des résultats d'expériences ; $\mathfrak{R}$ n'intervient que dans $\mathcal{H}$, c'est-à-dire dans l'évolution des prévisions. Donc, quelle que soit l'interaction $\mathfrak{R}$, l'ensemble des X ne change pas : il reste identique à l'ensemble $\mathfrak{X}$ des X_0, de sorte que la connaissance d'un cas particulier non seulement entraîne une condition de raccordement pour $\mathcal{H}$, mais surtout détermine l'espace des X, puisqu'il est le même que celui du cas particulier.

A ces conditions de stabilité vient s'ajouter la condition d'invariance de forme de l'équation (6) pour tous les systèmes de références admissibles pour les observateurs, c'est-à-dire pour tout système galiléen. Ceci fixe des conditions pour $\mathcal{H}$ qui doivent être remplies pour $\mathcal{H}_0$. Il en résulte alors des conditions pour $\mathfrak{R}$ qui permettent de déterminer en partie cet opérateur.

Nous avons utilisé cette manière de raisonner pour parvenir à la mécanique ondulatoire relativiste des systèmes d'électrons et de positons. En effet, à partir de l'équation Dirac, on peut déterminer l'opérateur $\mathcal{H}_0$ correspondant au cas où il n'y pas d'interaction entre les corpuscules qui le constituent, et la méthode que nous venons d'indiquer nous permet de déterminer l'opérateur $\mathcal{H}$ dans le cas général.

Cet exemple nous montre l'importance fondamentale dans les théories physiques de la notion de stabilité sous la forme générale que nous lui avons donnée en logique. Les services qu'elle nous a rendus dans notre tentative pour constituer une mécanique ondulatoire relativiste des systèmes permettent d'apprécier sa grande utilité, voire sa nécessité.