BULLETIN DE PHILOSOPHIE

I. — PHILOSOPHIE DES SCIENCES

I. — *FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES*

Nous regrettons de recenser si tardivement un livre qui nous était parvenu au mois d'août 1939. A quelque chose malheur est bon : nos lecteurs apprécieront certainement d'autant plus, en ces temps de belligérance universelle, le potentiel d'irénique sérénité contenu dans ces cinq cents pages de considérations compactes touchant les fondements des mathématiques (1). Nous pourrions même dire discussions, puisque les résultats énoncés ne cessent de devenir contradictoires que si on tient compte des points de vue qui les commandent respectivement. Adopter l'un ou l'autre relève d'une option sémantique si spontanée qu'elle est généralement inconsciente; elle l'est même toujours chez les initiateurs; et c'est ce qui crée un moment de trouble jusqu'à ce qu'une vue d'ensemble précise permette de restituer à chacune des démarches qui s'affrontent sa juste proportion en même temps que sa richesse originale.

Il sera peut-être utile de préciser d'un mot, pour le lecteur philosophe, la question dont il s'agit. Rappelons donc que l'on peut chercher à assigner aux mathématiques leur fondement par une élaboration abstractive des données de sens commun. C'est la position de la philosophie classique, reprise récemment par M. Gonseth qui l'a fortement teintée d'un psychologisme tendant à ruiner toute transcendance. Nous devons certes souligner qu'un philosophe, soit qu'il considère le cas particulier des mathématiques, soit qu'il vise à l'englober dans un regard de sagesse, sera toujours amené à accomplir une semblable démarche résolutive, hors laquelle la question des fondements des mathématiques lui paraîtra demeurer en suspens. Mais ce n'est pas cette sorte de fondement qui intéresse le mathématicien. Ce que désire celui-ci, c'est de pouvoir mathématiser avec sécurité, c'est-à-dire, étant donnés un ensemble d'hypothèses, de règles de construction et de règles de passage, d'être assuré qu'il n'obtiendra jamais deux propositions contradictoires (non contradiction au sens large), d'être en outre assuré à priori que toute propo-

(1) D. Hilbert und P. Bernays. *Grundlagen der Mathematik.* Zweiter Band. Berlin, Springer, 1939; in-8, XII-498 pp. [Premier tome, 1934].

sition construite au moyen des règles pourra être démontrée vraie ou fausse (non contradiction au sens étroit). Encore y aurait-il lieu de préciser la nature de cette construction : finie, infinie, transfinie puisque la même théorie peut être, selon le cas, contradictoire ou non. Trois attitudes essentielles ont été prises en face de cette question : idéalisme, intuitionisme, formalisme. C'est à l'élaboration de ce dernier que M. Hilbert et ses élèves ont travaillé depuis plus de quarante ans. Les *Grundlagen* donnent un substantiel résumé de publications échelonnées et disséminées, mais les érige en doctrine par l'adoption systématique d'un symbolisme et d'une méthode. On trouvera donc dans ces volumes un véritable code du formalisme hilbertien, lequel coïncide d'ailleurs sensiblement avec le développement historique de la pensée du maître.

Le premier tome des *Grundlagen* contient, outre une initiation au calcul formel (pratiquement indispensable pour la lecture du second), la définition des propriétés relatives à un système d'axiomes (non contradiction, saturation c'est-à-dire impossibilité d'ajouter un nouvel axiome sans rendre le système contradictoire, indépendance c'est-à-dire possibilité de changer l'un des axiomes en la proposition contradictoire sans rendre le système contradictoire), la possibilité d'éliminer des équations logiques les symboles de quantification qui correspondent en logique classique aux catégories universel, particulier, individuel, l'axiomatisation de la géométrie (qui fut à l'origine de l'œuvre logique de H.) et celle de l'arithmétique, c'est-à-dire le choix d'un système d'axiomes satisfaisant aux trois conditions qui viennent d'être rappelées; le calcul des propositions et le calcul des prédicats sont évidemment prérequis et longuement développés.

Le tome II, qui nous intéresse plus particulièrement, donne (supplément I) un rappel et une extension du calcul formel : l'extension consiste en ceci que les variables formelles (c'est-à-dire celles qui indiquent la structure de la proposition envisagée) peuvent être supprimées et résorbées dans un schéma uniforme. Mais les deux thèmes fondamentaux de l'ouvrage sont d'une part l'introduction systématique de la fonction ϵ comme medium de démonstration et d'autre part les précisions croissantes apportées à la question de la non contradiction au sens étroit. On sait la difficulté apportée en logique formelle classique par la quantification particulière des propositions. Une opération aussi simple que la conversion subit une dissymétrie ou même un échec; quant à la théorie des figures et modes du syllogisme, elle se réduit jusqu'à présent à un empirisme a posteriori que clarifierait singulièrement l'élimination des particulières. Il faut donc bien attendre que les symboles de quantification constituent la pierre d'achoppement de tout effort de formalisation. La logique russellienne en connait trois : ( ), $\exists$, ℩ qui signifient respectivement « tous les individus qui satisfont à... » « il existe au moins un individu qui satisfait à... » « il existe un individu et un seul qui satisfait à... »; le symbole est évidemment suivi de l'énoncé d'une proposition qui achève de lui donner son sens. La véritable difficulté n'est d'ailleurs pas dans la quantification en elle-même, mais dans le fait de sa superposition soit à elle-même soit aux symboles qui définissent les opérations logiques utilisées pour la construction des propositions (négation ou disjonction). La désintégration d'une proposition non quantifiée (effectuée par Herbrand) conduit à une solution définitive de la non contradiction en donnant à la fois un critère de la démonstrabilité de toute proposition et un moyen *théorique* (mais cela seul importe) d'en déterminer la démonstration lorsque celle-ci existe. Le même procédé ne va pas sans grande complication pour les propositions quantifiées; à tel point que H. n'a pas cru pouvoir en donner un résumé. Tandis qu'Herbrand donna un critère appartenant à toute proposition vraie, qu'elle soit ou non quantifiée, H. montre que la démonstration d'une proposition quantifiée peut être, étape par étape, déduite de la démonstration d'une proposition non quantifiée. Une proposition de cette dernière sorte étant démontrable, il en résulte bien que toute proposition construite à partir des règles a une valeur logique unique. C'est dans la déductibilité du quantifié à partir du non quantifié (nous disons déductibilité et non déduction parce qu'en toutes ces questions on indique les opérations beaucoup plus qu'on ne les effectue) que la fonction ϵ joue un rôle essentiel. Sans entrer dans des détails techniques qui sortiraient du cadre de cette revue, disons que la fonction ϵ est introduite par H. comme solidaire de l'équation :

$$E(x)\ A(x) \rightarrow A(\epsilon x\, A(x))$$

ce qui s'énoncerait : s'il existe un x satisfaisant à la fonction A(x), alors la fonction A(x) est également satisfaite pour une valeur de son argument égale à la valeur prise par la fonction ϵ pour la valeur A(x). L'intérêt épistémologique du symbole ϵ et le principe de sa fécondité algorithmique, c'est qu'il représente à la fois une désignation de la fonction par la variable lorsqu'il joue comme fonction et de la variable par la fonction lorsqu'il joue comme argument. Il est normal, d'après ce qui précède, de trouver un parallélisme entre le triple rôle joué par la fonction ϵ et les trois symboles de quantification inhérents à toute logique. La quantification universelle établit, au fond, la liaison entre variables et individus, et tel est bien le rôle générique de la fonction ϵ. En second lieu, celle-ci précise le choix d'un individu particulier lorsqu'un prédicat convient à plusieurs individus; et enfin lorsque le prédicat convient à un seul individu, la fonction ϵ désigne, de par sa définition même, cet individu là. Nous devons cependant noter ici que l'utilisation de la fonction ϵ dans les cas de récurrence transfinie (cardinaux de la classe II) peut très bien masquer sous un formalisme impeccable des difficultés devenues classiques sans apporter à celles-ci le moindre élément *réel* de solution.

Voici maintenant l'énoncé des deux théorèmes fondamentaux concernant la fonction ϵ. 1) Étant donné un formalisme F dont les axiomes ne sont pas quantifiés, toute proposition elle-même non quantifiée et déductible dans ce formalisme peut être effectivement déduite des axiomes sans qu'aucune quantification apparaisse dans les étapes intermédiaires. 2) Dans ce même formalisme F, toute proposition qui ne comporte pas de symbole ϵ peut être déduite, sans qu'il soit fait appel à ce symbole au cours de la démonstration, par la seule utilisation du calcul des prédicats. Il est d'ailleurs possible d'étendre le premier de ces théorèmes au cas où certaines des variables de la proposition envisagée comportent la quantification particulière. Comme d'autre part il est possible de ne conserver que cette dernière on entrevoit comment la fonction ϵ permet de ramener toute question à une question de logique non quantifiée. Application est faite du premier théorème à l'axiomatisation de la géométrie; le troisième des rôles de la fonction ϵ intervient par exemple dans la désignation du point d'intersection de deux droites. En ce qui concerne la théorie des nombres, la nécessité d'adjoindre aux axiomes de départ un axiome d'identité requiert un nouvel examen de la formule ϵ. La formalisation du principe d'induction au moyen de cette même formule permet, par l'application du premier théorème, d'éliminer les fonctions ϵ et de réduire toute proposition d'arithmétique élémentaire à une proposition de logique. C'est le même processus qui est suivi en ce qui concerne le second théorème. Il faut d'abord montrer qu'il demeure valable lorsqu'on adjoint aux axiomes ordinaires l'axiome général d'identité. (Axiome J_2 de Peano : il existe un nombre dont le successeur est égal à un nombre donné non nul); la formalisation du principe de récurrence, puis l'élimination des occurences de ϵ permettent à H. d'obtenir des propositions dont le contenu équivaut au théorème d'Herbrand : 1) on peut remplacer la superposition de k quantifications particulières par l'introduction d'une fonction à k arguments libres; 2) à toute formule « prénexe » (c'est-à-dire dans laquelle les signes de quantifications sont rejetés au début) obtenue par le calcul des prédicats, on peut faire correspondre une disjonction non quantifiée déductible en logique ordinaire. Fidèle à son point de vue, H. ne dit rien de la méthode suivie par Herbrand; elle peut paraître moins naturelle à qui se place à l'intérieur du formalisme hilbertien, mais outre qu'elle est en parfaite harmonie avec le critère de la démonstrabilité des propositions non quantifiées, elle a l'intérêt de livrer une méthode pour analyser une structure donnée tandis que le processus d'H. prescrit de suivre un contour que l'on ignore, indiquant plutôt comment il serait possible de ne pas s'en écarter, supposé qu'il fût connu. Au reste, d'un côté comme de l'autre la somme du labeur est sensiblement la même; parce que les propositions équivalentes d'H., si elles se présentent d'une manière très naturelle, n'en requièrent pas moins pour être valides toute la théorie qui les précède et dont l'exposé est sensiblement plus long que la démonstration d'Herbrand. Nous dirions volontiers qu'il y a conservation de l'énergie mentale.

Avec le théorème d'Herbrand nous sommes déjà dans le second des thèmes fondamentaux auxquels est consacré l'ouvrage puisque ce théorème apporte à l'Entscheidungsproblem une solution que son auteur pouvait croire définitive tandis que le même problème devait être démontré non résoluble par Gödel, puis, à nouveau, résoluble par Gentzen. La seconde partie du tome II des *Grundlagen* retrace l'histoire de ces variations, résumant les mémoires originaux avec toute la précision technique désirable à moins que leur inspiration ne soit trop divergente du formalisme; on souhaiterait cependant voir marquer avec plus de netteté les raisons d'oscillations qui paraissent, de prime abord, assez déconcertantes. Elles semblent même impliquer contradiction mais il n'en est rien si on regarde d'assez près. La désintégration effectuée par Herbrand ne met en œuvre que l'infini dénombrable; il en va de même d'ailleurs des théorèmes ϵ de H.; toute proposition construite au moyen du principe d'induction élémentaire pourra être démontrée vraie ou fausse, comme l'indique le théorème d'Herbrand. Mais ce théorème cesse de s'appliquer si on considère une induction complète généralisée, c'est-à-dire une récurrence transfinie qui, en langage russellien, fait passer d'un *type* à un autre. Or tel est bien le cas des exemples construits par Gödel et dont H. indique d'ailleurs parfaitement le mécanisme. Il est clair, par le jeu d'un paradoxe bien connu, que la proposition qui consiste dans l'affirmation de sa propre indémonstrabilité ne peut être démontrée vraie ou fausse dans un système non contradictoire. C'est à cette vérité intuitive que Gödel donne une consistance « formelle » dans tout système dont les axiomes et les règles peuvent être établies en un rapport binnivoque avec les nombres entiers : chaque signe logique correspondant à un facteur premier de telle manière que l'analyse arithmétique d'un produit redonne la construction logique dont il est l'image. Il suffit alors pour obtenir *formellement* la proposition P (affirmation de sa propre indémonstrabilité) de remplacer, dans la proposition « x n'est pas une démonstration pour D (u) », u par le nombre qui correspond à cette dernière proposition. On constate ensuite que, toujours d'un point de vue *formel*, si P est déductible à partir des axiomes, la négation de P l'est également. On a donc bien construit une proposition qui échappe au théorème d'Herbrand puisqu'on ne peut évidemment admettre qu'un système aussi solide que les « Principia » (et qui répond à la possibilité d'arithmétisation qu'on a indiqué) soit contradictoire. Mais il faut bien voir que la valeur attribuée à la variable *u* ne peut être fixée tant que u n'a pas parcouru *toutes* les valeurs possibles; la définition de la valeur de u n'est pas prédicative puisque cette dernière dépend de la valeur d'une fonction propositionnelle qui dépend elle-même de u. La non contradiction du point de vue dénombrable peut devenir contradiction dans le transfini. L'exemple de Gödel ne fait qu'exprimer en langue formaliste ce résultat bien connu, mais il a le mérite d'indiquer à cette langue, et avec le type de précision qui lui convient, les limites de son propre emploi.

Il résulte de là que si on veut un formalisme qui, même transfiniment, ne soit pas contradictoire (toujours au sens étroit), il faudra que son axiomatique échappe à l'arithmétisation, au moins à celle qu'autorise l'arithmétique ordinaire. Ce résultat, symétrique en quelque sorte de celui de Gödel, a été effectivement atteint par Gentzen dont le formalisme est voisin de celui de Herbrand (désintégration et reconstruction sous forme canonique). Nous nous permettons de renvoyer à l'analyse que nous avons faite du travail de Gentzen. (*Rev. sc. ph. th.*, avril 1939, pp. 280-281). H. s'attache surtout à l'utilisation qu'on en peut faire (indiquée d'ailleurs par Gentzen lui-même) en vue de montrer la non contradiction de l'arithmétique ordinaire. Soulignons simplement que si le formalisme de Gentzen échappe à la difficulté de Gödel c'est qu'il pose *en règle* l'induction transfinie requise à l'ordination des opérations de réduction. On échappe bien à l'arithmétisation ordinaire; mais (c'est une simple question que nous posons) il n'est pas démontré qu'on échappe à une arithmétisation par les nombres de la seconde classe ni par conséquent à une difficulté analogue à celle de Gödel en effectuant une construction reposant implicitement sur les nombres de la troisième... *ἀνάγκη στῆναι.*

Nous avons déjà indiqué que le supplément I contient un résumé du formalisme employé dans les deux termes de l'ouvrage, mais nous ne pensons pas qu'il soit une initiation suffisante et dispensant de la lecture du tome I. Le supplément II donne une démonstration nouvelle du théorème de Church, extension de celui de Gödel. Les suppléments III et IV donnent diverses applications et une nouvelle expression du formalisme, permettant l'élimination des fonctions ϵ. On ne trouvera pas, dans les Grundlagen, une étude complète des fondements des mathématiques, mais si on se limite au formalisme (et même, devons-nous ajouter, au formalisme de Hilbert, non à celui d'Herbrand ou de Gentzen) ces deux volumes constituent l'étude la mieux documentée qui soit. Elle suffit, comme le dit P. Bernays dans la préface à sauver le formalisme du « fiasco » qu'on avait pu craindre, à condition évidemment de ne pas lui demander — non plus qu'à l'intuitionisme ou à l'idéalisme — un appoint métaphysique qu'il n'est pas de son ressort d'apporter. Qu'on nous permette de faire l'éloge d'une typographie parfaite, mais également de souhaiter, dans une prochaine édition, une mise en évidence plus nette des résultats annoncés ou démontrés, une désignation plus coordonnée des significations attribuées aux différentes pièces du symbolisme et qui ne sont généralement indiquées qu'au fur et à mesure des besoins; au point de vue d'une formalisation ultime la rédaction des *Principia* demeure un modèle inégalé dont l'austère rigueur demeure en droit imitable par tout système logistique.

II. — *CALCUL DES PROBABILITÉS*

Les ouvrages sur le calcul des probabilités ne manquent pas; celui de É. NAGEL (1) ne fera pas double emploi. C'est une nomenclature très complète des principales directions de recherche issues de la notion de probable; ajoutons cependant qu'en ce qui concerne les théories modernes N. se fait le défenseur de la « fréquence » qu'il oppose a deux autres positions épistémologiques du calcul des probabilités : l'une, classique, attache à un individu déterminé un coefficient de probabilité obtenu comme le quotient du nombre des cas favorables à celui des cas possibles; l'autre ne voit dans ce même coefficient qu'un rapport entre propositions, faisant ainsi du calcul des probabilités un cas particulier d'une logique polyvalente. Après un substantiel conspectus historique qui ne manque pas de signaler les quantifications même rudimentaires de la notion de probable (degré de certitude d'un témoignage rattaché au nombre des témoins, par ex.), c'est donc à la théorie de la fréquence et, ce qui revient au même, à la critique des théories concurrentes, que se trouve consacrée la presque totalité de ce fascicule.

Nous ne reviendrons pas sur les remarques que nous avons faites à ce sujet en recensant l'ouvrage de von Mises (*Rev. sc. ph. th.*, avril 1937, pp. 330-335); nous nous contenterons de remarquer, du point de vue plus particulier de N., qu'on n'a résolu aucune des difficultés *épistémologiques* posées par la définition (classique ou autre) de la probabilité, en adoptant la théorie de la fréquence. Le vrai problème est celui de la jonction du concret et de l'abstrait, du phénomène observé et du nombre par lequel on s'efforce de le mesurer. N. définit la probabilité. pour qu'une personne vive, aux États-Unis, plus de trente ans comme étant la limite vers laquelle tend la proportion des plus de trente ans *observée* d'année en année. Laissons de côté les difficultés attenantes à l'existence de cette limite, à la périodicité des expériences faites pour l'obtenir, à la notion de série « quelconque », toutes choses que

(1) E. NAGEL. *Principles of the theory of probability*. Chicago, University Press, 1939; in-8, 80 pp.

N. signale d'ailleurs avec une parfaite clarté (à la suite de von Mises notamment). Il reste que cette limite dont on voulait faire un medium entre le calcul et l'expérience est une notion hybride : si on veut la définir par les procédés rigoureux habituels aux mathématiques, on peut bien traduire en symboles logistiques la définition abstraite de la limite : il n'y a là qu'un jeu inoffensif ne donnant aucune portée *réelle* aux symboles employés puisque la formule comporte toujours un indéfini extra-expérimental. La définition n'a donc, comme on devait l'attendre, de valeur concrète qu'à la condition d'être exclusivement le résumé d'expériences antérieures. Elle n'a, rationnellement, aucune valeur normative pour les suivantes; la notion de limite n'est, dans ces conditions, qu'une manière commode — mais inadéquate — de s'exprimer; la probabilité élémentaire dite individuelle en est une autre, voilà tout. Dans les deux cas, on ne retrouve le concret qu'en passant au nombre discontinu. La valeur 0,945 attribuée à la probabilité de dépasser trente ans aux États-Unis n'a aucune signification concrète. Elle en prend une quand on traduit : sur 2.000.000 de personnes considérés aux États-Unis, à un moment donné, 1.890.000 dépassent trente ans. On retrouve par conséquent le rapport du nombre des cas favorables à celui des cas possibles; et on sous entend même que les cas possibles sont « également possibles » ou « également probables » à partir du moment où on désire appliquer la loi à des groupes plus circonscrits que celui qui sert à l'établir. Le coefficient classique n'a pas *nécessairement* de signification concrète (encore que dans le cas du dé il se trouve en avoir une au sens le plus étroit indiqué par N. p. 45 : le dé étant tombé, une face peut occuper six positions différentes dont une seule est favorable), mais la limite que propose la théorie de la fréquence, elle, n'a jamais de signification concrète. C'est d'ailleurs l'avantage qu'elle présente nous le reconnaissons, car ainsi la tentation est mieux écartée d'assigner à chacun des éléments introduits par l'analyse abstraite un corrélat concret. N. remarque très justement (p. 54). « La raison d'employer la notion de limite est la même en calcul des probilités que partout ailleurs : cette notion permet une mise en œuvre aisée de méthodes mathématiques puissantes ». Cela ne veut pas dire qu'à cette limite doive correspondre un observable : on retrouvera l'observable au terme des transformations mathématiques; la probabilité élémentaire dite classique est exactement dans le même cas; en probabilités géométriques, elle se révèle indispensable, et comme elle se présente généralement sous la forme d'un élément différentiel, le risque est éliminé de lui attribuer une signification concrète; elle conserve, dans les cas ordinaires, toute sa valeur, mais il faut l'envisager comme un coefficient théorique qui peut avoir ou ne pas avoir de correspondant expérimental. La difficulté touchant l'irrationalité du temps (signalée p. 47) se retrouve également la même dans les différentes épistémologies du calcul des probabilités. « Il n'y a pas de relation logique entre le nombre des cas possibles et la fréquence de l'occurence de tel ou tel de ces cas ». La relation est en ceci : on suppose que la répétition ordonnera dans le temps les cas qui étaient distingués simplement par leur structure logique, sans faire acception de telle ou telle de ces structures. La limite proposée par la théorie de la fréquence ne soutient, elle non plus, aucun lien logique avec la succession de termes *réels* qui en demeurent toujours *infiniment* distants : elle veut se placer après le temps, tout comme le coefficient classique veut se placer avant; le déplacement temporel d'une structure idéale pose bien le même problème dans les deux théories. Enfin le postulat de l'alignement objectif de l'également possible est équivalemment posé par N. quand, définissant le « degré de confirmation » ou « poids d'évidence » d'une théorie, il accorde (comme il se doit) une valeur plus grande à un même nombre de confirmations expérimentales lorsque celles-ci sont spécifiquement distinctes et non pas pures répétitions les unes des autres : c'est retrouver d'ailleurs une vieille loi de l'induction, à quoi N. fait plusieurs fois allusion, surtout pour critiquer Keynes qui a voulu fonder l'induction sur la théorie *classique* des probabilités. Le travail s'achève sur cette question plus large de la probabilité qu'il convient d'accorder à une théorie prise dans son ensemble : ce n'est là d'ailleurs qu'un cas particulier de l'acception très générale du mot probable répondant au degré psychologique de l'assentiment. Ce dernier sens, et le sens technique pris par le mot probable sont-ils réductibles à un seul, c'est une question que N. tient à laisser ouverte, ainsi d'ailleurs, que la plupart des questions « sémantiques » soulevées par le calcul des probabilités.

Nous avons pu prendre connaissance d'une intéressante contribution apportée au même sujet par M. H. Naachbreischen (1). Le dessein de l'auteur est plus vaste que la philosophie du calcul des probabilités et s'étend à une épistémologie générale. Quelle est la valeur de la connaissance, et l'ordre théorétique étant éliminé — un peu sommairement d'ailleurs —, comment se fait-il que la connaissance, dérivée d'une expérience nécessairement révolue au moment d'une application ultérieure, permette des prévisions efficaces. Le problème de l'induction se trouve donc directement concerné; sa solution n'est d'ailleurs pas présupposée; N. apporte bien plutôt, par une construction systématique, une coordination nouvelle de questions que se partageaient philosophie et science sans qu'une frontière bien nette puisse être tracée. Le caractère exclusivement expérimental et pragmatique

(1) H. Naachbreischen, *Experience and prediction. An analysis of the foundation and the structure of knowledge*. Chicago, Univ. Press, 1938; in-8, x-411 pp.

de la valeur de la connaissance, la formalisation du langage au moyen d'algorithmes empruntés aux mathématiques et particulièrement au calcul des probabilités, constituent les deux schèmes essentiels d'inspiration. L'auteur ne méconnait certes pas les problèmes — aussi vieux que la philosophie — posés par la conjonction de l'intelligible et du réel, mais c'est précisément pour les éviter qu'il propose une présentation nouvelle. Il est a peine besoin de dire que ces mêmes questions réapparaîtraient, en termes presque inchangés, pour qui entreprendraient la critique de l'étude de N. Mais, négligeant ce point de vue, nous préférons indiquer en quelques mots le contenu positif.

L'idée la plus originale de N. consiste en une sorte d'axiomatisation commune de la logique à plusieurs valeurs et du calcul des probabilités : celui-ci ne constituant qu'un cas particulier de celle-là. Les opérations élémentaires habituelles (disjonction, produit logique, implication) sont conservées, mais au lieu de fixer univoquement leur valeur à partir de celle de leurs constituants, N. se contente de poser, au titre d'axiomes, les relations qui lient entre elles les valeurs de ces complexes opératoires; en sorte que l'un d'entre eux pourra faire l'objet d'une détermination ultérieure. Disons tout de suite que les relations ainsi posées ne sont autres qu'un cas particulier des formules dites de Sylvester et règlant le passage des probabilités conjonctives aux probabilités disjonctives et inversement; comme la démonstration de ces formules met implicitement en œuvre la logique à deux valeurs, il est certain qu'il ne faut accorder aux axiomes posés qu'une valeur purement formelle (et non intuitive) si on veut en faire le point de départ efficace d'une logique comportant plus de deux valeurs; il n'y a d'ailleurs là aucune incohérence, mais ceci montre qu'il est plus difficile qu'on ne peut le croire d'abstraire complètement de la logique qui nous est familière. Les constituants élémentaires (propositions) peuvent recevoir une valeur variant d'une manière continue de o à 1 et qui n'est autre, en fait, que le coefficient du calcul classique des probabilités; à ceci près que N. lui retire, tout contenu intelligible pour la circonscrire dans le domaine de l'expérience statistique dont d'ailleurs il la fait dériver (théorie de la fréquence dans le vocabulaire ci-dessus employé). Que si l'on veut retrouver la logique classique ou le calcul des probabilités, il suffira (outre l'adjonction d'un axiome convenable dans le second cas) de fixer un nombre p et de convenir que toute valeur inférieure ou égale à p sera remplacée par o ou par le faux, toute valeur supérieure à p par 1 ou par le vrai. On pourrait, en segmentant l'intervalle o-1 par deux nombres au lieu d'un, fonder par une convention semblable une logique à trois valeurs ; c'est donc à un formalisme très poussé que se trouvent simultanément ramenés la logique — et en droit toute logique — et le calcul des probabilités. Tentative d'un grand intérêt pourvu que le philosophe se fasse pour un instant plus attentif aux structures qu'à la structure intelligible.

Signalons deux conséquences. La première rejoint, par le calcul des probabilités, la philosophie générale. Les deux acceptions du probable dont nous avons parlé plus haut : l'une rendue technique par les mathématiques, l'autre qui appartient encore au sens commun doivent être, pour N., réduites à l'unité; dans le cas contraire, le formalisme échouerait au moins sur un point et serait caduc puisqu'il ne supprimerait aucune des difficultés de l'épistémologie traditionnelle. Or ce qui, en regard de la formalisation, distingue le plus nettement le probable technique du probable commun c'est que celui-ci peut concerner un cas unique tandis que le premier est toujours statistique; ce qui amène N. à soutenir que tout fait singulier — événement historique donné comme incertain par exemple — peut être encadré dans une classe de cas semblables autorisant la définition d'une fréquence : mais les précisions qui sont données au sujet de la détermination d'une pareille classe sont tout à fait insuffisantes pour qu'il soit possible de suivre l'auteur avec sécurité. La seconde conséquence de la formalisation est tout à fait acceptable; il s'agit de distinguer la valeur *pratique* attachée dans l'ordre de la prévision, à des inductions différentes. La fréquence de réussite de l'expérience qui fonde une induction déterminée a pour limite un nombre que N. appelle le poids et qui donne à l'induction toute sa valeur puisqu'il précise ses conditions d'utilisation. La comparaison d'inductions différentes permet de rectifier les poids qui leur correspondent. Nous ferons seulement remarquer : 1) que l'existence de cette limite qui n'est nullement établie par N. requiert une preuve non formalisable dont se sont précisément occupés les philosophes soucieux du fondement de l'induction; 2) que cette limite, envisagée par N. — à bon droit d'ailleurs — comme le correspondant *individuel* d'une permanence statistique pose, en termes simplement symétriques, le même problème épistémologique que le théorème de Laplace : conjonction de l'abstrait et du concret; 3) que Cournot a déjà signalé — et avec une si consciencieuse précision! — que les valeurs extrêmes de cette limite (0 et 1) n'impliquent pas la certitude de la production ou de la non production du phénomène considéré par l'induction.

III — *PHILOSOPHIE DE LA PHYSIQUE*

L'ouvrage sur lequel nous attirons l'attention de nos lecteurs (1) est l'un des efforts les plus sincères accomplis par un savant en vue de préciser un ajustement toujours délicat entre la discipline qu'il

(1) Sir A. EDDINGTON. *The philosophy of physical science*. Cambridge University Press, 1939; in-8, IX-230 pp.

professe et la philosophie. Les précédents travaux du même auteur associaient l'originalité, à la profondeur (nous ne parlons pas d'un humour connaturel); celui-ci veut être surtout une construction cohérente qui situe par rapport l'une à l'autre la philosophie et la physique mathématique. La clarté de l'exposition, la rigueur avec laquelle le sens adopté pour un mot ou les principes initialement posés sont maintenus tout au long de l'enquête révèlent une maîtrise qui ne surprend pas. On ne sera pas non plus étonné de l'interprétation qu'il convient de donner au titre : il ne s'agit pas au moins dans l'intention de l'auteur, de porter sur la physique un jugement de valeur à priori, mais de guider, par l'inspection de la physique, une option entre les philosophies existantes, ou même de promouvoir une philosophie nouvelle qui fasse droit aux exigences épistémologiques des plus récentes théories physiques : relativité et quanta. Nous ne saurions mieux donner une idée de l'ensemble de l'ouvrage qu'en reproduisant la vigoureuse récapitulation faite par l'auteur en ce qui concerne les huit premiers chapitres. Nous la complèterons pour les cinq derniers, en ajoutant quelques commentaires utiles.

Par définition, la physique comprend les seules connaissances susceptibles d'être vérifiées par l'observation. Une proposition de science physique ne peut donc qu'affirmer le résultat d'un processus d'observation nettement spécifié. Chacun des termes d'une telle proposition doit satisfaire à la même condition; en particulier la définition d'une quantité physique doit toujours indiquer sans ambiguïté la méthode qui permet de la mesurer. L'observation est la « suprême Cour d'Appel » devant laquelle doit comparaître tout fait présumé physique avant d'être authentiquement accrédité. Nous croyons devoir insister : le fait physique se trouve ainsi réduit à l'ensemble des procédés qui le font apparaître ou qui le mesurent.

Longueur et temps sont les premières quantités à définir puisqu'ils se trouvent impliquées dans toutes les autres définitions. Les étalons de longueur et de temps ne peuvent être caractérisés que par des nombres purs; puisque ce sont les seules mesures indépendantes de l'espace et de la durée. En d'autres termes, ces étalons sont liés à un phénomène quantifié, supposé uniforme *par hypothèse* (longueur d'onde par exemple). On ne doit pas supposer que l'espace (choisi pour représenter l'univers physique) jouisse de la propriété d'intégrabilité des longueurs (c'est-à-dire qu'un segment se déplaçant par parallélisme, et revenant à son point de départ après un circuit fermé, aura changé de longueur). Il résulte de là que les étalons doivent être, en principe, infiniment petits et, en fait, très petits. On notera ici que malgré le recours au nombre abstrait, l'invariance des étalons qui ne peuvent évidemment être infiniment petits (c'est-à-dire tendre vers zéro) est un postulat et non une observation. Les observations rigoureuses que requiert la connaissance d'un même phénomène interfèrent entre elles de telle manière qu'il est impossible de définir les conditions précises dans lesquelles une grandeur théoriquement définie doit être mesurée. On ne peut donc avoir, en ce qui concerne l'ultime approximation, autre chose qu'une probabilité. La notion de probabilité se trouve ainsi incorporée aux définitions fondamentales; elle introduit une relation irréversible entre l'observation et la connaissance formulée de l'observation. D'une manière plus précise : de l'observation effectuée à l'instant t, il n'est possible de déduire ce qu'*eût* donné l'observation effectuée à l'instant ultérieur t' qu'avec une certaine approximation, tandis que les deux observations étant supposées effectuées, on peut passer d'une manière rigoureuse de la première à la seconde par voie théorique. Toute prévision est donc entachée d'indéterminisme; c'est ce qu'exprime l'irréversibilité.

Les notions de la physique classique auxquelles un procédé de mesure n'est pas associé sont des « inobservables » (ainsi, la simultanéité à distance); d'autres notions qui pourraient, de soi, donner lieu à observation ont été ou sont employées, et alors illégitimement, dans des conditions d'inobservabilité (ainsi les coordonnées relatives de deux particules *indistingables*). C'est cependant l'acceptation de la régulation expérimentale exclusive qui a logiquement conduit à des théories nouvelles : l'abandon du concept abstrait de simultanéité à distance a conduit à la relativité restreinte, la systématisation d'un indéterminisme partiel a donné naissance à la mécanique ondulatoire.

Les nouvelles théories présentent, en regard des anciennes, une différence de structure essentielle, même quand elles leur sont homologues (gravitation newtonienne et gravitation relativiste par exemple). Les « hypothèses » des anciennes théories sont des codifications à posteriori qui prétendent à une prise objective immédiate; les principes « épistémologiques » qui les remplacent règlent avant tout le comportement de l'esprit en regard des phénomènes; ils ont en définitive la valeur d'affirmations à priori. En d'autres termes, les lois fondamentales et les constantes de la physique sont purement « *subjectives* » parce qu'elles sont l'empreinte des comportements intellectuels et sensoriels du physicien sur le savoir obtenu par ces mêmes comportements; il est impossible d'avoir une connaissance *à priori* des lois qui gouverneraient un univers supposé « *objectif* ».

Nous ne voulons pas dire (c'est E. qui parle) que l'univers physique soit purement subjectif. La physique comprend, ontre les « lois de la nature » (lois fondamentales à priori dont il est ci-dessus question) quantité d'informations concernant les objets particuliers qui nous entourent. Il est hors de doute que ces informations sont partiellement objectives tout comme elles sont partiellement subjectives.

Le caractère subjectif des lois résulte de ce qu'il est nécessaire de couler les connaissances expérimentales dans un schéma conceptuel pour les formuler. Les lois subjectives peuvent être découvertes, soit à priori en analysant la structure de la pensée, soit à posteriori en examinant les données qui en sont le contenu. La note distinctive des lois fondamentales de la physique, c'est leur subjectivité. S'il existe également des lois d'origine objective, il est à présumer qu'elles sont d'un type différent et qu'elles se réfèrent à la volonté, à la conscience et à la vie. Les lois « épistémologiques », si elles sont correctement déduites (de la nature de la pensée), sont normatives, universelles et rigoureuses. C'est parce que les lois fondamentales de la physique sont du type épistémologique qu'elles en possèdent les attributs, au contraire de ce qu'affirme une certaine philosophie scientifique qui tient les lois pour des régularités empiriques. Les prévisions dont la science physique est capable se bornent par conséquent aux lois fondamentales et aux constantes qui y interviennent mais ne peuvent porter sur la correspondance entre la description à priori (de type épistémologique) et les éléments de nos appréhensions familières. La correspondance peut être éloignée au point que la théorie à priori paraisse inadéquate à l'observation; mais il est actuellement nombre de cas dans lesquels cette correspondance se trouve assez étroite pour confirmer l'affinité du savoir expérimental avec le cadre dans lequel le physicien s'efforce de le circonscrire. Il convient d'ailleurs d'ajouter que cette affinité résulte elle-même de l'harmonie vitale établie entre les sélections abstractives qui donnent aux objets physiques leur consistance et les schèmes de l'activité mentale.

Quant aux formes à priori qui dominent la physique, ce sont : 1) la nature sensible de la connaissance dont l'univers physique est posé comme le corrélatif; 2) le concept d'analyse au terme duquel l'univers est composé d'un certain nombre de parties; quelques-unes d'entre elles sont d'ailleurs de pures négations créées pour la commodité de la description, aussi est-il impossible de leur accorder un sens sans les référer au processus analytique dont elles sont le terme; 3) le concept d'atomicité qui implique un choix de l'instrument analytique tel que les éléments ultimes soient tous identiques, la diversité portant exclusivement sur la structure. En d'autres termes, l'analyse consistera à découvrir, dans des éléments supposés simples et différents, d'autres éléments plus primitifs, tous identiques mais organisés en structures différentes; 4) le concept de permanence qui s'applique aux particules ultimes dont il suppose une certaine invariance au cours des regroupements qu'elles peuvent subir; 5) le concept d'autonomie qui s'applique lui aussi aux particules ultimes au moins intrinsèquement considérées, encore que leurs interférences constituent l'objet essentiel de notre savoir.

A cette liste qui comprend les concepts primitifs dont la physique ne peut jamais abstraire, il convient d'ajouter les deux concepts de structure et d'existence sous la forme où ils sont plus particulièrement requis par les développements modernes de la relativité et des quanta.

La structure est importée de la théorie mathématique des groupes; elle exprime, sous forme de nombres abstraits, comment une transformation d'un groupe peut être obtenue par combinaison des autres transformations. L'univers physique, c'est-à-dire celui que décrit la physique, est une structure. Quant au terme dont il est structure, le physicien en sait seulement qu'il est l'objet de perceptions conscientes (conscience s'opposant à « connaissance épistémologique » à priori). La limitation formelle de l'univers et de la connaissance physique aux structures permet d'éviter les difficultés inhérentes à tout dualisme. Il convient cependant d'ajouter que « l'élément objectif intervient longuement dans le savoir non systématisé, lequel fait également partie de la description de l'univers physique » (p. 161). L'existence doit être introduite conformément à l'esprit de la physique c'est-à-dire par voie épistémologique et sous forme de structure. Or c'est une donnée élémentaire de la pensée qu'une chose existe ou n'existe pas. C'en est assez pour que l'on puisse représenter l'existence par un symbole bivalent et construire une arithmétique réglant les valeurs des combinaisons en lesquelles il entre avec lui-même. Une troisième valeur apparaît même : elle est le résultat des opérations qui expriment numériquement l'introduction des éléments appelés négatifs; cette valeur, négative elle-même, signifie une sorte d'attente de l'existence. Le réalisme au sens classique du mot ne peut en aucune façon pénétrer dans le domaine de la physique.

L'univers physique contient $2.136.2^{256}$ protons. Ce nombre n'a pas la signification prédicamentale ordinaire répondant à l'idée primitive d'additivité; il traduit bien plutôt, par l'intermédiaire de l'idée de structure, des rapports qualitatifs qui tombent par ailleurs sous le contrôle de l'expérience. Les lois de l'univers physique sont des lois de probabilité, rigoureuses dans leur expression (qui est donnée à priori), mais séparées de l'expérience par une frange irréductible de contingence. On ne doit cependant pas tenir que cette contingence puisse être un point de bifurcation pour la conscience et pour la vie. Celles-ci résultent au contraire d'une corrélation introduite dans les comportements des différentes particules et qui s'oppose radicalement à l'indéterminisme des lois probables. Il faut donc associer liberté et détermination objective d'une part, matérialisme et contingence subjective d'autre part. Il existe bien des lois à la fois normatives et objectives; la physique ne fait, en les excluant, que restreindre son propre champ d'exploration.

Les deux derniers chapitres examinent les relations de la physique et du savoir humain considéré dans son ensemble. Ils se réclament du patronage de Kant et du positivisme logique dans la mesure ou un patronage quelconque peut être légitimement imposé à une philosophie qui s'efforce de se construire à partir des données de la physique. Si on ne veut ni verser dans le solipsisme ni réduire les connaissances humaines communes aux seules données de la physique (laquelle construit plutôt un développement logique de la pensée au sujet des phénomènes qu'elle ne donne prise sur eux), il est nécessaire d'admettre la communicabilité d'une connaissance sensible dont l'uniformité au moins approximative s'explique le plus simplement par une référence objective. L'uniformité des structures (objet de la science physique) nous avertit de l'originalité d'un autre type de connaissance auquel se trouve liée la perception de la conscience, et celle-ci, à son tour, discerne une requête d'objectivité dans la participation collective de la connaissance des particuliers. La synthèse de la connaissance humaine est un équilibre entre deux tendances complémentaires. D'une part, appréhension des structures qui ne suppose rien autre que la comparaison de données sensorielles semblables; c'est le type de connaissance propre à la physique, entièrement dominé par la relation; en particulier, l'idée d'identité se retrouve aussi bien au stade élémentaire de l'information sensible que dans l'universalité des structures; elle a pour rançon un subjectivisme radical que corrige, mais seulement du dehors, l'expérience; la conséquence immédiate de cette extériorité est le caractère probable des lois physiques. D'autre part, les mêmes données sensorielles, dans la mesure où elles n'entrent dans aucune systématisation, déclenchent l'éveil de la conscience personnelle et la certitude de l'existence d'autres consciences. L'accord tacite des perceptions conscientes équivaut à un décret d'objectivité qui n'est pas sans rapport avec l'universalité des structures; aussi chacune des deux épithètes subjectif ou objectif convient-elle partiellement à l'une et à l'autre des deux tendances qu'on vient d'indiquer. Cependant c'est à la connaissance consciente qu'il faut attribuer la priorité dans l'ordre de l'objectivité comme dans celui de la valeur. Le hasard dans lequel se jouent les lois physiques n'est pas, lui-même, une loi fondamentale de la physique. Il n'est qu'un résidu, une manière négative d'exprimer la rareté, dans l'univers actuel, de faits de corrélation qui traduisent la liberté.

Nous avons passé sur une critique assez amère du réalisme, assez sommaire également. Il nous est d'ailleurs impossible d'entreprendre ici la discussion de chacune des assertions de l'auteur : autant vaudrait refaire toute la philosophie. La discrétion qui conduit E. à réserver des types de savoir différents de la physique permet de retenir son effort dans sa partie constructive et dans son ordonancement général. Le point important est qu'il aboutit à un dualisme; et nous voilà du même coup beaucoup plus près du réalisme classique que de l'idéalisme; une similitude de structure l'emporte de très loin sur les divergences de thèses secondaires. Ce dualisme se retrouve dans la synthèse du savoir humain comme à l'intérieur de la physique : les deux couples objectivité-conscience et expérience-structure se répondent sans que leur balancement ait été calculé, et l'insistance avec laquelle l'expérience nous est présentée comme la « suprême Cour d'appel » du savoir physique nous prépare à discerner, dans un univers objectif, la régulation collective des consciences. La dialectique d'E. est assez différente de l'épistémologie qu'il discrédite plaisamment, mais force est de reconnaître que les conclusions essentielles ne sont pas tellement différentes, et que des affirmations catégoriques viennent, ici et là, interrompre la belle ordonance de la déduction. Nous devons en terminant dire un mot de ce qui nous paraît être l'écueil le plus grave du système d'E.; c'est non seulement un dualisme — ce qu'il faut bien accepter — c'est aussi une dualité. L'expérience et les structures sont, en physique, rigoureusement requis; comment ces éléments se raccordent-ils? La question n'est posée, en termes physiques comme il convient, mais au plan philosophique, qu'à la page 217 de l'ouvrage : « Comment se fait-il que la prédiction (inhérente à la loi) réussisse. La réponse (4 pages) est en substance : il y a un élément objectif dans les faits particuliers qui constituent une grande partie de notre connaissance de l'univers; et d'autre part ces faits particuliers (« special ») se voient attribués une large généralité ». Il est difficile de trouver là une réponse précise à la question sous jacente qui n'est rien moins que celle de la réalité des universels; les structures peuvent bien ne rejoindre l'expérience que d'une manière approchée, le problème philosophique de la prise du concept sur un quelque chose qui n'est pas lui demeure entier; il est complètement laissé de côté par E. qui se contente d'en affirmer disjonctivement les deux termes. On retrouverait d'ailleurs la même dualité entre la conscience et les faits particuliers objectifs. Ces deux éléments sont posés l'un et l'autre, et même l'un en regard de l'autre, la genèse psychologique de la conscience est évoquée, mais aucun effort de mise au point concernant la compénétration du moi et du non moi. Il n'appartient sans doute pas au physicien, même philosophe, de traiter ex professo le problème de la connaissance, mais E. laisse croire qu'il lui apporte une solution suffisante; le lecteur en est gêné : à défaut d'une visualisation proprement philosophique, il attend une correction des difficultés du kantisme ou de l'empirisme logique; or la systématisation d'E. ne fait qu'accuser ces difficultés en traduisant leurs conséquences dans un langage plus précis. C'est ce qui empêche de voir dans cet ouvrage une thèse qui s'impose; il a le très grand mérite de rendre actuels et vivants des problèmes qui dureront autant que le monde.

Le Saulchoir. M. L. G. des Lauriers, o. p.