CALCUL INTÉGRAL.

VINGT ET UNIÈME LEÇON.

INTÉGRALES DÉFINIES.

Supposons que, la fonction $y=f(x)$ étant continue par rapport à la variable x entre deux limites finies $x=x_0$, $x=\mathrm{X}$, on désigne par $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ de nouvelles valeurs de x interposées entre ces limites, et qui aillent toujours en croissant ou en décroissant depuis la première limite jusqu'à la seconde. On pourra se servir de ces valeurs pour diviser la différence $\mathrm{X}-x_0$ en éléments

$$(1) \qquad x_1-x_0, \quad x_2-x_1, \quad x_3-x_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{X}-x_{n-1}$$

qui seront tous de même signe. Cela posé, concevons que l'on multiplie chaque élément par la valeur de $f(x)$ correspondante à l'*origine* de ce même élément, savoir l'élément x_1-x_0 par $f(x)$, l'élément x_2-x_1 par $f(x_1)$, ..., enfin l'élément $\mathrm{X}-x_{n-1}$ par $f(x_{n-1})$; et soit

$$(2) \qquad \mathrm{S}=(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\ldots+(\mathrm{X}-x_{n-1})f(x_{n-1})$$

la somme des produits ainsi obtenus. La quantité S dépendra évidemment : 1° du nombre n des éléments dans lesquels on aura divisé la différence $\mathrm{X}-x_0$; 2° des valeurs mêmes de ces éléments et, par conséquent, du mode de division adopté. Or il importe de remarquer que, si les valeurs numériques des éléments deviennent très petites et le nombre n très considérable, le mode de division n'aura plus sur la valeur de S qu'une influence insensible. C'est, effectivement, ce que l'on peut démontrer comme il suit.

Si l'on supposait tous les éléments de la différence $X - x_0$ réduits à un seul qui serait cette différence elle-même, on aurait simplement

$$S = (X - x_0) f(x_0). \tag{3}$$

Lorsque, au contraire, on prend les expressions (1) pour éléments de la différence $X - x_0$, la valeur de S, déterminée dans ce cas par l'équation (2), est égale à la somme des éléments multipliée par une moyenne entre les coefficients

$$f(x_0), \quad f(x_1), \quad f(x_2), \quad \ldots, \quad f(x_{n-1})$$

[*voir*, dans les préliminaires du *Cours d'Analyse*, le corollaire du théorème III (¹)]. D'ailleurs, ces coefficients étant des valeurs particulières de l'expression

$$f[x_0 + \theta(X - x_0)]$$

qui correspondent à des valeurs de θ comprises entre zéro et l'unité, on prouvera, par des raisonnements semblables à ceux dont nous avons fait usage dans la septième Leçon, que la moyenne dont il s'agit est une autre valeur de la même expression, correspondante à une valeur de θ comprise entre les mêmes limites. On pourra donc à l'équation (2) substituer la suivante

$$S = (X - x_0) f[x_0 + \theta(X - x_0)], \tag{4}$$

dans laquelle θ sera un nombre inférieur à l'unité.

Pour passer du mode de division que nous venons de considérer à un autre dans lequel les valeurs numériques des éléments de $X - x_0$ soient encore plus petites, il suffira de partager chacune des expressions (1) en de nouveaux éléments. Alors on devra remplacer, dans le second membre de l'équation (2), le produit $(x_1 - x_0) f(x_0)$ par

(¹) *Œuvres de Cauchy*, S. II, T. III, p. 28.

une somme de produits semblables, à laquelle on pourra substituer une expression de la forme

$$(x_1 - x_0) f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)],$$

θ_0 étant un nombre inférieur à l'unité, attendu qu'il y aura entre cette somme et le produit $(x_1 - x_0) f(x_0)$ une relation pareille à celle qui existe entre les valeurs de S fournies par les équations (4) et (3). Par la même raison, on devra substituer au produit $(x_2 - x_1) f(x_1)$ une somme de termes qui pourra être présentée sous la forme

$$(x_2 - x_1) f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)],$$

θ_1 désignant encore un nombre inférieur à l'unité. En continuant de la sorte, on finira par conclure que, dans le nouveau mode de division, la valeur de S sera de la forme

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} S = {} & (x_1 - x_0) f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] \\ & + (x_2 - x_1) f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] + \ldots \\ & + (X - x_{n-1}) f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})]. \end{aligned} \right.$$

Si l'on fait dans cette dernière équation

$$\begin{aligned} f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] &= f(x_0) \pm \varepsilon_0, \\ f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] &= f(x_1) \pm \varepsilon_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})] &= f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}, \end{aligned}$$

on en tirera

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} S = {} & (x_1 - x_0)[f(x_0) \pm \varepsilon_0] + (x_2 - x_1)[f(x_1) \pm \varepsilon_1] + \ldots \\ & + (X - x_{n-1})[f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}], \end{aligned} \right.$$

puis, en développant les produits,

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} S = {} & (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}) \\ & \pm \varepsilon_0(x_1 - x_0) \pm \varepsilon_1(x_2 - x_1) \pm \ldots \pm \varepsilon_{n-1}(X - x_{n-1}). \end{aligned} \right.$$

Ajoutons que, si les éléments $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ..., $X - x_{n-1}$ ont des valeurs numériques très petites, chacune des quantités $\pm\varepsilon_0$, $\pm\varepsilon_1$, ..., $\pm\varepsilon_{n-1}$ différera très peu de zéro, et par suite il en sera de même de la somme

$$\pm\varepsilon_0(x_1-x_0)\pm\varepsilon_1(x_2-x_1)\pm\ldots\pm\varepsilon_{n-1}(X-x_{n-1}),$$

qui est équivalente au produit de $X-x_0$ par une moyenne entre ces diverses quantités. Cela posé, il résulte des équations (2) et (7) comparées entre elles qu'on n'altérera pas sensiblement la valeur de S calculée pour un mode de division dans lequel les éléments de la différence $X-x_0$ ont des valeurs numériques très petites, si l'on passe à un second mode dans lequel chacun de ces éléments se trouve subdivisé en plusieurs autres.

Concevons à présent que l'on considère à la fois deux modes de division de la différence $X-x_0$, dans chacun desquels les éléments de cette différence aient de très petites valeurs numériques. On pourra comparer ces deux modes à un troisième tellement choisi que chaque élément, soit du premier, soit du second mode se trouve formé par la réunion de plusieurs éléments du troisième. Pour que cette condition soit remplie, il suffira que toutes les valeurs de x, interposées dans les deux premiers modes entre les limites x_0, X, soient employées dans le troisième, et l'on prouvera que l'on altère très peu la valeur de S en passant du premier ou du second mode au troisième, par conséquent en passant du premier au second. Donc, lorsque les éléments de la différence $X-x_0$ deviennent infiniment petits, le mode de division n'a plus sur la valeur de S qu'une influence insensible; et, si l'on fait décroître indéfiniment les valeurs numériques de ces éléments, en augmentant leur nombre, la valeur de S finira par être sensiblement constante ou, en d'autres termes, elle finira par atteindre une certaine limite qui dépendra uniquement de la forme de la fonction $f(x)$ et des valeurs extrêmes x_0, X attribuées à la variable x. Cette limite est ce qu'on appelle une *intégrale définie*.

Observons maintenant que, si l'on désigne par $\Delta x = h = dx$ un accroissement fini attribué à la variable x, les différents termes dont se compose la valeur S, tels que les produits

$$(x_1 - x_0) f(x_0), \quad (x_2 - x_1) f(x_1), \quad \ldots$$

seront tous compris dans la formule générale

$$h f(x) = f(x)\,dx, \tag{8}$$

de laquelle on les déduira l'un après l'autre, en posant d'abord

$$x = x_0 \quad \text{et} \quad h = x_1 - x_0,$$

puis

$$x = x_1 \quad \text{et} \quad h = x_2 - x_1, \quad \ldots .$$

On peut donc énoncer que la quantité S est une somme de produits semblables à l'expression (8), ce qu'on exprime quelquefois à l'aide de la caractéristique Σ, en écrivant

$$S = \Sigma h f(x) = \Sigma f(x) \Delta x. \tag{9}$$

Quant à l'intégrale définie vers laquelle converge la quantité S, tandis que les éléments de la différence $X - x_0$ deviennent infiniment petits, on est convenu de la représenter par la notation $\int h f(x)$ ou $\int f(x)\,dx$, dans laquelle la lettre $\int$, substituée à la lettre Σ, indique, non plus une somme de produits semblables à l'expression (8), mais la limite d'une somme de cette espèce. De plus, comme la valeur de l'intégrale définie que l'on considère dépend des valeurs extrêmes x_0, X attribuées à la variable x, on est convenu de placer ces deux valeurs, la première au-dessous, la seconde au-dessus de la lettre $\int$, ou de les écrire à côté de l'intégrale, que l'on désigne en conséquence par l'une des notations

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx, \quad \int f(x)\,dx \begin{bmatrix} x_0 \\ X \end{bmatrix}, \quad \int f(x)\,dx \begin{bmatrix} x = x_0 \\ x = X \end{bmatrix}. \tag{10}$$

La première de ces notations, imaginée par M. Fourier, est la plus simple. Dans le cas particulier où la fonction $f(x)$ est remplacée par une quantité constante a, on trouve, quel que soit le mode de division de la différence $X - x_0$,

$$S = a(X - x_0),$$

et l'on en conclut

$$\int_{x_0}^{X} a\,dx = a(X - x_0). \tag{11}$$

Si, dans cette dernière formule, on pose $a = 1$, on en tirera

$$\int_{x_0}^{X} dx = X - x_0. \tag{12}$$